الاختبارات: السؤال الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$$

1 أوجد $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

2 أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب للخط C

الحل:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

$$f(x)=x+4\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$=x+4\left(\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\,(1+\cos x)}\right)$$

$$=x+4\left(\frac{1-\cos^2 x}{x^2\,(1+\cos x)}\right)$$

$$=x+4\left(\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\right)$$

$$=x+4\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim\left(x+4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)\right)$$

$$=0+4(1)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)=2$$

2

$$f(x)-x=\frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}-x$$

$$=\frac{4-4\cos x}{x^2}=\frac{4(1-\cos x)}{x^2}$$

$$-1\leq \cos x\leq 1 \Rightarrow$$

$$0\leq 1-\cos x\leq 2$$

$$\Rightarrow 0\leq 4(1-\cos x)\leq 8$$

$$\Rightarrow 0\leq \frac{4(1-\cos x)}{x^2}\leq \frac{8}{x^2}$$

$$x^2\neq 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x^2}=0$$

حسب الإحاطة

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4(1-\cos x)}{x^2}\right)=0$$

فالمستقيم $y=x$ مقارب مائل للخط في جوار $+\infty$

السؤال الثاني: أوجد نهاية التابع f المعرّف بالعلاقة: $f(x)=\frac{3x+4}{x+1}$ عند $+\infty$ ثم اعط عدداً حقيقياً a يحقق الشرط: إذا كان $x>a$ كان $f(x)\in\,]2{,}9\,,\,3{,}1[$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+4}{x+1}\right)=3$$

$$|f(x)-3|<0.1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3x+4}{x+1}-3\right|<\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{x+1}\right|<\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow |x+1|>10$$

$$x>-1 \Rightarrow |x+1|=x+1$$

$$x+1>10$$

$$\Rightarrow x>9$$

$$\boxed{a\geq 9}$$

السؤال الثالث: أثبت أن للمعادلة

$$x^3+x+1=0$$

حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$ ثم بيّن أن

$$\alpha \in]-1,0[$$

الحل: ليكن التابع

$$f(x)=x^3+x+1$$

المعرّف على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 3x^2+1 > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على $\mathbb{R}$

$$0 \in]-\infty,+\infty[= f(R)$$

بالتالي المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α

$$f(0)=1>0$$

$$f(-1)=-1<0$$

بالتالي $f(-1)\times f(0)<0$

وبالتالي $\alpha \in]-1,0[$

السؤال الرابع: ليكن التابع f المعرّف بالصيغة $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-|x|$

احسب النهايتين:

① $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

② $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

الحل: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty - \infty$

حالة عدم تعيين

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-|x|$$

نضرب بالمرافق

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+2x+3}-|x|)(\sqrt{x^2+2x+3}+|x|)}{(\sqrt{x^2+2x+3}+|x|)}$$

$$f(x)=\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+|x|}$$

$$f(x)=\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+|x|}$$

$$f(x)=\frac{2x+3}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+|x|}$$

$$=\frac{2x+3}{|x|(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1)}$$

في جوار $-\infty$ $x<0$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{2}{2} = \boxed{-1}$$

$\boxed{2}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$

حالة عدم تعيين

لدينا $f(x)=\dfrac{2x+3}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+|x|}$

في جوار $+\infty$ $x>0$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=\boxed{1}$$

الغاظ الوزارية :

السؤال الأول: احسب نهاية التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ وفق

$$f(x)=\frac{2x+\sin x}{x-2}$$

عند $+\infty$.

الحل: من أجل $x\in\,]2,+\infty[$ فإن:

$$-1\leq \sin x\leq 1$$

$$\Rightarrow 2x-1\leq 2x+\sin x\leq 2x+1$$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x-2}\leq\frac{2x+\sin x}{x-2}\leq\frac{2x+1}{x-2}$$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+\sin x}{x-2}\right)=2$$

السؤال الثاني: ليكن لدينا التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$$

والمطلوب:

$\boxed{1}$ ما نهاية التابع f عند $-\infty$

$\boxed{2}$ ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر

$\boxed{3}$ ثمّ اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,0)$

الحل: $\boxed{1}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+|x|}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right)=1$$

$\boxed{2}$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1}}{x}=\frac{x^2+|x|}{x(x^2+1)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x(x^2+1)}=\dfrac{x+1}{x^2+1}\ ;\ x>0\\[2ex]\dfrac{x^2-x}{x(x^2+1)}=\dfrac{x-1}{x^2+1}\ ;\ x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-} g(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} g(x) \neq \lim_{x\to 0^-} g(x)$$

وبالتالي التابع f ليس اشتقاقياً عند الصفر . $f'(0^-) = -1$, $f'(0^+) = 1$

3 معادلة نصف المماس الأيمن في النقطة A :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - 0 = 1(x - 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x}$$

السؤال الثالث : إذا كان

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$$

أياً كان x من $\mathbb{R}^*$ أوجد نهاية التابع f عند الصفر

الحل :

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{1}{2}$$

$$= -\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{1}{1+\cos x}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{1}{\cos x+1}\right) + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -(1)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0$$

السؤال الرابع : ليكن التابع f المعرف على $]\frac{1}{2}, +\infty[$ وفق

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم عيّن $x > A$ ليكون $f(x)$ من المجال $]1,95 , 2,05[$

الحل :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

و $f(x) \in]1,95 , 2,05[$

مركز المجال 2 ونصف قطره 0,05

$$|f(x) - 2| < 0,05$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2x+1}{x-1} - 2\right| < \frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{|x-1|} < \frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{|x-1|}{3} > \frac{100}{5}$$

$$\Rightarrow |x-1| > 60$$

في جوار $+\infty$ يكون $|x-1| = x-1$

وبالتالي $x - 1 > 60$

$\Leftarrow$ $x > 61$ أي أنّ $A \geq 61$

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق

$$f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x) = ax+b+\frac{1}{x+3}$

وعيّن قيمة كلاً من a , b ثم أثبت أنّ المستقيم $y=ax+b$ مقارب في جوار $+\infty$.

الحل:

$$f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-2 & x+3 \\ \ominus x^2 \overset{\ominus}{+} 3x & \overline{x-1} \\ \hline \overset{-}{\oplus} x \overset{-}{\oplus} 2 & \\ \overset{}{x} \quad 3 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = x-1+\frac{1}{x+3}$$

بالمطابقة نجد أنّ $b=-1$, $a=1$

$f(x) - y_{(\text{المقارب})} =$

$f(x) \quad - (x-1)$

$$= x-1+\frac{1}{x+3} - (x-1)$$

$$\Rightarrow f(x) - (x-1) = \frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = 0$$

بالتالي $y = x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

السؤال السادس: ليكن $g(x) = \tan x$ والمطلوب:

احسب $g'(x)$, $g(\frac{\pi}{4})$, $g'(\frac{\pi}{4})$

ثمّ استنتج $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x - 1}{x-\frac{\pi}{4}}\right)$

الحل: نفرض أنّ $g(x) = \tan(x)$ الاشتقاقي على $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ومشتقه:

$$g'(x) = 1+\tan^2(x)$$

$$g(\tfrac{\pi}{4}) = 1 \quad , \quad g'(\tfrac{\pi}{4}) = 1+1 = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x - 1}{x-\frac{\pi}{4}}\right) =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{g(x)-g(\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= g'(\tfrac{\pi}{4}) = 2$$

السؤال السابع: عيّن مجموعة تعريف التابع:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1}$$

واحسب نهايته عند الصفر

الحل: التابع معرّف بشرط $1+x \geq 0$ و $\sqrt{1+x} - 1 \neq 0$

$1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$\sqrt{1+x} - 1 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \neq 1$

$\Rightarrow x \neq 0$

بالتالي التابع معرّف على

$[-1, 0[\cup]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x(\sqrt{1+x} + 1)}{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)(\sqrt{1+x} + 1) = 1 \times 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 2$$

السؤال الثامن: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $R \setminus \{3\}$ وفق

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 3}$$

$\boxed{1}$ احسب $a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

ثم احسب $b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - a(x))$

$\boxed{2}$ استنتج معادلة المقارب المائل Δ ثم ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط البياني C.

الحل:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 3}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 - 7x - 3}{x^2 - 3x}\right) = 2 = a$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - a(x))$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 3} - 2(x)\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-x - 3}{x - 3}\right) = -1 = b$$

$\boxed{2}$ نستنتج أن المستقيم $\Delta: y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

$$f(x) - (2x - 1)$$

$$= \left(\frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 3}\right) - (2x - 1)$$

$$= \frac{2x^2 - 7x - 3 - 2x^2 + 6x + x - 3}{x - 3}$$

$$\Rightarrow f(x) - (2x-1) = \frac{-6}{x-3}$$

نلاحظ أن إشارة $\frac{-6}{x-3}$ هي عكس إشارة المقام

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$\frac{-6}{x-3}$	+	||	−
الوضع النسبي	C يقع فوق Δ		C يقع تحت Δ

السؤال التاسع: ليكن التابع f المعرّف على $]-5,+\infty[$ وفق

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$$

والمطلوب:

$\boxed{1}$ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

$\boxed{2}$ جد عدداً حقيقياً A يحقق الشرط: إذا كان $x > A$ ، كان $f(x)$ في المجال $]1{,}99 , 2{,}01[$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+5}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to 2} f(x)$$

$$= \frac{5}{7}$$

$\boxed{2}$ $f(x) \in]1{,}99 , 2{,}01[$ مركز المجال هو 2 ونصف قطره $0{,}01 \Leftarrow$

$$|f(x) - 2| < 0{,}01$$

$$\left|\frac{2x+1}{x+5} - 2\right| < 0{,}01$$

$$\left|\frac{2x+1-2x-10}{x+5}\right| < 0{,}01$$

$$\Rightarrow \left|\frac{-9}{x+5}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x+5}{-9}\right| > \frac{100}{1}$$

$$x \in]-5, +\infty[$$

$$\Rightarrow \frac{x+5}{9} > 100$$

$$x+5 > 900$$

$$x > 895$$

$$\boxed{A \geq 895}$$

السؤال العاشر: ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \cos x$.

$\boxed{1}$ جد $f(\frac{\pi}{3})$ ، $f'(x)$ ، $f'(\frac{\pi}{3})$

$\boxed{2}$ استنتج قيمة النهاية

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$$

الحل: f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه $f'(x) = -\sin x$ بالتالي:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \left(\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} \right)$$

$$= f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

السؤال الحادي عشر: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على R وفق $f(x) = 2x - \sqrt{x^2+5}$ والمطلوب:

1 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

2 أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α يقع في المجال $]1,2[$، ثم جد هذا الحل جبرياً

3 استنتج مشتق التابع g المعرّف على R وفق $g(x) = 2\sin x - \sqrt{\sin^2 x + 5}$

الحل:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$$

حالة عدم تعيين

$$\lim_{x \to +\infty} (2x - \sqrt{x^2+5})$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(2x - |x|\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(2 - \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}}\right)$$

$$= +\infty(2 - \sqrt{1+0}) = +\infty$$

$$f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{2\sqrt{x^2+5} - x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+5} - x = 0$$

$$2\sqrt{x^2+5} = x$$

$$\sqrt{x^2+5} = \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow x^2 + 5 = \frac{1}{4}x^2$$

$$x^2 - \frac{1}{4}x^2 = -5$$

$$\frac{3}{4}x^2 = -5$$

$x^2 = \frac{-20}{3}$ مستحيلة

2 f مستمر ومتزايد تماماً على R و $0 \in]-\infty, +\infty[= f(R)$ بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α

$$f(2) = 1 > 0$$

$$f(1) = 2 - \sqrt{6} < 0$$

$$\Leftarrow f(2) \times f(1) < 0$$

بالتالي $\alpha \in]1,2[$

$$f(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - \sqrt{x^2+5} = 0$$

$\sqrt{x^2+5} = 2x \;; x \geq 0$

$$\Rightarrow x^2 + 5 = 4x^2$$

$$5 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{5}{3}$$

بما أن $x \geq 0$ فإن $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$

3] g اشتقاقي على R لأنه مركب تابعين اشتقاقيين على R

$$g(x) = 2\sin x - \sqrt{\sin^2 x + 5}$$

$$g(x) = f(\sin(x))$$

$$g'(x) = f'(\sin x) \times (\sin x)'$$

$$= \left(2 - \frac{\sin x}{\sqrt{(\sin x)^2 + 5}}\right)\cos x$$

المقاربات: السؤال الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1] احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2] أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C في جوار +∞

3] ادرس الوضع النسبي بين Δ و C

الحل:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty}\left(x - \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right) = -\infty - 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left(x + \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right) = +\infty + 1 = +\infty$$

2]

$$g(x) = f(x) - (x+1)$$

$$= x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x - 1$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$$

$$= 1 - 1 = \boxed{0}$$

وبالتالي $y = x + 1$ مقارب للخط C في جوار +∞

3]

$$f(x) - (x+1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} = x$$

$$x^2 + 1 = x^2$$ مستحيلة

والإشارة ثابتة على R ولتحديد الإشارة نختار قيمة ولتكن 0

$$\frac{0}{\sqrt{0+1}} - 1 = -1 < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$	−	

