مقدمة:

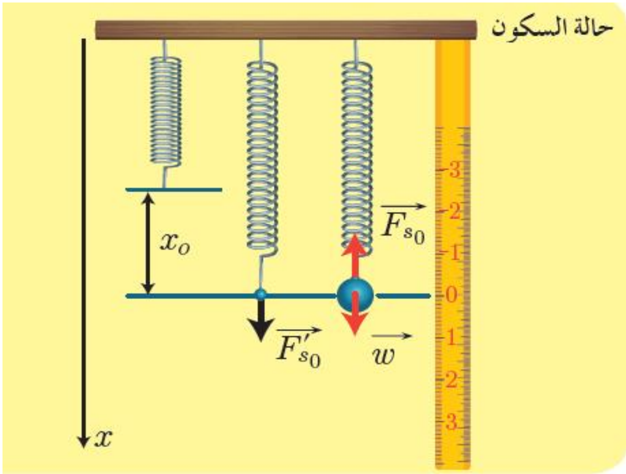
الجسم المرن: هو كل جسم يتغير شكله تغيراً مؤقتاً عندما نؤثر عليه بقوة خارجية ويزول هذا التغير بزوال القوة الخارجية المؤثرة عليه ويعود الى شكله الأصلي.

الحركة الاهتزازية : حركة جسم مهتز إلى جانبي نقطة ثابتة تسمى مركز الاهتزاز.

النواس المرن: هي حركة اهتزاز جسم صلب معلق بنابض مرن حلقاته متباعدة .

قوة الإرجاع:

1. حالة سكون:



الدراسة على مركز العطالة:

الجملة المدروسة : جملة (نابض ـ جسم معلق)

جملة المقارنة: خارجية.

القوى الخارجية المؤثرة: قوة الثقل $\vec{w}$ ، وقوة توتر النابض $\overrightarrow{F_{s_0}}$.

بما أن الجسم ساكن نطبق قانون نيوتن الأول:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{w} + \overrightarrow{F_{s_0}} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور موجه نحو الأسفل:

$$W - F_{s_0} = 0$$

$$W = F_{s_0} \dots . (1)$$

الدراسة على النابض:

يؤثر في النابض قوة شد $\overrightarrow{F_{s_0}'}$ تسبب له الاستطالة x_0 وتساوي قوة الثقل $\vec{w}$ بالتالي:

$$F_{s_0}' = k . x_0$$

$$F_{s_0}' = W \dots (2)$$

في المقارنة بين (1) و (2) :

$$F_{s_0}' = F_{s_0} = k . x_0$$

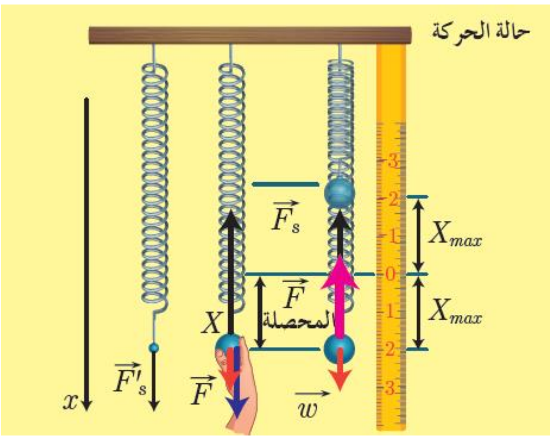
في التعويض في العلاقة (1) :

$$W = k . x_0$$

$$\Rightarrow m . g = k . x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{m . g}{k}$$

حيث x_0 : هي الاستطالة السكونية.

2. حالة حركة:



الدراسة على مركز العطالة:

الجملة المدروسة : جملة (نابض - جسم معلق)
جملة المقارنة: خارجية.
القوى الخارجية المؤثرة: قوة الثقل $\vec{w}$ ، وقوة توتر النابض $\vec{F_s}$.
نطبق قانون نيوتن الثاني (العلاقة الاساسية في التحريك الانسحابي) :

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{F_s} = m.\vec{a}$$

بالإسقاط على محور موجه نحو الأسفل:

$$w - F_s = m.a \ldots *$$

الدراسة على النابض:

يؤثر في النابض قوة شد $\overrightarrow{F_s'}$ تسبب له الاستطالة $(x + x_0)$ وتساوي قوة الثقل $\vec{w}$ بالتالي:

$$F_s' = k.(x + x_0)$$

$$F_s' = W$$

$$\Rightarrow F_s' = F_s = k.(x + x_0) \ldots (3)$$

نعوض (2) و (3) في * :

$$k.x_0 - k.(x + x_0) = m.a$$

$$k.x_0 - k.x - k.x_0 = m.a$$

$$-k.x = m.a$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F = -k.x}$$

نتيجة:
إن محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز في عطالة الجسم في كل لحظة هي قوة إرجاع لأنها **تعيد الجسم إلى مركز الاهتزاز دوماً**.

استنتاج طبيعة حركة النواس المرن:
انطلاقاً من قوة الإرجاع $[\bar{F} = -k\bar{X}]$ برهن أن حركة الجسم الصلب المعلق بالنابض في النواس المرن غير المتخامد حركة جيبية انسحابية (توافقية بسيطة) موضحاً دلالات الرموز للتابع الزمني.

$$\bar{F} = -kx \Rightarrow m.a = -k.x$$

لكن نعلم أن : $a = (x)''_t$ بالتالي:

$$m.(x)''_t = -k.x$$

$$\Rightarrow (x)''_t = -\frac{k}{m}.x \ldots (1)$$

وهذه معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من شكل :

$$X = X_{max}.cos(\omega_0 t + \varphi)$$

للتحقق من صحة الحل نشتق مرتين:

$$(x)'_t = v = -\omega_0 X_{max}.sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(x)''_t = a = -\omega_0{}^2 X_{max}.cos(\omega_0 t + \varphi)$$

بالتالي:

$$(x)''_t = -\omega_0{}^2.x \ldots (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أن:

$$-\omega_0{}^2.x = -\frac{k}{m}.x \Rightarrow \omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

m و kمقداران موجبان.
بالتالي حركة النواس المرن هي حركة جيبيه انسحابية. حيث:
X_{max} : سعة الاهتزاز (m)
ω_0 : النبض الخاص للحركة $(\text{rad}.s^{-1})$
φ : الطور الابتدائي في اللحظة $t=0$ (rad)
$(\omega_0 t + \varphi)$: طور الحركة في اللحظة t.

علاقة الدور الخاص :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

بما أن :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

بالمساواة نجد أن :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

وهذه هي علاقة الدور الخاص للنواس المرن غير المتخامد.
من العلاقة السابقة نستنتج أن:
- الدور لا يتعلق بسعة الاهتزاز X_{max}
- الدور يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض k
- الدور يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم المهتز m.

توابع الحركة في النواس المرن:

1. تابع المطال:

الشكل العام للتابع الزمني للمطال:

$$X = X_{max} cos(\omega_0 + \varphi)$$

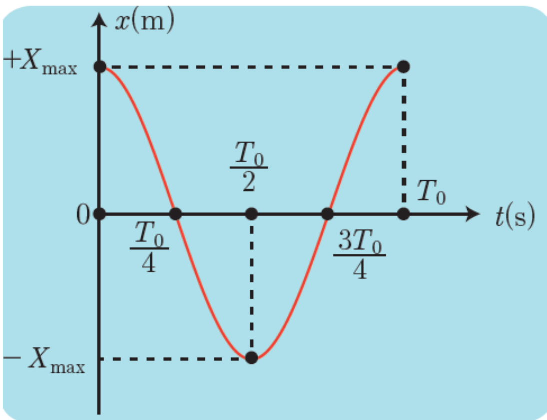
يجب تعيين ثوابت الحركة والذي تتمثل في المقادير : $(X_{max}, \omega_0, \varphi)$.

" يوجد شرح تفصيلي عن كيفية تعيين ثوابت الحركة في أخر الملف"

يكون تابع المطال أعظمي ؟ في الوضعين الطرفيين$\mp X_{max}$.

يكون تابع المطال معدوم ؟ في مركز الاهتزاز $x=0$.

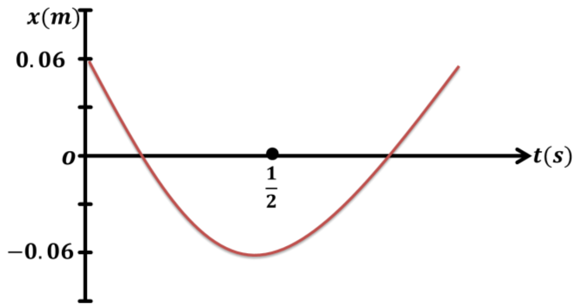
رسمة تابع المطال:



❖ **عند تعيين تابع المطال من الرسم:**

1. تكون قيمة φ (فاي) مساوية للصفر دائماً.
2. نأخذ قيمة X_{max} من المحور x.

مثال: عيين تابع المطال من الرسم البياني المجاور لتغيرات تابع المطال بدلالة الزمن:



الحل:

أولاً نكتب تابع المطال:

$$X = X_{max} cos(\omega_0 + \varphi)$$

حساب X_{max} من المحور x بالتالي:

$$X_{max} = 0.06m$$

حساب ω_0: نعلم أن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_O}$ ، لحساب T_O من محور الزمن :

$$\frac{T_O}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow T_O = 1sec$$

نعوض :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{1} \Longrightarrow \omega_0 = 2\pi \, rad.s^{-1}$$

حساب φ : فاي من الرسم تساوي الصفر بالتالي:

$$X = 0.06.\cos 2\pi t \ (m)$$

2. تابع السرعة:

تابع السرعة هو المشتق الأول لتابع المطال بالنسبة للزمن:

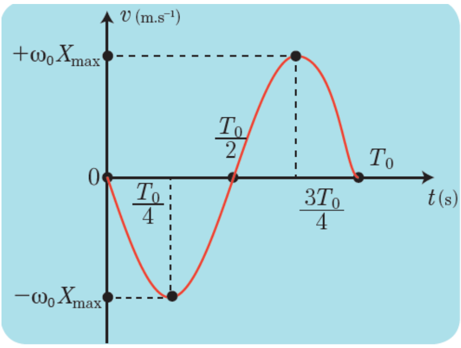
$$v = (x)'_t = [X_{max} cos(\omega_0 + \varphi)]'_t$$

$$\Longrightarrow v = -\omega_0.X_{max}.\sin(\omega_0 + \varphi)$$

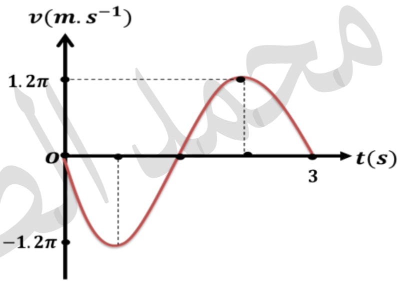
أين تكون السرعة عُظمى؟ في مركز الاهتزاز $x = 0$، ويكون : $v_{max} = |\mp\omega_0.X_{max}|$.

أين تنعدم السرعة؟ في في الوضعين الطرفيين $\mp X_{max}$.

رسمة تابع السرعة:



مثال: عيين تابع السرعة من الرسم البياني المجاور لتغيرات السرعة بدلالة الزمن:



الحل:

أولاً نكتب تابع السرعة:

$$v = v_{max}.\sin(\omega_0 + \varphi)$$

حساب v_{max} : من محور v يكون :

$$v_{max} = 1.2\pi \ m.s^{-1}$$

حساب حساب ω_0: نعلم أن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_O}$ ،

لحساب T_O من محور الزمن : $T_O = 3sec$

نعوض : $\omega_0 = \frac{2\pi}{3} \Longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3} rad.s^{-1}$

حساب φ : من الرسم يساوي للصفر دائماً.

يجب الأخذ بعين الاعتبار أن نأخذ إشارة السالب لأن انطلق التابع نحو السرعة الاعظمية السالبة:

$$v = -1.2\pi.\sin\frac{2\pi}{3}t \ (m.s^{-1})$$

3. تابع التسارع:

إن تابع التسارع هو المشتق الأول لتابع السرعة بالنسبة للزمن والمشتق الثاني لتابع المطال بالنسبة للزمن :

$$a = (v)'_t = (x)''_t$$

$$a = -\omega_0{}^2 . \boldsymbol{X_{max}} . \boldsymbol{cos(\omega_0 + \varphi)}$$

فيصبح قانون التسارع:

$$a = -\omega_0{}^2 . x$$

عندما يطلب حساب التسارع الأعظمي:

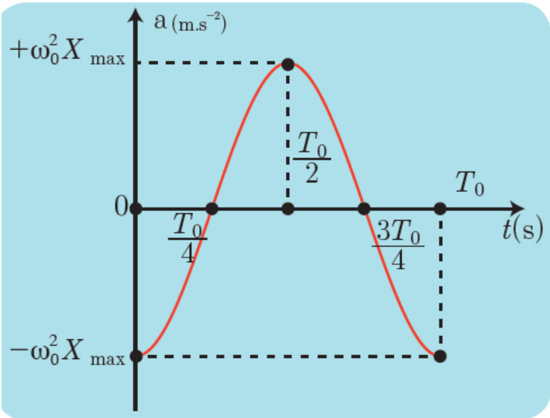
$$a_{max} = |\mp\omega_0{}^2 . X_{max}|$$

يكون التسارع أعظمي : في الموضعيين الطرفيين

يكون التسارع معدوم : في مركز الاهتزاز.

أن التسارع غير ثابت متغير بتغير قيمة المطال.

رسمة تابع التسارع:



الطاقة في الحركية التوافقية البسيطة :

استنتج علاقة الطاقة الميكانيكية للنواس المرن في الحركة التوافقية البسيطة غير المتخامد وبرهن أنها ثابتة ، وارسم المنحني البياني لتغيرات الطاقة الكامنة والطاقة الحركية.

$$E_{tot} = E_p + E_k \dots (*)$$

- إن الطاقة الكامنة المرونية تُعطى بالعلاقة:

$$E_p = \frac{1}{2}k . x^2$$

نعوض تابع المطال :

$$X = X_{max} cos(\omega_0 + \varphi)$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k . [X_{max} cos(\omega_0 + \varphi)]^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}k . X_{max}{}^2 . cos^2(\omega_0 + \varphi) \dots (1)$$

- الطاقة الحركية للجسم هي :

$$E_k = \frac{1}{2}m . v^2$$

نعوض تابع السرعة :

$$v = -\omega_0 . X_{max} . \sin(\omega_0 + \varphi)$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2}m[.-\omega_0 . X_{max} . \sin(\omega_0 + \varphi)^2]$$

$$E_k = \frac{1}{2}m . \omega_0{}^2 . X_{max}{}^2 . \sin^2(\omega_0 + \varphi)$$

لكن نعلم أن : $k = m . \omega_0{}^2$ فيصبح لدينا:

$$E_k = \frac{1}{2}k . X_{max}{}^2 . sin^2(\omega_0 + \varphi) \dots (2)$$

نعوض (1) و (2) في (*) :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}k . X_{max}{}^2 . cos^2(\omega_0 + \varphi) + \frac{1}{2}k . X_{max}{}^2 . sin^2(\omega_0 + \varphi)$$

نخرج $\frac{1}{2}k . X_{max}{}^2$ عامل مشترك:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}k . X_{max}{}^2 . [cos^2(\omega_0 + \varphi) + sin^2(\omega_0 + \varphi)]$$

نستفيد من العلاقة المثلثية :

