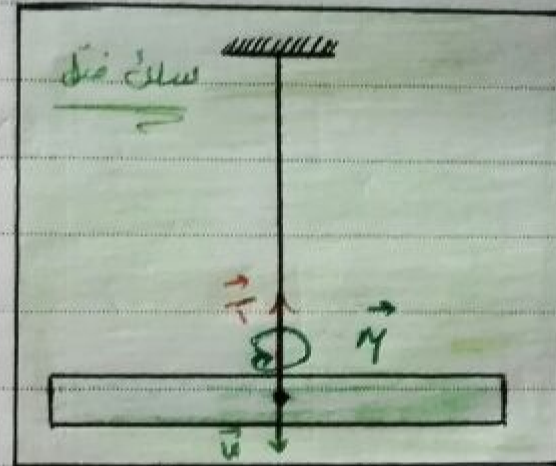
- الحركة التوافقية البسيطة ...
- الحركة الجيبية الدورانية ...

★ النواس الفتل :



$K \propto \frac{1}{\ell}$

$$K = K' \frac{(2r)^4}{\ell}$$

ثابت الفتل

قطر السلك

طول السلك

نوع المادة

تقل K :
باستخدام سلك رفيع طويل من الفضة.

★ $\ell' = 3\ell \Rightarrow K' = \frac{1}{3}K$

★ $\ell' = \frac{1}{2}\ell \Rightarrow K' = 2K$

★ تحريكية :

القوى المؤثرة : $\vec{W}$, $\vec{T}$, $\vec{N}$ مزدوجة الفتل

$$\Sigma \Gamma = I_\Delta \alpha$$

$$\Gamma_{\vec{W}} + \Gamma_{\vec{T}} + \Gamma_{\vec{N}} = I_\Delta \alpha$$

$\Gamma_{\vec{W}} = 0$, $\Gamma_{\vec{T}} = 0$ ← لأن $\vec{W}$ و $\vec{T}$ يلاقيان محور الدوران.

$$\Gamma_{\vec{N}} = -K\theta$$

$$0 + 0 - K\theta = I_\Delta \alpha$$

$$\alpha = -\frac{K}{I_\Delta}\theta$$

$$\alpha = (\theta)''_t$$

$$(\theta)''_t = -\frac{K}{I_\Delta}\theta \quad \text{--- (1)}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية حلها جيبي من الشكل :

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega = (\theta)'_t = -\omega_0 \theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\alpha = (\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta \quad \text{--- (2)}$$

بالمساواة بين (1) و (2) :

$$-\frac{K}{I_\Delta}\theta = -\omega_0^2 \theta$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} > 0$$

* k و I_Δ موجبتان إذاً ω_0 موجبة

حركة النواس الفتل جيبية دورانية ،

التابع الزمني للمطال الزاوي من الشكل العام :

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

* الدور الخاص T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

$T_0 \propto \frac{1}{\sqrt{k}}$ $\quad$ $T_0 \propto \sqrt{I_\Delta}$

ليس للدور علاقة θ_{max}

* تغيير k :

$$k = k'\frac{(2r)^4}{l}$$

$l \rightarrow$ طول السلك

أي تغيير في السلك ⇐ تغيير k ⇐ تغيير T_0

$k \propto \frac{1}{l}$ $\quad$ $T_0 \propto \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\boxed{T_0 \propto \sqrt{l}}$$

طول السلك

* نواس فتل دوره T_0 طول سلكه l جعلنا طول سلكه ثلاث أضعاف ما كان عليه :

$$T_0' = \sqrt{3}\,T_0$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k'}}$$

$$l' = 3l \Rightarrow k' = \frac{k}{3}$$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{3I_\Delta}{k}}$$

$$\frac{T_0}{T_0'} = \frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{I_\Delta}{\cancel{k}}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{3I_\Delta}{\cancel{k}}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

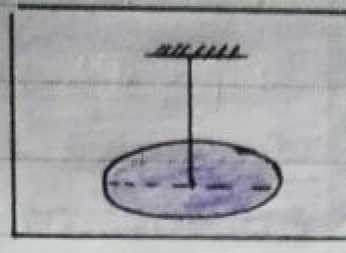
$$T_0' = \sqrt{3}\,T_0$$

Nehad S A B B A G H

2) قرص فقط

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta \rightarrow \text{قرص}}{k}}$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2} m r^2$$



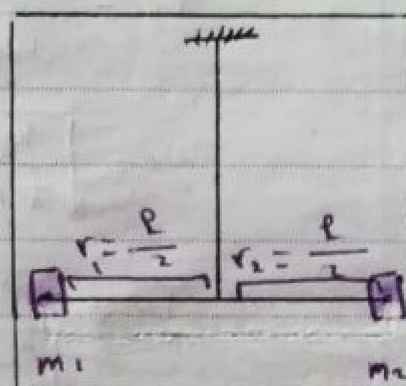
3) ساق مهملة الكتلة معلق بطرفيها كتلتين.

$m_1 = m_2$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta \rightarrow \text{جملة}}{k}}$$

$$\underset{\text{جملة}}{I_\Delta} = 2\underset{\text{كتلة}}{I_\Delta}$$

$$= 2m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2$$



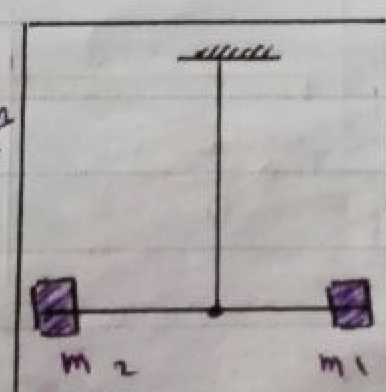
4) ساق + كتلتين

$m_1 = m_2$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta \rightarrow \text{جملة}}{k}}$$

$$\underset{\text{جملة}}{I_\Delta} = \underset{\text{ساق}}{I_\Delta} + 2\underset{\text{كتلة}}{I_\Delta}$$

$$\frac{1}{12} m l^2 + 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$



* نواس فتل دوره T_0 طول سلكه l قسمنا السلك الى قسمين متساويين و علقنا الساق بأحد السلكين.

$$T_0' = \frac{1}{\sqrt{2}} T_0$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k'}} \qquad l' = \frac{l}{2} \Rightarrow k' = 2k$$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{2k}}$$

$$\frac{T_0}{T_0'} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{2k}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$T_0' = \frac{1}{\sqrt{2}} T_0$$

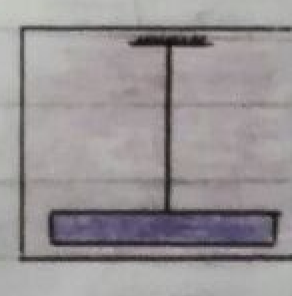
* تغيير I_Δ: عزم عطالة الجسم

- أي تغيير في الجسم المعلق ⟸
- تغيير I_Δ ⟸ تغيير T_0

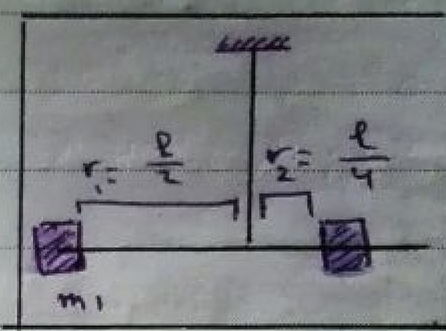
1) ساق فقط

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta \rightarrow \text{ساق}}{k}}$$

$$I_\Delta = \frac{1}{12} m l^2$$



$m_2 = 2m_1$



★ الميقاتية :

زاد الدور T_0 ⇐ قلت n ⇐ تؤخر الميقاتية

قل T_0 ⇐ زادت n ⇐ تسبق الميقاتية

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mr^2 l}{k'(2r^2)^4}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

زادت m ← زاد I_Δ ← زاد T_0

تقل n ← تؤخر

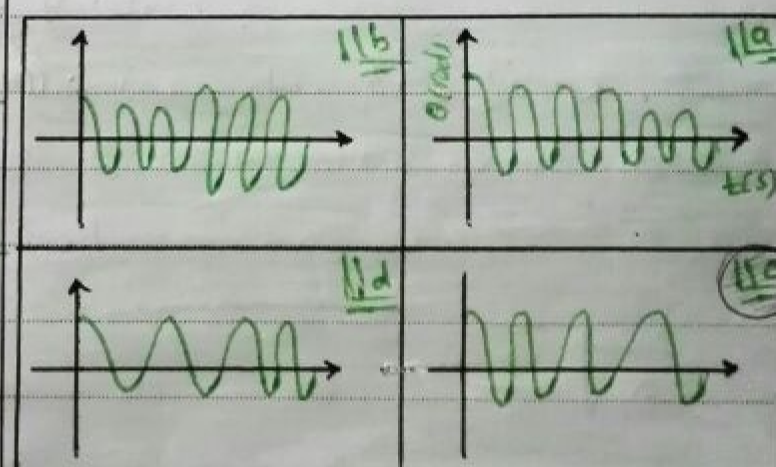
• الاهتزازات الجيبية الدورانية ..*.

• نواس الفتل غير المتخامد ..*.

*"أختبر نفسي" :

"أولاً" : اختر الإجابة الصحيحة :

*1 : يهتز نواس فتل بدور خاص T_0 ، في لحظة ما أثناء حركته انتقلت الحلقة عبر محور الدوران بالمقدار نفسه كما هو موضح بالشكل ، فالرسم البياني الذي يعبر عن تغير المطال مع الزمن في هذه الحالة هو :



*2 : مسابقة تتفق في عملها على نواس فتل كما في الشكل المجاور ولتصحيح التأخير الحاصل بالوقت فيها قدم الطلاب مقترحاتهم فإن الاقتراح الصحيح هو :

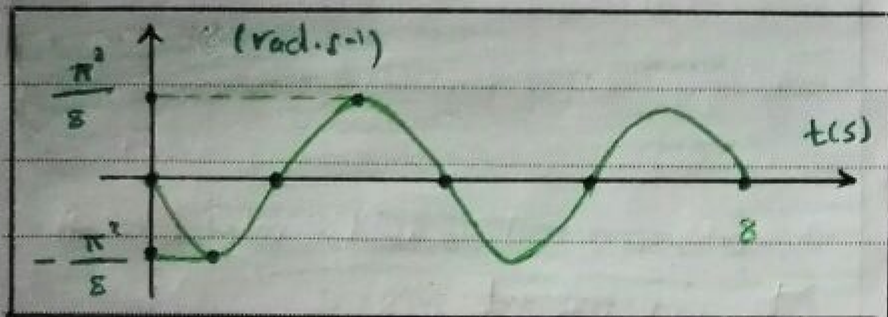
a. زيادة طول سلك الفتل بمقدار ضئيل .

b. " كتلة القرص مع المحافظة على قطره .

c. انقاص طول سلك الفتل بمقدار ضئيل .

d. زيادة قطر القرص مع المحافظة على كتلته .

*3 : يمثل الرسم البياني المجاور تغيرات السرعة الزاوية لنواس فتل بتغير الزمن ، فإن تابع السرعة الزاوية الذي يمثله هذا المنحني هو :



a. $\bar{\omega} = \frac{\pi^2}{8} \sin 3\pi t$

$\omega = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

b. $\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8} \sin 2\pi t$ — $\omega_0 \theta_{max} = \frac{\pi^2}{8}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, $\frac{8T_0}{4} = 8$

c. $\bar{\omega} = +\frac{\pi^2}{8} \sin \frac{\pi}{2} t$ — $\Rightarrow T_0 = 4\,s$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi\, rad.s^{-1}$

d. $\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8} \sin \frac{\pi}{2} t$ — $\omega = 0, t = 0$: بشروط البدء

$0 = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\varphi) \Rightarrow \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0\, rad$

"ثانياً" : أجب عن الأسئلة الآتية :

*1 : انطلاقاً من مصونية الطاقة الميكانيكية برهن أن حركة نواس الفتل حركة جيبية دورانية .

$E = E_k + E_p$

$E = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 + \frac{1}{2} k \theta^2$

$0 = \frac{1}{2} I_\Delta 2\omega (\omega)'_t + \frac{1}{2} k 2\theta (\theta)'_t$

$0 = I_\Delta \omega \alpha + k \theta \omega$

$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} > 0$

$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \cdot \theta$ ... ((2

بالمساواة بين ((1 و ((2 :

$-\frac{K}{I_\Delta}\theta = -\omega_0^2 \cdot \theta$

K و I_Δ موجبان ⇐ ω_0 موجبة عن حركة جيبية دورانية

$I_\Delta \alpha + K\theta = 0 \Rightarrow I_\Delta \alpha = -K\theta$

$\alpha = \frac{-K\theta}{I_\Delta}$

$\alpha = (\theta)''_t$

$(\theta)''_t = \frac{-K}{I_\Delta}\theta$ .... ((1

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية حلها جيبي من الشكل :

$\theta = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$(\theta)'_t = -\omega_0 \theta_{max} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

*2)) نعلق ساقين متماثلتين بسلكي فتل متماثلين طول الأول ℓ_1 وطول الثاني ℓ_2 فإذا علمت أن $T_{0_1} = 2T_{0_2}$

- أوجد العلاقة بين طولي السلكين .

ℓ_1 ℓ_2

T_{0_1} T_{0_2}

$T_{0_1} = 2T_{0_2}$

$T_{0_1} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K_1}}$

$K = K' \frac{(2r)^4}{\ell}$

$T_{0_1} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta \cdot \ell_1}{K'(2r)^4}} = Const\sqrt{\ell_1}$

$T_{0_2} = Const\sqrt{\ell_2}$

$\frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{Const\sqrt{\ell_1}}{Const\sqrt{\ell_2}} = \frac{2T_{0_2}}{T_{0_2}} = \frac{\sqrt{\ell_1}}{\sqrt{\ell_2}}$

نربع $4 = \frac{\ell_1}{\ell_2} \Rightarrow \ell_1 = 4\ell_2$

* "ثالثاً" : حل المسائل الآتية :

* في جميع المسائل "$4\pi = 12.5$, $\pi^2 = 10$, $g = 10 m.s^{-2}$"

* "المسألة الثالثة" :

*

- تتألف نواس فتل من قرص متجانس كتلته $m = 2kg$ نصف قطره $r = 4cm$ معلق من مركزه إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $K = 16 \times 10^{-3} m.N.rad^{-1}$ ندير القرص في مستوٍ أفقي زاوية $\theta = +\frac{\pi}{4} rad$ عن وضع توازنه ونتركه دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$. $\theta = \theta_{max}$

* المطلوب :

*1)) : احسب الدور الخاص للنواس .

$m = 2kg$, $r = 4 \times 10^{-2} m$, $\theta = \theta_{max}$

$K = 16 \times 10^{-3} m.N.rad^{-1}$, $\theta = \frac{\pi}{4} rad$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$

$I_\Delta = \frac{1}{2} m \cdot r^2 = \frac{1}{2}(2)(4 \times 10^{-2})^2$

$= 16 \times 10^{-4} kg.m^2$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{16 \times 10^{-4}}{16 \times 10^{-3}}} = 2 s$

*2)) : استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام .

$\theta = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\theta_{max} = \frac{\pi}{4}$ rad

$W_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ rad.s^{-1}$

من شروط البدء :

$t = 0 \quad , \quad \theta = \theta_{max}$

$\theta_{max} = \theta_{max} \cos \varphi$

$\cos \varphi = 1$

$\Rightarrow \varphi = 0$ rad

$\theta = \frac{\pi}{4} \cdot \cos(\pi t)$

*3)) : احسب الطاقة الكامنة في وضع مطاله الزاوي $\theta = \frac{\pi}{8}$ rad ثم احسب الطاقة الحركية عندئذ ((عزم عطالة قرص حول محور عمودي على مستويه ومار من مركزه $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} m r^2$)).

* $E_p = \frac{1}{2} k \theta^2$

$E_p = \frac{1}{2} (16 \times 10^{-3}) (\frac{\pi}{8})^2$

$= \frac{1}{2} (16 \times 10^{-3}) (\frac{10}{64}) = \frac{1}{8} \times 10^{-2}$ J

$E = \frac{1}{2} k \theta^2_{max} = \frac{1}{2} (16 \times 10^{-3}) (\frac{\pi}{4})^2$

$= \frac{1}{2} \times 10^{-2}$ J

$E = E_k + E_p$

$E_k = E - E_p$

$= \frac{1}{2} \times 10^{-2} - \frac{1}{8} \times 10^{-2}$

$E_k = \frac{3}{8} \times 10^{-2}$ J.

* المسألة الثانية :

- ساق مهملة الكتلة طولها L، نثبت في كل من طرفيها كتلة نقطية 125g ونعلق الجملة من منتصفها إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله 16×10^{-3} m.N.rad^{-1} لتؤلف الجملة نواس فتل نزيح الساق عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad ونتركه دون سرعة ابتدائية لحظة بدء الزمن فتهتز بحركة جيبية دورانية دورها الخاص 2.5 s.

* المطلوب :

*1)) : استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام.

$m = 125 \times 10^{-3}$ kg , $k = 16 \times 10^{-3}$ m.N.rad^{-1}

$\theta = \frac{\pi}{3}$ rad , $T_0 = 2.5$ s , $\theta = \theta_{max}$

$\theta = \theta_{max} \cdot \cos(W_0 t + \varphi)$

$W_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{5}{2}} = \frac{4\pi}{5} \ rad.s^{-1}$

من شروط البدء : $\theta = \theta_{max} \ , \ t = 0$

$\theta_{max} = \theta_{max} \cdot \cos(\varphi)$

$\cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 0$ rad

* المسألة الثانية :

- ساق أفقية متجانسة طولها $L = ab = 40cm$ معلقة بسلك فتل شاقولي عن منتصفها .

a((: ندير الساق في مستو أفقي بزاوية $\theta = 60$ "انطلاقاً" من وضع توازنها ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ فتهتز بحركة جيبية دورانية دورها الخاص $T_0 = 1\,s$ فإذا علمت أن عزم عطالة الساق بالنسبة لسلك الفتل $I_{o/c} = 2 \times 10^{-3}\,kg.m^2$

* المطلوب :

1((* : استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام .

$\theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3}\,rad \quad , \quad t = 0 \quad , \quad T_0 = 1\,s$

$I_{o/c} = 2 \times 10^{-3}\,kg.m^2$

$\theta = \theta_{max} . \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\,rad\,s^{-1}$

من شروط البدء : $\theta = \theta_{max} \quad t = 0$

$\theta_{max} = \theta_{max} . \cos(\varphi)$

$\cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 0\,rad$

$\theta = \frac{\pi}{3} . \cos(\frac{4}{5}\pi t)$

2((* : احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الأول بوضع التوازن .

$\cos(\frac{4\pi}{5} t) = 0$

$\frac{4\pi}{5} t = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad , \quad k = 0$

$\frac{4\pi}{5} t = \frac{\pi}{2}$

$t = \frac{5}{8}\,s$

$\omega = -\omega_0 . \theta_{max} . \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega = -(\frac{4\pi}{5})(\frac{\pi}{3}) . \sin(\frac{4\pi}{5})(\frac{5}{8})$

$\omega = -\frac{8}{3}\,rad.s^{-1}$

3((* : احسب طول الساق .

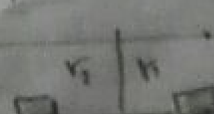
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}$

$\frac{4\pi}{5} = \sqrt{\frac{16 \times 10^{-3}}{I_\Delta}} \quad , \quad I_\Delta = 25 \times 10^{-4}\,kg.m^2$

$I_\Delta = 2m_1(\frac{l}{2})^2$

$25 \times 10^{-4} = 2 \times 125 \times 10^{-3} \times \frac{l^2}{4}$

$\Rightarrow l = 0,2\,m$



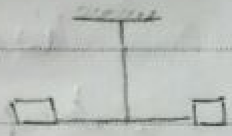
/ /

b)): نثبت بالعرضية a , b كتلتين نقطيتين $m_1 = m_2 = 75g$

استنتج قيمة الدور الخاص الجديد للجملة المهتزة ثم

احسب قيمة ثابت فتل السلك .

$m_1 = m_2 = 75\times10^{-3}\ kg$



* $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_\Delta}{k}}$ → ساق

$T_0' = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_\Delta'}{k}}$ (جملة)

$\dfrac{T_0}{T_0'} = \dfrac{2\pi\sqrt{\dfrac{I_\Delta}{k}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{I_\Delta'}{k}}} = \sqrt{\dfrac{I_\Delta}{I_\Delta'}}$

$I_\Delta' = \underset{\text{ساق}}{I_\Delta} + 2\, I_\Delta$ كتلة

$= 2\times10^{-3} + 2m_1\left(\dfrac{l}{2}\right)^2$

$= 2\times10^{-3} + 2\times75\times10^{-3}\times\left(\dfrac{0,4}{2}\right)^2$

$= 8\times10^{-3}\ kg.m^2$

$\dfrac{T_0}{T_0'} = \sqrt{\dfrac{2\times10^{-3}}{8\times10^{-3}}} = \dfrac{1}{2}$

$T_0' = 2\,T_0 = 2\times1 = 2\ S$

* $w_0 = \sqrt{\dfrac{k}{I_\Delta}}$

$2\pi = \sqrt{\dfrac{k}{2\times10^{-3}}}$

$\Rightarrow k = 8\times10^{-2}\ m.N.rad^{-1}$

$\theta = \dfrac{\pi}{3}\cos(2\pi t)$

* 2)): احسب قيمة السرعة الزاوية للساق

لحظة مرورها الثاني بوضع التوازن .

$w = -w_0\,\theta max.\sin(w_0 t)$

عند المرور في وضع التوازن $\theta = 0$

$\dfrac{\pi}{3}\cos(2\pi t) = 0$

$\Rightarrow \cos(2\pi t) = 0$

$\Rightarrow 2\pi t = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$

$k = 1 \Rightarrow 2\pi t = \dfrac{\pi}{2} + \pi$

$\Rightarrow t = \dfrac{3}{4}\ s$

$w = -(2\pi)\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\overset{\frac{3\pi}{2}}{2\pi\left(\dfrac{3}{4}\right)}\right)$

$= \dfrac{2\pi}{3}\ rad.s^{-1}$

* 3)): احسب قيمة التسارع الزاوي للساق

عندما تصنع زاوية " $30°$ - " مع وضع

توازنها . $\theta = -\dfrac{\pi}{6}\ rad$

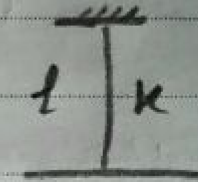
$\alpha = -w_0^2.\theta max.\cos(w_0 t + \varphi)$

$\alpha = -w_0^2.\theta$

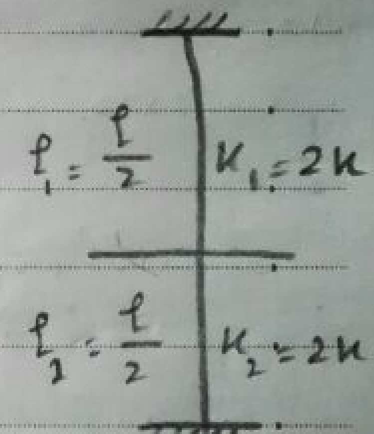
$= -(2\pi)^2.\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\pi\ rad.s^{-2}$

Nice

٣٣: نقسم سلك الفتل قسمين متساويين ، ونعلق الساق بعدئذ بنصفي السلك معاً أحدهما من الأعلى ، والآخر من الأسفل ومن منتصفه ، ونثبت طرف هذا السلك من الأسفل بحيث يكون شاقولياً ، استنتج نسبة الدور الخاص الجديد للساق ((دون وجود كتل نقطية)) افترض (($\pi^2 = 10$)) .



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$



$$T_0'' = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k_1 + k_2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{4k}}$$

$$\frac{T_0}{T_0''} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{4k}}} = \frac{2}{1}$$

$$T_0'' = \frac{T_0}{2} \Rightarrow T_0'' = \frac{1}{2}\ s$$