C تقع تحت Δ

السؤال الثاني: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $R\backslash\{-3\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

1 اكتب التابع بالشكل:

$$f(x)=ax+b+\frac{1}{x+3}$$

2 أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-2 & x+3 \\ \ominus x^2 \ominus 3x & x-1 \\ \hline -x-2 & \\ \ominus x \oplus 3 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x)=x-1+\frac{1}{x+3}$$

بالمطابقة نجد $a=1,\ b=-1$

2

$$f(x)-(x-1)=$$

$$x-1+\frac{1}{x+3}-(x-1)$$

$$=\frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+3}\right)$$

$$=0$$

بالتالي $y=x-1$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

السؤال الثالث: ليكن f التابع المعرّف على $]2,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x-4+\sqrt{x-2}$$

1 ادرس تغيرات f على المجال $]2,+\infty[$ ونظّم جدولاً بها.

2 أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً.

3 اكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 3.

الحل:

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}>0$$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-2	↗	$+\infty$

2] f مستمر ومتزايد تماماً على $]2,+\infty[$

$f(]2,+\infty[) =]-2,+\infty[$

$0 \in]-2,+\infty[$

بالتالي المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $x \in]2,+\infty[$

3] $x = 3 \Rightarrow f(3) = 0$

$f'(3) = \frac{3}{2}$

$y - y_{\text{النقطة}} = m(x - x_{\text{النقطة}})$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}(x-3)$

السؤال الرابع: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على R^+ وفق:

$f(x) = x + 3 - \frac{1}{x^2}$

والمطلوب:

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = x+3$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ

الحل:

$f(x) - (x+3) = -\frac{1}{x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x+3)) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-1}{x^2}\right)$

$= \boxed{0}$

وبالتالي $y = x+3$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

$f(x) - (x+3) = -\frac{1}{x^2} < 0$

بالتالي الخط C يقع تحت المقارب Δ على R^*

السؤال الخامس: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على R وفق:

$f(x) = x - E(x)$

المطلوب: 1] اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $[0,2[$

2] جد $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

الحل:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1[\\ x-1 & x \in [1,2[\end{cases}$$

$x - 1 < E(x) \leq x$

$-x + 1 > -E(x) \geq -x$

$1 > x - E(x) \geq 0$

$\frac{1}{x^2} > \frac{f(x)}{x^2} \geq 0$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

⇐ حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^2}\right) = 0$

السؤال السادس: ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ في حالة $x \neq 0$ $f(0) = 0$ والمطلوب:

1. أثبت أن f اشتقاقي عند $x = 0$
2. احسب $f'(x)$ على R^*
3. جد $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

الحل:

$x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0}$$

$$= x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

في حالة $x > 0$ فإن:

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+}(-x) = \lim_{x \to 0^+}(x) = 0$$

$$\Leftarrow \lim_{x \to 0^+}\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

في حالة $x < 0$ فإن:

$$-x \geq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-}(-x) = \lim_{x \to 0^-}(x) = 0$$

$$\Leftarrow \lim_{x \to 0^-}\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

وبالتالي $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

ـ التابع f اشتقاقي عند $x = 0$

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{-1}{x^2} \cos\frac{1}{x}\right) \times x^2$$

$$= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$\boxed{3}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = +\infty(1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{u \to 0}\left(\frac{\sin u}{u}\right) = 1$$

الطريقة الثانية للطلب الأول:

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$$

$$\Rightarrow \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

$$\Rightarrow \left|x \sin\frac{1}{x} - 0\right| \leq |x|$$

ومع أن $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

فإن

$$\lim_{x \to 0}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \boxed{0}$$

والتابع f اشتقاقي عند 0

السؤال السابع : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على R وفق

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

والمطلوب :

1 أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

2 ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

الحل:

$$f(x) - 2x =$$

$$x + \sqrt{x^2+1} - 2x$$

$$= \sqrt{x^2+1} - x$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$$

$$= \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \right) = 0$$

ومنه فإن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

2 $f(x) - 2x$

$$= \sqrt{x^2+1} - x$$

$$x^2 + 1 > x^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} > |x| \qquad |x| \geq x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} > x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0$$

بالتالي C يقع فوق المقارب Δ على R

السؤال الثامن : نتأمل التابع f المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = x - \sin x$$

1 احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2 أثبت أن التابع متزايد

الحل:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\Rightarrow x - 1 \leq x - \sin x \leq x + 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (x-1) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

حسب مبرهنة المقارنة

2 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$

⇐ f تابع متزايد

السؤال التاسع : ليكن f تابع معرّف على $R \setminus \{1\}$ وفق :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}$$

والمطلوب:

1 عيّن العددين الحقيقيين a , b لتكون $f(-1)=0$ قيمة حدية لـ f

الحل:

$$f(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a - b + 1}{-2} = 0$$

$$\Rightarrow a - b + 1 = 0 \;\;....①$$

التابع f اشتقاقي عند $x=-1$ بالتالي ،

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-1)-1(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(-1)=0$$

$$\Rightarrow \frac{(-2a+b)(-2)-1(a-b+1)}{4}=0$$

$$(-2a+b)(-2)-(a-b+1)=0$$

$$4a-2b-a+b-1=0$$

$$3a-b-1=0 \ldots ②$$

حل المعادلتين ② بـ

$$3a-b-1=0$$

$$-a+b-1=0 \quad ①$$

بالجمع ⇐

$$2a-2=0$$

$$2a=2 \Rightarrow a=1$$

$$b=2$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$$

السؤال العاشر: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,0[$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x^2+\cos^2 x}{x}$$

والمطلوب:

أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط C على جوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي بين C و Δ

الحل:

$$g(x)=f(x)-2x$$

$$=\frac{2x^2+\cos^2 x}{x}-\frac{2x^2}{x}$$

$$=\frac{\cos^2 x}{x}$$

في حالة $x\in]-\infty,0[$

$$-1\leq \cos x\leq 1$$

$$\Rightarrow 0\leq \cos^2 x\leq 1$$

$$0\geq \frac{\cos^2 x}{x}\geq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cos^2 x}{x}\right)=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} g(x)=0$$

وبالتالي $y=2x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

في حالة $x\in]-\infty,0[$ يكون $\cos^2 x\geq 0$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 x}{x}\leq 0 \quad \div x<0$$

$$\Rightarrow g(x)\leq 0$$

والخط C يقع تحت المقارب على المجال $]-\infty,0[$ عدا النقاط التي فواصلها $x=-\frac{\pi}{2}+\pi K$ حيث K عدد صحيح

السؤال الحادي عشر: ليكن f تابعاً معرّفاً على $]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x+1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

المطلوب: $\boxed{11}$ أثبت أن المستقيم $d: y=x+1$ الذي معادلته مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

الحل:

$$g(x)=f(x)-(x+1)$$

$$=x+1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-(x+1)$$

$$=+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$-1\leq \sin x\leq 1$$

في حالة $x\in]0,+\infty[$

$$\frac{-1}{\sqrt{x}}\leq\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

وبالتالي $y=x+1$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

السؤال الثاني عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق:

$$f(x)=ax+\frac{b}{x+1}$$

والمطلوب:

عيّن العددين a ، b ليمر الخط البياني بالنقطة $(0,3)$ ويكون ميل المماس في هذه النقطة $f'(0)=4$

الحل:

$$f(x)=ax+\frac{b}{x+1}$$

$$f'(x)=a-\frac{b}{(x+1)^2}$$

$$f(0)=3\Rightarrow b=3$$

$$f'(0)=4\Rightarrow a-b=4$$

$$a=7$$

$$\Rightarrow f(x)=7x+\frac{3}{x+1}$$

تمارين داعمة : السؤال الأول :

ليكن التابع f المعرف على $R\setminus\{3\}$ وفق :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{X\to 2} f(X)$$

$$= \frac{2(2)+1}{2-3} = -5$$

السؤال الثاني: ليكن التابع f المعرف على R وفق

$$f(x) = x^2 + 5x$$

احسب التابع المشتق للتابع f واستنتج مشتق التابع.

$$g(x) = \sin^2 x + 5\sin x$$

الحل:

$$f'(x) = 2x+5$$

$$g(x) = f(\sin x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(\sin x)(\sin x)'$$

$$= (2\sin x+5)\cos x$$

السؤال الثالث : ليكن التابع f المعرف على $]-\infty,0]$ وفق

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

جد معادلة المقارب المائل لـ C في جوار $-\infty$

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

معادلة المقارب من الشكل :

$$y = ax+b \quad ; a\neq 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$|x| = -x$ ، في جوار $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1 = a$$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)$

$$= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1} + x = \infty-\infty$$

حالة عدم تعيين

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)}{\sqrt{x^2+1} - x} \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \right) = 0 = b$$

إذاً معادلة المقارب المائل هي:

$$\boxed{y = -x}$$

السؤال الرابع: ليكن C_1 الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ و C_2 الخط البياني للتابع $g(x) = x^2 - \frac{1}{2}x$

1. أثبت أن C_1 , C_2 متماسان في النقطة $A(1, \frac{1}{2})$
2. اكتب معادلة المماس المشترك للمنحنيين C_1 , C_2 في النقطة $A(1, \frac{1}{2})$

الحل:

$$f(1) = \frac{1}{2}(1)^3 = \frac{1}{2}$$

$$g(1) = (1)^2 - \frac{1}{2}(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = g(1)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2$$

$$f'(1) = \frac{3}{2}(1) = \frac{3}{2}$$

$$g'(x) = 2x - \frac{1}{2}$$

$$g'(1) = 2(1) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f'(1) = g'(1) = \frac{3}{2}$$

إذاً C_1 و C_2 متماسان في النقطة $A(1, \frac{1}{2})$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(x-1)$$

$$y = \frac{3}{2}x - 1$$

السؤال الخامس: ليكن a , b عددان حقيقيان ، C الخط البياني للتابع f

$$f(x) = \frac{3x^3 + ax + b}{x^2+1}$$

عيّن a , b لتكون $y = 4x+3$ معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 0 منه.

الحل: نعوض في معادلة المستقيم $x = 0$

$$y = 4(0) + 3 = 3$$

⇐ نقطة التماس $(0,3)$

إذاً

$$f(0) = 3$$

$$\frac{3(0)^3+a(0)+b}{(0)^2+1}=3$$

$$\boxed{b=3}$$

- ميل المماس $m=4$ ويساوي قيمة المشتق عند نقطة التماس.

$$f'(x)=\frac{(9x^2+a)(x^2+1)-2x(3x^3+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

$$4=\frac{(9(0)^2+a)((0)^2+1)-2(0)(3(0)^3+a(0)+b)}{((0)^2+1)^2}$$

$$\boxed{4=a}$$

السؤال السادس : ليكن f التابع المعرف على R وفق

$$f(x)=\sin(x)$$

1 أوجد $f(\pi)$ ، $f'(x)$ ، $f'(\pi)$

2 استنتج أن

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=-1$$

الحل:

$$f(\pi)=\sin(\pi)=0$$

$$f'(x)=\cos(x)$$

$$f'(\pi)=-1$$

$$f'(\pi)=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$$

ومنه $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=f'(\pi)=-1$

السؤال السابع : ليكن

$$f(x)=x\sqrt{x(2-x)}$$

المعرف على المجال $[0,2]$

أثبت أن f اشتقاقي على المجال $I=]0,2[$

الحل: التابع $x\to x(2-x)$ اشتقاقي وموجب تماماً على I

$x\to\sqrt{x(2-x)}$ اشتقاقي على I

التابع $x\to x$ اشتقاقي على I

ومنه $x\to f(x)$ اشتقاقي على I لأنه جداء تابعين اشتقاقيين على I

$$f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$$

2 احسب $f'(x)$

$$f'(x)=1\times\sqrt{2x-x^2}+\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}(x)$$

$$=\sqrt{2x-x^2}+\frac{x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=\frac{2x-x^2+x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=\frac{3x-2x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

3 احسب $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$

ماذا تستنتج:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\sqrt{x(2-x)}=0\in\mathbb{R}$$

إذاً f اشتقاقي عند الصفر

وظيفة: احسب كل من النهايات:

① $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 - x} \quad -x$

② $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + \cos x}{2x^2 + 1}$

③ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 - 3\cos x}{x^2}$

④ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^3 + 3x - 5}{x^2 + x - 2}$

إذا علمت أن $E(x)$ هو تابع الجزء الصحيح

جد نهاية التابع f عند $+\infty$

$$f(x) = \frac{x + E(x)}{x^2 + 1}$$

الحل: نعلم أن

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$\Rightarrow 2x - 1 < x + E(x) \leq 2x$$

$$x^2 + 1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x - 1}{x^2 + 1} < \frac{x + E(x)}{x^2 + 1} \leq \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x - 1}{x^2 + 1} \right) = 0$$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x}{x^2 + 1} \right) = 0$

⇐ حسب الإحاطة

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

- ليكن التابع $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4x|} - x$ المعرف على $\mathbb{R}$

$\boxed{1}$ احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ واستنتج مقارب أفقي لـ C.

$\boxed{2}$ أوجد معادلة مقارب مائل في جوار $-\infty$

$\boxed{3}$ ادرس الوضع النسبي للمنحني مع مقارباته

الحل: ندرس إشارة $x^2 - 4x$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

إما $x = 0$

أو $x = 4$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x^2 - 4x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x} - x & ; x \in]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[\\ \sqrt{-x^2 + 4x} - x & ; x \in]0, 4[\end{cases}$$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$

حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 - 4x} - x)(\sqrt{x^2 - 4x} + x)}{(\sqrt{x^2 - 4x} + x)}$$

$$= \frac{x^2 - 4x - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x} + x} = \frac{-4x}{\left(|x|\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + x\right)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) + 2(x))$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2-4x} + x)$$

$$= \infty - \infty$$

حالة عدم تعيين

$$\sqrt{x^2-4x} + x =$$

$$\frac{(\sqrt{x^2-4x} + x)(\sqrt{x^2-4x} - x)}{\sqrt{x^2-4x} - x}$$

$$= \frac{x^2 - 4x - x^2}{\sqrt{x^2-4x} - x} = \frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x} - x}$$

$$= \frac{-4x}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}} - x}$$

$|x| = -x$ في جوار $-\infty$

$$= \frac{-4x}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}} - x}$$

$$= \frac{+4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}} + 1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}} + 1} \right) = \frac{4}{2} = \boxed{2 = b}$$

$\Delta : y = -2x + 2$ معادلة المقارب المائل $\Leftarrow$

$$= \frac{-4x}{x\sqrt{1-\frac{4}{x}} + x}$$

$|x| = x$ في جوار $+\infty$

$$= \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}} + 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{-4}{1+1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$y = -2$ مقارب أفقي لـ C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$$

$\boxed{2}$ المقارب المائل في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x} - x}{x}$$

$$= \frac{+\infty}{-\infty}$$

حالة عدم تعيين

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}} - x)}{x}$$

$|x| = -x$
في جوار $-\infty$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}} - x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x(\sqrt{1-\frac{4}{x}} + 1)}{x} \right)$$

$$= \boxed{-2 = a}$$

3 لدراسة الوضع النسبي مع المقارب الأفقي $d : y = -2$

نَدرس إشارة الفرق.

$g(x) = f(x) - y_d$

$= \sqrt{|x^2-4x|} - x + 2$

$g(x) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{|x^2-4x|} - x + 2 = 0$

$x \geqslant 2 \Leftarrow$ الشرط $x - 2 \geqslant 0$

$\sqrt{|x^2-4x|} = x - 2$

$|x^2-4x| = (x-2)^2$

$- \quad x^2 - 4x = +(x-2)^2$

$x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4$

$0 \neq 4$

مستحيلة

$- \quad x^2 - 4x = -(x-2)^2$

$x^2 - 4x = -(x^2-4x+4)$

$x^2 - 4x = -x^2 + 4x - 4$

$2x^2 - 8x + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-8)^2 - 4(2)(4)$

$= 64 - 32$

$= 32 > 0$ لها حلان مختلفان

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$

$= 4\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{8 - 4\sqrt{2}}{4} = 2 - \sqrt{2}$

مرفوض

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{8 + 4\sqrt{2}}{4} = 2 + \sqrt{2}$

مقبول

$g(0) = 2$

x	$-\infty$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
وضع نسبي		c يقع فوق المقارب d		c يقع تحت المقارب d	

لدراسة الوضع النسبي مع المقارب المائل $\Delta : y = -2x + 2$ ندرس إشارة الفرق.

$h(x) = f(x) - y_\Delta$

$= \sqrt{|x^2-4x|} - x - (-2x+2)$

$= \sqrt{|x^2-4x|} + x - 2$

$h(x) = 0$

$\sqrt{|x^2-4x|} + x - 2 = 0$

$\sqrt{|x^2-4x|} = -x + 2$

$-x+2 \geq 0$

$-x \geq -2$

الشرط $x \leq 2$

$|x^2-4x| = (-x+2)^2$

- $x^2-4x = +(-x+2)^2$

$x^2-4x = x^2-4x+4$

$0 \neq 4$

مستحيلة

- $x^2-4x = -(-x+2)^2$

$x^2-4x = -(x^2-4x+4)$

$x^2-4x = -x^2+4x-4$

$2x^2-8x+4=0$

مما سبق نجد أن

$x_1 = 2-\sqrt{2}$ مقبول

$x_2 = 2+\sqrt{2}$ مرفوض

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	
وضع نسبي		C يقع تحت المقارب Δ		C يقع فوق المقارب Δ	

بالتجريب

$h(0) = -2$

- البحث عن المقارب المائل ثم ادرس الوضع النسبي

$$f(x) = \frac{x^3+x^2+x-3}{x^2+1}$$ المعرف على R

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2+x-3 & x^2+1 \\ \ominus x^3 \quad \mp x & x+1 \\ \hline x^2-3 & \\ \ominus x^2 \mp 1 & \\ \hline -4 & \end{array}$$

$$f(x) = x+1-\frac{4}{x^2+1} \Leftarrow$$

نفرض $y = x+1$ مقارب مائل ⇐

$h(x) = f(x)-(x+1)$

$= -\frac{4}{x^2+1}$

$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = 0$

الوضع النسبي

$h(x) = \frac{-4}{x^2+1} < 0$

C يقع تحت المقارب.

$$f(x) = E(x+1) + [(x+1)-E(x+1)]^2$$

$I = [-1,1]$

① اكتب عبارة f بصيغة مستقلة عن $E(x+1)$

② ادرس استمرار f على المجال $I=[-1,1]$

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & ; x \in [-1,0[\\ 1+x^2 & ; x \in [0,1[\\ 2 & ; x=1 \end{cases}$$

② حتى يكون f مستمر على المجال $[-1, 1]$
يجب أن يكون مستمر عند 0 و 1

$$\lim_{x \to 0^-} (x+1)^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x^2) = 1$$

$$f(0) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} (f(x)) = \lim_{x \to 0^+} (f(x)) = f(0)$$

⇐ f مستمر عند 0

- ندرس الاستمرار عند 1

$$\lim_{x \to 1^-} (1+x^2) = 2$$

$$f(1) = 2$$

⇐ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 2$

f مستمر عند 1

إذاً f مستمر على المجال $[-1, 1]$

- ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ m + 1 & ; x = 2 \end{cases}$$

نفرض أن التابع f مستمر على $\mathbb{R}$
جد قيمة m

الحل:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2} = m + 1$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين نزيلها

$$\frac{(\sqrt{x^2+5} - 3)(\sqrt{x^2+5} + 3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)}$$

$$= \frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$= \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$= \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} \right) = \frac{4}{6}$$

$$\Rightarrow m+1=\frac{4}{6}$$

$$m=\frac{4}{6}-1$$

$$\Rightarrow m=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

وظيفة: ① ليكن f التابع المعرّف على R وفق:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$$

ولنوجد المقارب المائل للخط Cf في جوار $+\infty$ بعد كتابة المقدار x^2-2x+3 بالصيغة القانونية

② ليكن Cf الخط البياني للتابع f المعرّف على $R\setminus\{-2\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+4x-2}{x+2}$$

ولنوجد معادلة المقارب المائل للخط Cf.

السؤال الرابع: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\sqrt{x^2-10x+26}$.

1) جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) اكتب ثلاثي الحدود $x^2-10x+26$ بالصيغة القانونية (بالإتمام إلى مربع كامل).

3) استنتج معادلة للمقارب المائل للخط C عند $+\infty$.

$$f(x)=\sqrt{x^2-10x+26}$$

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

② $x^2-10x+26$

$$= \underline{x^2-10x+25}-25+26$$

$$= \underline{x^2-10x+25}+1$$

$$= (x-5)^2+1$$

③ $f(x)=\sqrt{(x-5)^2+1}$

بفرض $y=x-5$ مقارب

مائل لـ C_f في $+\infty$

$$f(x)-y_\Delta = \sqrt{(x-5)^2+1}-(x-5)$$

$$f(x)-y_\Delta = \frac{\cancel{(x-5)^2}+1+\cancel{(x-5)^2}}{\sqrt{(x-5)^2+1}+(x-5)}$$

$$f(x)-y_\Delta = \frac{1}{\sqrt{(x-5)^2+1}+(x-5)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=0$$

إذاً $\Delta: y=x-5$ مقارب

مائل لـ C_f في جوار $+\infty$

- ليكن C الخط البياني للتابع f
المعرّف على R وفق:

$$f(x) = \frac{x}{|x| + 3}$$

① ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر
ثم اكتب معادلة المماس للخط C
في نقطة منه فاصلتها x = 0 .

② احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. ثم اعطِ
عدداً حقيقياً A يحقق الشرط:
إذا كان $x < A$ كان
. $f(x) \in]-1.05 , -0.95[$

الحل: لنشكل تابع

$$t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad ; \quad R^*$$

$f(0) = 0$

$$t(x) = \frac{\frac{x}{|x|+3} - 0}{x}$$

$$t(x) = \frac{1}{|x| + 3}$$

$$\lim_{x \to 0} t(x) = \frac{1}{3} \in R$$

إذاً f اشتقاقي عند الصفر

كتابة معادلة مماس في النقطة
$x = 0$
.

$m = f'(0) = \frac{1}{3}$ $\quad (0 , 0)$

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$y = 0 + \frac{1}{3}(x)$$

$$y = \frac{1}{3}x$$

② $|x| = -x$ في جوار $-\infty$

$$f(x) = \frac{x}{-x + 3}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$$

$$f(x) \in]-1.05 , -0.95[$$

مركز المجال $c = \frac{b + a}{2} = \frac{-0.95 - 1.05}{2}$
$= -1$

نصف قطر $r = \frac{b - a}{2} = \frac{-0.95 + 1.05}{2}$
$= 0.05$

$$|f(x) - c| < r$$

$$|f(x) - (-1)| < 0.05$$

$$\left|\frac{x}{-x+3} + 1\right| < \frac{5}{100}$$

$$\left|\frac{\cancel{x} - \cancel{x} + 3}{-x+3}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{3}{-x+3}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\frac{|3|}{|-x+3|} < \frac{1}{20}$$

$$\frac{|-x+3|}{3} > 20$$

$$|-x+3| > 60$$

$|-x+3| = -x+3$ في جوار $-\infty$

$$-x+3 > 60$$

$$-x > 57$$

$$x < -57$$

ومنه $A = -57$

أو أي عدد أصغر منه

يرمز $E(x)$ ب الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة:

$$f(x) = x \cdot E(x) - \frac{1}{2} E(x)\left(1+E(x)\right)$$

1) اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (لاتحوي $E(x)$) على $[0,2]$

② أثبت أن f مستمر على المجال $[0,2]$.

③ ادرس نهاية $g: x \to \frac{E(x)}{x}$ عند $+\infty$ ثم تحقق أن

$$\frac{f(x)}{x^2} = g(x) - \frac{1}{2} g(x)\left(\frac{1}{x} + g(x)\right)$$

واستنتج

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$$

الحل

①

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; [0,1[\\ x-1 & ; [1,2[\\ 1 & ; x=2 \end{cases}$$

② $x \mapsto 0$ مستمر على $[0,1[$

التابع $x \mapsto x-1$ مستمر $[1,2[$

حتى يكون f مستمراً على $[0,2[$

لندرس الاستمرار عند 1

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1-1=0=f(1)$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

إذاً f مستمر عند 1

لندرس الاستمرار عند 2

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2-1=1$

$f(2) = 1$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$

إذاً f مستمر عند 2

وبالتالي f مستمر على $[0,2]$

(3

$g(x) = \frac{E(x)}{x}$

$x-1 < E(x) \le x$

$\boxed{x > 0}$

$\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \le 1$

$\frac{x-1}{x} < g(x) \le 1$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) = 1$

حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{x \cdot E(x) - \frac{1}{2} E(x)\left(1+E(x)\right)}{x^2}$$

$$= \frac{E(x)}{x} - \frac{1}{2} \frac{E(x)\left(1+E(x)\right)}{x^2}$$

$$= \frac{E(x)}{x} - \frac{1}{2} \frac{E(x)\left(1+E(x)\right)}{x \cdot x}$$

$$= \frac{E(x)}{x} - \frac{1}{2} \frac{E(x)}{x} \cdot \frac{\left(1+E(x)\right)}{x}$$

$$= \frac{E(x)}{x} - \frac{1}{2} \frac{E(x)}{x} \left(\frac{1}{x} + \frac{E(x)}{x}\right)$$

$$\frac{f(x)}{x^2} = g(x) - \frac{1}{2} g(x) \left(\frac{1}{x} + g(x)\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{2}(1)(0+1)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

إذا علمت أن $E(x)$ هو التابع الجزء الصحيح جد نهاية التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ و $x \to +\infty$

$$f(x) = x^2 - 3\cos(x) + E(x)$$

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{3\cos(x)}{x^2} + \frac{E(x)}{x^2}\right)$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$3 \geq -3\cos(x) \geq -3$$

نقسم $x^2 > 0$

$$\frac{3}{x^2} \geq \frac{-3\cos(x)}{x^2} \geq \frac{-3}{x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{3}{x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{-3}{x^2}\right) = 0$$

⇐ حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{-3\cos(x)}{x^2}\right) = 0$$

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$x^2 > 0$

$$\frac{x-1}{x^2} < \frac{E(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{E(x)}{x^2}\right) = 0$$

بما أن $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{E(x)}{x^2}\right) = 0$ و $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{-3\cos x}{x^2}\right) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(1 - 0 + 0)$$

$$= +\infty$$

ليكن g التابع الاشتقاقي على $I=]-1,1[$ ومشتقه على I هو

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ولنعرّف التابع h على $J=]-\pi,0[$ وفق $h(x)=g(\cos x)$.

أثبت أنّ $h'(x)=1$.

$$h(x)=g(\cos x)$$

إنّ $h'(x)=(\cos x)'\cdot g'(\cos x)$ ومنه

$$h'(x)=(-\sin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

وبالتالي $h'(x)=(-\sin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}$

ومنه $h'(x)=(-\sin x)\cdot\frac{1}{|\sin x|}$

وبما أنّ $x\in]-\pi,0[$ فإنّ $|\sin x|=-\sin x$ وبالتالي

$$h'(x)=(-\sin x)\cdot\frac{1}{(-\sin x)}=1$$

لتكن f التابع المعرّف على R وفق:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & : x\neq 0 \\ m+2 & : x=0 \end{cases}$$

عيّن قيمة العدد الحقيقي m التي تجعل f مستمراً على R

الحل: التابع $x \to x\sin(\frac{1}{x})$ مستمر على R^* حتى تكون مستمر على R يجب أن تكون f مستمراً عند 0 أي يجب أن يتحقق

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$f(0) = m+2$$

عندما تكون $x\neq 0$ فإن

$$g(x) = f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$$

$$|g(x)| = |x\sin(\frac{1}{x})|$$

$$= |x|\,|\sin(\frac{1}{x})| \leq |x| \quad (1$$

لأن $|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$

$$|g(x) - 0| \leq |x|$$

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

فاستناداً الى مبرهنة الإحاطة (2) نجد:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

الشرط هو:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$0 = m+2$$

ومنه $m = -2$

وهي قيمة m التي تجعل f مستمراً على R

تمرين :

ليكن f معرف على R وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{x} & ; \; x \neq 0 \\ m & \; x = 0 \end{cases}$$

عين m ليكون f مستمراً على R :

الحل : f مستمر على R فيكون

من النص $f(0) = m$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين نزيلها :

$$f(x) = 3\,\frac{\sin(3x)}{3x} \Longrightarrow \text{قاعدة}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 3(1) = 3$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$3 = m$

$$\boxed{m = 3}$$

« تابع الجزء الصحيح »

$n \le x < n+1$

$E(x)$

$$\boxed{x-1 < E(x) \le x}$$

تفيد من حساب النهاية

تمرين :

ليكن f التابع المعرف على R^* وفق :

$$f(x) = \frac{(1-x)\,E(x)}{x}$$

1) اكتب f(x) بعبارة مستقلة عن E(x) « لا تحتوي E(x) » على المجال $[\frac{1}{2}, 2]$

2) هل f مستمر عند $x = 1$ ؟ علل إجابتك

3) هل f مستمر على المجال $[\frac{1}{2}, 2]$ ؟ علل إجابتك

4) ادرس نهاية التابع f عند $+\infty$

الحل:

①

$$f(x) = \frac{(1-x)E(x)}{x}$$

$$= \begin{cases} 0 & ; \ [\frac{1}{2}, 1[\\ \frac{1-x}{x} & \ [1, 2[\\ -1 & \ x = 2 \end{cases}$$

②

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

إذاً f مستمر عند $\boxed{x=1}$

③ حتى يكون f مستمر على المجال $[\frac{1}{2}, 2]$

يجب أن يكون مستمراً عند $x=1$

ومستمراً عند $x=2$

مما سبق أوجدنا أن f مستمر عند

$x=1$

* لندرس الاستمرار عند $X=2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(2) = -1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq f(2)$$

إذاً f غير مستمر عند 2

⟸ f غير مستمر على المجال $[\frac{1}{2}, 2]$

④

$$x-1 < E(x) \leq x$$

نضرب $(1-x)<0$

$$(1-x)(1-x) > (1-x)E(x) \geq x(1-x)$$

نقسم $x>0$

$$\frac{-(x-1)^2}{x} > \underbrace{\frac{(1-x)E(x)}{x}}_{f(x)} \geq 1-x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{(x-1)^2}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

f تابع معرف على المجال $]0 , 2[$ وفق : $f(x) = x + 2 - E(x)$. المطلوب :

1- اكتب $f(x)$ بصورة مستقلة عن $E(x)$.

2- ادرس استمرار f عندما $x = 1$ ، هل f مستمر على $]0 , 2[$.

$[0 , 2[$

$f(x) = x + 2 - E(x)$

①

$$f(x) = x + 2 - E(x)$$

$$= \begin{cases} x + 2 & ; \ 0 \leq x < 1 \\ x + 1 & ; \ 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

② حتى يكون f مستمر عند 1 يجب

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

إذاً f غير مستمر عند $x = 1$

بما أن f غير مستمر عند ①

غير مستمر على المجال $[0 , 2[$

م. خليل شيخو
0991736954

<u>التمرين الأول</u>: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $I =]-\infty,3]$ وفق: $f(x) = x\sqrt{3-x}$.

1) ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $x = 3$ ، واستنتج معادلة لمماس الخط C في النقطة $A(3,0)$.

2) ادرس اطراد التابع f على I.

$f(x) = x\sqrt{3-x}$

$]-\infty,3]$

$f'(x) = (1)\sqrt{3-x} + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}} \cdot x$

$= \frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}}$

$= \frac{6-2x-x}{2\sqrt{3-x}}$

$f'(x) = \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$

(1 $t(x) = \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$; $]-\infty,3[$

$f(3) = 0$

$t(x) = \frac{x\sqrt{3-x} - 0}{x-3}$

$= \frac{x\sqrt{3-x}}{-(3-x)}$

$= \frac{-x}{\sqrt{3-x}}$

$\lim\limits_{x \to 3^-} t(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

ومنه f غير قابل للاشتقاق

عند 3 وتقبل مماس

شاقولي معادلته

$x=3$

$f'(x) = 0$

$6-3x = 0$

$-3x = -6$

$(x=2)$

x	$-\infty$		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

من جدول نلاحظ أن

f تابع متزايد $]-\infty,2]$

ومتناقص على $]2,3[$

تمرين: f معرف على R\{-1} وفق:

$$f(x) = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

١- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واكتب معادلة كل مقارب وجدته

٢- جد الأعداد الحقيقية a و b و c التي تجعل

$$f(x) = ax+b + \frac{c}{x+1}$$

٣- أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y=2x-1$ هو مقارب مائل للخط وادرس الوضع النسبي بين C و Δ

٤- أثبت أن النقطة $I(-1,-3)$ مركز تناظر C_f

٥- ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C_f

٦- ناقش بيانياً عدد حلول المعادلة

$$2x^2+(1-m)x+7-m=0$$

تبعاً لقيم الوسيط الحقيقي m

الحل: ①

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$-\quad -1\quad +$$

$x=-1$ مقارب شاقولي لـ C_f يوازي المحور yy'

f مستمر واشتقاقي على R\{-1}

$$f'(x) = \frac{(4x+1)(x+1)-(1)(2x^2+x+7)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2+4x+\cancel{x}+1-2x^2-\cancel{x}-7}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0$

$2x^2+4x-6=0$

$(2\div)\quad x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$

إما $x-1=0 \Longrightarrow x=1$

أو $x+3=0 \Longrightarrow x=-3$

$$f(1) = \frac{10}{2} = 5$$

$$f(-3) = \frac{22}{-2} = -11$$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	▨	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-11	↘ $-\infty$	▨	$+\infty$ ↘	5	↗	$+\infty$

$f(-3)=-11$ قيمة حدية كبرى

$f(1)=5$ قيمة حدية صغرى

②

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+x+7 & x+1 \\ \hline \ominus 2x^2 \ominus\!+2x & 2x-1 \\ \hline 0 \quad -x+7 & \\ \oplus\!-x \ \oplus\!-1 & \\ \hline 0 \quad +8 & \end{array}$$

$$f(x)=2x-1+\frac{8}{x+1}$$

بالمطابقة

$a=2$
$b=-1$
$c=8$

③

$$h(x)=f(x)-(2x-1)$$

$$h(x)=2x-1+\frac{8}{x+1}-2x+1$$

$$h(x)=\frac{8}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x)=0$$

إذاً $\Delta : y=2x-1$ مقارب مائل لـ C_f
في جوار $\pm\infty$

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق

$$h(x)=\frac{8}{x+1}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h(x)$	−	▨	+
وضع نسبي	C يقع تحت Δ	▨	C يقع فوق Δ

Note :

شرط إثبات نقطة مركز تناظر (x_0, y_0)

- $x\in D_f \Longrightarrow 2x_0 - x\in D_f$
- $f(x)+f(2x_0-x)=2y_0$

④

$$I(\underset{x_0}{-1}, \underset{y_0}{-3})$$

$x\in R\setminus\{-1\} \Longrightarrow -x \in R\setminus\{1\}$
$-2-x\in R\setminus\{-1\}$

$f(x) + f(-2-x) = 2x - 1 + \frac{8}{x+1}$

$+ 2(-2-x) - 1 + \frac{8}{(-2-x)+1}$

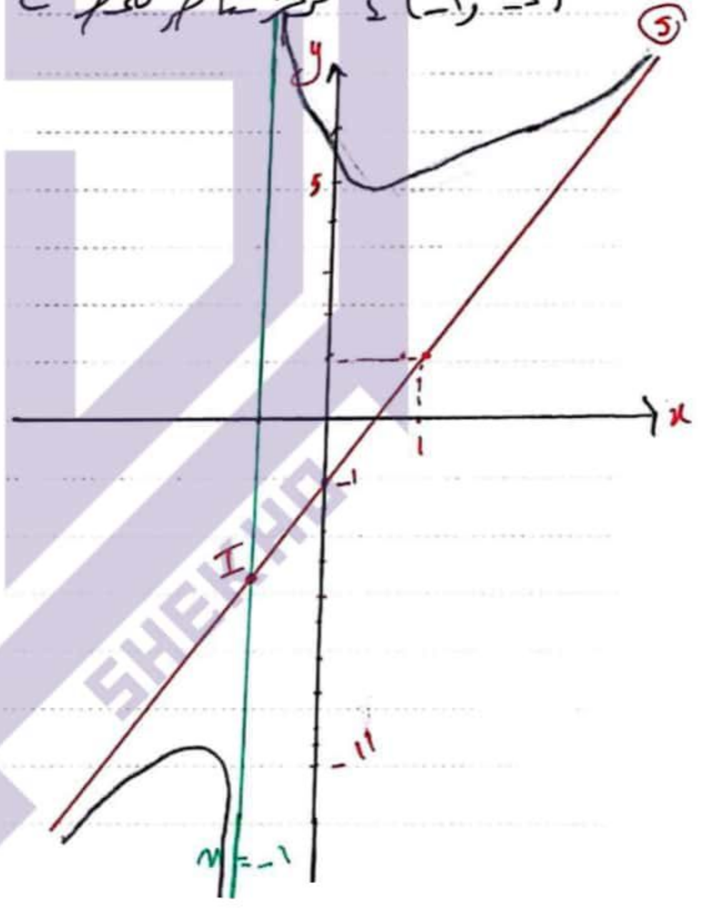
$= 2x - 1 + \frac{8}{x+1} - 4 - 2x - 1 + \frac{8}{-1-x}$

$= -6 + \frac{8}{x+1} - \frac{8}{x+1}$

$= -6 = 2y_0$

إذاً النقطة $I(-1, -3)$ مركز تناظر للخط C

⑤



⑥ $2x^2 + x - mx + 7 - m = 0$

$2x^2 + x + 7 = mx + m$

$2x^2 + x + 7 = m(x+1)$

$\frac{2x^2+x+7}{x+1} = m$

$f(x) = m$

عندما $m \in]-\infty, -11[$
للمعادلة حلان مختلفان فقط

عندما $m = -11$ للمعادلة حل واحد

عندما $m \in]-11, 5[$
المعادلة مستحيلة الحل

عندما $m = 5$
للمعادلة حل واحد

عندما $m \in]5, +\infty[$
للمعادلة حلان مختلفان فقط.