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

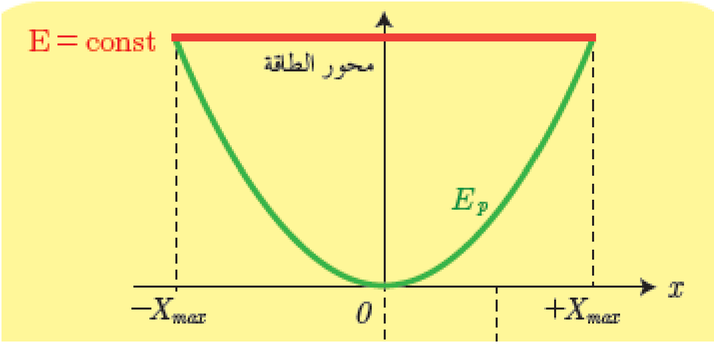
يصبح لدينا :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}k.X_{max}{}^2 = const.$$

فيكون القانون:

$$\boldsymbol{E_{tot} = \frac{1}{2}k.X_{max}{}^2}$$

الرسمة:



❖ **تكون الطاقة الكامنة:**

عُظمى في : الموضعين الطرفيين $\mp X_{max}$. **معدومة في :** مركز الاهتزاز $x = 0$.

❖ **تكون الطاقة الحركية:**

عُظمى في : مركز الاهتزاز $x = 0$. **معدومة في :** الموضعين الطرفيين $\mp X_{max}$.

فائدة في حل مسائل النواس المرن

أولاً: توابع الحركة

أ. تابع المطال:

يأخذ الشكل : $x = X_{max}.cos(\omega_o t + \varphi)$ ، تدعى $(X_{max}, \omega_0, \varphi)$ ثوابت الحركة ويجب تعينها عند الحل حيث تسمى X_{max} بسعة الاهتزاز وتقدر في m، وَ ω تسمى بالنبض الخاص للحركة وتقدر في $rad.s^{-1}$ ، وَ φ تسمى بالطور الابتدائي وتقدر في rad .

1) لتعيين سعة الاهتزاز:

تأخذ من نص المسألة صراحةً ، أو من العلاقة $v_{max} = |\pm\omega_o.X_{max}|$ ، أو من

$$X_{max} = \frac{\text{طول القطعة المستقيمة}}{2}$$

2) لتعيين النبض الخاص للحركة:

يمكن تعين النبض الخاص من هذه العلاقات : $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ، $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$ ، وعلاقة v_{max}.

حيث تسمى k بثابت صلابة النابض وتقدر في $N.m^{-1}$ ، وَ m الكتلة تقدر في kg ، وَ T_O الدور الخاص ويقدر في s .

3) لتعيين الطور الابتدائي:

ننطلق من الشروط الابتدائية المعطاة في نص المسألة والتي تتمثل في هذه المقادير $(t=?,x=?,v=?)$ وهنا نميز هذه الحالات:

الحالة الأولى: يبدأ في اللحظة الزمنية $t=0$ وهو يتحرك بالاتجاه الموجب للمطال الأعظمي الموجب . تكون آلية الحل نكتب $t=0, x=+X_{max}$ ونعوض في تابع المطال فيصبح

$$X_{max}=X_{max}.cos\varphi \Rightarrow cos\varphi=1 \Rightarrow \varphi=0rad$$

الحالة الثانية: يبدأ في اللحظة الزمنية $t=0$ وهو يتحرك بالاتجاه السالب للمطال الأعظمي السالب. تكون آلية الحل نكتب $t=0, x=-X_{max}$ ونعوض في تابع المطال فيصبح

$$-X_{max}=X_{max}.cos\varphi \Rightarrow cos\varphi=-1 \Rightarrow \varphi=\pi\ rad$$.

الحالة الثالثة: يبدأ في اللحظة الزمنية $t=0$ ويتحرك في $x=\frac{X_{max}}{2}$. تكون آلية الحل نكتب $t=0, x=\frac{X_{max}}{2}$ ونعوض في تابع المطال فيصبح

$$\frac{X_{max}}{2}=X_{max}.cos\varphi \Rightarrow \frac{1}{2}=cos\varphi \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3}\ rad$$

الحالة الرابعة: يبدأ في اللحظة الزمنية $t=0$ وهو في مركز الاهتزاز . تكون آلية الحل نكتب $x=0\ ,t=0$ ونعوض في تابع المطال فيصبح :

$$0=X_{max}.cos\varphi \Rightarrow cos\varphi=0 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}\ rad$$

❖ **دائماً نأخذ إشارة φ عكس إشارة تحرك السرعة.**

ب. تابع السرعة:

يأخذ الشكل : $v=-\omega_o X_{max} sin(\omega_0+\varphi)$ ، حيث تسمى أيضاً المقادير $(X_{max},\omega_0,\varphi)$ بثوابت الحركة ويجب تعيينهم كما تعلمنا في فقرة تابع المطال

ولكن هنا تُضاف فكرة تحديد حركة النابض في الاتجاه (السالب / الموجب) من أجل ذلك

يكون الحل كالآتي . عندما نوجد قيمة φ نعوضها في تابع السرعة .

ملاحظة: عند تعويض قيمة الطور الابتدائي في التابع لاننسى إشارة الناقص الموجودة في التابع

جـ . التسارع:

التسارع هو المشتق الثاني لتابع المطال أو المشتق الأول لتابع السرعة بالنسبة للزمن

في المسائل لايُطلب تحديد تابع التسارع ولكن يطلب حساب قيمة التسارع ويكون الحل من هذه العلاقة . $a = -\omega_0^2 . x$ ، حيث يسمى الرمز a بالتسارع ويقدر في $m.s^{-2}$.

ثانياً: الدور الخاص للحركة

يتم حساب الدور الخاص للحركة من أكثر من قانون: $T_O = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ أو يمكن من قانون

$T_o = \frac{t}{N}$ ، حيث تسمى t بزمن الاهتزاز ويقدر في s ، وَ N تسمى بعدد الهزات وليس لها واحدة يمكن أن نعبر عنها في كلمة هزة أو يمكن من هذا القانون $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$

ثالثاً: ثابت صلابة النابض

يتم حساب ثابت صلابة النابض من أكثر من قانون : $k = \frac{4\pi^2 . m}{T^2{}_o}$ ، او يمكن من القانون

$k = \frac{2E}{X^2{}_{max}}$ ، حيث تسمى E بالطاقة الميكانيكية وتقدر في J ، ويمكن من القانون

$k = \frac{2E_p}{x}$ ، حيث تسمى E_p بالطاقة الكامنة المرونية وتقدر في J ،ويمكن من القانون

$k = m.\omega_0^2$.

رابعاً: قوة الإرجاع

يتم حساب قوة الإرجاع من القانون : $F = -k.x$ ، وكما يمكن أن يطلب حساب شدة قوة الإرجاع فنكتب : $F = |-k.x|$ ، حيث يسمى F بقوة الإرجاع ويقدر في N

خامساً: الطاقات

أ. الطاقة الحركية : $E_k = \frac{1}{2} m.v^2$ وتقدر في J

ب. الطاقة الكامنة المرونية: $E_p = \frac{1}{2} k.x^2$ وتقدر في J

الطاقة الميكانيكية (الكلية): $E = E_P + E_K \backslash E = \frac{1}{2} k.X_{max}^2$ ، نعلم أن الطاقة الميكانيكية هي مقدار ثابت (مصون \ محفوظ).

ملاحظة : يمكن حساب السرعة من هذا القانون بدلالة المطال : $v = \omega_0 . \sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

سادساً: تعيين لحظات المرور في وضع التوازن

$$cos(\omega_o t + \varphi) = 0 \Rightarrow (\omega_0 + \varphi) = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

حيث : $k = 0,1,2,3 \ldots \ldots \ldots \ldots$

سابعاً: الاستطالة السكونية

يتم حساب الاستطالة السكونية من هذه القوانين:

$$\omega = F_{so} \Rightarrow m.g = kx_o \Rightarrow x_o = \frac{m.g}{k} \Rightarrow x_o = \frac{m.g}{m.\omega_o^2} = x_o = \frac{g}{\omega_o^2}$$

ملاحظة: في المسألة الثانية عامة يطلب حساب القوة العظمى من هذا القانون

$F_{max} = m.a_{max}$.

ملاحظات الطالب: