أتمتة منهاج رياضيات البكالوريا السورية

الجزء الثاني: الوحدة الثالثة

اختبار المستقيمات والمستويات في الفراغ

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

مصطفى الرزوق   أمين الحايك

تنسيق وإخراج: أمين الحايك

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محيي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبو نبوت	فيصل خالد
محمد السيد علي	هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان
زينب يوسف	حسام قاسم	خالد الحداد	فادي المحمد
يوسف منصور	نادر أبو راس	محمد زين جعرور	فادي طنوس
زكي طحاوي	أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة
محمد العيسى	مصطفى الرزوق	صلاح سالم	عبد السلام حسن

1

ABC مثلث والنقطة E تقع في المستوي (ABC) وتحقق:

$$\overrightarrow{AE} - 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

وهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{a}), (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{C}, \boldsymbol{c})$

عندئذ إحدى القيم الممكنة للثلاثية (a, b, c) تساوي:

A		B		C		D		E	
A	$(3,2,-4)$	B	$(1,3,-4)$	C	$(-4,3,2)$	D	$(2,3,-4)$	E	$(-6,4,3)$

الحل:

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$$

E مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{C}, \boldsymbol{-4}), (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{1} - (\boldsymbol{3} - \boldsymbol{4}))$ أي $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{2})$

إعداد : م. مهران زنيبه	الجواب : D	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

2

المستقيم d معرف وسيطيا وفق: $t \in \mathbb{R}$; $d: \begin{cases} x = at - 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 2t \end{cases}$ و يمر بالنقطة $A(-2,5,2)$

فتكون قيمة a

A		B		C		D		E	
A	-2	B	-1	C	0	D	1	E	2

الحل:

$$z_A = 2t \Longrightarrow 2 = 2t \Longrightarrow t = 1$$

$$x_A = at - 1 \Longrightarrow -2 = a(1) - 1 \Longrightarrow a = -1$$

إعداد : م. محسن الحسين	الجواب : B	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

3

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن النقاط: $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,1)$.

إن بعد النقطة O عن المستوي (ABC) يساوي:

A		B		C		D		E	
A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{2}{3}$	C	1	D	$\frac{3}{2}$	E	2

الحل:

بفرض $dist(O, (ABC)) = h$ ولدينا: $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ فإن:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Longrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} \Longrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{9}{4} \Longrightarrow h = \frac{2}{3}$$

إعداد : د. محمد غوش	الجواب : B	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

4	$ABCD$ رباعي وجوه. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,2)\,,(B,2),(C,2),(D,3)$ والنقطة M مركز ثقل المثلث ABC عندئذ تكون قيمة العدد الحقيقي a التي تحقق: $\overrightarrow{MG}=a\overrightarrow{MD}$ تساوي:

A	$\frac{1}{3}$	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{2}{3}$	D	2	E	3

نحو الحل:

حسب الخاصة التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(D,3)$ و $(M,6)$.

$$\overrightarrow{MG}=\frac{3}{3+6}\overrightarrow{MD}\Rightarrow\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}$$

إعداد : م. مازن علي	الجواب : A	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

5	في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا المثلث ABC حيث $A(1,0,-4)\,,\ B(1,-1,-2)\,,\ C(3,2,2)$ إن أحد التمثيلات الوسيطية للمستقيم Δ المنطبق على المتوسط النازل من B على الضلع $[AC]$:

A	$\begin{cases}x=t+1\\ y=2t-1\\ z=t-2\end{cases};\ t\in\mathcal{R}$	B	$\begin{cases}x=t+2\\ y=2t+1\\ z=t-1\end{cases};t\in[0,+\infty[$	C	$\begin{cases}x=2t+1\\ y=t+2\\ z=-t+1\end{cases};\ t\in\mathcal{R}$
D	$\begin{cases}x=-t+1\\ y=-2t\\ z=-t-4\end{cases};\ t\in[0,1]$	E	$\begin{cases}x=2t+2\\ y=2t+1\\ z=6t-1\end{cases};t\in\mathcal{R}$		

نحو الحل:

لدينا النقطة $I(2,1,-1)$ منتصف $[AC]$

وبالتالي شعاع توجيه المستقيم Δ يكون: $\overrightarrow{BI}(1,2,1)$ و $t\in\mathcal{R}$

إعداد : م . محي الدين اسماعيل	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

6	في معلم متجانس $\left(O;\frac{1}{3}\overrightarrow{OA},\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ معادلة المستوي (ABC) قد تكون:

A	$3x+2y+z-1=0$	B	$x+y-z-3=0$	C	$x+y+z-2=0$
D	$3x+2y+z-9=0$	E	$2x+3y+6z-6=0$		

نحو الحل:

لدينا: $C(0,0,1)\quad B(0,2,0)\ ,\ A(3,0,0)$

معادلة المستوي (ABC): $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$

وبالتالي $2x+3y+6z-6=0$

إعداد : م . يوسف منصور	الجواب : E	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

7	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستويات الثلاثة P_1 و P_2 و P_3 التي معادلاتها: $P_1: x-y+2z=1 \quad , \quad P_2: -x+y-2z=-2 \quad , \quad P_3: -x+y+2z=3$ عند دراسة الوضع النسبي لهذه المستويات نجد أن مجموعة النقاط المشتركة بينها تمثّل:

A		B		C		D		E	
A	نقطة وحيدة	**B**	المستوي P_1	**C**	مجموعة خالية	**D**	نصف مستقيم	**E**	مستقيم

نحو الحل:

واضح أن المستويين P_1 و P_2 متوازيان تماماً (غير منطبقين)

وبالتالي فإن مجموعة النقاط المشتركة بين المستويات الثلاث هي مجموعة خالية

إعداد : م. مصطفى الرزوق	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

8	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستويان: $Q: y+z-2=0 \quad , \quad p:\ x+2z+1=0$ إن التمثيل الوسيطي للفصل المشترك للمستويين P , Q يمكن أن يكون:

A	$\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathcal{R}$	**B**	$\begin{cases} x=-t-1 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathcal{R}$	**C**	$\begin{cases} x=-t+2 \\ y=-2t-1 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathcal{R}$
D	$\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-1 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathcal{R}$	**E**	$\begin{cases} x=-2t-1 \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathcal{R}$		

نحو الحل:

$$P \Rightarrow x=-2z-1$$

$$Q \Rightarrow y=-z+2$$

نفرض $z=t$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك:

$$\begin{cases} x=-2t-1 \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathcal{R}$$

إعداد : م . خالد الحداد	الجواب : E	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

9	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستويات الثلاثة P_1 و P_2 و P_3 التي معادلاتها: $P_1: x+z=1$, $P_2: y+z=2$, $P_3: x+y-z=3$ تتقاطع هذه المستويات بنقطة إحداثياتها:								
A	$(-2,-1,3)$	**B**	$(0,1,2)$	**C**	$(2,3,-1)$	**D**	$(1,2,0)$	**E**	$(1,-2,0)$
الحل	$P_1 \Rightarrow x = 1 - z$ $P_2 \Rightarrow y = 2 - z$ بالتعويض في P_3 نجد أن: $1 - z + 2 - z - z = 3 \Rightarrow z = 0$ وبالتالي: $x = 1$, $y = 2$								
	إعداد : م. فادي المحمد			الجواب : D			كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك		

10	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن المستوي P الذي معادلته: $P: x+y-z+1=0$ وليكن المستقيم d المار من النقطة $A(1,2,3)$ ويعامد المستوي P عندئذ فإن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d يعطى بالشكل:				
A	$\begin{cases} x=-t+1 \\ y=-t+2 \\ z=-t+3 \end{cases} ; t\in\mathcal{R}$	**B**	$\begin{cases} x=1 \\ y=t+1 \\ z=4t+3 \end{cases} ; t\in\mathcal{R}$	**C**	$\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t+1 \\ z=3t-1 \end{cases} ; t\in\mathcal{R}$
D	$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+1 \\ z=-t-1 \end{cases} ; t\in\mathcal{R}$	**E**	$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+2 \\ z=-t+3 \end{cases} ; t\in\mathcal{R}$		
الحل	شعاع توجيه المستقيم d هو ناظم المستوي P حيث $\vec{n}(1,1,-1)$ والمستقيم d يمر من النقطة $A(1,2,3)$ .... وبالتالي: $(d)\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+2 \\ z=-t+3 \end{cases} ; t\in\mathcal{R}$				
	إعداد : م . هيثم ديوب		الجواب : E		كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

11

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل المستوي P المعطى بالمعادلة:

$$P: 2x-2y+\alpha z+3=0$$

والمستقيم d المعطى بالتمثيل الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases} \quad ; \quad t\in\mathbb{R}$$

إن قيمة العدد الحقيقي α التي يكون من أجلها المستقيم d موازياً للمستوي P هي:

A		B		C		D		E	
	-4		-2		-1		2		4

نحو الحل

بما أن المستقيم d يوازي المستوي P عندئذ $\vec{v}_d$ شعاع توجيه المستقيم d يتعامد مع $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_d(1,-1,2) \\ \vec{n}_P(2,-2,\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{v}_d=0$$

$$\Rightarrow (2)(1)+(-2)(-1)+(2)(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha=-2$$

إعداد : م. عبدالله مصطفى حناوي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

12

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستقيم d المعطى بالتمثيل الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x=t+1 \\ y=t-2 \\ z=3t \end{cases} \quad ; \quad t\in\mathbb{R}$$

والمستوي P المعطى بالمعادلة: $P: 2x+ay-z+b=0$ حيث a و b عددان حقيقيان .

إذا علمت أن المستقيم d محتوى بالمستوي P فإن الثنائية (a,b) تساوي:

A		B		C		D		E	
	$(0,1)$		$(-1,4)$		$(-1,-4)$		$(1,0)$		$(-1,0)$

نحو الحل

نعوض d في P :

$$2t+2+at-2a-3t+b=0$$

$$(a-1)t+b-2a+2=0 \xrightarrow{\text{بالمطابقة}} \begin{cases} a-1=0 \\ b-2a+2=0 \end{cases}$$

بالحل المشترك نجد $b=0$ و $a=1$

إعداد : م. باسل سطمة	الجواب : D	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

13	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. الكرة S التي معادلتها $x^2+y^2+(z-2)^2=4$ تقطع المستوي P الذي معادلته $2x+y-2z+d=0$ وفق دائرة نصف قطرها $r=\sqrt{3}$ ...... عندئذ تكون إحدى قيم d هي:								
A	-7	***B***	-1	***C***	0	***D***	1	***E***	2
نموذج الحل	مركز الكرة $A(0,0,2)$ ونصف قطرها $R=2$ $dist(A,P)=\dfrac{\lvert 0+0-4+d\rvert}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{\lvert d-4\rvert}{3}$ $R^2=[dist(A,P)]^2+r^2 \Longrightarrow 4=\dfrac{(d-4)^2}{9}+3 \Longrightarrow (d-4)^2=9$ إما $d=7$ أو $d=1$								
إعداد : م. أحمد ذياب الرفاعي				**الجواب : D**				**كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق**	

14	ليكن المستقيمان: $d:\begin{cases}x=3t-4\\y=-t+3\\z=7t-5\end{cases}\ ;\ t\in\mathbb{R}$ و $\Delta:\begin{cases}x=-6s+2\\y=2s+1\\z=-14s+m\end{cases}\ ;\ s\in\mathbb{R}$ عندئذ قيمة m التي تجعل المستقيمين منطبقين هي:								
A	-9	***B***	-2	***C***	1	***D***	3	***E***	9
نموذج الحل	نأخذ نقطة من d من أجل $t=0$ فتكون $(-4,3,-5)$ نعوض في Δ : $x=-6s+2 \Longrightarrow -4=-6s+2 \Longrightarrow s=1$ $z=-14s+m \Longrightarrow -5=-14(1)+m \Longrightarrow m=9$								
إعداد : م. حسن علي سليمان				**الجواب : E**				**كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق**	

15	نتأمل المستقيمين: $d:\begin{cases} x = t-1 \\ y = 3t-4 \\ z = -t+1 \end{cases} : t \in \mathcal{R}$, $d':\begin{cases} x = 2s-1 \\ y = 3s+a \\ z = s-2 \end{cases} : s \in \mathcal{R}$ إن قيمة a التي تجعل المستقيمين d' و d متقاطعين هي:

A		B		C		D		E	
	-3		-2		-1		0		1

نحو الحل

بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين نجد:

$$\begin{aligned} t-1 &= 2s-1 \quad (1) \\ 3t-4 &= 3s+a \quad (2) \\ -t+1 &= s-2 \quad (3) \end{aligned}$$

بجمع (1) و(3) نجد:

$$-3s = -3 \quad \Rightarrow \quad s = 1$$

نعوض في (1) نجد: $t = 2$ وبالتالي حسب (2): $a = -1$

إعداد : م. موسى حجيج / أبو نزار	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

16	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعرف المستوي $P: x+y+z-1=0$ والكرة S التي مركزها $A(-2,0,0)$ إذا كان المستوي P يقطع الكرة S في دائرة مركزها H. فإن إحداثيات H هي:

A		B		C		D		E	
	$(0,2,2)$		$(-1,1,1)$		$(1,0,0)$		$(2,1,-2)$		$(-1,2,0)$

نحو الحل

H هي المسقط القائم لـ A على P :

$$d \perp P \Longrightarrow \vec{u}_d = \vec{n}_P = (1,1,1) \Longrightarrow d:\begin{cases} x = t-2 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

نعوض d في P فنجد $t = 1$ إذاً $H(-1,1,1)$

إعداد : م. نور الدين صندفي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

17

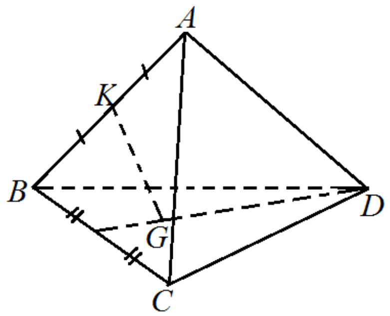
$ABCD$ رباعي وجوه والنقطة G هي مركز ثقل المثلث BCD

والنقطة K منتصف $[AB]$

ولتكن النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(D,2)$, $(C,2)$, $(B,3)$, $(A,1)$

عندئذ النقطة H تحقق العلاقة: $\overrightarrow{KH} = \lambda \cdot \overrightarrow{KG}$ عندئذ قيمة λ هي:



A	B	C	D	E
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	2

نحو الحل

النقطة K منتصف $[AB]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$

النقطة G مركز ثقل المثلث BCD فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$

النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$, $(B,1)$, $(B,2)$, $(C,2)$, $(D,2)$

حسب الخاصية التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(G,6)$ و $(K,2)$

وبالتالي: $\overrightarrow{KH} = \frac{6}{6+2}\overrightarrow{KG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{KG}$

إعداد : م. فادي طنوس	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

18

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ كرة مركزها $A(1,-3,0)$ وتمس المستوي: $P: x - 2y + z = 1$

عندئذ إحداثيات نقطة التماس هي:

A	B	C	D	E
$(0,-1,-1)$	$(1,1,-1)$	$(2,-5,1)$	$(4,2,1)$	$(1,1,2)$

نحو الحل

بفرض النقطة B نقطة التماس وبالتالي يكون $(AB) \perp P$

وبالتالي ناظم المستوي $\overrightarrow{n_P}(1,-2,1)$ هو شعاع توجيه المستقيم (AB) وبالتالي نجد:

$$(AB): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 3 \\ z = t \end{cases} : t \in \mathcal{R}$$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي نجد:

$$(t+1) - 2(-2t-3) + (t) = 1 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

وبالتالي إحداثيات النقطة B: $(0,-1,-1)$

إعداد : م. محمد السيد علي	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

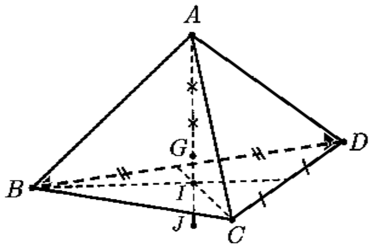
19

$ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G

I مركز ثقل المثلث BCD والنقطتان G و J متناظرتان بالنسبة إلى I

قيمة $\propto$ لتكون النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(D,1)\,,(C,1)\,,(B,1)\;\;,(A,\propto)$



A		B		C		D		E	
	$\frac{-3}{5}$		$\frac{-5}{3}$		$\frac{-2}{5}$		$\frac{-1}{5}$		$\frac{-5}{4}$

نحو الحل

من الشكل لدينا: $\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AI}$

وبالتالي النقطة J: مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,5)$ و $(A,-1)$

وبما أن النقطة I مركز ثقل المثلث BCD نضرب الأثقال بـ $\frac{3}{5}$

فتكون النقطة J: مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,3)$ و $\left(A,-\frac{3}{5}\right)$

وبالتالي $\propto=\frac{-3}{5}$

إعداد : م. رياض الحسين	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

20

في الفضاء المنسوب لمعلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن لدينا تمثيلاً وسيطياً للقطعة المستقيمة $[AB]$:

$$[AB]\begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 4t + \dfrac{3}{2} \\ z = 4t \end{cases} \quad ; \quad t \in [0,1]$$

فإن معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هي:

A	$x + 2y + 2z = 0$	**B**	$x + 2y + 2z - 20 = 0$	**C**	$x + 2y + 2z - 10 = 0$
D	$x + 2y + 2z - 5 = 0$	**E**	$x + 2y + 2z + 5 = 0$		

نحو الحل

نوجد إحداثيات طرفي القطعة المستقيمة $[AB]$ ثم إحداثيات M منتصف $[AB]$.

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \Rightarrow A\left(-2,\dfrac{3}{2},0\right) \\ t = 1 \Rightarrow B\left(0,\dfrac{11}{2},4\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow M\left(-1\,,\dfrac{7}{2}\,,2\right)\,, \qquad \overrightarrow{AB}(2,4,4) \Rightarrow \vec{n}(1,2,2)$$

ومنه معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هي:

$$1(x+1) + 2\left(y - \frac{7}{2}\right) + 2(z-2) = 0$$

$$x + 2y + 2z - 10 = 0$$

ملاحظة: يمكن إيجاد إحداثيات النقطة M بتعويض $t = \frac{1}{2}$ في التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة $[AB]$ ثم نتابع الحل.

إعداد : م . يونس حمود	الجواب : C	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق