رياضيات-الصف التاسع-نظامي+أحرار
شروحات كتاب الجبر

تمرينات ومسائل

صفحة 30

الوحدة الأولى

حل تمرينات ومسائل

الوحدة الأولى من كتاب الجبر صفحة 30

- حل بيدك اولا ثم تأكد من صحة حلك بمقارنته بالحل الوارد في هذا الملف .

تحذير

إياك أن تقرأ الحلول بدون كتابتها

١- في كل حالة آتية هناك إجابة واحدة صحيحة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها:

$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$ يساوي:

$\frac{20}{48}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{6}{12}-\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{-1}{12}$$

مساحة قرص دائري نصف قطره $5\ cm$ تساوي $25\ \pi\ cm^2$ ، هذه المساحة هي:

عدد غير عادي	عدد عادي	عدد عشري

العدد يحوي π هو عدد غير عادي

لأن صورته العشرية غير منتهية وغير دورية

القاسم المشترك الأكبر للعددين 36 و 63 هو:

3	9	12

يمكن إيجادهُ ذهنياً كون الأعداد صغيرة،وإن لم تستطع ذلك فقم

باتباع إحدى الخوارزميات التي تعلمتها في إيجاد القاسم المشترك الأكبر لهما.

- القاسم المشترك الأكبر للعددين 126 و 252 هو:

3	9	126

لاحظ بأن العدد 126 يقسم العدد 256 فهو القاسم المشترك الأكبر لهما حسب الخاصة:

$$GCD(a,b) = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b \text{ قاسم لـ } a \\ a \text{ مضاعف لـ } b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow GCD(252, 126) = 126$$

- أي الكسور الآتية مختزل:

$\frac{224}{330}$ $\frac{17}{35}$ $\frac{378}{465}$

$\frac{224}{330}$ كل من البسط و المقام يقبل القسمة على 2 مثلاً و بالتالي فالكسر غير مختزل.

$\frac{378}{465}$ كل من البسط و المقام يقبل القسمة على 3 مثلاً و بالتالي فالكسر غير مختزل.

$\frac{17}{35}$ لا يوجد عدد يقبل كل من البسط و المقام القسمة عليه سوى الواحد و بالتالي فالكسر مختزل.

حيث حداه عددان أوليان فيما بينهما

♦ **الكسـر المختزل:** نقول عن الكسـر $\frac{a}{b}$ أنه كسـر مختزل إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\frac{a}{b} \text{ كسر مختزل } \Leftrightarrow GCD(a,b) = 1$$

- العدد $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

صحيح | عادي غير صحيح | غير عادي

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2^2})}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\text{خواص القوى} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

- العدد $\sqrt{300} - \sqrt{75} + \sqrt{12}$ يساوي:

$3\sqrt{3}$ | $-3\sqrt{3}$ | $-3\sqrt{5}$

$$\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{300} =$$
$$\sqrt{4 \times 3} + \sqrt{25 \times 3} - \sqrt{100 \times 3} =$$
$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$$

- عند حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 3105 و 920 باستعمال خوارزمية الطرح المتتالي نجد نواتج الطرح:

2185 ,1265 , 345 ,575 , 230 , 115 ,0

345 ,230 , 115 ,0

1265 , 390 ,95 , 10 , 5 ,0

طبق خوارزمية الطرح المتتالي لتحصل على نواتج الطرح المشار إليها

- باستعمال خوارزمية إقليدس القاسم المشترك الأكبر هو :

أول باق غير معدوم نحصل عليه

آخر باق غير معدوم نحصل عليه

آخر خارج قسمة غير معدوم نحصل عليه.

- القاسم المشترك الأكبر للعددين 942 , 774 هو 2 , 6 , 5

ناقش الخيارات المقترحة ستجد $GCD(942,774)=6$

أو، جده بتطبيق إحدى الخوارزميات

٢-في كل حالة من الحالات الآتية ،إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات ، أشر إلى كل إجابة صحيحة.

- $\frac{6}{5} \div \left(\frac{1}{15}-\frac{1}{3}\right)$ يساوي:

$\frac{-9}{2}$, $\frac{-4}{15} \times \frac{5}{6}$ $\frac{6}{5} \times \frac{-15}{4}$,

$$\frac{6}{5} \div \left(\frac{1}{15}-\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{5} \div \left(\frac{1}{15}-\frac{5}{15}\right)=\frac{6}{5} \div \left(\frac{-4}{15}\right)=$$

$$\frac{6}{5} \times \left(\frac{-15}{4}\right)=\frac{-9}{2}$$

الجواب الصحيح هو الأول و الثالث.

$\frac{4}{7} \times \frac{21}{2} - \frac{1}{2}$ هو عدد

عشري   عادي   غير عشري

$$\frac{1}{2}-\frac{21}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{1}{2}-\frac{42}{7}=\frac{1}{2}-6=-\frac{11}{2}$$

و هو عدد عشري و عادي .

$\frac{16}{9} \times \frac{3}{4}$ هو عدد

عشري   عادي   غير عشري

$$\frac{3}{4}\times\frac{16}{9}=\frac{4}{3}$$

و هو عدد عادي و غير عشري

ارتفاع مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $3\ cm$ يساوي

$\frac{3\sqrt{3}}{4}\ cm$, $\sqrt{\frac{27}{4}}\ cm$, $2.598\ cm$

طول ضلع هذا المثلث هو $l = 3\ cm$; $\boxed{h = \frac{l\sqrt{3}}{2}}$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3^2}\times\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{9\times 3}}{\sqrt{2^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{27}{4}}\,cm\approx 2.598\ cm$$

- القاسم المشترك الأكبر للعددين 107 و 45 يساوي:
القاسم المشترك الأكبر للعددين 107 و 62
القاسم المشترك الأكبر للعددين 107 و 45 × 107
الواحد.

$$45, 107 \in \mathbb{N}$$

$$GCD(a,b) = GCD(b, a-b)$$

$$= GCD(a, a-b); a > b \Rightarrow$$

$$GCD(107,45) = GCD(107, 107-45)$$

$$= GCD(107, 62) = 1$$

$$GCD(\underline{107} \times 45, \underline{107}) = 107 \neq 1$$

٣-قل إن كنت موافق أو غير موافق على الادعاء الآتي و اشرح رأيك:

$\frac{5}{13}$ عدد عشري

غير موافق: هو عدد عادي غير عشري لأن المقام لا نستطيع

جعله $10, 100, 1000, \ldots$ أي لا يُكتب $a \times 10^{n}; a, n \in \mathbb{Z}$

0.25 عدد عادي

موافق : لأن صورته العشرية منتهية أو تقول

من الشكل $\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$ $0.25 = \frac{25}{100}$

$\pi \times \frac{2}{\pi} + \frac{1}{3}$ عدد غير عادي

غير موافق: $\pi \times \frac{2}{\pi} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

و هو عدد عادي

$\frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$

موافق : $\frac{7}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$

العددان 60 و 120 لهما نفس العدد من القواسم.

غير موافق: فالـ 120 يقبل القسمة على 60 فله جميع قواسمه و يضاف إليها الـ 120 و 8 و غيرها..

15 هو قاسم مشترك للعددين 45 و 60 إذاً 15 يقسم 105 أيضاً

موافق : لأن القاسم المشترك الأكبر لعددين يقسم مجموعهما وفرقهما أيضا

$$GCD(60,45) = 15 \quad ,60 + 45 = 105 \Rightarrow \frac{105}{15} \epsilon \mathbb{Z}$$

a و b يرمزان إلى عددين صحيحين موجبين تماماً ، إذا كان b قاسماً للعدد a ، كان b القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

موافق : وهي إحدى خواص القاسم المشترك الأكبر التي تعلمناها

القاسم المشترك الأكبر للعدد 127 و أحد مضاعفات العدد 7 يمكن أن يكون العدد 7. غير موافق:

لا يمكن ذلك فالـ 7 ليس من قواسم 127 (عدد أولي)

نصف $\sqrt{36}$ يساوي $\sqrt{18}$

غير موافق: $\frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \neq \sqrt{18}$

$\frac{12\ 11\ 10\ 987654321}{123456789\ 10\ 11\ 12}$ كسر مختزل (اجمع الأعداد من 1 حتى 12)

غير موافق:

مجموع رقميه من مضاعفات العدد 3

$1 + 2 + 3 \ldots \ldots + 11 + 12 = 78$

كل من البسط و المقام يقبل القسمة على 3

و بالتالي فالكسر غير مختزل.

٤- لدينا الأعداد الآتية

$$\frac{5}{7} \div \frac{-10}{3}\ ,\quad \frac{4}{3} \div \frac{2}{3},\quad 3 \times \frac{20}{9}\ ,\frac{7}{5} \times \frac{-15}{7}$$

احسب ناتج كل منها بصيغة كسر ، ثم حدد أي من النواتج التي حصلنا عليها عدد صحيح.

$$\star\ \frac{7}{5} \times \frac{-15}{7} = -\frac{15}{5} = -3 \in \mathbb{Z}$$

$$\star\ 3 \times \frac{20}{9} = \frac{20}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$\star\ \frac{4}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{Z}$$

$$\star\ \frac{5}{7} \div \frac{-10}{3} = \frac{5}{7} \times \left(-\frac{3}{10}\right) = -\frac{3}{14} \notin \mathbb{Z}$$

٥-جميع الأعداد الآتية عشرية ما عدا واحداً منها . اشرح لماذا؟

$$A = \frac{153}{10}\ , B = -\frac{7}{4}, C = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}, D = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$\star\ A = \frac{153}{10} = 153 \times 10^{-1} \xleftrightarrow{\in D} a \times 10^{n}; a, b \in \mathbb{Z}$$

$$\star\ B = -\frac{7}{4} = -\frac{175}{100} = -175 \times 10^{-2} \xleftrightarrow{\in D} a \times 10^{n}; a, b \in \mathbb{Z}$$

$$\star\ C = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 5 \times 10^{-1} \xleftrightarrow{\in D} a \times 10^{n}; a, b \in \mathbb{Z}$$

$$\star\ D = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = -\frac{1}{6} \xleftrightarrow{\notin D} \neq a \times 10^{n}; a, b \in \mathbb{Z}$$

وتستطيع الاعتماد على الصورة العشرية في الوصول إلى المطلوب

٦- عبرعن كل من الجمل الثلاث الآتية بصيغة (العدد ...قاسم للعدد...)

75 مضاعف للعدد 15

العدد 15 قاسم للعدد 75

12 يقسم 24

العدد 12 قاسم للعدد 24

35 يقبل القسمة على 7

العدد 7 قاسم للعدد 35

٧-حسبت سلمى ثلاثة أمثال $\sqrt{5}$

نصف $\sqrt{18}$

مثلي جداء العددين $\sqrt{2}$ و $\sqrt{7}$

فكانت النواتج:

$\sqrt{45}$

9

$\sqrt{234}$

قل مع التعليل إن كنت متفقاً مع هذه الإجابات أم لا.

$$\star\ 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{45} \checkmark$$

$$\star\ \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{\sqrt{9 \times 2}}{2} = \frac{\sqrt{9} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \neq 9$$

$$\star\ 2(\sqrt{7} \times \sqrt{2}) = 2\sqrt{7 \times 2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{14} = \sqrt{56} \neq \sqrt{234}$$

الإجابة الأولى فقط صحيحة.

٨-أنا عدد صحيح ، مربعي يساوي ثلاثة أمثال 12 و ليس لي جذر تربيعي ، فمن أنا؟ -6

بفرض هذا العدد x سيكون:

$$x^2 = 3 \times 12 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow$$

$$x = \begin{cases} +6 \\ -6 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

لا يوجد جذر تربيعي للعدد السالب 6− $x=-6$

٩-$ABCD$ مستطيل بعداه $AB = (\sqrt{5} + \sqrt{20})\ cm$ و $BC = (\sqrt{80} - \sqrt{45})\ cm$

احسب محيط هذا المستطيل

$$P = (AB + BC) \times 2 =$$
$$(\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{80} - \sqrt{45}) \times 2 =$$
$$(2\sqrt{5} + 2\sqrt{20} + 2\sqrt{80} - 2\sqrt{45})\ cm$$

ثم اكتبه بالصيغة $a\sqrt{5}$

$$P = (\sqrt{5} + \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{16 \times 5} - \sqrt{9 \times 5}) \times 2$$
$$= (\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5}) \times 2 = 8\sqrt{5}\ cm$$

تذكر.

محيط المستطيل = (الطول + العرض) 2

١٠- اعتمد على خواص قابلية القسمة لإعادة كل من الكسور الآتية إلى صيغة كسر مختزل.

لم يطلب الاعتماد على القاسم المشترك الأكبر لحدي الكسر... نتقيد بالمطلوب

$$a = \frac{90}{126}$$

$$a = \frac{90}{126} = \frac{45}{63} = \frac{5}{7}$$

حيث قسمنا كلاً من البسط و المقام على 2 ثم على 9

$$c = \frac{168}{264}$$

$$c = \frac{168}{264} = \frac{84}{132} = \frac{42}{66} = \frac{21}{33} = \frac{7}{11}$$

حيث قسمنا كلاً من البسط و المقام على 2 ثلاث مرات متتالية ثم على 3

$$b = \frac{495}{270}$$

$$b = \frac{495}{270} = \frac{99}{54} = \frac{11}{6}$$

حيث قسمنا كلاً من البسط و المقام على 5 ثم على 9

السؤال الحادي عشر :

التمرين الأول :

خوارزمية الطرح المتتالي :

الخطوة	الكبير a	الصغير b	الفرق $a-b$
1	357	204	153
2	204	153	51
3	153	51	102
4	102	51	51
5	51	51	0

نستنتج أن القاسم المشترك الأكبر للعددين هو 51 ، فالعددان غير أوليان فيما بينهما

خوارزمية إقليدس :

الخطوة	المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة
1	357	204	153
2	204	153	51
3	153	51	0

نستنتج أن القاسم المشترك الأكبر للعددين هو 51 ، فالعددان غير أوليان فيما بينهما

تذكر:

- خوارزمية الطرح المتتالي: القاسم المشترك الأكبر هو آخر ناتج طرح غير معدوم.
- خوارزمية إقليدس: القاسم المشترك الأكبر هو آخر باقي غير معدوم .
- يكون العددان أوليان فيما بينهما اذا كان القاسم المشترك الأكبر لهما يساوي ١

التمرين الثاني :

خوارزمية الطرح المتتالي :

الخطوة	الكبير	الصغير	الفرق
1	2463	1036	1427
2	1427	1036	391
3	1036	391	645
4	645	391	254
5	391	254	137
6	254	137	117
7	137	117	20
8	117	20	97
9	97	20	77
10	77	20	57
11	57	20	37
12	37	20	17
13	20	17	3
14	17	3	14
15	14	3	11
16	11	3	8
17	8	3	5
18	5	3	2
19	3	2	1
20	2	1	1
21	1	1	0

نستنتج أن القاسم المشترك الأكبر للعددين هو 1 ، فالعددان أوليان فيما بينهما

خوارزمية إقليدس :

الخطوة	المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة
1	2463	1036	391
2	1036	391	254
3	391	254	137
4	254	137	117
5	137	117	20
6	117	20	17
7	20	17	3
8	17	3	2
9	3	2	1
10	2	1	0

نستنتج أن القاسم المشترك الأكبر للعددين هو 1 ، فالعددان أوليان فيما بينهما .

السؤال الثاني عشر :

$A = 9\sqrt{7} - 2\sqrt{28} - 5\sqrt{63}$

$A = 9\sqrt{7} - 2\sqrt{4\times 7} - 5\sqrt{9\times 7}$

$A = 9\sqrt{7} - 4\sqrt{7} - 15\sqrt{7}$

$A = -10\sqrt{7}$

$B = \sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150}$

$B = \sqrt{4\times 6} + \sqrt{9\times 6} - \sqrt{25\times 6}$

$B = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 5\sqrt{6}$

$B = 0$

السؤال الثالث عشر :

1) $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

2) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\times 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

السؤال الرابع عشر :

محيط المربع = 4 × طول الضلع

$P = 4\,(\sqrt{20} + 1)$

$P = 4\sqrt{20} + 4$

$P = 8\sqrt{5} + 4$

محيط المستطيل = 2 × (الطول + العرض)

$P = 2\,(\sqrt{45} - 1 + \sqrt{5} + 3)$

$P = 2(\sqrt{45} + \sqrt{5} + 2)$

$P = 2(3\sqrt{5} + \sqrt{5} + 2)$

$P = 2(4\sqrt{5} + 2)$

$P = 8\sqrt{5} + 4$

نلاحظ أن محيط المربع يساوي محيط المستطيل

السؤال الخامس عشر :

1) $1 - (\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5})$

$= 1 - (\frac{1}{4} + \frac{3}{5})$

$= 1 - (\frac{5}{20} + \frac{12}{20})$

$= 1 - (\frac{17}{20})$

$= 1 - \frac{17}{20}$

$= \frac{20}{20} - \frac{17}{20}$

$= \frac{3}{20}$

2) نفرض أن مساحة قطعة الأرض التي يمتلكها الرجل x في عام 2012 باع ربعها أي $\frac{x}{4}$ أو $\frac{1}{4}\,x$ فبقي عنده $\frac{3x}{4}$ وفي عام 2013 باع أربع أخماس الباقي أي

$\frac{4}{5} \times \frac{3x}{4} = \frac{3x}{5}$

فبقي عنده : $x - (\frac{x}{4} + \frac{3x}{5})$

$= x - (\frac{5x}{20} + \frac{12x}{20})$

$= x - (\frac{17x}{20})$

$= \frac{20x}{20} - \frac{17x}{20}$

$\boxed{= \frac{3x}{20}}$ بقي لديه

$\frac{3x}{20} = 6 \longrightarrow$

$3x = 120$

$x = \frac{120}{3}$

$x = 40$

تذكر خطوات حل المعادلة

1) ننقل المعاليم إلى طرف والمجاهيل إلى طرف مع تغيير إشارة الحد المنقول. **ثم نجمع الحدود المتشابهه**

2) بعد تطبيق الخطوة الأولى سنحصل على معادلة من الشكل :

$ax = b$

هنا نقسم طرفي المعادلة على أمثال المجهول فنحصل على الحل المطلوب $x = \frac{b}{a}$

السؤال السادس عشر :

1) $\frac{22}{7} \simeq 3.142857$

$\frac{355}{113} \simeq 3.141593$

2) لإثبات أن الكسور السابقة بأبسط صورة يجب إثبات أن حدي الكسر أوليان فيما بينهما .

الخطوة	المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة
1	22	7	1
2	7	1	0

فالعددان $22\,,7$ أوليان فيما بينهما ، وبالتالي الكسر الأول مكتوب بأبسط صورة .

$GCD(22,7) = 1$

الخطوة	المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة
1	355	113	16
2	113	16	1
3	16	1	0

فالعددان $355\,,113$ أوليان فيما بينهما ، وبالتالي الكسر الثاني مكتوب بأبسط صورة .

$GCD(355,113) = 1$

السؤال السابع عشر :

1) $A = \frac{1530}{1360} - \frac{3}{8}$

الخطوة	المقسوم	المقسوم عليه	باقي القسمة
1	1530	1360	170
2	1360	170	0

نستنتج أن : $GCD\ (1530,1360) = 170$

$$\frac{1530}{1360} = \frac{1530 \div 170}{1360 \div 170} = \frac{9}{8}$$

$$2)\ A = \frac{1530}{1360} - \frac{3}{8} = \frac{9}{8} - \frac{3}{8}$$

$$A = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow A = \frac{3}{4} = \frac{75}{100}$$

$$\Rightarrow A = 0.75 = \underbrace{75 \times 10^{-2}}_{a \times 10^{n}}$$

A عدد عادي وهو عدد عشري لأنه يكتب بالشكل :

$A = 0.75$

$A = 75 \times 10^{-2}$

السؤال الثامن عشر :

1) لإثبات أن الشكل مربع يكفي إثبات أن : $AB = BC$

$AB = \sqrt{27} + \sqrt{3}$

$AB = 3\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$AB = 4\sqrt{3}\ cm$

$BC = \sqrt{48}$

$BC = \sqrt{16 \times 3}$

$BC = 4\sqrt{3}\ cm$

نلاحظ أن : $AB = BC = 4\sqrt{3}\ cm$

فالشكل $ABCD$ مربع (لأنه مستطيل تساوى بعداه)

2) المحيط : $P = 4 \times 4\sqrt{3}$

$P = 16\sqrt{3}\ cm$

المساحة : $S = (4\sqrt{3})^2$

$S = 16 \times 3$

$S = 48\ cm^2$

السؤال التاسع عشر :

1) الصفر ليس عدد أولي ، لأن له عدد غير منتهي من القواسم .

2) هي : $2 , 3 , 5 , 7$

3)

$$a = 2 \times 3 \times 5$$
$$b = 2^2 \times 5 \times 7$$

1) نعم العدد 2 قاسماً للعدد b

2) نعم العدد 6 قاسماً للعدد a لأنها ناتج ضرب قاسمين له ، حيث : $6 = 2 \times 3$

3) كلا العدد 7 ليس قاسماً للعدد a .

4) $GCD\,(a,b) = 2 \times 5 = 10$

أعداد صحيحة	7	10^5	$\frac{-48}{6}$							
أعداد عادية	10^{-2}	$\frac{27}{100}$	$\frac{5}{11}$	7	$\frac{-5}{2}$	10^5	$\frac{-1}{4}$	0.3	$\frac{-48}{6}$	$\frac{4}{3}$
أعداد عشرية	10^{-2}	$\frac{27}{100}$	7	$\frac{-5}{2}$	10^5	$\frac{-1}{4}$	0.3	$\frac{-48}{6}$		
أعداد غير عادية	$\frac{\pi}{4}$	25π								

تذكر:

كل عدد طبيعي هو عدد صحيح وعشري وعادي

كل عدد صحيح هو عشري وعادي

كل عدد عشري هو عدد عادي

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

نموذج اختبار شامل في الوحدة الأولى جبر

إن هذا الاختبار ماهو إلا عمل متمم للأسئلة التي وردت سابقا في الدروس .

فلتحقيق الفائدة المرجوه منه يجب عدم البدء فيه حتى الانتهاء الكامل من كل المعلومات المتعلقة بالدروس التي تم شرحها وإتقان حل الأسئلة التي تم ادرجها بعد كل درس سواء تدرب أو تحقق من فهمك أو أسئلة الدورات التي تم حلها .

وبعد ذلك حاول بحل هذا الاختبار دون الاطلاع على الحل المرفق به ، واخيرا صحح حلك بالقلم الأحمر وأشر الى أخطائك بشكل صريح وتعلم منها لعدم الوقوع بها مجددا

نموذج امتحاني شامل للوحدة الاولى/ جبر :

أولاً : أجب عن السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : فيما يلي هناك إجابة صحيحة واحدة فقط من بين ثلاثة إجابات مقترحة ، انقلها إلى ورقة إجابتك .

1) يُكتب العدد ((ضعفي $\sqrt{6}$)) بالصيغة $\sqrt{C}$ بالشكل التالي :					
A	$\sqrt{12}$	B	$\sqrt{24}$	C	$\sqrt{6}$
2) الكسر الغير مختزل من بين الكسور التالية :					
A	$\frac{54}{45}$	B	$\frac{11}{3}$	C	$\frac{21}{22}$
3) العدد $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$ هو عدد :					
A	عادي عشري	B	عادي غير عشري	C	غير عادي
4) العدد $\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^4$ هو عدد :					
A	عادي صحيح	B	عادي غير عشري	C	غير عادي

السؤال الثاني : أجب بكلمة صح أو خطأ على العبارات الآتية :

❶ كل عدد غير عادي هو عدد غير عشري

❷ إذا كان $GCD(a\,,b) = a$ فإن : $\frac{a}{b}$ عدد صحيح .

❸ العدد $\frac{\sqrt{9\pi\times4\pi}}{5\pi}$ هو عدد عادي غير عشري .

❹ ثلاثة أمثال $\sqrt{18}$ يساوي $3\sqrt{2}$.

ثانياً : أجب عن التمارين الخمسة الآتية : ((60 درجة لكل تمرين))

التمرين الأول بسط كلاً من الأعداد التالية ثم ضع كلاً منها في الحقل المناسب ضمن الجدول :

$$2\pi+5 \ ، \ \sqrt{\pi}\times10^{6}\times\frac{2}{\sqrt{\pi}} \ ، \ 2\pi\times\frac{1}{10\pi} \ ، \ \frac{\sqrt{18}}{4\sqrt{\sqrt{49}-5}} \ ، \ \frac{\sqrt{48}}{3\sqrt{3}} \ ، \ (\sqrt{2})^8 \ ، \ \frac{\pi}{4}$$

العدد العادي			العدد الغير عادي
العدد الصحيح	العدد العشري	العدد الدوري	

التمرين الثاني : ليكن لدينا العددان $A=\frac{693}{154}$ و $B=\frac{\sqrt{80}-\sqrt{45}}{2\sqrt{20}-2\sqrt{5}}$ والمطلوب :

❶ أوجد $GCD(693\,,154)$ باستخدام خوارزمية الطرح المتتالي ومن ثم اكتب الكسر المختزل المكافئ للكسر A

❷ هل العدد A عشري ؟ هل هو عادي ؟ علل إجابتك .

❸ اختزل العدد B .

❹ احسب ناتج $A-B$ ومن ثم بين طبيعة الناتج .

التمرين الثالث : $ABCD$ مستطيل بعداه : $AB=\sqrt{32}-\sqrt{18}$ ، $BC=\frac{2}{\sqrt{2}}$ والمطلوب :

❶ برهن أن $ABCD$ مربع .

❷ احسب محيطه واكتبه بالصيغة $\sqrt{C}$ ثم احصره بين عددين صحيحين متتاليين .

❸ برهن أن مساحته عدد طبيعي .

❹ عين مركز الدائرة المارة برؤوسه واحسب طول نصف قطرها .

التمرين الرابع : ليكن لدينا العدد $A = \frac{875}{1125} + \frac{5}{9}$ والمطلوب :

❶ أوجد $GCD(875\,,1125)$ باستخدام الخوارزمية الإقليدية ، ومن ثم اكتب الكسر المختزل للكسر $\frac{875}{1125}$.

❷ هل الكسر $\frac{5}{9}$ كسر مختزل ؟ علل إجابتك .

❸ اكتب العدد A بصورة كسر مختزل .

❹ هل العدد A عدد عشري ؟ هل هو عادي ؟ علل .

❺ برهن أن العدد A^{-1} عدد عشري واكتبه بالصيغة $a \times 10^{-n}$ ((حيث a عدد صحيح)) .

التمرين الخامس : بفرض لدينا العددين الآتيين $A = 2\sqrt{12} + \sqrt{27} - \frac{1}{2}\sqrt{48}$ و $B = 4\sqrt{\frac{3}{16}} - \frac{1}{2}\sqrt{108}$ والمطلوب :

❶ اكتب كلا العددين A و B بالصيغة $a\sqrt{3}$.

❷ جد ناتج كلاً من : $A + B$ ، $A - B$ ، $A \times B$.

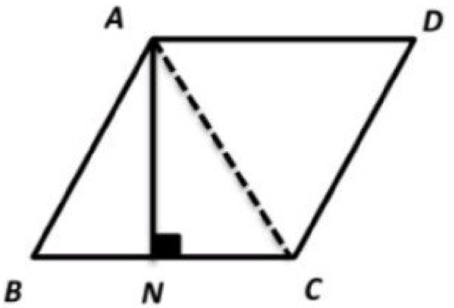
❸ اكتب العدد $A - B$ بالصيغة $\sqrt{C}$ ثم احصره بين عددين صحيحين متتاليين .

❹ برهن أن $\frac{A}{B}$ عدد عشري واكتبه بالصيغة $a \times 10^{-n}$.

❺ اكتب الكسر $\frac{A}{\sqrt{10}}$ بمقام خال من الجذر .

السؤال الثالث : حل المسألتين التاليتين

المسألة الأولى : $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $AB = \sqrt{18} + \sqrt{8} - \frac{3}{5}\sqrt{50}$ و $BC = \sqrt{72} - \sqrt{32}$ والمطلوب :



❶ برهن أن المتوازي $ABCD$ معين .

❷ احسب محيطه واكتبه بالشكل $\sqrt{C}$ ثم احصره بين عددين صحيحين متتاليين .

❸ بفرض أن $\widehat{B} = 60$ عندئذ :

★ برهن أن المثلث ABC متساوي الأضلاع .

★ احسب مساحته وطول ارتفاعه AN .

★ احسب مساحة المعين بطريقتين .

★ استنتج طول القطر $[BD]$.

المسألة الثانية : لدينا الأعداد التالية $N = \frac{\sqrt{108}}{2} - 2\sqrt{3}$ ، $M = \frac{6}{\sqrt{3}}$ ، $F = 2\sqrt{12} + \sqrt{147} - \frac{1}{3}\sqrt{27}$ والمطلوب:

❶ أزل الجذر من مقام الكسر M .

❷ اختزل العدد N .

❸ اكتب العدد $M + N$ ثم اكتبه بالصيغة $\sqrt{C}$ واحصره بين عددين صحيحين متتالين .

❹ اكتب العدد F بالصيغة $a\sqrt{b}$

-انتهت الاسئله

حل أسئلة الاختبار

أولاً: السؤال الأول:

1) $2\sqrt{6}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{6}=\sqrt{4\times6}=\sqrt{24}$

الإجابة B.

2) $\frac{54}{45}$ كسر غير مختزل، حداه يقبلان القسمة على 9 مثلاً.

الإجابة A

3) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{2}{3}\in Q$

الإجابة B.

4) $\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^4=\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{4}{2}}=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$

عدد صحيح وعدد عادي

الإجابة A.

أولاً: السؤال الثاني:

1) عبارة صحيحة

كل عدد لا ينتمي إلى المجموعة الأكبر فهو حتماً لا ينتمي إلى المجموعة الأصغر منه.

- فكل عدد صورته العشرية غير منتهية وغير دورية هو عدد غير عادي وغير عشري $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ...$

2) عبارة خاطئة:

$GCD(a,b)=a \Leftrightarrow$ a قاسم لـ b

b مضاعف لـ a

ومنه $\frac{b}{a}$ عدد صحيح أما $\frac{a}{b}$ غير صحيح

3) عبارة خاطئة:

$\frac{\sqrt{9\pi\times4\pi}}{5\pi}=\frac{\sqrt{36\pi^2}}{5\pi}=\frac{6\pi}{5\pi}=\frac{6}{5}$

$=\frac{12}{10}=1.2$ عدد عادي وعشري

4) عبارة خاطئة:

$3\sqrt{18}=3\sqrt{9\times2}=9\sqrt{2}$

ثانياً: التمرين الأول:

* $\frac{\pi}{4}$ عدد غير عادي

* $\left(\sqrt{2}\right)^8=2^{\frac{8}{2}}=2^4=16$ عادي، صحيح، عشري

* $\frac{\sqrt{48}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{16\times3}}{3\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{3}$

عدد عادي دوري (صورته العشرية غير منتهية ودورية)

* $\frac{\sqrt{18}}{4\sqrt{\sqrt{49}-5}}=\frac{\sqrt{9\times2}}{4\sqrt{7-5}}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$ عادي، عشري

* $2\pi\times\frac{1}{10\pi}=\frac{2}{10}$ عادي، عشري

* $\sqrt{\pi}\times\frac{2}{\sqrt{\pi}}\times10^6=2\times10^6$ صحيح، عادي، عشري

* $2\pi+5$ غير عادي

ثانياً: التمرين الثاني:

1)

الأكبر a	الأصغر b	الفرق a - b
693	154	539
539	154	385
385	154	231
231	154	77
154	77	$\boxed{77}$
77	77	0

برهن: القاسم المشترك الأكبر هو ٣ ضرب ناتج
طرح غير معدوم: $GCD(693,154)=77$

لإيجاد الكسر المختزل المكافئ للكسر $\frac{693}{154}$
نقسم حديه على $GCD(693,154)=77$
نجد:

$$\frac{693}{154}=\frac{693\div 77}{154\div 77}=\frac{9}{2}$$

2) • $A=\frac{9}{2}$ هو عدد عادي لأنه من الشكل
$\frac{a}{b}\ ;\ a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{N},\ b\neq 0$
(أو نقول صورته العشرية منتهية $\frac{9}{2}=4.5$)

• $A=\frac{9}{2}$ هو عدد عشري لأنه يكتب:
$\frac{9}{2}=\frac{45}{10}=\underbrace{45\times 10^{-1}}_{a\times 10^{n}\ ;\ a,n\in\mathbb{Z}}$
(أو نقول صورته العشرية منتهية $\frac{9}{2}=4.5$)

3)

$$B=\frac{\sqrt{80}-\sqrt{45}}{2\sqrt{20}-2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{16\times 5}-\sqrt{9\times 5}}{2\sqrt{4\times 5}-2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{4\sqrt{5}-3\sqrt{5}}{4\sqrt{5}-2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$$

4)

$$A-B=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=\frac{9-1}{2}$$

$$=\frac{8}{2}=4\in\mathbb{N}$$ طبيعي

ثانياً: التمرين الثالث:

$ABCD$ مستطيل بعداه:
$AB=\sqrt{32}-\sqrt{18}\ ,\ BC=\frac{2}{\sqrt{2}}$

1)
$\star\ AB=\sqrt{32}-\sqrt{18}$
$=\sqrt{16\times 2}-\sqrt{9\times 2}=4\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\sqrt{2}$

$\star\ BC=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

نلاحظ أن بعدا المستطيل متساويان فهو مربع طول ضلعه $\ell=\sqrt{2}$

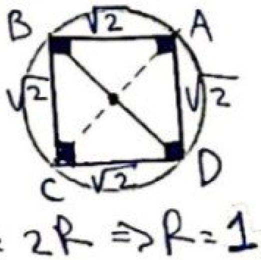
2) محيط المربع: $P=4\ell=4\sqrt{2}$
$=\sqrt{4^2}\times\sqrt{2}=\sqrt{16\times 2}=\sqrt{32}$

$25<32<36\Rightarrow$
$\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}\Rightarrow$
$5<\sqrt{32}<6$

3) مساحة المربع $S=\ell^2=(\sqrt{2})^2=2$
والعدد $2\in\mathbb{N}$ طبيعي.

4) مركز الدائرة المارة برؤوس المربع كما نعلم هي نقطة تلاقي قطريه (المتساويان)

- نحسب بداية طول قطر المربع الذي هو قطر في الدائرة، وذلك حسب فيثاغورث من المثلث القائم ABD فنجد



$(BD)^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2$
$=2+2=4$
$\Rightarrow BD=\sqrt{4}=2=2R\Rightarrow R=1$

(أو باختصار: طول قطر المربع هو $\ell\sqrt{2}$ أي $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$)

ثانياً: التمرين الرابع:

$$A = \frac{875}{1125} + \frac{5}{9}$$

(1)

$$1125 = 1 \times 875 + 250$$

$$875 = 3 \times 250 + \boxed{125}$$

$$250 = 2 \times 125 + 0$$

ومنه القاسم المشترك هو آخر باقي غير معدوم.

$$GCD(1125 , 875) = 125$$

- لكتابة الكسر المختزل للكسر $\frac{875}{1125}$ نقسم حديه على القاسم المشترك لهما 125 نجد:

$$\frac{875}{1125} = \frac{875 \div 125}{1125 \div 125} = \frac{7}{9}$$

(2) نعم الكسر $\frac{5}{9}$ هو كسر مختزل لأن كلاً من حديه أوليان فيما بينهما أي:

$$GCD(9 , 7) = 1$$

(3)

$$A = \underbrace{\frac{875}{1125}}_{} + \frac{5}{9}$$

$$= \frac{7}{9} + \frac{5}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

(4) العدد $A = \frac{4}{3}$ هو عدد عادي لأنه من الشكل $\frac{a}{b} ; a \in \mathbb{Z} , b \in \mathbb{N} , b \neq 0$ ولكنه غير عشري لأننا لا نستطيع كتابته بالشكل:

$$a \times 10^{n} ; a , n \in \mathbb{N}$$

أو نقول لأن $\frac{4}{3} = 1.333....$ صورته العشرية غير منتهية.

(4) تذكر: $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$

ومنه:

$$A^{-1} = \frac{1}{A^{1}} = \frac{1}{A} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{75}{100} = \underbrace{75 \times 10^{-2}}_{a \times 10^{n} ; a , n \in \mathbb{Z}}$$ عدد عشري

ثانياً: التمرين الخامس:

$$A = 2\sqrt{12} + \sqrt{27} - \frac{1}{2}\sqrt{48}$$

$$B = 4\sqrt{\frac{3}{16}} - \frac{1}{2}\sqrt{108}$$

(1)

$$* \ A = 2\sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3} - \frac{1}{2}\sqrt{16 \times 3}$$

$$= 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$* \ B = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}} - \frac{1}{2}\sqrt{36 \times 3}$$

$$= \sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

(2)

$$* \ A + B = 5\sqrt{3} + (-2\sqrt{3})$$

$$= 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$* \ A - B = 5\sqrt{3} - (-2\sqrt{3})$$

$$= 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

$$* \ A \times B = (5\sqrt{3})(-2\sqrt{3})$$

$$= -10(3) = -30$$

③ وجدنا : $A-B = 7\sqrt{3} = \sqrt{7^2} \times \sqrt{3}$

$\Rightarrow A-B = \sqrt{7^2 \times 3} = \sqrt{49 \times 3} = \sqrt{147}$

$144 < 147 < 169 \Rightarrow$

$\sqrt{144} < \sqrt{147} < \sqrt{169} \Rightarrow$

$12 < \sqrt{147} < 13$

④

$* \quad \dfrac{A}{B} = \dfrac{5\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} = -\dfrac{5}{2}$

$= -\dfrac{25}{10} = \underbrace{-25 \times 10^{-1}}$ عدد عشري

$a \times 10^n \; ; \; a, n \in \mathbb{Z}$

⑤ نضرب حدي الكسر بالجذر الموجود في المقام نجد:

$\dfrac{A}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10} \times A}{10}$

$= \dfrac{\sqrt{10} \times 5\sqrt{3}}{10} = \dfrac{5\sqrt{30}}{10}$

$= \dfrac{\sqrt{30}}{2}$

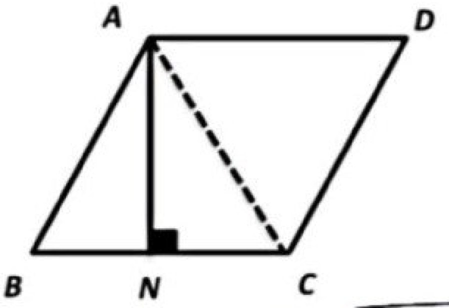
- المسألة الأولى:

ABCD متوازي أضلاع:

$AB = \sqrt{18} + \sqrt{8} - \dfrac{3}{5}\sqrt{50}$

$BC \quad \sqrt{72} - \sqrt{32}$

① [المعين : هو متوازي أضلاع تساوى فيه ضلعين متجاورين فإن استطعنا إثبات أن $AB = BC$ يتم المطلوب]



$* \; AB = \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{4 \times 2} - \dfrac{3}{5}\sqrt{25 \times 2}$

$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \dfrac{3 \times 5}{5}\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$* \; BC = \sqrt{36 \times 2} - \sqrt{16 \times 2}$

$= 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$

ABCD متوازي أضلاع فيه ضلعين متجاورين متساويين $(AB = BC)$ فهو معين أي جميع أضلاعه متساوية وطول كل منها $\ell = 2\sqrt{2}$

② محيط المعين $P = 4\ell$

$P = 4(2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2} = \sqrt{8^2} \times \sqrt{2}$

$= \sqrt{64 \times 2} = \sqrt{128}$

$121 < 128 < 144 \Rightarrow$

$11 < \sqrt{128} < 12$

③ ABC* متساوي الساقين في B لأن:

$AB = BC = 2\sqrt{2}$

فيه زاوية $B = 60^\circ$ فهو متساوي الأضلاع

* مساحته تعطى بالدستور:

$S = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$; ℓ طول ضلعه

$S = \dfrac{(2\sqrt{2})^2 \times \sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$ وحدة مساحة.

وطول كل ارتفاع في المثلث المتساوي الأضلاع يُعطى بالدستور:

$$h = AN = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$ ، ℓ طول ضلعه

$$= \frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$ وحدة طول

* مساحة المعين:

(لم نعرف جداء قطريه، لكن القطر الآخر غير معلوم)

- طريقة أولى: مساحة متوازي الأضلاع هي

$S_{ABCD} =$ القاعدة $\times$ الارتفاع المتعلق بها

وهي ذاتها مساحة المعين هنا، لأننا كما قد أثبتنا أن المتوازي الأضلاع $ABCD$ هو معين أيضاً:

$$S = \underbrace{BC}\times\underbrace{AN}$$

$$= 2\sqrt{2}\times\sqrt{6} = 2\sqrt{12}$$

$$= 2\times 2\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3}$$ وحدة مساحة

- طريقة ثانية: المعين قُسم إلى مثلثين طبوقيين هما ABC ، ACD ومساحة كل منهما سبق وجدنا $2\sqrt{3}$ ومنه:

$$S_{ABCD} = S_{ABC}\times 2 = 2(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$ وحدة مساحة.

* استنتاج طول القطر $[BD]$.

نعلم أن: مساحة المعين هي:

$$\underbrace{S_{ABCD}} = \frac{\text{جداء قطريه}}{2} = \frac{[AC]\cdot[BD]}{2}$$

$$4\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{2}\times[BD]}{2} \Rightarrow [BD] = 2\sqrt{6}$$ وحدة طول.

المسألة السابعة:

① $$M = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

② $$N = \frac{\sqrt{108}}{2} - 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

③ $$M + N = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$$

$$25 < 27 < 36 \Rightarrow$$

$$5 < \sqrt{27} < 6$$

④ $$F = 2\sqrt{12} + \sqrt{147} - \frac{1}{3}\sqrt{27}$$

$$= 2\sqrt{4\times3} + \sqrt{49\times3} - \frac{1}{3}\sqrt{9\times3}$$

$$= 4\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$= 10\sqrt{3}$$