الوحـدة الأولـــى

الحلقـة و الحقـــل

مقدمـــة: مر معنا (س ، c) نظام جبري ذو عملية واحدة.

لقد وجدنا من خواص النظام :

1- الخاصة التبديلية: ∀س، ص ∈ س فإن س c ص = ص c س

2- الخاصة التجميعية: ∀س ،ص ، ع ∈ س

س c(ص c ع) = (س c ص) c ع

3- خاصية المحايد: (و) ∀ س ∈ س . فإن س c و = و c س = س

4- خاصية النظير: ∀س ∈ س لنفرض نظيره س̄

س c س̄ = س̄ c س = و

وفي هذا العام سنتعرف على النظام ذو العمليتين :

تعريف: (س، c، O) نظام ذو عمليتين إذا كان كل من :

c ، O عملية ثنائية ولكل منها خصائصها .

وهناك خصائص مشتركة بينهما منها التوزيع ويقسم إلى قسمين:

أولاً : التوزيع من اليمين س O(ص c ع)=(س O ص) c (س O ع)

ثانياً : التوزيع من اليسار (ص c ع) O س=(ص O س) c (ع O س)

ثالثاً : إذا كانت O تبديليه وكانت توزيعة من اليمين :

قلنا O توزيعي على c ويصبح شرط التوزيع

س O (ص c ع)=(س O ص) c (س O ع)

توضيح: لنعرف على ح العمليتين c ، O بالشكل

∀س،ص ∈ ح فإن س c ص = $\frac{س+ص}{2}$

س O ص= ص . والمطلوب

1) هل O توزيعي على c   2) هل c توزيعي على O

<u>الحل:</u>

1- الشرط: س O (ص c ع) = (س O ص) c (س O ع) .

الطرف الأيمن: س O (ص c ع) = س O ($\frac{ص+ع}{2}$)= $\frac{ص+ع}{2}$

الطرف الأيسر: (س O ص) c (س O ع) = ص c ع = $\frac{ص+ع}{2}$

لاحظ الأيمن = الأيسر ∴ O توزيعي من (اليمين) على c

نفس الشرط لكن من اليسار

(س c ص) O ع=(س O ص) c (ص O ع)

الطرف الأيمن (س c ص) O ع= $\frac{ص+ع}{2}$ O ع = ع

الطرف الأيسر (س O ع) c (ص O ع) =ع c ع= $\frac{ع+ع}{2}$ $\frac{2ع}{2}$ ع

نعم O توزيعي على c من اليسار ∴ O توزيعي على c

2- بما أن c تبديلي يكفي اختيار التوزيع من جهة واحده

شرط التوزيع من اليمين س c (ص O ع)=(س c ص) O (س c ع)

الطرف الأيمن س c (ص O ع) = س c ع = $\frac{س+ع}{2}$

الطرف الأيسر (س!ص) O (س c ع) = $\frac{س+ص}{2}$ O $\frac{س+ع}{2}$

= $\frac{س+ع}{2}$ = الطرف الأيمن. ∴! توزيعي على O

تماريـــن ومسائـــل(1-1)

[1] بين أياً من الأنظمة الرياضية التالية يمثل زمرة

أ) (ح!,+)لا يمثل زمرة لغياب (الصفر)الذي هو العنصر الحيادي.

ب) (ح!،×) يمثل زمرة لأن (×)الضرب العادي تجميعي وتبديلي.

والمحايد الضربي(1) ولكل عنصر نظير أو مقلوب.

جـ) (ص$_8$,⊕) زمرة . بشكل عام(ص$_ن$,⊕) زمرة

د) (ص$_{11}$,⊗) ليست زمرة لوجود. ∋ ص$_{11}$ ليس له نظير.

هـ) (ص!$_{11}$, ⊗) زمرة لأن (11) أولي

[2] ليكن (ح!,O)نظاماً رياضياً تجميعياً حيث العملية O معرفة على ح!كالتالي

س O ص =3س ص ∀س,ص ∋ ح! فأثبت أن(ح! ,O) زمرة تبديليه.

الحــل:

- الخاصة التبديلية : ∀س,ص ∋ ح!

$$\left.\begin{array}{l}\text{س O ص} = 3\text{س ص}\\ \text{ص O س} = 3\text{ص س}\end{array}\right\} \Rightarrow$$ **س O ص = ص O س** ⇐ O **إبداليـة.**

- الخاصة التجميعية (معطاة)
- خاصية المحايد (و) ∀ س ∋ ح! يكون س O و= س

3س و= س ⇐ و = $\frac{\text{س}}{3\text{س}} = \frac{1}{3}$ ∋ ح !

- خاصية النظير: ∀س ∋ ح! نفرض نظيره س فيكون

س O س‾ = و ⇐ 3س س‾ = $\frac{1}{3}$ ⇐ س‾ = $\frac{1}{9\text{س}}$ قانون النظير

∴ (ح !,O) زمرة تبديليه.

[3] أذا كان كل من النظامين (ص$_6$,⊕) , (ص!$_{11}$, ⊙) زمرة تبديليه فأوجد

حل المعادلات.

أ) المعادلة س $\oplus 2 = 1$ في (ص$_6$, $\oplus$).

الحـل:

س$= 2 \oplus \bar{1} = 4 \oplus 1 =$ باقي ($\frac{4+1}{6}$)$=$ باقي($\frac{5}{6}$) $=5$

$\therefore$ س $= 5$ أنتبه نظير كل عنصر [العنصر الذي يكمله إلى (6)]

ب) المعا دله $6 \odot$ س$=4$ في الزمرة (ص$_7$, $\odot$)

الحل: $6 \odot$ س $= 4$

$\therefore$س$= \bar{6} \odot 4 = 6 \odot 4$

$=$ باقي($\frac{4\times 6}{7}$) $=$ باقي ($\frac{24}{7}$) $= 3$ $\therefore$ س $= 3$

طبعاً $\bar{6}=6$
لأن $6 \odot 6 =$ باقي ($\frac{6\times 6}{7}$)$=1$

4- لنعرف على نَ العمليتين c , O على النحو التالي

س! ص= س+ ص−1

سO ص= س+ ص− س ص

أ) هل (نَ ، c ، O) نظام ذو عمليتين .

الحل: $\forall$س ، ص ∋ نَ فإن س+ ص ∋نَ $\Leftarrow$ س+ ص− ∋ 1نَ

$\Leftarrow$ س c ص ∋ ن عملية ثنائية .

$\forall$س ، ص ∋ نَ $\Leftarrow$س+ص ∋ نَ
س×ص ∋ نَ $\Big\}$ $\Leftarrow$ س+ص− س ص ∋ نَ

$\Leftarrow$سO ص ∋ نَ $\Leftarrow$ O عملية ثنائية .

$\therefore$ (نَ ، c ، O) نظام ذو علميتين .

ب) هل c تتوزع على العملية O

طالما c تبديلي ⇐ شرط التوزيع س c (ص O ع) =(س c ص) O (س c ع)

الطرف الأيمن: س c (ص O ع) = س c (ص+ع− ص ع)

= س+ص+ع−ص ع −1

الطرف الأيسر:(س c ص) O (س c ع)=(س+ص−1) O (س+ع−1)

= س + ص −1 + س+ع−1− (س+ص−1)(س+ع−1)

واضح الأيمن ≠ الأيسر ⇐ c غير توزيعي على O.

ج) هل العملية O تتوزع على العملية c ؟

طالما O تبديلي يكون شرط التوزيع س O (ص c ع)=(س O ص) c (س O ع)

الطرف الأيمن: س O (ص c ع) = س O (ص+ع−1)

= س + ص + ع − 1 − س(ص+ع−1)

= س + ص + ع − 1 − س ص − س ع + س

الأيسر (س O ص) c (س O ع) = (س+ ص− س ص) c (س+ع−س ع)

= س + ص − س ص+ س+ ع − س ع −1= الأيمن ∴ O توزيعي على c

[5] ليكن (س, c) نظاماً رياضياً ذا عملية وليكن أ,ب,جـ ∋ س.

بحيث أ c ب =أ c جـ فهل من الضروري أن يكون ب=جـ؟ولماذا؟

الحـل: كـلا ولنقض الشيء يكفي مثال

في $(ص_6, \odot)$ $3 \odot 4 = 3 \odot 2 = 0$ لكن $4 \neq 2$

---

[6] في الزمرة المنتهية يمكننا تمثيل عملياتها في جدول

فسر لماذا لا يتكرر عنصر ما في سطر أو عمود واحد ؟

الحـل: لنفرض س ={ أ,ب,جـ,د,هـ...... ل} ن عنصراً مختلفاً

c	أ	ب	جـ	د	هـ....... ل
أ	أ c أ	أc ب	أc جـ	أc د	أ c هـ
ب	ب c أ	بc ب	بc جـ		ب c ل

لنفرض أ c ب = أ c جـ فحسب خواص الزمرة يمكن الاختصار

⇐ ب = جـ وهذا تناقض لأن عناصر س مختلفة

****

7) ليكن ({9},c) نظاماً رياضياً ذا عملية c

c	9
9	9

أ – أوجد 9c9

ب – هل العملية c تبديليه

الحل: 9c9=9

الحل: العنصر يتبدل مع نفسه

جـ – هل c تجميعية على{9}

الحــل:

• 9 c (9c9) = 9c 9=9

• (9c 9) c 9= 9c 9= 9 =9

⇐ ! **تجميعي**

د – هل للنظام محايد ؟

الحـل: الجواب نعم هو (9) نلاحظ 9 c 9=9

هـ– هل للنظام زمرة ؟

الحل: بما أن نظير (9) هو (9) ∴ كل شروط الزمرة موجودة التجميعي, الحيادي ,النظير .

الحلقـــة

تعريف هي نظام ذو عمليتين(س, c, O) يحقق

1-(س,c) زمرة إبدالية 2-O تجميعي على س 3-Oتوزيعي على c

- أذا كان O ذو عنصر محايد دعيت الحلقة (حلقة واحدية)
- أذا كان O إبدالي دعيت حلقة إبدالية .

تعريف قواسم الصفر بالنسبة لـ O ندعو أ, ب قواسم للصفر أذا كان:

أ ≠ و , ب ≠و ⇐أ × ب = و (حيث و محايد)

- كل حلقة تحتوي على قواسم للصفر تدعى حلقة غير تامة
- الحلقة التامة هي كل حلقة لا تحتوي على قواسم للصفر.

التعريف رمزياً ∀أ,ب ∍ س إذا كان

أOب = و ⇐ أ = و أو ب = و

ملاحظة هامة:

(صن , ⊕ , ⊙) = { حلقة تامة إذا كان (ن) أولي ، غير تامة إذا كان ن غير أولي }

مثال : (ص6 , ⊕ , ⊙) حلقة غير تامة لوجود قواسم للصفر

2≠0, 3≠0 حيث (و=0 محايد العملية الأولى⊕)

لاحظ 2 ⊙ 3 = باقي ($\frac{3\times2}{6}$) = ($\frac{6}{6}$) = صفر

∴ نسمي كلاً من 2,3 قواسم للصفر

والحلقة غير تامة (انتبه ن = 6 غير أولي)

الخصائـص الأساسية في الحلقـة

خاصية1 في أي حلقة (س , c , O)

∀ أ∍س فإن أO و = وOأ = و حيث و محايد العملية c

خاصية2 في أي حلقة (س, c , O) حيث ∀ أ , ب, جـ ∍ س

يتحقق ما يلـي:

1- (أOب)´ = أOب´   2- أ´Oب´ = أOب

3- أO(ب c جـ)´ = (أOب) c (أOجـ)´

4- (ب c جـ´)Oأ = (بOأ) c (جـOأ)´

تمارين ومسائل(1 - 2)

1] لتكن (س , c , O) حلقة بين أياً من العبارات التالية صائبة

أ) النظام (س, c) زمرة آبلية (✓)

ب) النظام (س, O) زمرة (×)

جـ) كل عنصر من س له نظير بالنسبة للعمليةO (×)

د) للمعادلة أ c س = ب حل وحيد في س (✓)

لأن (س , c) زمـرة

[2] لتكن (س , c) زمرة آبلية والعمليتان O , ∆ على س معرفتان على النحو التالي:

أOب = و ∀ أ , ب∍ س, (و محايد c) ، أ∆ب = أ ∀ أ,ب∍ س.

أ) أثبت أن (س, c , O) حلقة ؟

الحـل: 1- (س , c) زمرة إبدالية

2- الخاصة التجميعية (أ O ب) O جـ = و O جـ = و ⇐
أ O (ب O جـ) = أ O و = و

(أ O ب) O جـ = أ O (ب O جـ) ∴ O تجميعي

1- شرط التوزيع أ O (ب c جـ) = (أ O ب) c (أ O جـ)

الطرف الأيمن أ O (ب c جـ) = و ∴ O **توزيعي على !**

الطرف الأيسر (أ O ب)! (أ O جـ) = و c و = و ∴ (س, !, O) حلقة

ب) (س , c , ∆) ليست حلقة

الحـل:

شرط التوزيع : أ ∆ (ب c جـ) = أ ∆ ب c أ ∆ جـ

الطرف الأيمن أ ∆ (ب c جـ) = الأول = أ

الطرف الأيسر (أ ∆ ب) c (أ ∆ جـ) = أ c أ ليس بالضرورة = أ

∴ الأيمن ≠ الأيسر ∴ (س, !, ∆) ∴ ليست حلقة

[3] لتكن O , c عمليتين معرفتين على ص على النحو التالي:

أ c ب = أ + ب − 1

أ O ب = أ + ب − أب ∀ أ , ب ∍ ص.

برهن أن (س, c , O) حلقة تبديليه أحادية

الحـل:

1- أ c ب = أ + ب − 1
ب c أ = ب + أ − 1 ⇐ أ c ب = ب c أ ⇐ c تبديليه

2-(أ c ب) c جـ = (أ + ب −1) c جـ = أ + ب −1 + جـ −1 = أ + ب + جـ −2

أ c (ب c جـ) = أ c (ب + جـ −1) = أ + ب + جـ −1 −1 = أ + ب + جـ −2

∴ (أ c ب)c جـ = أ c (ب c جـ) ⇐ c تجميعية

3- المحايد ∀ س لنفرض المحايد (و)

أc و = أ ⇐ أ + و−1 = أ ⇐ و − 1 =0 ⇐ $\boxed{و = 1}$

4- النظير ∀ س ∋ ص لنفرض نظيره س́

سc س́ = و ⇐ س + س́ −1 = 1 ⇐ $\boxed{\textbf{س́ = 2− س}}$

∴(ص, c) زمرة أبدالية

5- (أOب)Oجـ = (أ + ب − أ ب)Oجـ = أ + ب − أ ب +جـ

− جـ أ −جـ ب+ جـ أ ب

أO(بOجـ)= أO(ب+جـ− ب جـ) = أ+ ب + جـ − ب جـ − أ ب

− أجـ + أ ب جـ ⇐ O تجميعي

6- التوزيع سO(بcجـ) = سO(ب+جـ−1) = س+ب+جـ−1

− س ب − س جـ + س

(سOب) c (سOجـ) =(س+ب− س ب)c(س+جـ− س جـ)

= س+ب− س ب+ س+ جـ− س جـ −1 ⇐ توزيعي على c

7- خاصية المحايد بالنسبة لـO

∀ س ∋ ص نفرض المحايد ى:سOى = س⇐ س+ ى− س ى= س

ى(1− س) = 0⇐ ى=0 ∋ص/{1}

8- الخاصة الإبدالية : أOب = أ + ب − أب

بOأ = أ + ب − أب ⇐أOب= بOأ

∴(ص, c , O) حلقة إبدالية ذات عنصر وحده

[6] ليكن (ص$_6$,⊕, ⊙) حلقة إبدالية

أ) بين أنها حلقه ليست تامة ب) أوجد مجموعة حل المعادلة $2 \odot س \oplus 4 = 0$

الحـل: أ) لنقض الشيء يكفي مثال:

$2 \odot 3 =$ باقي $\left(\frac{2\times 3}{6} \right) = 0 \Leftarrow 2 \odot 3 = 0$

علماً بأن $2 \neq 0$, $3 \neq 0$ نسمي كل منها قاسماً للصفر والحلقة غير تامة.

ب) $2 \odot س \oplus 4 = 0$ في هذه الحلقة $\bar{4} = 2$ ∴ أنقل 4 بنظيرها الجمعي

$2 \odot س = 2$ نعلم أن $2 \odot 1 = 2$, $2 \odot 4 = 2$ ⇐ س=1 أو س=4

تعريف : يكون(س, c ,O) حقلاً إذا حقق الشروط التالية :

1- زمرة أبدالية   2- (س!,O) زمرة حيث س! = س/{ و }

3- O توزيعي على c

ملاحظة: 1- إذا كان O تبديلي قيل الحقل أبدالي .

2- كل حقل هو حلقة تامة _

إذا كان أ O ب = و إجباري أ= و   أو ب = و.

3- ليس كل حلقة تامة حقل.

4- للمعادلة حل وحيد في الحقل

مثال: (أ O س) c ب = جـ ⇐ أ O س = جـ c ب́

⇐ س = أ⁻¹ O (جـ! بَ) حيث أ ≠ و

* حل المعادلة (2 O س) c 1 = 2 في كل من الحلقتين الآتيتين

أ) (ح , + ,×)

ب) (ص$_3$, ⊕ , ⊙)

الحل: أ) أنتبه c $\xrightarrow{\text{تقابل}}$ +

O $\xrightarrow{\text{تقابل}}$ ×

∴ (O 2س) c 1= 2 تكافئ المعادلة (2×س)+1=2

∴ 2س = 2−1 ⇐ 2س = 1 ⇐ س = $\frac{1}{2}$ ∈ ح

ب) انتبه c $\xleftarrow{\text{تقابل}}$ ⊕

O $\xleftarrow{\text{تقابل}}$ ⊙

والمعادلة O 2 س c 1= 2 تكافئ (2 ⊙ س) ⊕ 1=2

من الجدول الأول (1 محايد ضربي)

ودائماً $\bar{2}$ = 2   لأن 2⊙2=1

من الجدول الثاني الصفر محايد بالنسبة لـ⊕

($\bar{1}$ = 2)   ∴ (2⊙ س) ⊕1=2   2⊙ س =1⊕$\bar{2}$

2⊙ س =2⊕2   2⊙ س =1   ∴ س =1⊙ $\bar{2}$

س=1 ⊙ 2 $\boxed{\text{∴س = 2}}$

تمـــــــارين (3-1)

[1] بين مع التعليل صواب أو خطاء كل من العبارات التالية:

أ) كـل حقل حلقة تامة .   (✓)

لأن شـروط الحلقة كلهـا ضـمن شـروط الحقل يضـاف إلـى ذلـك الحقـل لا يحتوي على قواسم للصفر

ب)كل حلقة تامة حقل.   (×)

كلا لأن (ص,+,×) حلقة تامة [ليس لكل عنصر فيها نظير ضربي

∴ ليست حقل

جـ)إذا كان النظام (س,c,O) حقلاً فأنه لكل عنصر من النظام (س ,O)نظير.

الجواب (×) لان و ϶ س ليس له نظير بالنسبة لـ O

د) إذا كان النظام (س, c ,O) حلقة تبديليه واحدية , وكان لكل عنصر غير صفري نظير ضربي فأن(س , c ,O)حقلاً.   الجواب (√)

[2] (ص$_5$, ⊕,⊙) حلقه – واحديه عنصرها المحايد (1)

أ) اثبت أن (ص$_5$, ⊕,⊙) حقلاً.

ب) حل المعادلة 2 ⊙ س⊕1=4 في هذا الحقل

الحـل:

أ) كل شروط الحقل معطاة باستثناء النظير الضربي في ص$_5$ لتشكل الجدول

العنصر	1	2	3	4
نظيرة	1	3	2	4

⊙	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

∴ لكل عنصر في ص$_5$ نظير ضربي

ب) 2⊙ س⊕ 1 =4 ابعد 1 إلى الطرف الثاني بالنظير الجمعي

2⊙ س =4⊕$\bar{1}$

2 ⊙ س=4⊕4

2 ⊙ س=3

انتبه $\bar{1}$= 4

لأن 4⊕1=باقي($\frac{4+1}{5}$)=باقي($\frac{5}{5}$)=0

أنقل 2 بالنظير الضربي

س=2^{-1} ⊙ 3 من الجدول 2^{-1} = 3

س=3⊙3=4 ⇐ $\boxed{\text{س} = 4}$

[3] ليكن (ح , c ,×) حقلاً حيث × عملية الضرب العادي والعملية c معرفة

على ح كما يلـي :

أ) $أ \circ ب = أ + ب + 2$ $\forall$ أ, ب $\in$ ح

المطلوب أ) عين العنصر المحايد بالنسبة للعملية $\circ$.

ب)عين صيغة لإيجاد نظير العنصر بالنسبة للعملية $\circ$ أيضاً.

جـ) حل المعادلة $(3\times س) \circ 4 = 8$ في هذا الحقل .

الحـل: أ) $\forall$س $\in$ح لنفرض المحايد (و)

$\therefore$ س$\circ$ و = س$\Leftarrow$س+ و+2= س
$\Leftarrow$ و + 2 = 0

و=−2

ب) $\forall$س $\in$ح لنفرض نظيره $\bar{س}$

$\therefore$س $\circ$ $\bar{س}$ = و $\Leftarrow$ س+ $\bar{س}$ + 2 = −2$\Leftarrow$

$\boxed{\bar{س} = −4− س}$

يدعى قانون النظيـر.

جـ) 3س $\circ$ 4=8

3س=$\bar{4}$ $\circ$ 8

3س=−8 $\circ$ 8

3س=−8+8+2

3س =2 $\Leftarrow$ س= $\frac{2}{3}$

لإيجاد نظير (4)عوض
في قانون النظير
$\bar{4}$ =−4−4=−8

[4] في الحقل(س,$\circ$, O)أثبت أن للعملية س^2= س حلين وهما العنصر المحايد بالنسبة للعملية! والعنصر المحايد بالنسبة للعمليةO (حيث س^2= سO س)

الحـل: س^2= س

الحالة الأولى سOس= س شكل $\bar{س}$ مع الطرفين

سَ c س O س = سَ c س أنتبـــه c , O تجميعيـــان

أدمج (س c س) O س = و

و O س = و $\Leftarrow$ س = و$^{-1}$ O و = و $\therefore$ س = و

الحالة الثانية

س^{2} = س

س O س = س شكل س$^{-1}$ مع الطرفين

س$^{-1}$ O س O س = س$^{-1}$ O س

(س$^{-1}$ O س) O س = ى $\Leftarrow$ ى o س = ى $\Leftarrow$ س = ى

[5] أعط مثالاً لكل من :

أ) حلقة تبديليه وليست تامة ب) حلقة تامة لكنها ليست حقلاً.

الحـل:

أ- (ص$_4$, $\oplus$, $\odot$) حلقة تبديليه ليست تامة لوجود قواسم للصفر لاحظ

$2 \odot 2$ = باقي $\left(\frac{2\times 2}{4}\right)$ = باقي $\left(\frac{4}{4}\right)$ =0

ب- (ص,+,×) حلقة تامة لعدم وجود قواسم للصفر مع ذلك ليس لكل عنصر نظير ضربي $\therefore$ ليست حقلاً .

تماريــن عامـــة

الحلقة: لتكن س={ 0, 2, 4, 6, 8 } ولنعرف على س العمليتين الثنائيتين H, O على النحو التالي: س H ص = باقي $\left(\frac{\text{س+ص}}{10}\right)$

س O ص = باقي $\left(\frac{\text{س×ص}}{10}\right)$

أ) كون جدولين مختلفين لهاتين العمليتين .

ب) تحقق من أن (س, H , O) حلقة تبديلية ذات عنصر محايد .

8	6	4	2	0	H
8	6	4	2	0	0
0	8	6	4	2	2
2	0	8	6	4	4
4	2	0	8	6	6
6	4	2	0	8	8

8	6	4	2	0	O
0	0	0	0	0	0
6	2	8	4	0	2
2	4	6	8	0	4
4	8	2	2	0	6
4	8	2	6	0	8

أولاً: (س, H) العملية المعرفة بهذه الصورة تبديلية وتجميعية

8	6	4	2	0	العنصر
2	4	6	8	0	نظيرة

∴ (س, H) زمرة تبديلية .

ثانياً: O إبدالية بسبب تناظر العناصر حول القطر الرئيسي , O تجميعية

لأن العملية المعرفة بهذه الصورة تقبل أنها تجميعية دون برهان .

لـO محايد وهو (6) , O توزيعية على H

∴ (س, H, O) حلقة إبدالية ذات عنصر وحدة .

[2] لتكن (س, +, 0) حلقة غير تبديلية ولنعرف على س عملية جديدة

(O) على النحو التالي: أO ب =أب− ب أ ∀أ, ب ∋ س. هل

(س, +, O) حلقة ؟ انتبه أOب ≠ بO أ.

الحل: (س, +) زمرة إبدالية أحد شروط الحلقة (س, +, 0) ولنثبت أنO تجميعية

∀ أ, ب ,حـ * (أO ب) O جـ =(أب − ب أ)O جـ =

(أب− ب أ) جـ (أب – ب أ) =

أب جـ − ب أ جـ − جـ أ ب +جـ ب أ

* أO (ب O جـ) = أ O (ب جـ− جـ ب) =

أ (ب جـ− جـ ب) − (ب جـ −جـ ب) أ = أب جـ − أجـ ب −

ب جـ أ +جـ ب أ بكل أسف – ب أجـ ≠− أ ب جـ وهذا سبب كافٍ لأن أقول O

غير تجميعية .

∴ (س, +, O) ليست حلقة .

الحقـــــــل

[3] لنعرف على(ن) العمليتين الثنائيتين H , Oعلى النحو التالي:

سHص=س+ص−1

سOص= س ص− س− ص+2 برهن أن النظام (ن, H, O) حقل .

أولاً: العمليةH (1) ∀س, ص ∍ ن, سHص = س+ص−1

, صH س=ص+س−1

⇐سH ص= صH س ⇐ Hابدالية . (2) ∀ س, ص, ع∍ ن.

*(سHص)H ع =(س+ص−1) H ع = س+ص−1+ع−1=

س+ص+ع−2

* سH(صHع) =سH(ص+ع−1) =س+ص+ع−1 −1=

س+ ص+ع−2 ⇐ H تجميعي

(3) لفرض المحايد و ∴ ∀س∍ ن ⇐سHو= س .

س+و−1= س⇐و−1=0 ⇐و=1 .

(4) النظير ∀س∍ ن لنفرض نظيره سَ   سH سَ = و

س+ سَ−1= ⇐1 سَ =−2− س ∴(س, H) زمرة إبدالية .

ثانياً: (1) ∀س, ص∍ ن/{1} ⇐سO ص= س ص− س− ص+2

ص O س= ص س− س− ص+2. واضح أن O إبدالية .

(2) ∀س, ص, ع ∍ ن/{1} فإن (سO ص) Oع =(س ص− س−

ص+2)O ع= (س ص− س− ص+2)ع − س ص + س + ص − 2− ع

+ 2 = س ص ع − س ع − ص ع+2ع − س ص+ س + ص−ع

= س ص ع − س ع − ص ع − س ص+ س + ص + ع .

س$\odot$(ص$\odot$ع) =س$\odot$ (ص ع − ص − ع+2)

= س ص ع− س ص − س ع+2س− س − ص ع + ص + ع − 2+2 =

س ص ع − س ص − س ع − ص ع +س+ص+ع $\Leftarrow$ $\odot$ تجميعي .

(3) نفرض المحايد ى $\therefore$ $\forall$س, ص, ع $\in$ ن/{1}   س$\odot$ى= س .

س ى− س−ى+2= س   س ى−ى=2س−2

ى(س−1) =2س−2 $\Leftarrow$ ى= $\frac{2س-2}{س-1}$ = $\frac{2(س-1)}{(س-1)}$=2 $\therefore$ ى=2

(4) النظير: $\forall$س $\in$ ن /{1} نفرض النظير سَ.

س$\odot$سَ =ى $\Leftarrow$ س سَ− س− سَ+2=2

سَ(س−1)=س $\Leftarrow$ سَ= $\frac{س}{س-1}$ $\in$ ن /{1} $\therefore$ (ن /{1}, $\odot$)زمرة تبديلية

(5) لنثبت أن $\odot$ توزيعي بالنسبة لـH الشرط

س$\odot$ (صHع) = (س$\odot$ص)H (س$\odot$ ع)

الطرف الأيمن: $\therefore$ س$\odot$ (صHع)= س$\odot$ (ص+ع−1)

= س(ص+ع−1) − س − ص − ع + 1 + 2 =

= س ص + س ع − 2س − ص− ع + 3

الأيسر: (س ص− س− ص+2) H (س ع − س − ع+2)

=س ص− س− ص+ 2 + س ع − س− ع+2−1

=س ص − س ع−2س−ص−ع+ $\Leftarrow$ $\therefore$3$\odot$ توزيعي على H

(ن, H, $\odot$) حقلاً تبديلياً .

[4] إدا علمت أن (ص$_7$, $\oplus$, $\odot$) حلقة تبديليه ذات عنصر محايد`

أ) تحقق من أن (ص$_7$, ⊕, ⊙) حقل

ب) حل المعادلة 3 ⊙ س ⊕ 1 =ع في هذا الحقل

الحل: (أ) (ص$_7$, ⊕, ⊙) حلقة تامة لان 7 أولي.

∴لنبحث عن النظير في ص$_7$

العنصر	1	2	3	4	5	6
نظيرة	1	4	5	2	3	6

(ب) 3 ⊙ س ⊕ 1 = 4

3 ⊙ س = 4 ⊕ $1^{/}$

3 ⊙ س = 4 ⊕ 6

3 ⊙ س = 3

س = 3^{-1} ⊙ 3 = ى = 1

6 ⊕ 1 = باقي $(\frac{6+1}{7})$ =0

∴ 1^{-}=6

4⊕6= باقي $(\frac{4+6}{7})$ = 3

∴ س= $\boxed{1}$

تمارين هامة ومسائل

[1] من المعلوم أن كل حقل هو حلقة تامة وكل حلقة تامة هي حلقة أبدالية لكن عكس أي من العبارتين ليس بالضرورة يكون صحيحاً بين ذلك بإعطاء.

أ) مثال لحلقة تامة لكنها ليست حقلاً.

ب) مثال لحلقة أبداليه لكنها ليست تامة.

جـ) مثال لحلقة تامة منتهية , هل هي حقل ؟

الحل: أ) (ص, +, ×)

ب) (ص$_6$, ⊕, ⊙)

جـ) (ص$_7$, ⊕, ⊙) حقل لأن لكل عنصر نظير.

[2] ليكن (ح, H, ×) حقلاً, وحيث × عملية الضرب على الأعداد

الصحيحة والعملية H معرفة على ح كما يلي:

س H ص = س+ص+3 ∀س, ص ∍ح

حل المعادلة2 س H 3 = 6 في هذا الحقل.

الحل: 2س+3+3=6

$$2س=6-6=0 \Leftarrow س=\frac{0}{2}=0$$

∴ س= 0

[3] لتكن (س, +, O) حلقة ذات عنصر محايد برهن أن :

أ) العنصر المحايد بالنسبة للعملية O وحيد.

ب) إذا كان للعنصر أ نظير بالنسبة للعملية O فإن $أ^{-1}$ وحيد.

الحل: أ) لنفرض وجود محايدين $ى_1$, $ى_2$ بالنسبة لـO ∀ س ∍ س .

$$\left.\begin{matrix} س O ى_1 = س \\ س O ى_2 = س \end{matrix}\right\} \Rightarrow س O ى_1 = س O ى_2 .$$

$$\Leftarrow س O ى_1 - س O ى_2 = 0$$

$$س O (ى_1 - ى_2) = 0 \Leftarrow ى_1 - ى_2 = 0 \Leftarrow ى_1 = ى_2$$

ب) لنفرض لـ أ نظيرين $أ_1$, $أ_2$. أ O $أ_1$ =ى , أ O $أ_2$= ى ⇐

$$أ O أ_1 = أ O أ_2 \Leftarrow أ O أ_1 - أ O أ_2 = 0$$

$$أ O (أ_1 - أ_2) = 0 \Leftarrow أ_1 - أ_2 = 0 \Leftarrow أ_1 = أ_2$$ ∴ النظير وحيد.

اختبــار الوحــدة

[1] كل من الأنظمة التالية ليس حلقة . أعط سبباً واحداً على الأقل لكل حالة. أ) (ط, +, ×) ب) (ص^{H} , +, ×) جـ) (ن, ×, +) .

[2] بين أياً من الأنظمة التالية حقل, وأياً منها حلقة وليس حقلاً.

أ) (ص, +, ×) ب) (ن, +, ×) جـ) (ص$_4$, $\oplus$, $\odot$) د) (ص$_5$, $\oplus$, $\odot$)

[3] بين نوع النظام الرياضي (حلقة, حلقة تامة, حقل) الذي تحقق فيه كل من الخواص التالية:

أ) للمعادلة أ O س H ب=جـ فية حلٌ وحيد, حيث أ ≠و

ب) س O ص= س O ع ⇐ ص=ع

جـ) س O ص= و ⇐ س = و أو ص= و

د) لكل عنصر أ∋ س, أ ≠ و نظير بالنسبة للعملية O حيث و هو العنصر المحايد بالنسبة للعملية H في النظام (س, H, O)

[4] حل المعادلة 2 O س H 3=4 في كل من الأنظمة الرياضية الآتية:

أ) (ح, +, ×) ب) (ص$_5$, $\oplus$, $\odot$) جـ) (ص$_6$, $\oplus$, $\odot$)

[5] أختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

أ) مجموعة حل المتراجحة 2س+2≤1 هي :

$]\frac{3}{2}, \infty[$, $]-\infty, \frac{1}{2}]$, $]\frac{1}{2}, \infty[$.

ب) مجموعة حل المتراجحة 1−2س <3 هي:

$]-\infty, -1[\quad , \quad]2, \infty[\quad , \quad]-\infty, 2[$.

جـ) مجموعة حل المتراجحة $\frac{1}{س} < 2$, س $\neq 0$ هي:

$]0, \frac{1}{2}[\quad , \quad]\frac{1}{2}, \infty[\quad , \quad]-\infty, \frac{1}{2}[$

<u>حــل اختبار الوحــدة</u>

[1] أ) (ط, +) ليست زمرة $\therefore$ (ط, +, ×) ليست حلقة.

ب) (ص^{H} , +, ×) ليست حلقة لأن (ص^{H}, +) ليست زمرة لغياب المحايد الجمعي (0) .

جـ) (ن, ×, +) ليست حلقة لأن (ن, ×) ليست زمرة لأن (0) ليس له مقلوب (نظير ضربي) .

[2] أ) (ص, +, ×) حلقة تامة لكنها ليست حقل لعدم وجود النظير الضربي مثلاً 5 ∍ ص^{H} $\Leftarrow \frac{1}{5} \not\ni$ ص*.

ب) (ن, +, ×) حقل لأن: (1) (ن, +) زمرة تبديلية .

(2) (ن^{H}, ×) زمرة (3) × توزيعي على + .

جـ) (ص$_4$, ⊕, ⊙) حلقة غير تامة وليست حلق بدليل

2⊙2= باقي$(\frac{2\times 2}{4})$= باقي $(\frac{4}{4})$ = صفر $\therefore$ تحتوي على قواسم للصفر.

د) (ص$_5$, ⊕, ⊙) حلقة تامة منتهية $\therefore$ حقل.

[3] معلوم لدينا أن الحلقة غير التامة

ليس بها خاصية الاختصار وحل المعادلة $\therefore$ نبعدها من تفكيرنا

الحلقة التامة غير المنتهية الاختصار ممكن فيها , أما حل المعادلة غير

ممكن في بعضها مثل الحلقة (ص, +, 0) . بشكل عام كل هذه الخواص مجتمعة محققة في الحلقة التامة المنتهية وفي الحقل.

أ) محقق في الحلقة التامة المنتهية والحقل .

ب) الحلقة التامة و الحقل .

جـ) الحلقة التامة و الحقل .

د) في حلقة التامة المنتهية والحقل .

[4] حل المعادلة 2 O س H 3 =4 في كل من الأنظمة

أ) في (ح, +, ×) + تمثل H & × تمثل O ∴ المعادلة تصبح على الصورة

2س+3=4 ⟸ 2س=4−2 ⟸ 3س=1 ⟸ س= $\frac{1}{2}$.

ب) H تمثل ⊕ , O, تمثل ⊙.

∴ المعادلة تصبح على الصورة 2 ⊙ س ⊕ 3 = 4 .

∴ 2⊙س= 4^{-}⊕3	معروف ان 3^{-}=2 في $ص_5$.
2⊙س= 4⊕2	ومعروف أن 4⊕2=باقي ($\frac{6}{5}$)=1 .
2⊙س= 1	نعلم 2^{-1} هو 3
س= 2^{-1}⊙1=2^{-1}	لأن 2⊙3= باقي ($\frac{6}{5}$) =1 .
س = 3	

جـ) ($ص_6$, ⊕, ⊙) نفس الخبر المعادلة 2 ⊙ س ⊕ 3 = 4.

2 ⊙ س =3^{-} ⊕ 4 , 2 ⊙ س =3 ⊕ 4

2 ⊙ س =1 وهذا مستحيل لأن الحلقة غير تامة ∴ مجموعة الحل Ø.

[5] أ) 2س + 1 ≤ 2 .

الحل: 2س ≤ 1 ⟸ س ≤ $\frac{1}{2}$ ∴مجموعة الحل]−∞, $\frac{1}{2}$ [

الإجابة الثانية صحيحة.

ب) $1-2$س<3 هي : $1-3<2$س . $\Leftarrow$ $-2<2$س $\Leftarrow$ $\frac{-2}{2}<$ س $\Leftarrow$

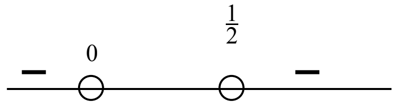
$-1<$س $\Leftarrow$ مجموعة الحل $]-1 , \infty[$

ج) $\frac{1}{س}<2$, س $\neq 0$ الحل: $\frac{1}{س}-2<0 \Leftarrow \frac{1-2س}{س}<0$

الأصفار : البسط = صفر $\Leftarrow$ $1-2$س$=0$ $\Leftarrow$ 2س$=1$ $\Leftarrow$ س= $\frac{1}{2}$

المقام = صفر $\Leftarrow$ س$=0$.

بالنسبة للإشارة



عوض س$=1$ $\Leftarrow$ $\frac{1-2س}{س} = \frac{1-2}{س} = \frac{سالب}{موجب}$ ∴ البقعة $]\frac{1}{2} , +\infty[$ سالبة .

اعكس إشارة بقية البقع ∴ مجموعة الحل $]0, \frac{1}{2}[$ # .

الوحـــدة الثانيـــة

الـــدوال الحقيقيـة

تعريف: الدالة الحقيقية هي دالة مجالها ومجالها المقابل(ح أو جزءاً منها)

أنواع الدوال الحقيقية ومجموعة تعريفها .

1- الدالة الصحيحة : م ت = ح .

مثال : د (س) = س^3+|س|+ $\frac{1}{2}$ + $\sqrt{3}$ دالة صحيحة ∴ م ت =ح

2- الدالة الكسريه : م ت = ح / { أصغار المقام }

مثال1 : د(س) = $\frac{1}{س-1}$ دالة كسرية لظهور متغير (س) في المقام

∴ م ت = ح / {أصفار المقام } = ح / { 1 }

مثال2 : ص = $\frac{1}{س^2+1}$ دالة كسرية ∴م ت = ح / { أصفار المقام }

الحل : أصفار المقام س^2 + 1 = 0 ⇐ س2= -1 مستحيل

∴ لا توجد أصفار ∴ م ت = ح

3- الدالة الجذرية التربيعية معرفة لما ما تحت الجذر ≤ 0

أما إذا وقع الجذر في المقام وغطاه ضع ما تحت الجذر > 0

مثال : ص = $\frac{1}{\sqrt{1-س^2}}$ معرفة لما 1 - س^2 > . ⇐1 > س^2 أجذر

1≤|س| ⇐ 1> س > -1 ⇐ س ∋]-1 ، 1 [

أنتبه : الجذر التكعيبي لا يؤثر على م ت

لاحظ الدالتين $\frac{1}{\sqrt[3]{س^2}}$ ، $\frac{1}{س^2}$ لهما نفس م ت = ح / { . }

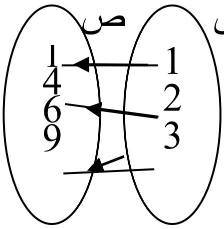
تعريف : مدى الدالة هو مجموعة صور مجال الدالة والتي تنتمي إلى المجال

المقابل .   مثال: ليكن التطبيق المبين بالشكل :

القاعدة د(س) = $س^2$ د (1) = 1 ∋ المدى

د (2)= 4 ∋ المدى ، د(3) = 9 ∋ المدى ∴ المدى = { 4، 1، 9 }

أي عناصر المجال المقابل التي لها مقابلات في المجال.



تمارين ومسائل (2 ، 1)

أولاً : أوجد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية :

1] د (س) = $2س^3 + 5س^2 - س$ الحل : دالة صحيحة ⇐ م ت = ح

2] د (س) = $\frac{1}{3س - 2}$ الحل : م ت = ح / { أصفار المقام }

أصفار المقام : $3س - 2 = 0 \Leftarrow 3س = 2 \Leftarrow س = \frac{2}{3}$ ∴ م ت = ح/{ $\frac{2}{3}$ }

3] د (س) = $\frac{س + 2}{س^2 - 81}$ الحل : م ت = ح / { أصفار المقام } .

∴ أصفار المقام : $س^2 - 81 = 0 \Leftarrow س^2 = 81 \Leftarrow س = \pm 9$

∴ م ت = ح / {± 9} .

4] د (س) = $س^2 - 49$ الحل : دالة صحيحة   ∴ م ت = ح .

5] = د (س) = 2س − 1 الحل : دالة صحيحة   ⇐ م ت = ح .

6] د (س) = $4 - س^2$ الحل : دالة صحيحة   ⇐ م ت = ح .

7] د (س) = $\frac{1}{\sqrt{س^2 - س + 6}}$

الحل : معرفة لما $س^2 - س + 6 > 0$

الخطوات : أصفار – إشارة   اختيار البقة الموجبة .

التنفيذ: $\Delta = ب^2 - 4أ جـ = 1 - 4 \times 1 \times 6 = 1 - 24 = -23 < 0$

$\left.\begin{array}{l} أ = 1 \\ ب = -1 \\ جـ = 6 \end{array}\right\}$

∴ المقدار من إشارة واحدة ———— + ————

عوض بأي قيمة للمتغير س

مثلاً : ضع س = 0 ⇐ 0 − 0 + 6 > 0 ∴المحور كله موجب

∴م ت = ح طريقة أخرى بما أن Δ > 0 ∴ الإشارة موافقة لإشارة

أ = 1>0 ∴ موجبة دوماً ∴ م ت = ح

8] د (س) = $\frac{1}{\sqrt{س^2 - 1}}$ أوجد م ت

الحل : معرفة لما س^2 −1 > 0 ⇐ (س−1) (س+1) > 0

الأصفار : (س−1)(س+1) = 0

⇐ س −1 =0 ⇐ س= 1 أو س +1 = ⇐0 س = −1

+ −1 − 1 +

نريد الموجب ∴ م ت =] 1 ، +∞[∪] −∞ 1− [.

9] د (س) = $\frac{س}{س^2 - س + 6}$ أوجد : م ت

الحـل: دالة كسرية معرفة ∀س ∋ ح / { أصفار المقام }

∴ أصفار المقام : س2− س+6=0 ⇐ أ= 1 ، ب = −1 ، جـ =6

⇐ Δ = ب2−4أجـ = 1−4×1×6= 1−24= −23 > 0

مستحيلة الحل ∴ لا توجد أصفار ∴ م ت = ح

10] د (س) = $\sqrt{\frac{11}{س+2}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{س+2}}$

الحل:معرفة لما س +2 > 0⇐ س> −2 ⇐ م ت =] −2+ ∞[

[11] د (س) = $\sqrt{س} + \sqrt{س-1}$ أوجد : م ت

الحـل : $\sqrt{\text{س}}$ معرفة لما س ≥ 0

$\sqrt{\text{س}-1}$ معرفة لما س −1 ≥ 0 ⇐ س ≥ 1

م ت = [1 ، ∞[∩ [0 ، ∞[= [1 ، ∞[

12] د (س) = $\frac{\text{س}^2-1}{\text{س}-1}$ أوجد : م ت

الحل : د كسرية ∴ م ت = ح / { أصفار المقام }

أصفار المقام س−1 =0 ⇐ س=1

م ت = ح / { 1 }

13] د (س) = $\frac{5}{3-\sqrt{\text{س}-1}}$ أوجد: م ت .

الحل: كجذر معرفة لما س−1 ≥ 0 ⇐ س ≥ 1

ككسر المقام ≠ 0 ⇐ 3 − $\sqrt{\text{س}-1}$ ≠ 0 ⇐ 3 ≠ $\sqrt{\text{س}-1}$ ربع

9 ≠ س − 1 ⇐ 10 ≠ س ∴ م ت = [1 + ∞[− { 10 }

14] د (س) = $\frac{\sqrt{\text{س}+2}}{\text{س}-5}$ أوجد : م ت ؟

الحل : كجذر س + 2 ≥ 0 ⇐ س ≥ −2

ككسر : المقام ≠ 0 ⇐ س− 5 ≠ 0 ⇐ س ≠ 5 ⇐ م ت= [−2، +∞[/{5}

15] د (س) = س × $\sqrt{\text{س}-2}$ أوجد : م ت ؟

الحل : معرفة لما س − 2 ≥ 0 ⇐ س ≥ 2 ∴ م ت = [2 ، +∞[

16] د (س) = $\sqrt{\text{س}-3}$ − 1 أوجد : م ت ؟

الحل : معرفة لما س − 3 ≥ 0 ⇐ س ≥ 3 ⇐ م ت = [3 ، +∞[

17] د (س) = 3 الحـل : دالة صحيحة (ثابتة) ∴ م ت = ح

18] د (س) = { −1 ، س ≤ 0
2 ، س > 0 . أوجد : م ت ؟

الحل: م ت = $]0 ، +\infty[\cup]-\infty ، 0[$ = ح

19] د (س) = $\begin{cases} \text{س} + 2 & \text{س} \geq 0 \\ -1 & \text{س} < 0 \end{cases}$ أوجد : م ت ؟

الحل : م ت = $]0 ، +\infty[\cup]-\infty ، 0[$ = ح

20] ت (س) = 2س+1 ، هـ (س) = س2 − 16 عين مجموعة تعريف

كلاً من : أ) $\frac{\text{هـ(س)}}{\text{ت (س)}}$ ب) $\frac{\sqrt{\text{هـ(س)}}}{\sqrt{\text{ت (س)}}}$ جـ) $\sqrt{\frac{\text{هـ(س)}}{\text{ت (س)}}}$

الحل: أ) $\frac{\text{هـ(س)}}{\text{ت (س)}} = \frac{\text{س}^2+16}{2\text{س} + 1}$

الحل : دالة كسرية معرفة لما $2\text{س} + 1 \neq 0 \Leftarrow 2\text{س} \neq -1$

$\therefore$ س $\neq \frac{-1}{2}$ $\Leftarrow$ م ت = ح / $\{-\frac{1}{2}\}$.

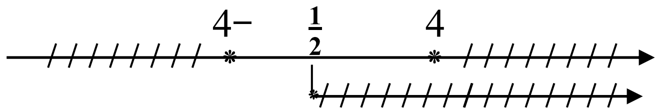
ب) $\frac{\sqrt{\text{هـ(س)}}}{\sqrt{\text{ت (س)}}} = \frac{\sqrt{\text{س}^2-16}}{\sqrt{2\text{س}+1}}$

الحل : البسط معرف لما $\text{س}^2 - 16 \geq 0 \Leftarrow \text{س}^2 \geq 16 \Leftarrow |\text{س}| \geq 4$

قاعدة الأكبر س ≥ 4 أو س ≤ -4

$\therefore$ مجموعة تعريف البسط $[4 ، +\infty[\cup]-\infty ، -4]$.

* المقام معرف لما $2\text{س} + 1 > 0 \Leftarrow 2\text{س} > -1 \Leftarrow \text{س} > -\frac{1}{2}$

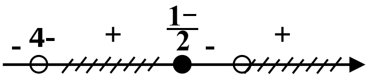


$\therefore$ مجموعة التعريف المشتركة = $[4 ، +\infty[$

جـ) $\sqrt{\frac{2\text{س}+1}{\text{س}^2-16}}$ معرفة لما $\frac{2\text{س}+1}{\text{س}^2-16} \geq 0 \Leftarrow \frac{2\text{س}+1}{(\text{س}-4)(\text{س}+4)} \geq 0$

الخطوات أصفار – إشارة – اختيار

* أصفار البسط 2س + 1 = 0 ⇐ س = $-\frac{1}{2}$



أصفار المقام: س − 4 = 0 ⇐ س = 4
س + 4 = 0 ⇐ س = −4

لمعرفة الإشارة عوض
س = 0 ∋]$-\frac{1}{2}$ ، 4[⇐ $\frac{2\times0+1}{0-16} = \frac{1}{-16}$ سالب أعكس إشارة الباقي

بما أنني: أريد البقع الموجبة: ∴ م ت =]−4 ، $-\frac{1}{2}$[∪]4 ، ∞[

موجب موجب

قاعدة: إذا كان 3 < ص < 5
عند التربيع حافظ على المتراجحة 9 < $ص^2$ < 25

سالب سالب

قاعدة: إذا كان −5 < ص < −3 ربع وأعكس 25 > $ص^2$ > 9 .

سالب موجب

قاعدة : −5 < ص < 3
ربع 0 ≤ $ص^2$ < أكبر المربعين ($(-5)^2$ ، $(3)^2$) ∴ 0 ≤ $ص^2$ < 25

مثال داعم : −1 ≤ ص < 3 ربع وانتبه معك موجب وسالب
∴ 0 ≤ $ص^2$ < 9

ثانياً : أوجد مجموعة تعريف ومدى الدوال التالية :

21] د (س) = $\frac{س}{س - 1}$ أوجد : م ت والمدى

1) م ت = ح − { 1 }   2) لإيجاد مدى $\frac{ص}{1} = \frac{س}{س-1}$

الخطوات: أحصل على س بدلالة ص ثم أوجد مجموعة تعريف العلاقة الجديدة فأحصل على المدى .

ص(س−1) = 1× س ⇐ ص س − ص = س ⇐ ص س − س = ص

س (ص− 1) = ص ⇐ س = $\frac{ص}{ص-1}$ ⇐ م ت = ح / { 1 }

∴ المدى = م ت = ح / { 1 }.

22] د (س) = $\frac{5}{س^2+1}$ أوجد : م ت والمدى ؟

1) م ت : أصفار المقام: $س^2+4=0 \Leftarrow س^2=-4$ مستحيل ∴ م ت = ح

2) المدى بطريقة البناء م ت = ح =] −∞ ، +∞ [

$-\infty < س < \infty$ ربع وانتبه لوجود سالب وموجب

$0 \le س^2 < \infty$ أضف 4

أنتبه $\infty + 4 = \infty$

$\frac{1}{\infty} = 0$

$4 \le 4 + س^2 < \frac{\infty}{1}$ أقلب تقلب

$\frac{1}{4} \ge \frac{1}{4+س^2} > 0$ أضرب بـ 5

$\frac{5}{4} \ge \frac{1}{4+س^2} > 0 \Leftarrow \frac{5}{4} \ge ص > 0$ ⇐ المدى] 0 ، $\frac{5}{4}$]

23] د (س) = $\sqrt{64 - س^2}$ أوجد م ت والمدى ؟

1) م ت : معرفة لما $64 - س^2 \ge 0 \Leftarrow 64 \ge س^2$ أجذر $8 \ge |س|$ قاعدة الأصغر

$-8 \le س \le 8$ ⇐ م ت= [−8 ، 8]

2) المدى : $-8 \le س \le 8$ ربع واطوي . لوجود سالب وموجب

$0 \le س^2 < 64$ اضرب بـ (−) وأعكس المتراجحة .

$0 \ge -س^2 \ge -64$ أضف (64)

$64 \Leftarrow 64 \ge 64 - س^2 \ge 0$

$8 \ge \sqrt{64 - س^2} \ge 0$ ∴د(س)محدودة والمدى[0 ، 8] .

24] د (س) = |س+9| أوجد م ت والمدى ؟

1) م ت = ح دالة صحيحة 2) المدى $-\infty < س < \infty$ أضف 9

−∞ < س+9 < ∞ ⇐ $0 \le |س+9| < \infty$ ⇐ المدى $[0 ، \infty[$

25] $2|س+1| - 5 = 0$

$2|س+1| = 5$ ⇐ $|س+1| = \frac{5}{2}$ ⇐ $س+1 = \pm \frac{5}{2}$

إما $س+1 = \frac{5}{2}$ ⇐ $س = \frac{5}{2} - 1$ ⇐ $س = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$ ⇐ $\boxed{س = \frac{3}{2}}$

أو $س+1 = -\frac{5}{2}$ ⇐ $س = -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$ ⇐ $\boxed{س = -\frac{7}{2}}$

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{3}{2} ، -\frac{7}{2}\}$

26] $س^2 - 5|س| + 6 = 0$ الحل : $س^2 + 6 = 5|س|$ ⇐

$س^2 + 6 = 5(\pm س)$ ⇐ $س^2 + 6 = 5س$ ⇐ $س^2 - 5س + 6 = 0$

⇐ $(س - 2)(س - 3) = 0$ ⇐

$س = 2$ أو $س - 3 = 0$ ⇐ $س = 3$

أو $س^2 + 6 = -5س$ ⇐ $س^2 + 5س + 6 = 0$ ⇐ $(س+3)(س+2) = 0$

⇐ $س + 3 = 0$ ⇐ $س = -3$ أو $س + 2 = 0$ ⇐ $س = -2$

∴ مج = $\{2 ، 3 ، -2 ، -3\}$

27] $[1 - 3س] = -5$

الحل : $[1 - 3س] = -5$ ⇐ $1 + [-3س] = -5$

$[-3س] = -6$ ⇐ $-6 \le -3س < -5$ ∴ قسم على -3

⇐ $\frac{5}{3} < س \le 2$ مجموعة الحل $]\frac{5}{3} ، 2]$

28] المعادلة $[\frac{1}{س}] = -2$ الحل : $-2 \le \frac{1}{س} < -1$ ⇐

أقلب تقلب $-\frac{1}{2} \geq$ س > -1 $\therefore$ مج =] -1 ، $-\frac{1}{2}$ [

29] [س] − س = 0 الحل: [س] = س أنتبه إذا كان الذي داخل الصحيح = خارجه أفهم أن العدد صحيح $\Leftarrow$ س $\in$ ص $\therefore$ مج = ص

30] $\frac{[\text{س}-1]}{[\text{س}-3]} = \frac{1}{2}$

الحل: 2[س−1] = [س−3] $\Leftarrow$ 2([س]−1) =[س] −3 $\Leftarrow$

2[س] −2 = [س] −3 $\Leftarrow$ 2[س] −[س] =2 −3 $\Leftarrow$ [س] = −1 $\Leftarrow$

$-1 \leq$ س < 0 $\Leftarrow$ مجموعة الحل= [−1 ، 0[

31] د (س)= $\sqrt{-\text{س}^2+2\text{س}-3}$ أوجد م ت ثم المدى ؟

1) م ت : معرفة لما − س^2+2س −3 ≥ 0

Δ = ب2−4أ جـ=4−4×−1×−3 =4−12= −8<0مستحيل لا توجد أصفار

أما الحصول على الإشارة سهل عوض أي قيمة مثلاً س=0 $\Leftarrow$ − س^2+2س−3

= −0 +0−3 =سالب

$\therefore$ م ت = $\varnothing$ سالبــة

$\therefore$ المدى غير موجود

32] د (س) = $\sqrt{\text{س}^2-2\text{س}-3}$

1) معرفة لما س2−2س−3 ≥ 0 $\Leftarrow$ (س−3)(س+1) ≥ 0

الخطوات:1) أصفار 2) إشارة بالتعويض بقيمة من إحدى الفترات وأعكس إشارة الباقي

3− اختيار البقعة المناسبة + −1 − 3 +

الأصفار س=3 ، س = −1 أريد No أريد

لمعرفة إشارة البقعة الوسطي [−1 ، 3]

ضع س= 0 ∋ [-3،1] في $س^2-2س-3=0-0-3=$ سالب

∴ إشارة البقة بين -1 ، 3 هي (-) أعكس الباقي عزيزي الطالب تعمدت شرح هذه الطريقة الرائعة . ∴م ت =]-∞ ، -1] ∪ [3 ، +∞ [

2) المدى ص = $\sqrt{س^2-2س-3}$

ربع $ص^2= س^2-2س+3$ صفرها ((لاتنسى ص≥ 0 لأنه جذر))

$س^2-2س+3-ص^2 = 0$ ⟸ الثوابت أ=1 ، ب=-2 ، جـ=(3- $ص^2$)

شرط وجود حل Δ ≥ 0 ⟸ $ب^2$ - 4 أجـ ≥ 0 ⟸ 4-4×1 (3- $ص^2$) ≥ 0

4 - 12 +4$ص^2$ ≥ 0 ⟸ -8 + 4$ص^2$ ≥ 0 ⟸ 4$ص^2$ ≥ 8 قسم على أربعة؟

⟸ $ص^2$ ≥ 2 ⟸ |ص| ≥ $\sqrt{2}$ قاعدة الأكبر .

إما (ص ≥ $\sqrt{2}$ مقبول أو ص ≤ -$\sqrt{2}$ مرفوض لأن ص ≥ 0 ∴ المدى[$\sqrt{2}$ ،+∞[

<u>ملاحظة</u>: (هذه الطريقة أسهل من الإكمال إلى مربع كامل والبناء).

31] د(س) = $\frac{س}{\sqrt{س^2-1}}$ أوجد : م ت ثم المدى ؟

1) م ت: معرفة لما $س^2$ -1 > 0 ⟸ $س^2$ > 1 ⟸ |س| > 1 ⟸ س > 1 أو س< -1

⟸ م ت =] 1 ، +∞ [∪] -∞ ، -1 [

المدى: ص = $\frac{س}{\sqrt{س^2-1}}$ ربع $\frac{ص^2}{1} = \frac{س^2}{س^2-1}$ لنوجد س بدلالة ص ثم نوجد

م ت للعلاقة الجديدة : $ص^2(س^2-1)= 1×س^2$ ⟸ $ص^2 س^2 - ص^2 = س^2$

∴ $ص^2 س^2 - س^2 = ص^2$ ⟸ $س^2$ ($ص^2$-1) = ص ⟸ $س^2 = \frac{ص^2}{ص^2-1}$

س = $\frac{\pm |ص|}{\sqrt{ص^2-1}}$ معرفة لما $\left.\begin{array}{l} ص^2 - 1 > 0 \\ ص^2 > 1 \end{array}\right\}$ ⟸ |ص| > 1

∴ ص > 1 أو ص< −1 ∴ المدى=] 1 ، + ∞ [∪] − ∞ ، −1 [

33] ص= $\frac{2س - 1}{(س-1)(س+2)}$

1) م ت = ح / { أصفار المقام } = ح / { 1 ، − 2 }

2) المدى : $\frac{ص}{1}$ = $\frac{2س - 1}{س^2 + س - 2}$ ⇐ ص (س^2+ س − 2) = 2س − 1

ص س^2 + ص س − 2ص −2س +1 = 0 ⎫ أ = ص

ص س^2 + (ص−2) س + 1 − 2ص = 0 ⎬ ب= ص−2

Δ ≥ 0 ⇐ ب2 − 4 أ جـ ≥ 0 ⎭ جـ= 1−2ص

(ص− 2)^2− 4 × ص (1− 2ص) ≥ 0 ⇐ ص^2−4ص+4−4ص+8ص^2 ≥ 0

9ص^2 − 8 ص + 4 ≥ 0

Δ = ب^2 − 4 أ جـ = 64 − 4 × 9 × 4 < 0 لا توجد أصفار

والإشارة ضع ص= 0 ⇐ 0 −0 +4 موجب ∴ موجبة على كل ح المدى ح

34] د (س) = $\frac{س^2 + 5}{س + 6}$

1) م ت =ح/{ − 6 } 2) المدى $\frac{ص}{1}$= $\frac{س^2 + 5}{س + 6}$ ⇐ ص(س+6)= س^2+5

صفرها

ص س + 6 ص = س2 + 5

س^2− ص س − 6 ص + 5 = 0 ⇐ Δ ≥ 0 ⇐ ص^2 − 4 (6−5ص) ≥ 0

ص^2+24ص −20 ≥ 0 أحسب Δ مرة أخرى ... أكمـل ؟

35] د (س) = ⎰ س + 1 عندما س ≥ 0

⎱ −2 س < 0

1) م ت = ح المدى بالبناء أولاً

لما 0 ≤ س

0 ≤ س < ∞ أضف 1

1 ≤ س +1 < ∞ ⇐ 1≤ د(س) <∞

ثانياً: لما س < 0 ⟸ د(س) = −2 ∴ المدى] 1 ، ∞ [∪ {−2}

36] ص = س^2 + 9

1) م ت = ح 2) أنتبـه ص > 0

المدى − ∞ < س < ∞ ⟸ 0≤ س2 < ∞ أضف ⟸ 9

9 ≤ س2 + 9 < ∞ المدى [9 ، + ∞ [

37] د (س) = 3 − س2

1) م ت = ح 2) ص= 3− س ⟸ س^2 =3− ص ⟸ س= ± $\sqrt{3-}$ ص

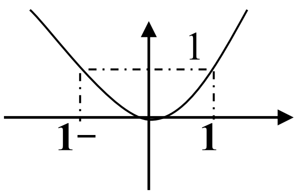
معرفة لما 3 − ص ≥ 0 ⟸ 3 ≥ ص ⟸ المدى =]− ∞ ، 3]

بعض أنواع الدوال وتمثيلها

1) الدالة الزوجية : د (− س) = د (س) لاحظ أكلت السالب

من صفاتها تماثلية حول محور الصادات من أهم الدوال الزوجية :

د (س) = س^2 دالة منحنية لرسمها نحتاج بعض النقاط : ص = س^2



ضع س = 0 ⟸ ص = 0 (0 ، 0)

ضع س = 1 ⟸ ص =(1)^2−1 (1 ، 1)

ضع س = 0 ⟸ ص = 0 (−1، 1)

لاحظ التماثل حول الصادات .

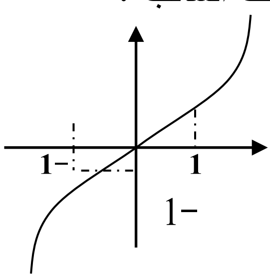
مثال : د (س)= جتا س زوجية جتا (− س) = جتا س

2) الدالة الفردية : د (− س) = − د(س) لاحظت خرجت السالب .

من صفاتها تماثليـة حول المبدأ .

من أهم الدوال الفردية د(س) = س^3

لرسمها نحتاج بعض النقاط :ص= س^3



ضع س=⟸ 0 ص = 0(0,0) ضع س =⟸ 1

ص= $(1)^3 = 1$ $\therefore (1,1)$

ضع س = $-1 \Leftarrow$ ص =$(-1)^3 = -1$ $\therefore$ $(-1\ ,\ -1)$

مثال : د(س)= جا س داله فردية لأن جا (− س) =− جا س

وبالمثل الظا , الظتا.

3) دالة المقياس (المطلق) . | |

لكي نتعامل مع دالة المقياس لازم إعادة تعريفها

الخطوات: (1) اصغار المقياس (2) اشارتة (3) في البقعة الموجبة نبعد المقياس وفي البقعة السالبة نستبدله بـ(−)

مثال : د(س) = |س| = $\begin{cases} \text{س} & \text{لما س} \geq 0 \\ -\text{س} & \text{لما س} < 0 \end{cases}$

لاحظ |− س| = |س| ∴د(س) = |س| دالة زوجية .

(4) دالة الصحيح د(س) = [س] من خواصها : (1) [س] = ن $\Leftarrow$

ن ≤ س < ن + 1 (2) ∀هـ∍ ص $\Leftarrow$ [س + هـ] = [س] +هـ.

مثال : [س + 5] = [س] + 5

(3) عند رسمها نجزئ مجموعة التعريف إلى فترات بين عددين صحيحين متتالين . (4) رسمها قطع مستقيمة على كل فترة .

(5) الدالة الدورية : نقول عن الدالة د (س) دورية أذا وجد عدد ر >0 بحيث د(س+ ر)= د(س) حيث ر أصغر عدد موجب يحقق العلاقة ويدعى دور الدالة

من الدوال الدورية الدوال المثلثة وبعض دوال الصحيح .

مثـال : * جا (س+2 л)= جا س الجا دورية ودورها (2 л) .

* طا (л + س) =طا س ∴ الظا دورية ودورها (л) .

تمارين ومسائل (2 - 2)

أولاً : بين نوع الدالة التالية من حيث كونها زوجية أو فردية .

[1] د(س) =3س−4س^3 , الحل : د(− س)=3(−س)−4 (−س)^3 =
−3س+4س^3=−(3س−4س^3)=−د(س) ∴د(− س)=− د(س) أفهم أن د فردية .

[2] د(س)= س^4−5س^2− 1 , الحل: د(− س)=(− س)^4−5(−س)^2 −1= س^4 −
5س^2 −1 =د(س) ∴ د(− س)= د(س) أفهم أن د زوجية .

[3] د(س)= $\frac{\text{س}^3+2}{2\text{س}-3}$ الحل: د(− س) = $\frac{(-\text{س})^3+2}{2(-\text{س})-3}$ =

$\frac{-\text{س}^3+2}{-2\text{س}-3}$ ≠ د(س) ∴ ليست زوجية .

ولو حسبنا − د(س) =− $\left(\frac{\text{س}^3+2}{2\text{س}-3}\right)$= $\frac{-\text{س}^3+2}{2\text{س}-3}$

لوجدنـا د (− س) ≠ − د(س) ∴ ليست فردية .

[4] د(س) = 2س − جا 3س , الحل: د(− س)=2(− س)−جا3(− س)
=−2س+جا3س= −(2س−جا3س)= − د(س) ∴د(− س)=− د(س) ∴د فردية.

[5] د(س)= $\frac{\text{س}^2+\text{جتا}2\text{س}}{\text{س}^4+1}$ الحل: د(− س)= $\frac{(-\text{س})^2+\text{جتا}(-2\text{س})}{(-\text{س})^4+1}$

= $\frac{\text{س}^2+\text{جتا}2\text{س}}{\text{س}^4+1}$ = د (س) ⇐د زوجية .

[6] د(س) = $\begin{cases} 2\text{س} & \text{س} > 0 \\ -2\text{س} & \text{س} < 0 \end{cases}$

الحل : د(− س) = $\begin{cases} -2\text{س} & -\text{س} > 0 \\ 2\text{س} & -\text{س} < 0 \end{cases}$ = $\begin{cases} -2\text{س} & \text{لما س} < 0 \\ 2\text{س} & \text{س} > 0 \end{cases}$

= د(س) ∴ د زوجيــة .

[7] د(س) = س^{2}جتا س

الحل: $د(-س) = (-س)^2 \text{ جتا } (-س) = س^2 \text{ جتا } س = د(س)$ $\therefore$ زوجية .

[8] $د(س) = \left(\frac{1+س}{1-س}\right)^3 + \left(\frac{1-س}{1+س}\right)^3$

الحل: $د(-س) = \left(\frac{1-س}{1+س}\right)^3 + \left(\frac{1+س}{1-س}\right)^3 = د(س)$ $\therefore$ زوجية .

[9] $د(س) = \frac{س}{\sqrt{س^2+|س|}}$

الحل: $د(-س) = \frac{-س}{\sqrt{(-س)^2+|-س|}} = \frac{-س}{\sqrt{س^2+|س|}} = -د(س) \Leftarrow$ د فردية .

[11] $د(س) = \frac{\text{طا}^3 س}{س+\text{جا}س}$ أنتبه $\text{طا}(-س) = -\text{طا}س$, $\text{جا}(-س) = -\text{جا}س$.

$د(-س) = \frac{\text{طا}^3(-س)}{-س+\text{جا}(-س)} = \frac{-\text{طا}^3 س}{-(س+\text{جا}س)} = \frac{\text{طا}^3 س}{(س+\text{جا}س)} = د(س)$ زوجية.

[12] $د(س) \begin{cases} س+5 & س \in [-5,-2] \\ 3 & س \in]-2, 2[\\ 5-س & س \in [2, 5] \end{cases}$

الحل: $د(-س) = \begin{cases} -س+5 & -س \in [-5,-2] \\ 3 & -س \in]-2, 2[\\ 5+س & -س \in [2, 5] \end{cases}$

$= \begin{cases} 5-س & س \in [2, 5] \\ 3 & س \in]-2, 2[\\ 5+س & س \in [-5,-2] \end{cases} = د(س) \Leftarrow$ د زوجية

ثانياً : أعد تعريف كل من الدوال التالية وعين مداها .

[14] $د(س) = |2س-7|$

الحل: أتبع الطريقة السهلة أصفار – إشارة – إزالة .

∴ الأصفار $2س-7=0 \Leftarrow 2س=7 \Leftarrow س=\frac{7}{2}$

إشارة داخل المقياس $+$ ($\frac{7}{2}$) $-$

$|2س-7| = 2س-7$ ، $|2س-7| = -(2س-7)$

∴إعادة التعريف: د(س) $= \begin{cases} 2س-7 & \text{لما } س \geq \frac{7}{2} \\ -(2س-7) & س < \frac{7}{2} \end{cases}$

المدى : م ت = ح $\Leftarrow -\infty < س < \infty$ أضرب بـ 2 ,

$-\infty < 2س < \infty$ أضف -7

$-\infty < 2س-7 < \infty$ ربع واطوي

$0 \leq (2س-7)^2 < \infty$

أجذر $0 \leq |2س-7| < \infty$

المدى $= [0, \infty[$.

[16] د(س)= | $\frac{1}{2}$س| -1 الحل: أصفار – إشارة – إزالة

الأصفار $\frac{1}{2}$ س= $0 \Leftarrow$ س $=0$

إشارة داخل المقياس $+$ (0) $-$

| $\frac{1}{2}$ س| -1 = $\frac{1}{2}$س -1 ، $-\frac{1}{2}$س -1

د (س) $= \begin{cases} \frac{1}{2} س - 1 & \text{حيث } س \geq 0 \\ -\frac{1}{2} س - 1 & \text{حيث } س < 0 \end{cases}$

المدى سأبني الدالة الأصلية د(س)=| $\frac{1}{2}$ س| -1 على م ت = ح

∴البناء $-\infty <$ س $< \infty$ أضرب بـ: $\frac{1}{2}$

$-\infty < \frac{1}{2}$ س $< \infty$ ربع واطوي

$0 \le \frac{1}{4}$ س$^2 < \infty$ أجذر $0 \le |\frac{1}{2}$ س$| < \infty$ أضف -1

$-1 \le |\frac{1}{2}$ س$|-1 < \infty$ $-1 \le$ د(س) $< \infty$ ⟸ المدى $[-1, \infty[$

ملاحظة: جرب بناء الدالة على س≥ 0 ثم س<0 ستجد نفس الجواب 0

[17] د(س)= $|4$س$^2-16|$ الحل: أصفار إشارة إزالة

الأصفار 4س$^2-16=0$ ⟸ 4س$^2=16$ ⟸ س$^2=4$ ⟸ س$=\pm 2$

إشارة $(4$س$^2-16)$ + 2 − −2 +

$|4$س$^2-16| =$ 4س$^2-16$ $-(4$س$^2-16)$ 4س$^2-16$

إعادة التعريف :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} 4\text{س}^2-16 & \text{س} \ge 2 \\ -(4\text{س}^2-16) & -2 < \text{س} < 2 \\ 4\text{س}^2-16 & \text{س} \le -2 \end{cases}$$

المدى سأبني الدالة الأصلية , بما أن م ت = ح ∴ البناء $-\infty <$ س $< \infty$ ربع واطوي

$0 \le$ س$^2 < \infty$ أضرب بـ4 $0 \le 4$س$^2 < \infty$ أضف -16

$-4 \le 16$س$^2-16 < \infty$ ربع واطوي

$0 \le (4$س$^2-16)^2 < \infty$ أجذر

$0 \le |4$ س$^2-16| < \infty$ ⟸ المدى $[0 , \infty[$.

[18] $=|$س$-3|+2|$س$-2|_3+$ س

3 2

|س−3|	+ س − 3	− −س+3	− −س+3
2|س−2|	+ 2(س−2)=2س−4	+ 2س−4	− −2س+4
س	س	س	س
د(س)	4س−7	2س−1	−2س+7

د(س)= { 4س−7 لما س ≤ 3
2س−1   2< س < 3
−2س+7   س ≥ 2 }

المدى * على س ≤ 3 ⟸ 4س ≤ 12 أضف −7 ⟸ 4س−7 ⟸ 5 ≤ 7ص ≤ 5

* على2< س < 3 ⟸ 3اضرب بـ4 ⟸ 2<2س<6   أضف−1

3<2س−1<3 ⟸ 5 < ص <5

* على س ≥ 2 ⟸ 2−2س ≤ −4 أضف ⟸ 7−2س+3 ≤ 7

المدى [5, + ∞ [∪] 3, 5 [∪] + 3, + ∞ [=] 3, + ∞[

[19] د(س)= | 2س−1| −3 + 2س   الحل: م ت = ح

لإزالة المقياس: أصفار – إشارة – إزالة

أصفار المقياس: 2س−1=2 ⟸ 0س= ⟸ 1س= $\frac{1}{2}$

إشارة داخل المقياس   + $\frac{1}{2}$ −

د(س)=2س−1−3+2س
= 4س−4

−(2س−1)−2+3س
=−2س+1−3+2س=−2

إعادة التعريف: د(س)= { 4س−4   س ≤ $\frac{1}{2}$
−2   س< $\frac{1}{2}$ }

البناء * $\frac{1}{2} \le$ س أضرب بـ4 $\le 2 \Leftarrow$ 4س أضف (−4)

$-4 \le 2$س$- \Leftarrow -4 \le 2$ ص

* س$<\frac{1}{2} \Leftarrow$ ص=−2 ∴المدى [−2,+∞ [∪ {−2} = [−2,∞[

ثالثاً: أوجد مجموعة تعريف ومدى كل من الدوال التالية:

[20] د(س) = [س+11] الحل: * م ت = ح لأنها دالة صحيحة .

* المدى: ص=[س+11]=[س] +11 يحسب المدى بطريقة التدرج

* على [0,1[يكون [س]=0 $\Leftarrow$ ص=0+11=11 ∋ ص

* على [1,2[يكون [س] = 1 $\Leftarrow$ ص=1+11=12 ∋ ص

* على [2,3[يكون [س] = 2 $\Leftarrow$ ص=2+11=13 ∋ ص

* نستنتج أن ص=[س]+11 ∋ ص ∴ المدى = ص

[21] د(س)=[$\frac{1}{2}$س+1]

الحل: (1)م ت=ح لأنها دالة صحيحة. (2) د(س)=[$\frac{1}{2}$س]+1 نتبع طريقة التدرج.

على [0,2[$\Leftarrow 0 \le$ س ≤ 2 أضرب بـ $\frac{1}{2} \Leftarrow 0 \le \frac{1}{2}$س $\le 1 \Leftarrow$ [$\frac{1}{2}$س]=0

أضف(1) $\Leftarrow$ [$\frac{1}{2}$ س]+1=1 $\Leftarrow$ ص=1

على [2, 4 [$\Leftarrow 2 \le$ س $<$ 4 $\Leftarrow 1 \le \frac{1}{2}$س$<2$

$\Leftarrow$ [$\frac{1}{2}$ س] = 1 $\Leftarrow$ [$\frac{1}{2}$ س] +1 = 2 $\Leftarrow$ ص=2

∴ بشكل عام ص ∋ ص ∴ المدى = ص .

[22] د(س) = $\frac{1}{[س]+1}$ الحل: (1) م ت =ح /{أصفار المقام}

∴ ضع [س] +1=0 $\Leftarrow$ [س]= −1 $\Leftarrow$ −1 $\le$ س $<$ 0 $\Leftarrow$ م ت =ح/[−1, 0[

(2) لإيجاد المدى نتبع طريقة التدرج . +∞ −1

أولاً :على [0, +∞ [من أجل [0 , 1[يكون

[س]=0 ⟸ [س] +1= ⟸1 $=\frac{1}{[س]+1}=\frac{1}{1}=1$

على[1, 2[⟸ [س] = ⟸1 [س] +1 = ⟸2 $\frac{1}{[س]+1}=\frac{1}{2}$

∴ ص د { 1, 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,......} وعلى[−∞, −1[نتبع طريقة التدرج .

على[−2, −1[⟸ [س]=−2 ⟸ [س]+1=−1 ⟸ $\frac{1}{[س]+1}=\frac{1}{-1}=-1$

على[−3, −2[⟸ [س]=−3 ⟸ [س]+1=−2 ⟸ $\frac{1}{[س]+1}=\frac{-1}{2}$

∴ ص د {−1, $\frac{-1}{2}$, $\frac{-1}{3}$,......}

∴ المدى{.........− $\frac{1}{3}$,− $\frac{1}{2}$,−1,1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$......}

رابعاً: أوجد مجموع الحل للمعادلات التالية:

[23] |س+4|+2س+5=0

الحل: |س+4|=−2س−5 ⟸ س + 4= ±(−2س−5)

∴إما س+4 = −2س−5 ⟸ 3س= −9 ⟸ س=−3

أو س+4= −(−2س−5) ⟸ س+4=2س+5 ⟸ −1= س

∴مجموعة الحل = {−3 ، −1}

[24] 3 $\sqrt{س^2}$ −2|س|−1=0 | أنتبه $\sqrt{س^2}$ =|س|

الحل: 3| س | −2 | س |−1 = 0 ⟸ |س|−1=0 ⟸ |س|=1

⟸ س= ±1 ∴ مجموعة الحل {+1, −1}

[25] 2 | س+1| − 5 = 0

2 | س+1| = 5 ⟸ | س+1| = $\frac{5}{2}$ ⟸ س+1 = ± $\frac{5}{2}$

إما $س+1 = \frac{5}{2} \Leftarrow س = \frac{5}{2} - 1 \Leftarrow س = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} \Leftarrow س = \frac{3}{2}$

أو $س+1 = -\frac{5}{2} \Leftarrow س = -\frac{5}{2} - 1 = \frac{-7}{2} \Leftarrow س = \frac{-7}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{\frac{3}{2} , \frac{-7}{2}\}$

[26] $س^2 - 5|س| + 6 = 0$ الحل: $س^2 + 6 = 5|س| \Leftarrow س^2 + 6 = 5(\pm س)$

أما $س^2 + 6 = 5س \Leftarrow س^2 - 5س + 6 = 0 \Leftarrow (س-2)(س-3) = 0 \Leftarrow س = 2$ أو

$س - 3 = 0 \Leftarrow س = 3$ أو $س^2 + 6 = -5س \Leftarrow س^2 + 5س + 6 = 0 \Leftarrow (س + 3)$

$(س + 2) = 0 \Leftarrow س + 3 = 0 \Leftarrow س = -3$

أو $س + 2 = 0 \Leftarrow س = -2$ $\therefore$ مج $= \{3, 2, -2, -3\}$

[27] $[1 - 3س] = -5$ الحل: $[1 - 3س] = -5 \Leftarrow 1 + [-3س] = -5$

$[-3س] = -6 \Leftarrow -6 \le -3س < -5$ قسم على $-3 \Leftarrow 2 \ge س > \frac{5}{3}$

$\therefore$ مجموعة الحل $]\frac{5}{3} , 2]$

[28] المعادلة $[\frac{1}{س}] = -2$ الحل: $-2 \le \frac{1}{س} < -1 \Leftarrow$ أقلب $-\frac{1}{2} \ge س > -1$

$\therefore$ مج $=]-1, \frac{-1}{2}]$

[29] $[س] - س = 0 \Leftarrow [س] = س$

الحل: [س]= س أنتبه إذا كان الذي داخل الصحيح = خارجه

أفهم أن العدد صحيح , $\therefore$ س $\in$ ص $\therefore$ مجموعة الحل = ص

[30] $\frac{[س-1]}{[س-3]} = \frac{1}{2}$

الحل: $2[س-1] = [س-3] \Leftarrow 2([س]-1) = [س] - 3$

$\Leftarrow$ 2[س]−2=[س]−3

2 [س] − [س]= $\Leftarrow$ 3−2 [س]=−1 $\Leftarrow$ −1 ≤ س < 0 $\Leftarrow$ مج=[−1, 0[

خامساً: مثل الدوال التالية بيانياً ومن الرسم أوجد :

مجموعة التعريف و المدى . وبين فيما إذا كانت زوجية أو فردية

ملاحظة: (1) لرسم المستقيم يكفي نقطتين .

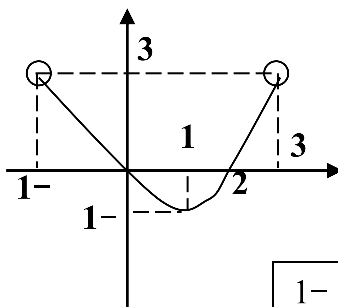
(2) لرسم المنحني نأخذ عدة نقاط ونصل بينهم بصورة منحنية .

[31] د(س)= س^2 −2س , س ∋]−1, 3[

الدالة من الدرجة الثانية ∴ تمثل بمنحنى نتعرف عليه بأخذ نقاط من الفترة

* لما س=−1 $\Leftarrow$ ص=(−1)^2 −2(−1) =2+1=3 ∴(−1, 3)

ملاحظة : طالما س=−1 ∌]−1 , 3[∴رسمها في الشكل دائرة مفرغة .



* لما س=0 $\Leftarrow$ ص=(0)^2−2×0=0 (0 ,0)

* لما س=1 $\Leftarrow$ ص= 1−2×1=−1 (1, −1)

* لما س=2 $\Leftarrow$ ص=4−4 =0 (2 , 0)

* لما س=3 $\Leftarrow$ ص=9−2×3=3 (3,3)

س	0	1	2	3	1−
ص	0	1−	0	3	3

الاستنتاج: (1) م ت =]−1, 3 [(2) المدى=[−1, 3[(3) د ليست زوجية ولا فردية.

[32] د(س) = $\begin{cases} 2س & , س<1 \\ 3 & س \geq 1 \end{cases}$

الحل: **أولاً على الفترة:** س<1 $\Leftarrow$ ص=2س لرسمه أختار نقطتين .

لما س=1 $\Leftarrow$ ص=2 $\Leftarrow$ (1 , 2) نفرغها في الشكل

لما س=0 ⇐ ص=2×0=0 ⇐ (0,0)

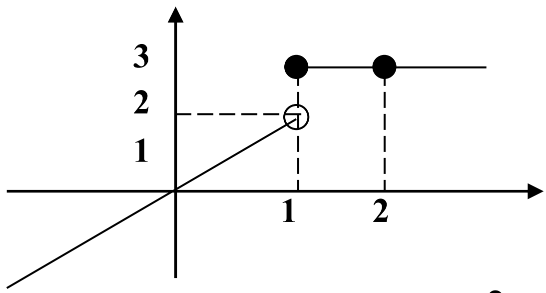
س	1	0
ص	2	0

ثانياً: على الفترة: س ≤ 1 ⇐ ص=3

لاحظ دالة ثابتة تمثل بمستقيم أفقي // السينات

لما س=1 ⇐ ص=3 النقطة (1, 3)

لما س=2 ⇐ ص=3 (2, 3)



الاستنتاج (1) م ت=ح

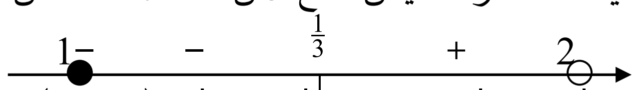
(2) المدى =]−∞ , 2[∪ {3}

(3) لا زوجيـة ولا فرديـة .

[33] د(س) =|3س−1| ,−1≤ س < 2

الحل: الخطة للتخلص من المقياس (1)أصفار (2) إشارة (3) إزالة المقياس حيث أذا عرفنا أن إشارة داخل المقياس موجبة نبعد المقياس وإذا كانت إشارة داخل المقياس سالبة نبعد المقياس ونضرب بـ(−)

التنفيذ : أصفار المقياس ضع 3س−1= 0 ⇐ س= $\frac{1}{3}$



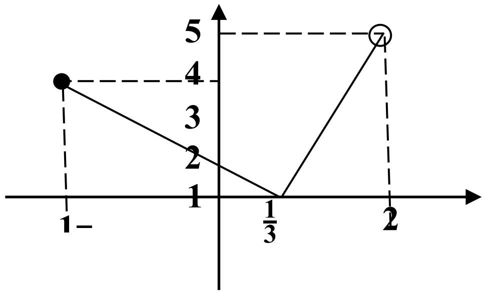
|3س−1|=−(3س−1) | |3س−1|=3س−1

=−3س+1

أولاً: على [−1, $\frac{1}{3}$[⇐ ص= −3س+1 لرسمه نحتاج إلى نقطتين ويفضل عند أطراف الفترة: لما س =−1 ⇐ ص= −3×−1+1=4

لما س = $\frac{1}{3}$ ⇐ ص= −3×$\frac{1}{3}$+1=0

س	−1	$\frac{1}{3}$
ص	4	0



ثانياً على [, 2[⇐ ص=3 س −1

الاستنتاج:

س	$\frac{1}{3}$	2
ص	0	5

(1) م ت =[−1, 2[

(2) المدى [0, 5[

(3) لا زوجيــة ولا فرديــة

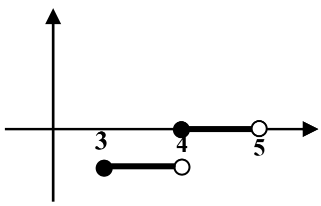
[34] د(س)= [س−4]   ,   ≤3 س >5

الحل: د(س)=[س] − 4 أنتبه دالة الصحيح تدرس على فترات بين عدديين صحيحين متتاليين * على [3 , 4[⇐ [س]=3 ⇐ ص=3−4=− ⇐ 1

دالة ثابتة تمثل بمستقيم ص= −1

* على [4, 5[⇐ [س] = ⇐ 4 ص =4−4 =0

∴ تمثل بمستقيم منطبق على السينات .



الاستنتـاج :

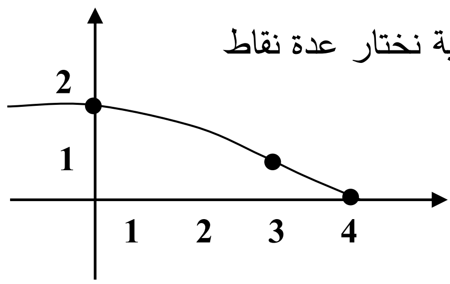
(1) م ت =[3, 5[

(2) المدى ={−1, 0}

(3) لا زوجية ولا فردية

[35] د(س)= $\sqrt{4-س}$ الحل: معرفة لما4− س ≥ 0 ⇐

≥4 س ⇐م ت =]−∞ , 4] الدالة منحنية نختار عدة نقاط



نبدأ بـ س=4 ⇐ ص= $\sqrt{4-4}$ = 0 (4, 0)

لما س= ⇐3ص = $\sqrt{4-3}$ = 1   (3, 1)

لما س= ⇐0ص= $\sqrt{4-0}$ = 2   (0, 2)

الاستنتاج (1) م ت =] −∞ , 4]   (2)   المدى: [0, +∞[

(3) لا زوجية ولا فردية .

[36] د(س)=−|س−11| الحل: أصفار – إشارة – إزالة المقياس من خلال الإشارة   ∴ س−11=0 ⇐ س =11

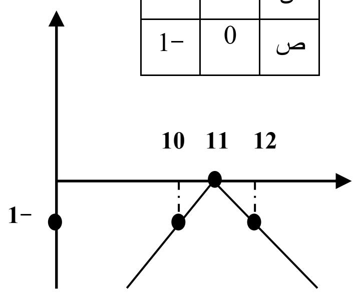
−	11	+ إشارة داخل المقياس
ص=−×−(س−11)		−|س−11|=−(س−11)
= س−11		=− س + 11

* على [11, +∞[⇐ ص=− س+11 لرسمه نحتاج نقطتين

س	11	12
ص	0	1−

لما س=11 ⇐ص = −11+11= 0 (11, 0)

لما س=12⇐ص= −12+11=−1 (12, −1)



* على]−∞, 11] ص= س −11

س	11	10
ص	0	1−

الاستنتاج :

(1) م ت =ح

(2) المدى] −∞, 0]

(3) لا زوجية ولا فردية .

[39] **د(س)** = { −|س| ، س ≥ 0 ؛ [س]−3 ، −4 < س<0 }

س	0	1
ص	0	1−

الحل: على الفترة]0, ∞ + [⇐

ص= − |س | = − س لرسمه نقطتان مبينتان في الجدول

على الفترة]−4, 0[⇐ص =[س]−3 ندرسه على فترات جزئية

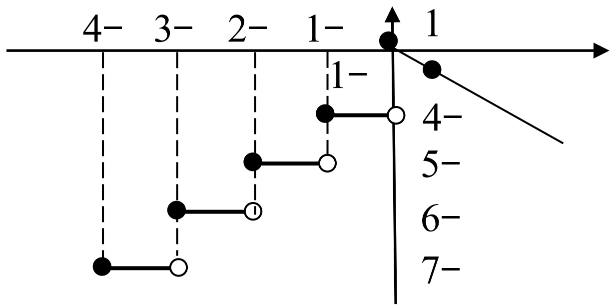
* على]−4, −3[⇐ [س] =−4 ⇐ص=−4−3 =−7 دالة ثابتة .

* على]−3, −2[⇐ [س] =−3 ⇐ص=−3−3 =−6 دالة ثابتة .

* على]−2, −1] ⇐ [س] =−2 ⇐ ص=−2−3 =−5 دالة ثابتة .

* على]−1, 0] ⇐ [س] =−1 ⇐ ص=−1−3 =−4 دالة ثابتة .

الاستنتـاج:



(1) م ت=]−4, +∞[.

(2) المدى]−∞, 0] .

(3) لا زوجية ولا فردية .

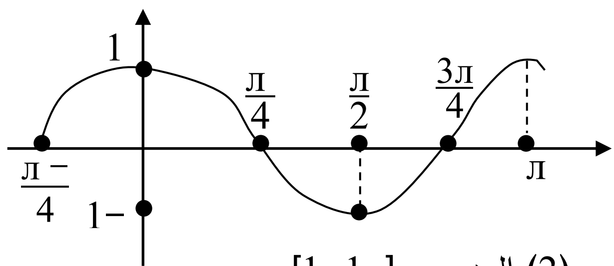
[40] د(س) = جتا 2س

الحل : الدالة دورية ودورها $\frac{2\,л}{2}$= л ∴.نرسمها على[0, л]

نقسمها إلى أربعة أقسام طول كل قسم $\frac{л}{4}$ تم نكرر الرسم على ح

للتأكد من الدور لاحظ د(س+ л)=جتا2 (س+ л) =جتا(2س+2л)=جتا2س

س	0	$\frac{л}{4}$	$\frac{л}{2}$	$\frac{3л}{4}$	л
2س	0	$\frac{л}{2}$	л	$\frac{3л}{2}$	2 л
جتا2س	1	0	1-	0	1



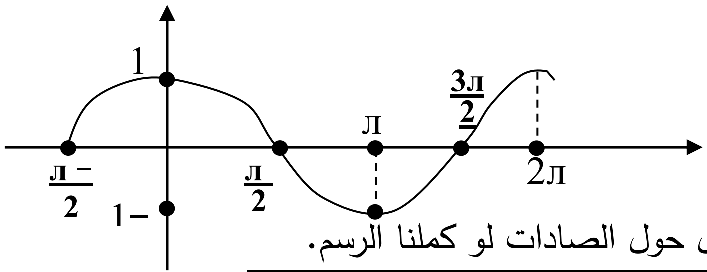
الاستنتاج: (1) م ت = ح (2) المدى = [−1, 1]

(3) زوجية (تماثلية حول محور الصادات)

[41] د(س) =جتا س مثل الدالة تم بين أنها دورية وعين دورها ؟

الحل: د دورية ودورها 2 л لأن د(س+2 л) = جتا(س+2 л) = جتا س = د(س)

∴الدور =2 л ∴ نقسم الدور إلى أربعة أقسام



الاستنتاج :

(1) م ت = ح

(2) المدى [−1, 1]

(3) زوجية لاحظ التماثل حول الصادات لو كملنا الرسم.

س	0	$\frac{л}{2}$	л	$\frac{3л}{2}$	2 л
جتا س	1	0	1−	0	1

تحـــديد الدالـــة

(1) د محدودة من الأعلى إذا وجد ل بحيث د(س) ≤ ل .

(2) د محدودة من الأسفل إذا وجد ك بحيث ك≤ د(س) .

(3) محدودة إذا كان ك ≤ د(س) ≤ ل .

تمارين ومسائل (2 - 3)

[1] أدرس إطراد الدوال التالية : (1) د(س) =3س−1 .

الحل: ∀ س$_2$, س$_1$∋ح لنفرض س$_2$ > س$_1$ أضرب بـ(3)

3س$_2$ > 3س$_1$ أضف (−1) 3س$_2$−1 > 3 س$_1$−1

⇐ د(س$_2$)> د(س$_1$) ⇐ د تزايدية فعـلاً .

---

[2] د(س)= س^2−1 الحـل: م ت = ح .

* قاعدة الصفر التربيعي ضع س^2=0 ⇐ س=0∋ ح

∴ عالج المسألة على فترتين أولاً: قبل الصفر أي على]−∞, 0]

ثانياً بعد الصفر أي على [0,+∞ [

∴ على]−∞ , 0] بفرض س$_2$ <س$_1$ ربع واعكس لأن القيم سالبة.

$\text{س}_2^2 > \text{س}_1^2$ أضف -1 $\Leftarrow$ $\text{س}_2^2-1 > \text{س}_1^2-1$ $\Leftarrow$

$\text{د}(\text{س}_2) > \text{د}(\text{س}_1)$ $\Leftarrow$ د تناقصية فعلاً .

على $[0, +\infty[$ بفرض $\text{س}_2 > \text{س}_1$ $\Leftarrow$ $\text{س}_2^2 > \text{س}_1^2$ $\Leftarrow$

$\text{س}_2^2-1 > \text{س}_1^2-1$ $\Leftarrow$ $\text{د}(\text{س}_2) > \text{د}(\text{س}_1)$ $\Leftarrow$ د تزايدية فعلاً .

(3) $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 - 4\text{س} - 5$

الحل: م ت =ح أنتبه ظهر أكثر من س لابد من الإكمال إلى مربع كامل.

$\therefore$ $\text{ص} = \text{س}^2 - 4\text{س} + 4 - 4 - 5 = (\text{س}-2)^2 - 9$

<u>قاعدة الصفر التربيعي:</u> $(\text{س}-2)^2 = 0$ $\Leftarrow$ $\text{س}-2=0$ $\Leftarrow$ $\text{س}=2 \in \text{ح}$

أقسم ح إلى فترتين $]-\infty, 2]$, $[2, \infty[$

<u>أولاً</u> : على $]-\infty, 2]$ بفرض $\text{س}_2 > \text{س}_1$ $\Leftarrow$ أضف -2 $\Leftarrow$

$\text{س}_2-2 > \text{س}_1-2$ ربع وأعكس $\Leftarrow$ $(\text{س}_2-2)^2 < (\text{س}_1-1)^2$ أضف (-9)

$\Leftarrow$ $(\text{س}_2-2)^2-9 < (\text{س}_1-1)^2-9$ $\Leftarrow$ $\text{د}(\text{س}_2) < \text{د}(\text{س}_1)$ $\Leftarrow$ د تناقصية .

ثانياً: على $[2, +\infty[$ الحل: بفرض $\text{س}_2 > \text{س}_1$ أضف -2 $\Leftarrow$

$\text{س}_2-2 > \text{س}_1-2$ ربع $\Leftarrow$ $(\text{س}_2-2)^2 > (\text{س}_1-1)^2$ أضف (-9) $\Leftarrow$

$(\text{س}_2-2)^2-9 > (\text{س}_1-1)^2-9$ $\Leftarrow$ $\text{د}(\text{س}_2) > \text{د}(\text{س}_1)$ $\Leftarrow$ د تزايدية .

---

(4) $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2+1}$ الحل: م ت: معرفة لما $\text{س}^2+1 \geq 0$ وهذا محقق دوماً لأنها مجموع مربعين $\Leftarrow$ م ت = ح.

<u>قاعدة الصفر التربيعي:</u> $\text{س}^2 = 0$ $\Leftarrow$ $\text{س} = 0 \in \text{ح}$ $\therefore$ أقسمها إلى فترتين.

أولاً: على $]-\infty, 0]$ بفرض $\text{س}_2 < \text{س}_1$ $\Leftarrow$ $\text{س}_2^2 > \text{س}_1^2$ $\Leftarrow$ $\text{س}_2^2+1 > \text{س}_1^2+1$

$\Leftarrow$ $\sqrt{\text{س}_2^2+1} > \sqrt{\text{س}_1^2+1}$ $\Leftarrow$ $\text{د}(\text{س}_2) > \text{د}(\text{س}_1)$ $\Leftarrow$ د تناقصية .

ثانياً: على $[0, \infty[$ بفرض $\text{س}_2 > \text{س}_1$ $\Leftarrow$ $\text{س}_2^2 > \text{س}_1^2$ $\Leftarrow$ $\text{س}_2^2+1 > \text{س}_1^2+1$

$\Leftarrow \sqrt{س_2^2+1} > \sqrt{س_1^2+1} \Leftarrow$ د$(س_2)$ > د$(س_1)$ $\Leftarrow$ د تزايدية .

(5) د(س) $= \sqrt{\dfrac{1}{س^3+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{س^3+1}}$

الحل: م ت معرفة لما $س^3+1 > 0 \Leftarrow س^3 > -1 \Leftarrow س > -1$

$\therefore$ م ت $=]-1, \infty[$ بفرض $س_2 > س_1 \Leftarrow س_2^3 > س_1^3$

$س_2^3+1 > س_1^3+1 \Leftarrow \sqrt{س_2^3+1} > \sqrt{س_1^3+1}$

أقلب تقلب $\Leftarrow \dfrac{1}{\sqrt{س_2^3+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{س_1^3+1}} \Leftarrow$ د$(س_2)$ < د$(س_1)$ $\Leftarrow$ د تناقصية.

---

(6) د(س) = $|س-3|$ الحل: أصفار – إشارة – إزالة

الأصفار $س-3=0 \Leftarrow س=3$

−	3	+
د(س)= − س+3		د(س)= س−3

أولاً على $]-\infty, 3]$ يكون ص= − س+3

$\therefore$ بفرض $س_2 > س_1 \Leftarrow -س_2 < -س_1 \Leftarrow -س_2+3 < -س_1+3$

$\Leftarrow$ د$(س_2)$ < د$(س_1)$ $\Leftarrow$ د تناقصية .

ثانياً على $]3, +\infty[$ يكون ص=س−3 $\therefore$ بفرض $س_2 > س_1 \Leftarrow$

$س_2-3 > س_1-3 \Leftarrow$ د$(س_2)$ > د$(س_1)$ $\Leftarrow$ د تزايدية.

---

(7) د(س)= $1-|س|$ الحل: أولاً على $]-\infty, 0]$ تكون د(س) = 1+س

بفرض $س_2 > س_1 \Leftarrow 1+س_2 > 1+س_1 \Leftarrow$ د$(س_2)$ > د$(س_1)$ $\Leftarrow$ د تزايدية.

−	0	+
1+ س		1− س

ثانياً: على $[.., +\infty[$ تكون د(س) = 1− س

بفرض $س_2 > س_1 \Leftarrow -س_2 < -س_1 \Leftarrow 1-س_2 < 1-س_1 \Leftarrow$

د$(س_2)$ < د$(س_1)$ $\Leftarrow$ $\therefore$ د تناقصـية.

---

(8) د(س) = 2+[س] الحل: م ت = ح

∴على [0, 1[يكون [س] = ⇐ 0 ⇐ د(س)=0+2=2 ⇐ د ثابتة على كل [0, 1[

على [1, 2[يكون [س] =1 ⇐ د(س)= 1+2 =3 ⇐ د ثابتة على كل [1, 2[

∴د تزداد من 2 إلى 3 إلى 4 إلى ....

∴ على ح بفرض س$_2$ > س$_1$ ⇐ د(س$_2$)≤ د(س$_1$) ⇐ ∴ د تزايدية.

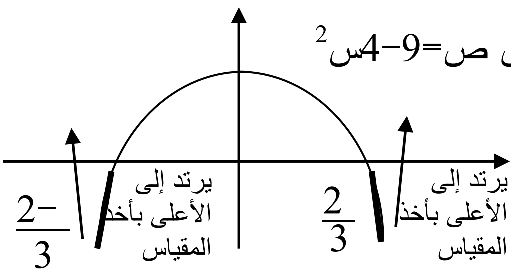
(9) د(س) = |9−4س$_2$| (سأحلها بطريقة الرسم البياني)

أولاً: بدون مقياس ⇐ د(س) =9−4س^2 . دالة زوجية

لما س= ⇐ 0 ⇐ ص=4 (0, 4)

لما ص=4 ⇐ 0−9س^2=4 ⇐ 0=9س ⇐ س^2 = $\frac{4}{9}$ ⇐ س= $\pm$ $\frac{2}{3}$ ($\frac{2}{3}$, 0)

(− $\frac{2}{3}$, 0) ∴ الرسم بدون مقياس ص=9−4س^2



الاستنتاج :

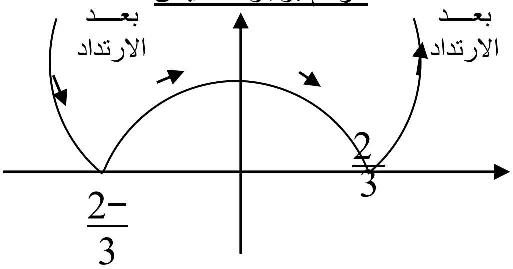
(1) على]−∞, −$\frac{2}{3}$] ⇐ د تناقصية.

(2) على [− $\frac{2}{3}$, 0] ⇐د تزايدية.

(3) على [0, $\frac{2}{3}$] ⇐د تناقصية.

(4) على [$\frac{2}{3}$, +∞[⇐د تزايدية.

الرسم بوجود المقياس



[10] د(س)=|س+2|+|1− س|+3

الحل: 1 2−

|س+2|	+ س+2	+ ● س+2	- - س-2
|1- س|	- -1+ س	+ 1- س	+ 1-س
3	3	3	3
د(س)=	4+س2 ●	6	2+س2-

أنتبه المستقيم: ص= أ س+ ب إذا كانت أ >0 فإن د تزايدية وإذا كانت أ<0 تناقصية.

أولاً على]$-\infty$, -2] يكون ص= -2س+2 تناقصية لأن أ $=-2<0$

على]-2, 1] د(س)= 6 ثابتة لا تزايدية ولا تناقصية.

على [1, $+\infty$[تكون

د(س) = 2س+4

لاحظ أ=$2>0$ ∴ تزايديـة.

[11] د(س) =(س$-2)^2$ الحـل: م ت = ح

قاعدة الصفرالتربيعي ضع (س$-2)^2=0$ ⟸ س$-2=0$ ⟸ س=2

∴ س = 2 ∋ ح ∴ اقسمها إلى فترتين

∴على]$-\infty$, 2] بفرض س$_2$ < س$_1$ ⟸ س$_2-2$ < س$_1-2$ ⟸

(س$_2-2)^2$ > (س$_1-2)^2$ ⟸ د(س$_2$) > د(س$_1$) ⟸ د تناقصية.

على [2, $+\infty$[بفرض س$_2$ > س$_1$ ⟸ س$_2-2$ > س$_1-2$ ⟸ (س$_2-2)^2$ > (س$_1-2)^2$

⟸ د(س$_2$) > د(س$_1$) ⟸ د تزايدية.

---

[12] د(س) = $\begin{cases} \text{س}-2 & \text{س} \geq 2 \\ 2-\text{س} & \text{س} < 2 \end{cases}$

أولاً: على [2 ,+ ∞ [تكون د(س) = س-2 بفرض س$_2$ > س$_1$ ⟸

س$_2-2$ > س$_1-2$ ⟸ د(س$_2$) > د(س$_1$) ⟸ د تزايدية [أو أ=$1>0$ تزايدية]

ثانياً: على] $-\infty$ ، 2 [تكون ص = 2 − س

بفرض س$_2$ > س$_1$ ⟸ − س$_2$ < − س$_1$ ⟸ 2− س$_2$ < 2− س$_1$

⟸ د (س$_2$) < د (س$_1$) ⟸ د تناقصيـة .

---

[3] مثل الدوال التالية ومن الرسم أوجد المدى وابحث اطراد الدوال.

(1) د(س) = س$^2-2$س-3 الحل: ص=(س-3) (س$+1$) دالة منحنية لرسمها نحتاج

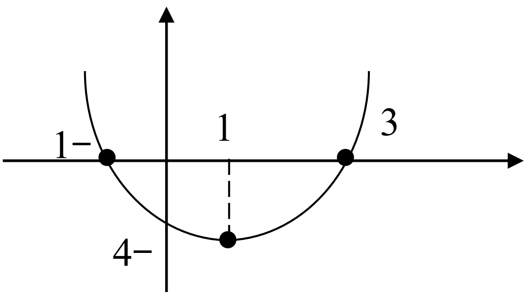
عدة نقاط لما س=-1 ⇐ ص=0

س	-1	3	1	2
ص	0	0	-4	-3

لما س=3 ⇐ ص=0

لما س=1 ⇐ ص=$1-2-3=-4$

لما س=2 ⇐ ص=$4-4-3=-3$



الاستنتاج :

1) م ت = ح

2) المدى $[-4, +\infty[$

3) على $]-\infty, 1]$ تناقصية.

4) على $[1, +\infty[$ تزايدية.

---

[5] د(س) = (س+1)|س|

− 0 +

الحل: على $[0, +\infty[$ د(س)= س(س+1)= س^2+س | د(س)= − س(س+1)= − س^2− س

ضع ص =0 ⇐ س(س+1) =0 ⇐ س= 0 ∴ (0 ,0)

أو س=-1 مرفوض خارج الفترة ولمعرفة قمته أكمل إلى مربع كامل

ص=س^2+ س+ $\frac{1}{4}$ − $\frac{1}{4}$ =(س+ $\frac{1}{2}$)^2 − $\frac{1}{4}$

لاحظ لما س = $-\frac{1}{2}$ ⇐ ص= $-\frac{1}{4}$ لكنها بكل أسف مرفوضة لأن س<0

ثانياً: على $]-\infty, 0]$ ص= − س^2 − س= − س (س+1)

ضع ص=0 ⇐ إما − س =0 ⇐ س=0 (0, 0) أو س+1=0 ⇐ س=-1 (-1, 0)

ضع ص =−(س^2+ س + $\frac{1}{4}$ − $\frac{1}{4}$) =−(س+ $\frac{1}{2}$)^2 + $\frac{1}{4}$

لما س= $-\frac{1}{2}$ ⇐ ص= $\frac{1}{4}$ ($-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$) تدعى القمة (الذروة).

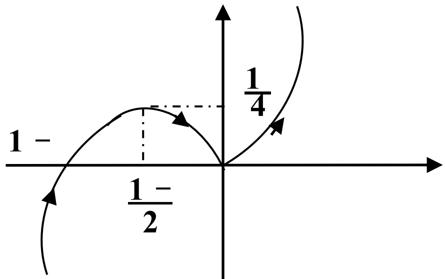
الاستنتاج: 1) م ت = ح

2) المدى = ح

3) على $]-\infty , -\frac{1}{2}]$ د تزايدية .

4) على $[-\frac{1}{2} , 0]$ د تناقصية .

5) على $[0, +\infty[$ د تزايدية .



[7] د(س) = $\frac{س^3-2س}{|س|}$

الحل: م ت = ح

	$-$	0	$+$
د(س) =	$\frac{س(س^3-2)}{-س} = -س^2+2$	‖	$\frac{س^3-2س}{س} = س^2-2$

* أولاً على $]0, +\infty[$ تكون د(س) = $س^2-2$

ضع س=0 ⇐ ص=−2 (0, −2) ممنوعة لأن الصفر ممنوع

ضع ص = 0 ⇐ $س^2-2=0$ ⇐ $س^2=2$

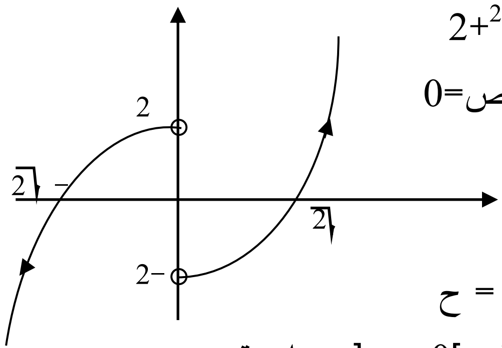
⇐ س=$\pm\sqrt{2}$ $(\sqrt{2} , 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$ مرفوض لأنها خارج الفترة.

ثانياً: على $]-\infty , 0[$ تكون ص= $-س^2+2$

لما س=0 ⇐ ص=2 (0, 2) ممنوعة ضع ص=0

⇐ $-س^2=-2$ ⇐ $س^2=2$

⇐ س= $\pm\sqrt{2}$ ∴ $(-\sqrt{2}, 0)$ مقبولة.



الاستنتاج: (1) م ت=ح/{0} (2) المدى = ح

(3) على $]-\infty , 0[$ د تزايدية. (4) على $]0, \infty[$ د تزايدية .

---

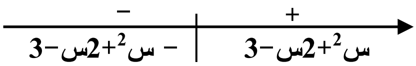
[8] د(س) = س | س | + 2س − 3 الحل: أصفار المقياس: س= 0

أولاً: د(س) =$س^2+2س-3$ على $[0, +\infty[$

ضع ص=0 ⇐ $س^2+2س-3=0$ ⇐ (س+3) (س−1) =0 ⇐

أما س+3=0 ⇐ س=−3 $\notin [0 , \infty[$ مرفوض أو س−1=0 ⇐ س=1 مقبول

∴ لما س=1 ⇐ ص=1+2−3=0 (1، 0)



لما س=0 ⇐ ص=0+0−3=−3 (0، −3)

لما س=2 ⇐ ص=4+4−3=5 (2، 5)

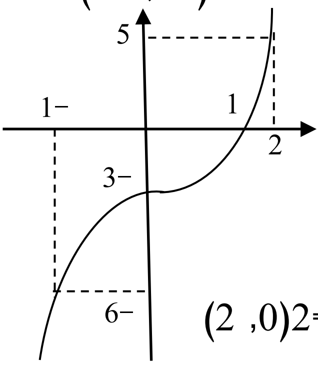
س	0	1	2
ص	−3	0	5

ثانياً: على]−∞ ، 0] د(س) = −س^2+2س−3.

س	0	−1
ص	−3	−6

ضع س=0 ⇐ ص=0+0−3=−3 (0، −3).

ضع س=−1 ⇐ ص=−(−1)^2+2(−1) −3 = −3−2−1=−6 (−1، −6).



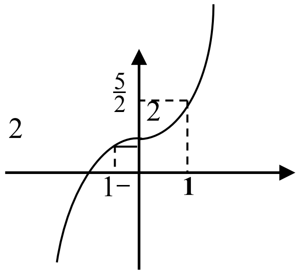
الاستنتاج: (1) م ت = ح (2) المدى = ح

(3) تزايدية فعلاًعلى كل ح.]

[10] د(س)= $\frac{1}{2}$س^3+2 الحل: ضع س=0 ⇐ ص=2 (0، 2)

ضع س=−1 ⇐ ص=−$\frac{1}{2}$+2 = $\frac{3}{2}$ (−1، $\frac{3}{2}$)

ضع س=−1 ⇐ ص=$\frac{1}{2}$+2 = $\frac{5}{2}$ (1، $\frac{5}{2}$)



الاستنتاج: (1) م ت = ح ، (2)المدى = ح .

(3) د تزايدية على كل ح .

(4) الدالة غير محدودة .

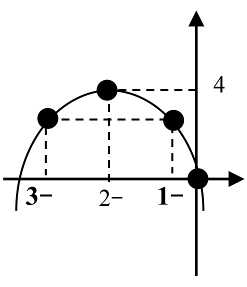
[11] د(س)=4−(س+2)^2 الحل: ضع س=−2

⇐ ص=4−(−2+2)^2 =4 (−2، 4)

ضع س=−3 ⇐ ص=4 −(−3+2)^2=4−(1) =3 (−3، 3)

ضع س=−1 ⇐ ص=4 −(−1+2)^2=4−1 =3 (−1، 3).

ضع س=0 ⇐ ص=4 −(0+2)^2=4−4 =0 (0، 0)



الاستنتاج: (1) م ت =ح .   (2) المدى =]$-\infty$, 4]

(3) على]$-\infty$, -2] تزايدية . (4) على= [-2, $+\infty$[تناقصية .

(5) (-2, 4)نهاية عظمى محلية وهي عظمى مطلقة.

(6) د محدودة من الأعلى .

[12] د(س) =|س^3|-4 انتبه |س^3|=|س|^3

أولاً: على [0, $+\infty$[د(س)= س^3 -4

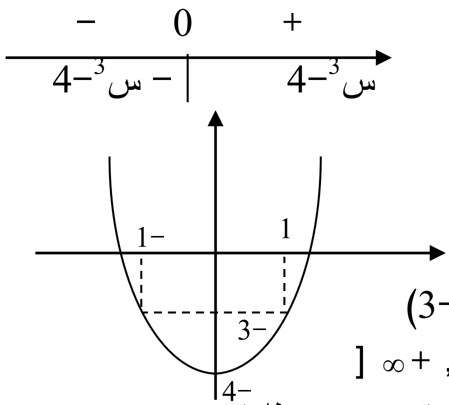
ضع س=0 $\Leftarrow$ ص=0-4 =-4(0, -4).

ضع س=1 $\Leftarrow$ص=1-4 =-3(1, -3).

ثانياً: على]$-\infty$, 0] ص= $-$ س^3-4 .

ضع س=0 $\Leftarrow$ ص=-4 . (0, -4)

ضع س=-1 $\Leftarrow$ ص=+1-4= -3 (-1, -3)



الاستنتاج: (1) م ت=ح . (2) المدى =[-4, $+\infty$[

(3) محدودة من الأسفل . (4) (0, -4) نهاية صغرى مطلقة .

(5) على]$-\infty$, 0] تناقصية وعلى [0, $+\infty$[تزايدية .

[13] د(س) = $\frac{\text{س}^4 - 2\text{س}}{|\text{س}|}$ الحل: أولاً : على]0, $+\infty$[

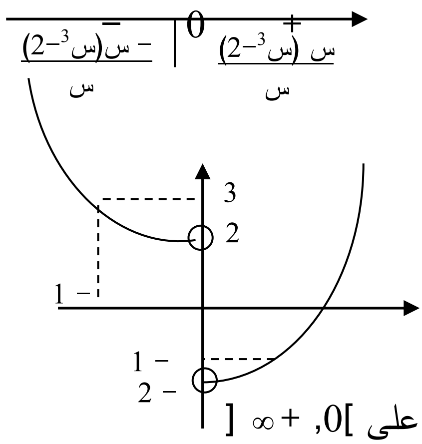
ص=س^3-2 لما س=0$\Leftarrow$ ص=0-2=-2 (0, -2)

لما س=1$\Leftarrow$ص=1-2=-1 (0, 2)

ثانياً: على]$-\infty$, 0[ص=$-$س^3+2

ضع س=0$\Leftarrow$ ص=2   (0, 2)

ضع س=1$\Leftarrow$ص=+1+2=3



الاستنتاج: (1) م ت=ح =ح/ {0} .

(2) المدى =]-2, $+\infty$[

(3) محدودة من الأسفل .

(4) د تناقصية على]$-\infty$, 0[د تزايدية على]0, $+\infty$[

الوحـــدة الثالثـــة

المتتاليـــات

تعريف: المتتالية هي تطبيق مجاله ط أو جزء منها ومجالها المقابل أي مجموعة .

مثال: هل التطبيق ط ⟵ س الذي قاعدته $ح_ن = \frac{1}{ن}$, ن ∋ ط يمثل متتالية.

الجواب: نعم لأن مجاله ط .

مثال: $ح_ن = \frac{1}{ن+1}$ هل يمثل حد عام لمتتالية حيث ن ∋ ط ؟

الجواب: كلا لأن مجاله ط ⊄ ط .

هل التطبيق {1, 2, 3} ⟵ ص يمثل متتالية ؟

نعم لأن مجال التطبيق {1, 2, 3} ⊃ ط .

التعبير عن المتتالية: (1) أن نذكر عناصر المتتالية بينها فواصل

بالشكل <1, 3, 5,0000>

(2)بالصورة التالية < $ح_ن$ > فإذا كان عدد عناصرها (محدود) قلنا متتالية (منتهية) و إذا كان غير محدود قلنا غير منتهية.

بملاحظة هذه الحدود قد نحكم على المتتالية بأنها تزايدية أو تناقصية .

- **قاعدة** < $ح_{ن}$ > تزايدية إذا كان $ح_{ن+1}$ > $ح_{ن}$.
- < $ح_{ن}$ > تناقصية إذا كان $ح_{ن+1}$ < $ح_{ن}$.

مثال: < $\frac{1}{ن}$ > = < 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... $\frac{1}{ن}$ > واضح أنها تناقصية أو بشكل آخر $ح_{ن+1} = \frac{1}{ن+1}$, $ح_{ن} = \frac{1}{ن}$ بما ان $\frac{1}{ن+1} < \frac{1}{ن}$

$\Leftarrow$ $ح_{ن+1} < ح_{ن}$ ∴ تناقصية.

تمارين ومسائل (1, 3)

[1] بين أيا من الدوال التالية تمثل متتالية – أذكر السبب.

أ) $ح_{ن} = 2^{ن}$, ن ∈ ص . الحل: ليست متتالية لأن ص ⊄ ط .

ب) ح (ن) = $ن^2 - 3ن$, ن ∈ { 1 , 3 , 4 , 5 , 6 } .

الجواب: نعم متتالية لأن { 1 , 3 , 4 , 5 , 6 } ⊂ ط .

ج) ح (ن) = $\frac{3}{2ن}$, ن ∈ ط , الجواب: ليست متتالية لأن ط ⊄ ط .

د) ح (ن) = $\sqrt{ن+3}$, ن ∈ ط , الجواب: متتالية .

هـ) ح (ن) = $\frac{1}{(ن+1)^2}$, ن ∈ ح , الجواب: ليست متتالية لأن ح ⊄ ط .

[2] أكتب كلا من المتتاليات التالية مكتفيا بحدودها الخمسة الأولى.

أ) < $هـ_{ن}$ > حيث $هـ_{ن} = 2^{ن} - 2ن$.

الحل: $هـ_1 = 2^1 - 2 = 0$ ، $هـ_2 = 2^2 - 2 \times 2 = 0$

$هـ_3 = 2^3 - 3 \times 2 = 8 - 6 = 2$ ، $هـ_4 = 2^4 - 4 \times 2 = 16 - 8 = 8$

$هـ_5 = 2^5 - 5 \times 2 = 32 - 10 = 22$.

ب) $\langle د_ن \rangle$ حيث $د_ن = (-1)^{ن+1} \times ن^2$

الحل: $د_1 = (-1)^2 \times (1)^2 = 1 \times 1 = 1$ ، $د_2 = (-1)^3 \times (2)^2 = -4$

$د_3 = (-1)^4 \times (3)^2 = 9$. ، $د_4 = (-1)^5 \times (4)^2 = -16$

$د_5 = (-1)^6 \times (5)^2 = 25$.

جـ) $\langle ل_ن \rangle$ حيث $ل_ن = (-1)^ن (2ن + 1)$

الحل: $ل_1 = (-1)^1 (2 \times 1 + 1) = -3$ ، $ل_2 = (-1)^2 (2 \times 1 + 2) = 5$

$ل_3 = (-1)^3 (2 \times 1 + 3) = -7$ ، $ل_4 = (-1)^4 (2 \times 1 + 4) = 9$

$ل_5 = (-1)^5 (2 \times 1 + 5) = -11$.

د) $\left\langle \frac{3ن - 1}{4ن + 5} \right\rangle$ الحل: $ح_ن = \frac{3ن - 1}{4ن + 5} \Leftarrow ح_1 = \frac{3 - 1}{4 + 5} = \frac{2}{9}$

$ح_2 = \frac{6 - 1}{8 + 5} = \frac{5}{13}$ ، $ح_3 = \frac{9 - 1}{12 + 5} = \frac{8}{17}$

$ح_4 = \frac{12 - 1}{16 + 5} = \frac{11}{21}$ ، $ح_5 = \frac{15 - 1}{20 + 5} = \frac{14}{25}$

هـ) $\left\langle \frac{\text{ن}}{2^{\text{ن}}} \right\rangle$ الحل: $ح_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{2^{\text{ن}}} \Leftarrow ح_1 = \frac{1}{2}$ ، $ح_2 = \frac{2}{4}$ ،
$ح_3 = \frac{3}{8}$ ، $ح_4 = \frac{4}{16}$ ، $ح_5 = \frac{5}{32}$.

[3] أكتب الحدود الأربعة الأولى للمتتاليات التي حدها العام معطى , ثم أوجد الحد العاشر .

أ) د (ن) $= 2^{\text{ن}}$ الحل: * د$(1) = 2^1 = 2$, * د $(2) = 2^2 = 4$,

* د $(3) = 2^3 = 8$, * د $(4) = 2^4 = 16$

الحد العاشر * د $(10) = 2^{10} = 1024$.

ب) د (ن) $= \frac{2\text{ن}}{\text{ن}^2+1}$ الحل:* د $(1) = \frac{2\times1}{(1)^2+1} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$.

* د $(2) = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$ ، * د $(3) = \frac{6}{9+1} = \frac{6}{10}$

* د $(4) = \frac{2\times4}{16+1} = \frac{8}{17}$ ، * د $(5) = \frac{20}{100+1} = \frac{20}{101}$.

جـ) د(ن) $= (-1)^{\text{ن}}(2\text{ن}+1)$ الحل: د$(1) = (-1)^1(1+2) = -3$.

د$(2) = (-1)^2(1+4) = 1\times5 = 5$. ، د$(3) = (-1)^3(1+6) = -7$.

د$(4) = (-1)^4(1+8) = 9$,

الحد العاشر د$(10) = (-1)^{10}(2\times10+1) = 1(21) = 21$ # .

د) د (ن) $= 1 - \frac{2}{\text{ن}}$ الحل: د $(1) = 1 - \frac{2}{1} = -1$

د $(2) = 1 - \frac{2}{2} = 1 - 1 = 0$,   د $(3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

د $(4) = 1 - \frac{2}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

الحد العاشر د $(10) = 1 - \frac{2}{10} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

هـ) د(ن) = جتا $\frac{\pi}{2}$ن   الحل: د(1) = جتا $\frac{\pi}{2} \times 1$ = جتا $90 = 0$

د(2) = جتا $\frac{\pi}{2} \times 2$ = جتا $\pi = -1$

د(3) = جتا $\frac{3\pi}{2}$ = جتا $270 = 0$

د(4) = جتا $\frac{\pi}{2} \times 4$ = جتا (2π) = جتا $0 = 1$

الحد العاشر د(10) = جتا $\frac{\pi}{2} \times 10$ = جتا (5π)

جتا $(2\pi + 2\pi + \pi)$ = جتا $\pi = -1$

ز) د (ن) = $\frac{2}{5}$ الحل: د $(1) = \frac{2}{5}$, د $(2) = \frac{2}{5}$

د $(3) = \frac{2}{5}$, د $(4) = \frac{2}{5}$, الحد العاشر د $(10) = \frac{2}{5}$

[4] أوجد الحدين العاشر والرابع والخمسون للمتتاليات التالية :

أ) < $\frac{ن}{ن+1}$ >   الحل: ح$_{10} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$.

ح$_{54} = \frac{54}{54+1} = \frac{54}{55}$.

ب) <12>   الحل: $ح_{10} = 12$ ، $ح_{54} = 12$

جـ) $(-1)^{ن}$ (3ن+2)   الحل: $ح_{10} = (-1)^{10}(30+2) = 32$

$ح_{54} = (-1)^{54}(54+1\times3) = 163+$

[5] أكتب الخمسة الأولى لكل متتالية مما يأتي ثم مثلها بيانياً .

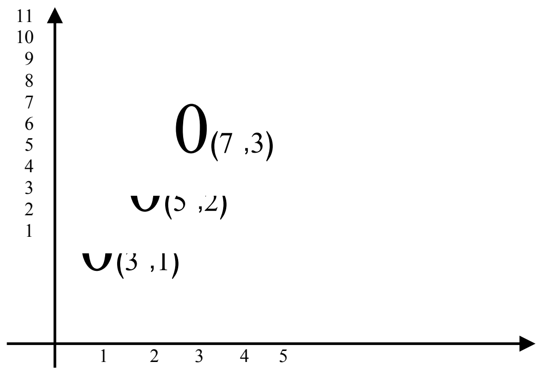
أ) <2ن+1>   الحل: $ح_1 = 2\times1+1=3$ (3 ,1)

$ح_2 = 2\times2+1=5$ (5 ,2)

$ح_3 = 2\times3+1=7$ (7 ,3)

$ح_4 = 2\times4+1=9$ (9 ,4)

$ح_5 = 2\times5+1=11$ (11 ,5)

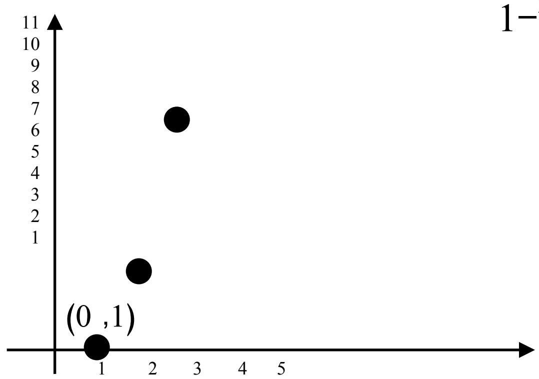


ب) $<ن^2-1>$ الحل: $ح_ن = ن^2-1$

$ح_1 = (1)^2-1 =0$ (0 ,1)

$ح_2 = (2)^2-1 =3$ (3 ,2)

$ح_3 = (3)^2-1 =8$ (8 ,3)



$ح_4 = (4)^2-1 =15$ (15 ,4)

$ح_5 = (5)^2-1 =25-1=24$ (24 ,5)

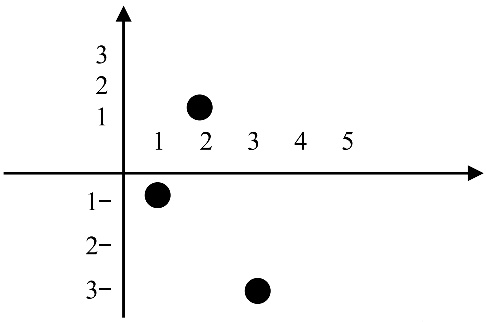
ج) $<(-1)^{ن}\, ن>$ الحل: $ح_1 = (-1)^1 \times 1 = -1$ $(1, -1)$

$ح_2 = (-1)^2\,(2) = 2$ $(2, 2)$

$ح_3 = (-1)^3\,(3) = -3$ $(3, -3)$

$ح_4 = (-1)^4\,(4) = 4$ $(4, 4)$

$ح_5 = (-1)^5\,(5) = -5$ $(5, -5)$



[6] أكتب الحدود الستة الأولى للمتتالية المعطاة حيث $ن \geq 2$

أ) $ح_1 = 1$, $ح_{ن} = 3\,ح_{ن-1} - 1$ $ن \geq 2$

الحل: $ح_1 = 1$, $ح_2 = 3\,ح_{2-1} - 1 = 3ح_1 - 1 = 3\times1 - 1 = 2$

$ح_3 = 3\,ح_{3-1} - 1 = 3ح_2 - 1 = 3\times2 - 1 = 5$

$ح_4 = 3ح_3 - 1 = 3\times5 - 1 = 15 - 1 = 14$

$ح_5 = 3ح_4 - 1 = 3\times14 - 1 = 42 - 1 = 41$

$ح_6 = 3ح_5 - 1 = 3\times41 - 1 = 123 - 1 = 122$

ب) $ح_1 = 1$, $ح_{ن} = 1 + \frac{4}{ح_{ن-1}}$ الحل: $ح_1 = 1$

$ح_2 = 1 + \frac{1}{ح} = 1 + \frac{1}{1} = 1+1 = 2$ أكمل .

$ح_3 = 1 + \frac{1}{ح_2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

ج) $ح_1 = -2.24$, $ح_{ن} = 1.2ح_{ن-1} + 2.2$

الحل: ح$_2$ = 1.2ح$_1$ + 2.2 = 1.2 × − 2.24 + 2.2

= −2.688 + 2.2 = −0.488

ح$_3$ = 1.2ح$_2$ + 2.2 = 1.2 × − 0.488 + 2.2= − 0.5856 + 2.2 = 1.6144

ح$_4$ = 1.2ح$_3$ + 2.2 = 1.2×1.6144 + 2.2= 4.13728 .

ح$_5$ = 1.2ح$_4$ + 2.2 = 1.2×4.13728+2.2= 7.164736 .

[7] أكتب الحد العام لكل متتالية من المتتاليات التالية:

أ) <1, 3, 5, 7, 00000> الحل: ح$_ن$ = 2ن − 1 .

ب) <(1×2) , (2×4) , (5×6) , 000> الحل: ح$_ن$ = (2ن − 1) 2ن .

جـ) <1, − $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ 2, 0000> الحل: ح$_ن$ =(−1)$^{ن+1}$× $\frac{1}{ن}$

د) < أ , أ ر, أ ر^2 , 000000 > الحل: ح$_ن$ = أ ر$^{ن-1}$.

هـ) < $\frac{1}{2}$, 0 , $\frac{-1}{2}$, −1, 0000 > الحل: ح$_ن$ = $\frac{1}{2}$(2 − ن) .

و) < أ , أ + د , أ + 2د , 0000> الحل: ح$_ن$ = أ+(ن−1) د # .

[8] حدد أياً من المتتاليات الآتية تزايدية وأياً منها تناقصية أو غير ذلك .

أ) < 1+ $\frac{1}{ن}$ >

π

الحل: $ح_ن = 1 + \frac{1}{ن}$

$ح_{ن+1} = 1 + \frac{1}{ن+1}$

بما أن $\frac{1}{ن+1} < \frac{1}{ن}$

أضف 1 $\Leftarrow$ $1 + \frac{1}{ن+1} < 1 + \frac{1}{ن}$

$\Leftarrow$ $ح_{ن+1} < ح_ن$ $\Leftarrow$ المتتالية تناقصية .

ب) $\langle (-3)^ن \rangle$ الحل: $ح_ن = (-3)^ن$

$ح_{ن+1} = (-3)^ن = (-3)^ن \times (-3)^1 = -3ح_ن$

إذا كان (ن) زوجي $\Leftarrow$ $ح_ن > 0$ $\Leftarrow$ $ح_{ن+1} < 0$ $\Leftarrow$ $ح_{ن+1} < ح_ن$ (تناقصية) .

إذا كان (ن) فردي $\Leftarrow$ $ح_ن < 0$ $\Leftarrow$ $ح_{ن+1} > 0$ $\Leftarrow$ $ح_{ن+1} > ح_ن$ (تزايدية) .

$\therefore$ لا يمكن أن نصفها بالتزايدية أو التناقصية .

ج) $\langle (\frac{1}{2})^ن \rangle$ الحل: $\langle (\frac{1}{2})^ن \rangle = \langle \frac{1}{2^ن} \rangle = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \rangle$

واضح أنها تناقصية .

د) $\langle$ جتا ن π $\rangle$ الحل: $\langle$ جتا ن π $\rangle$ = $\langle$ جتا π , جتا 2π, جتا 3π, ... $\rangle$ = $\langle -1 , 1 , -1 , 1 , ... \rangle$

لا تزايدية ولا تناقصية .

[5] كون المتتاليات الهندسية إذا علم منها ما يأتي:

أ) $\text{ح}_1=\sqrt{3}$ ، $\text{ر}=\sqrt{2}$

الحل:

أ) $\text{ح}_1=\sqrt{3}$ ، $\text{ح}_2=\text{ح}_1\text{ر}=\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$

$\text{ح}_3=\text{ح}_2\times\text{ر}=\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$

$\therefore <\sqrt{3}\text{ ، }\sqrt{6}\text{ ، }2\sqrt{3}\text{ ، }\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots>$

ب) $\text{ح}_1=12.8$ ، $\text{ح}_{10}=0.025$

الحل:

$\text{ح}_\text{ن}=\text{ح}_1(\text{ر})^{\text{ن}-1}$

$\text{ح}_{10}=12.8(\text{ر})^9 \Leftarrow 12.8\,\text{ر}^9=0.025$

$$\text{ر}^9=\frac{0.025}{12800}=\frac{25}{12800}=\frac{1}{252}=\frac{1}{2^9}=\left(\frac{1}{2}\right)^9 \leftarrow \text{ر}=\frac{1}{2}$$

$<12.8\text{ ، }6.4\text{ ، }3.2\text{ ، }\ldots\ldots\ldots>$

ج) مجموع ثلاث حدود متتالية منها يساوي (14) وحاصل ضربها يساوي (64).

الحل:

$\text{ح}_1+\text{ح}_1\text{ر}+\text{ح}_1\text{ر}^2=14 \Leftarrow \boxed{\text{ح}_1(1+\text{ر}+\text{ر}^2)=14} \rightarrow (1)$

$\text{ح}_1\times\text{ح}_1\text{ر}\times\text{ح}_1\text{ر}^2=64 \Leftarrow \text{ح}_1^3\text{ر}^3=(4)^3 \Leftarrow \text{ح}_1\text{ر}=4 \Leftarrow \boxed{\text{ح}_1=\frac{4}{\text{ر}}} \rightarrow (2)$

عوض في (1) $\frac{4}{\text{ر}}(1+\text{ر}+\text{ر}^2)=\frac{14}{1}$ أضرب بـ ر

$4(1+\text{ر}+\text{ر}^2)=14\text{ر}$

$4+4\text{ر}+4\text{ر}^2=14\text{ر} \Leftarrow 4\text{ر}^2-10\text{ر}+4=0$ قسم على 2

$2\text{ر}^2-5\text{ر}+2=0$

$(\text{ر}-2)(2\text{ر}-1)=0$

أما $\text{ر}-2=0 \Leftarrow \boxed{\text{ر}=2}$ عوض في (2) $\text{ح}_1=\frac{4}{2}=2$

< 2، 4، 8، 16،.........>

أو $2ر-1=0 \Leftarrow 2ر=1 \Leftarrow \boxed{ر=\frac{1}{2}} \Leftarrow ح_1=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$

< 8، 4، 2، 1، $\frac{1}{2}$،..........>

د) مجموع حديها الثاني والخامس 588 ومجموع حديها الثاني والثالث 84.

الحل: $ح_2+ح_5=588 \Leftarrow ح_1ر+ح_1ر^4=588$

$\Leftarrow \boxed{ح_1ر(1+ر^3)=588} \leftarrow (1)$

$ح_2+ح_3=84 \Leftarrow ح_1ر+ح_1ر^2=84$

$\boxed{ح_1ر(1+ر)=84} \leftarrow (2)$

بقسمة (1) على (2) $\Leftarrow \frac{ح_1ر(1+ر^3)}{ح_1ر(1+ر)}=\frac{588}{84}$

$\Leftarrow \frac{1+ر^3}{1+ر}=7 \Leftarrow \frac{(1+ر)(1-ر+ر^2)}{(1+ر)}=7$

$\Leftarrow 1-ر+ر^2=7 \Leftarrow ر^2-ر-6=0$

$(ر+2)(ر-3)=0 \Leftarrow$ أما $ر+2=0 \Leftarrow \boxed{ر=-2}$

عوض في (2) $\Leftarrow -2ح_1(1-2)=84 \Leftarrow 2ح_1=84 \Leftarrow \boxed{ح_1=42}$

∴ المتتالية (42، −84، + 168،.........)

أو $ر-3=0 \Leftarrow \boxed{ر=3} \Leftarrow 3ح_1(1+3)=84$

$12ح_1=84 \Leftarrow ح_1=\frac{84}{12}= 7$

∴ المتتالية ⟨7، 21، 63،.........⟩

[6] أي من حدود المتتالية:

أ) ⟨2، $2\sqrt{3}$ ، 6،.........⟩ يساوي 54

الحل: $ح_1=2$ ، $ر=\frac{ح_2}{ح_1}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ ، $ح_ن=54$، ن=؟

$\boxed{ح_ن=ح_1 ر^{ن-1}} \Leftarrow 54=2\,(\sqrt{3})^{ن-1}$ قسمة على 2

$27=(3^{\frac{1}{2}})^{ن-1}$

$3^3=3^{\frac{ن-1}{2}} \Leftarrow \frac{ن-1}{2}=\frac{3}{1} \Leftarrow ن-1=6 \Leftarrow ن=7 \Leftarrow$ الحد السابع

$\therefore ح_7=2(\sqrt{3})^6=2\times27=54$

ب) ⟨324، 54، 9،……⟩ يساوي $\frac{1}{144}$ الحل ر $=\frac{9}{54}=\frac{1}{6}$

$\boxed{ح_ن=ح_1 ر^{ن-1}} \Leftarrow \frac{1}{144}=324\times\left(\frac{1}{6}\right)^{ن-1}$

$\therefore \left(\frac{1}{6}\right)^{ن-1}=\frac{1}{324\times144}=\frac{1}{2^6\times3^6}=\left(\frac{1}{2\times3}\right)^6=\left(\frac{1}{6}\right)^6$

$\therefore ن-1=6 \Leftarrow \boxed{ن=7}$ $\therefore$ الحد السابع

ج) ⟨8، 4، 2،…⟩ يساوي $\frac{1}{4}$

الحل

$ح_1=8$ ، $ر=\frac{ح_2}{ح_1}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

$ح_ن=ح_1ر^{ن-1} \Leftarrow \frac{1}{4}=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{ن-1}$

$\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^{ن-1} \Leftarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5=\left(\frac{1}{2}\right)^{ن-1}$

$\therefore ن-1=5 \Leftarrow ن=6$

$\therefore$ الحد السادس.

[7] أوجد المتتالية الهندسية التي فيها:

أ) $ح_{10}= 320$ ، $ح_6=20$

الحل: القانون: $\boxed{ح_ن=ح_1\times ر^{ن-1}}$

بما أن $ح_{10}= 320 \Leftarrow \boxed{320= ح_1\times ر^9} \leftarrow (1)$

بما أن $ح_6=20 \Leftarrow \boxed{20= ح_1 ر^5} \leftarrow (2)$

قسم (1) على (2) $\Leftarrow \frac{320}{20}=\frac{ح_1 ر^9}{ح_1 ر^5} \Leftarrow 16= ر^4$

$2^4=4 \Leftarrow ر= \pm 2$

لما $ر=2 \Leftarrow$ عوض في (2) $20= ح_1\times 32 \Leftarrow ح_1=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$

وتكون المتتالية $\langle \frac{5}{8}، \frac{5}{4}، \frac{5}{2}، \ldots \rangle$

إذا كان $ر=-2 \Leftarrow 20= ح_1(-2)^5 \Leftarrow =\frac{20}{-32}=\frac{-5}{8}$.

وتكون المتتالية $\langle -\frac{5}{8}، +\frac{5}{4}، -\frac{5}{2}، \ldots\ldots \rangle$

ج) أوجد المتتالية الهندسية التي فيها:

$ح_2=2س$، $ح_{11}= 1024$ $س^{10}$

الحل: $ح_2=ح_1 ر \Leftarrow \boxed{2س = ح_1 ر} \leftarrow (1)$

$ح_{11}=ح_1 ر^{10} \Leftarrow ح_{11}=ح_1 ر\times ر^9 \Leftarrow ح_{11}=2س ر^9$ عوض عن $ح_{11}$

$\therefore 1024س^{10}=2س ر^9 \Leftarrow 512س^9=ر^9$

$\therefore (2س)^9=ر^9 \Leftarrow \boxed{ر = 2س}$ عوض في (1) $2س=2س ح_1$

$\Leftarrow ح_1=\frac{2س}{2س}=1 \therefore ح_1=1$

$\langle 1، 2س، 4س^2، 8س^3، \ldots\ldots \rangle$

ب) معطياتها ناقصة:

[8] أوجد المتتالية الهندسية التي حدها الثالث يزيد على حدها الثاني بمقدار (12)

وحدها السادس يزيد على حدها الخامس بمقدار (324)

الحل:

- $\text{ح}_3 - \text{ح}_2 = 12 \Leftarrow \text{ح}_1\text{ر}^2 - \text{ح}_1\text{ر} = 12 \Leftarrow \boxed{\text{ح}_1\text{ر}(\text{ر}-1) = 12} \leftarrow (1)$
- $\text{ح}_6 - \text{ح}_5 = \text{ح}_1\text{ر}^5 - \text{ح}_1\text{ر}^4 = 324 \Leftarrow \boxed{\text{ح}_1\text{ر}^4(\text{ر}-1) = 324} \leftarrow (2)$

نقسم (1) على (2) $\Leftarrow \dfrac{\text{ح}_1\text{ر}(\cancel{\text{ر}-1})}{\text{ح}_1\text{ر}^4(\cancel{\text{ر}-1})} = \dfrac{12}{324}$

$$\frac{1}{\text{ر}^3} = \frac{1}{27} \Leftarrow \text{ر}^3 = 27 \Leftarrow \text{ر} = \sqrt[3]{27} = 3 \quad \therefore \boxed{\text{ر} = 3}$$

عوض في(1) $3\text{ح}_1(3-1) = 12 \Leftarrow 6\text{ح}_1 = 12 \Leftarrow \boxed{\text{ح}_1 = 2}$

$\langle 2، 6، 18، 54،\ldots \rangle$

[9] أوجد قيمة كل من س، ص في المتتالية الهندسية $\langle 5، \text{س}، \text{ص}، 135 \rangle$

الحل: $\text{ح}_1 = 5$ ، $\text{ح}_4 = 135$، $\quad \text{ن} = 4$

$$\text{ر} = \frac{\text{ح}_2}{\text{ح}_1} \Leftarrow \boxed{\text{ر} = \frac{\text{س}}{5}} \text{ وكذلك } \text{ر} = \frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_3} \Leftarrow \boxed{\text{ر} = \frac{135}{\text{ص}}}$$

$$\therefore \frac{\text{س}}{5} = \frac{135}{\text{ص}} \Leftarrow \boxed{\text{س ص} = 5 \times 135} \leftarrow (1)$$

$$\text{ح}_\text{ن} = \text{ح}_1\text{ر}^{\text{ن}-1} \Leftarrow \text{ح}_4 = 5 \times \left(\frac{\text{س}}{5}\right)^3 = \frac{\text{س}^3}{5^3} = \frac{\text{س}^3}{25}$$

$$\therefore \text{ عوض عن } \text{ح}_4 = 135 \Leftarrow \frac{135}{1} = \frac{\text{س}^3}{25} \Leftarrow \text{س}^3 = 25 \times 135$$

$$= 25 \times 5 \times 27 = 5^3 \times 3^3 \Leftarrow \boxed{\text{س} = 5 \times 3 = 15}$$

عوض في (1) $15\text{ص} = 5 \times 135 \Leftarrow \text{ص} = \dfrac{135 \times \cancel{5}}{1\cancel{5}} = \dfrac{135}{3}$

$$\therefore \boxed{\text{ص} = 45}$$

[11] أوجد ما يلي:

أ) وسطين هندسيين بين 8، 64

الحل 8، $\boxed{}$ ، $\boxed{}$ ، 64

معك $ح_1=8$، $ح_4=64$ بما أن $\boxed{ح_ن = ح_1 ر^{ن-1}}$

$\therefore ح_4 = 8 \times ر^{4-1} = 8ر^3 \Leftarrow 8ر^3 = 64 \Leftarrow ر^3 = \frac{64}{8} = 8$

$\Leftarrow ر = 2$

$\therefore$ 8، $\boxed{16}$، $\boxed{32}$ ، 64

د) أدخل ست أوساط هندسية بين 640، 5

الحل: 640، $\boxed{}$ ، $\boxed{}$ ، $\boxed{}$ ، $\boxed{}$ ، $\boxed{}$ ، $\boxed{}$ ، 5

معك $ح_1=640$، $ح_8=5$

القانون $\boxed{ح_ن = ح_1 ر^{ن-1}} \Leftarrow ح_8 = 640 \times ر^7 \therefore 640ر^7 = 5$

$\Leftarrow ر^7 = \frac{5}{640} \Leftarrow ر^7 = \frac{1}{128} = \frac{1}{2^7} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$

$\Leftarrow ر = \frac{1}{2}$

$\therefore$ المتتالية 640، $\boxed{320}$ ، $\boxed{160}$ ، $\boxed{80}$ ، $\boxed{40}$ ، $\boxed{20}$ ، $\boxed{10}$ ، 5

[12] عددان وسطهما الحسابي (75) ووسطهما الهندسي (60) أوجد هذين العددين:

الحل: نفرض العددين س،ص

أولاً: $\frac{س+ص}{2} = \frac{75}{1} \Leftarrow س + ص = 150 \Leftarrow \boxed{س = 150 - ص} \leftarrow (1)$

الوسط الهندسي$=\sqrt{\text{ضرب العددين}}$ $\Leftarrow$

$60 = \sqrt{س \times ص} \Leftarrow 3600 = س ص$ عوض عن س بقيمتها

ص(150 − ص) = 3600 ⇐ 150ص − ص^2 = 3600 صفّرها.

ص^2 − 150س + 3600 = 0

(ص − 120) (ص − 30) = 0

أما ص − 120 = 0 ⇐ $\boxed{\text{ص} = 120}$

أو ص − 30 = 0 ⇐ $\boxed{\text{ص} = 30}$

لما ص = 120 ⇐ س = 150 − ص = 150 − 120 = 30 ⇐ $\boxed{\text{س} = 30}$

لما ص = 30 ⇐ س = 150 − ص = 150 − 30 = 120 ⇐ $\boxed{\text{س} = 120}$

[14] أوجد ما يأتي:

أ) الوسط الهندسي للكميتين (م − ب) ، (م^2 − ب^2) (م + ب)

الحل: الوسط الهندسي = $\sqrt{\text{الأول} \times \text{الثاني}}$ = $\sqrt{(\text{م}-\text{ب})(\text{م}^2-\text{ب}^2)(\text{م}+\text{ب})}$

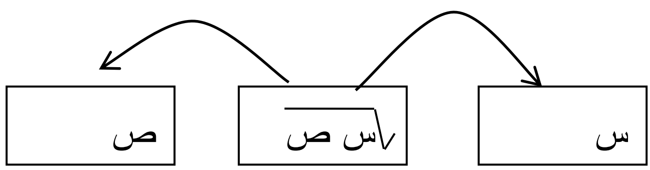
= $\sqrt{(\text{م}-\text{ب})(\text{م}-\text{ب})(\text{م}+\text{ب})(\text{م}+\text{ب})}$ = $\sqrt{(\text{م}-\text{ب})^2(\text{م}+\text{ب})^2}$ #

= $\sqrt{(\text{م}-\text{ب})(\text{م}+\text{ب}) = \text{م}^2 - \text{ب}^2}$

ب) عددان وسطهما الهندسي يزيد على أحدهما بمقدار (8) ويقل عن الآخر بمقدار (24).

الحل:

نفرض العددين س،ص



$\sqrt{\text{س ص}}$ − س = 8 ← (1)

ص − $\sqrt{\text{س ص}}$ = 24 ← (2)

⇐ $\boxed{\text{ص} = 32 + \text{س} \leftarrow (3)}$

بالجمع ص − س = 32

عوض في (1) $\sqrt{\text{س}(32+\text{س})}$ − س + 8

⇐ ربع الطرفين س(32+س) = (س+8)^2.

س(32+س) = (س+8)^2

32 س + س^2 = س^2 + 16س + 64 ⇐ 16س = 64 ⇐ س = $\frac{64}{16}=4$

∴ س= 4 عوض في (3) ⇐ ص= 32+ 4=36

∴ العددان 4 ، 36

[16] الوسط الهندسي بين س، ص هو (8).

والوسط الحسابي بين $\frac{1}{\text{س}}$ ، $\frac{1}{\text{ص}}$ هو $\frac{5}{32}$ أوجد كلاً من س، ص.

الحل: الوسط الهندسي = $\sqrt{\text{س ص}}$ = 8 ⇐ $\boxed{\text{س ص} = 64}$ ← (1)

الوسط الحسابي: $\frac{\frac{1}{\text{س}}+\frac{1}{\text{ص}}}{2}=\frac{5}{32}$ ⇐ أضرب بـ2

$\frac{1}{\text{س}}+\frac{1}{\text{ص}}=\frac{5\times 2}{32}$ ⇐ $\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{س ص}}=\frac{5}{16}$ عوض عن س ص =64

$\frac{\text{س}+\text{ص}}{64}=\frac{5}{16}$ ⇐ 16 (س+ص)= 5×64

∴ س+ص = $\frac{\cancel{64}^{4}\times 5}{\cancel{16}}$ ⇐ س+ص=20 ⇐ $\boxed{\text{ص}=20-\text{س}}$

عوض في (1) عن ص ⇐ س(20−س)=64

20س−س^2=64 ⇐ س^2−20س + 64=0

(س− 16) (س− 4)= 0 ⇐ أما س−16= 0 ⇐ $\boxed{\text{س} = 16}$

⇐ ص= 20 − 16 = 4 ∴ $\boxed{\text{ص}= 4}$ أوس−4=0 ⇐ س=4 ⇐ ص=16

[17] إذا كانت 96، س،......، ص، 1.5 كميات موجبة في تتالٍ هندسي وكانت س تزيد عن ص بمقدار 45 أوجد س،ص

الحل:

س= ص +45 ⇐ $\boxed{\text{ص}= \text{س}- 45}$

من تعريف المتتالية الهندسية: $\frac{س}{96} = \frac{1,5}{ص} \Leftarrow$

س ص$=96 \times 1.5 \Leftarrow$ س (س$-$ 45) = 144

س$^{2}-45$س$-144=0$

(س-48) (س$+3$)$=0$

أما س$+3=0 \Leftarrow \boxed{س = -3}$ مرفوض

أو س $-48=0 \Leftarrow \boxed{س = 48} \Leftarrow$ ص$=$ س-45

$= 48-45 \Leftarrow \boxed{ص = 3}$

[18] متتالية هندسية حدها الأول(2) وحدها الأخير (128) فإذا كان مجموع حدود هذه المتتالية يساوي (254) فأوجد عدد حدودها.

الحل: لدينا ح$_1$= 2 ، ح$_ن$=128، مج$_ن$=254 أوجد ن=؟

من القانون $\boxed{ح_ن = ح_1 ر^{ن-1}} \Leftarrow 128 = 2\, ر^{ن-1} \Leftarrow \boxed{64 = ر^{ن-1}} \leftarrow (1)$

ولدينا: مج$_ن = \frac{ح_1 - ح_ن\, ر}{1-ر} \Leftarrow \frac{254}{1} = \frac{2-128ر}{1-ر} \Leftarrow 254 - 254ر = 2 - 128ر$

$254 - 2 = 254ر - 128ر \Leftarrow 252 = 126ر$

ر$= \frac{252}{126} = 2 \Leftarrow \boxed{ر = 2}$

عوض في(1)$64 = (2)^{ن-1} \Leftarrow 2^6 = 2^{ن-1} \Leftarrow 6 =$ ن$-1 \Leftarrow \boxed{ن = 7}$

[19] في المتتالية الهندسية 0.1، -0.4 ، 1.6،... كم عدد الحدود الأولى التي مجموعها (-81.9)

الحل: ر$= \frac{-0,4}{0,1} = \frac{-4}{1} = -4 \therefore \boxed{ر = -4}$

قانون المجموع $\text{مج}_{\text{ن}} = \text{ح}_1 \times \frac{1-\text{ر}^{\text{ن}}}{1-\text{ر}} \Leftarrow -81.9 = 0.1 \times \frac{1-(-4)^{\text{ن}}}{1+4}$ أضرب بـ10

$$-\frac{819}{1} = 1 \times \frac{1-(-4)^{\text{ن}}}{5} \Leftarrow -4095 = 1-(-4)^{\text{ن}}$$

$$-4096 = -(-4)^{\text{ن}} \Leftarrow (4)^6 = (-4)^{\text{ن}} \Leftarrow (-4)^6 = (-4)^{\text{ن}} \Leftarrow \boxed{\text{ن} = 6}$$

[20] بيّن نوع المتتالية التي حدها العام هو $\text{ح}_{\text{ن}} = 3(2)^{\text{ن}}$ ثم أوجد مجموع الخمسة الأولى منها:

الحل:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ح}_1 = 3(2)^1 = 6 \\ \text{ح}_2 = 3(2)^2 = 12 \\ \text{ح}_3 = 3(2)^3 = 24 \end{array}\right\}$$

متتالية هندسية أساسها (ر =2) وحدها الأول 6

$$\text{مج}_{\text{ن}} = \text{ح}_1 \times \frac{1-\text{ر}^{\text{ن}}}{1-\text{ر}} \Leftarrow \text{مج}_5 = 6 \times \frac{1-(2)^5}{1-2}$$

$$= 6 \times \frac{1-32}{-1} = 6 \times \frac{-31}{-1}$$

$$= 6 \times 31 = 186$$

[21] إذا كان مجموع ن حداً من المتتالية يعطي بالعلامة:

$\text{مج}_5 = 8 - 6\left(\frac{3}{4}\right)^{\text{ن}-1}$ أوجد المتتالية وبين نوعها.

الحل: $\text{مج}_1 = 8 - 6\left(\frac{3}{4}\right)^5 = 8-6 = 2 \leftarrow \therefore \text{ح}_1 = 2$

$$\text{مج}_2 = 8 - 6\left(\frac{3}{4}\right)^1 = 8 - \frac{18}{4} = \frac{32-18}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$\therefore$ الحد الثاني $\text{مج}_2 - \text{مج}_1 = \frac{7}{2} - 2 = \frac{7-4}{2} = \frac{3}{2} \qquad \therefore \text{ح}_2 = \frac{3}{2}$

$$\text{مجـ}_3 = 8 - 6\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 8 - \frac{9\times 6}{16} = 8 - \frac{9\times 3}{8} = \frac{64-27}{8} = \frac{37}{8}$$

الحد الثالث $= \text{مجـ}_3 - \text{مجـ}_2 = \frac{37}{8} - \frac{7}{2} = \frac{37-28}{8} = \frac{9}{8} \quad \therefore \text{ح}_3 = \frac{9}{8}$

$\therefore$ الحدود 2 ، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{9}{8}$ ، ......

لبيان نوعها $\frac{\text{ح}_2}{\text{ح}_1} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$

$$\frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{9\times 2}{8\times 3} = \frac{3}{4}$$

وأضح أنها متتالية هندسية أساسها $\boxed{\text{ر} = \frac{3}{4}}$

[22] لتكن (س−2)، (س−1)، (3س−5) متتالية هندسية فما قيمة س

الحل: $\text{ح}_1 = \text{س} - 2$ ، $\boxed{\text{ر} = \frac{\text{ح}_2}{\text{ح}_1} = \frac{\text{س}-1}{\text{س}-2}} \rightarrow (1)$

$\Leftarrow \boxed{\text{ر} = \frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2} = \frac{3\text{س}-5}{\text{س}-1}} \rightarrow (2)$

$(1) = (2) \Leftarrow \frac{\text{س}-1}{\text{س}-2} = \frac{3\text{س}-5}{\text{س}-1} \Leftarrow$

$(\text{س}-1)^2 = (\text{س}-2)(3\text{س}-5)$

$\text{س}^2 - 2\text{س} + 1 = 3\text{س}^2 - 5\text{س} - 6\text{س} + 10$ أنقل إلى الطرف الثاني وصفِّرها

$2\text{س}^2 - 9\text{س} + 9 = 0 \Leftarrow (2\text{س}-3)(\text{س}-3) = 0$

أما $2\text{س} - 3 = 0 \Leftarrow 2\text{س} = 3$

$\Leftarrow \boxed{\text{س} = \frac{3}{2}}$ أو $\text{س} - 3 = 0 \Leftarrow \boxed{\text{س} = 3}$

[23]إذا بادلنا بين الحدين الأول والثاني من متتالية هندسية ذات ثلاث حدود نتج عن ذلك متتالية حسابية فإذا كانت الأساسات(متساوية)فأوجد الثلاث حدود.

الحل:الحدود أ ب $\frac{ب^2}{أ}$ ← هندسية.

ب أ $\frac{ب^2}{أ}$ ← حسابية.

$\boxed{ر = \frac{ب}{أ}}$ $\boxed{د = أ - ب}$

(1) $ر = د \Leftarrow \frac{ب}{أ} = أ - ب \Leftarrow \frac{ب}{أ} + ب = أ$

$ب\left(\frac{1}{أ} + 1\right) = أ \Leftarrow ب = \frac{أ}{1+\frac{1}{أ}} = \frac{أ^2}{أ+1} \Leftarrow \boxed{ب = \frac{أ^2}{أ+1}}$

من الحسابية الحد الثالث = الأوسط (أ)+ د

ولدينا: $أ + أ - ب = \frac{ب^2}{أ}$

$2أ - \frac{أ^2}{أ+1} = \frac{أ^4}{أ(أ+1)^2}$

$\frac{2أ + 2أ^2 - أ^2}{(أ+1)} = \frac{أ^3}{(أ+1)^2}$

$\frac{\cancel{أ}(أ+2)}{أ+1} = \frac{\cancel{أ}^3}{(أ+1)^2} \Leftarrow \frac{أ+2}{(أ+1)} = \frac{أ^2}{(أ+1)^2} \Leftarrow (2+أ)(1+أ) = أ^2$

$2 + 2أ + أ + أ^2 = أ^2 \Leftarrow 2 + 3أ = 0 \Leftarrow 3أ = -2$

$\Leftarrow أ = \frac{-2}{3} \Leftarrow ب = \frac{\frac{4}{9}}{1\frac{-2}{3}} = \frac{4}{9(\frac{1}{3})} = \frac{4}{3}$ ، $ر = \frac{ب}{أ} = \frac{4}{3} \div \frac{-2}{3}$

⟸ ر $= \frac{4}{3} \times \frac{-3}{2} = -2$

⟸ الحد الثالث ب × ر $= \frac{4}{3} \times -2 = \frac{-8}{3}$

$\left(\frac{-2}{3} ، \frac{4}{3} ، \frac{-8}{3}\right)$

تمارين عامة على المتتاليات

[1] بين أياً من الدوال الآتية تمثل متتالية:

أ) ح(ن)= $(-1)^{2ن}$ ن^2 ، ن $\in$ ط* ← الجواب تمثل لأن مجالها ط*

ب) د(ن) = 3ن^2+1 ، ن $\in$ ص لا تمثل المفروض ط*

جـ) هـ (ن)= $\frac{ن}{3ن^2+2ن+1}$ ، ن $\in$ ط لا تمثل المفروض ط*

د) ل(ن) = $\frac{1}{ن+1}$ ، ن $\in$ ح لا تمثل المفروض ط*

هـ) ك(ن)= جاπ ن ، ن $\in$ ط* (نعم تمثل)

و) ع(ن)= 3جا $\frac{\pi}{ن}$ ، ن $\in$ {1، 2، 3، 4، 5}

نعم تمثل لأن مجموعة التعويض $\subset$ ط*

[2] أكتب الخمسة الحدود الأولى من المتتاليات التي حدها العام معطى ثم مثلها بيانياً:

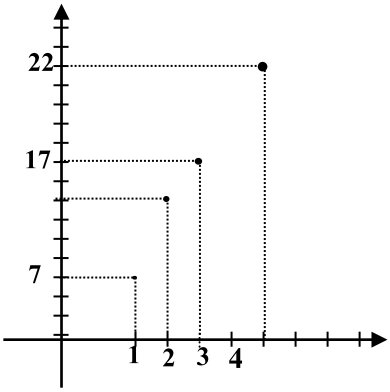
أ) ح$_ن$= 5ن + 2

ح$_1$= 5×1+2=5+2=7 (1، 7)

ح$_2$= 5×2+2= 12 (2، 12)

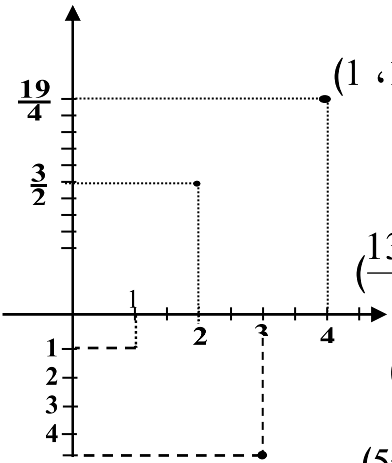
ح$_3$= 5×3+2=17 (3، 17)

ح$_4$= 5×4+2= 22 (4، 22)



$\text{ح}_5 = 5\times5+2 = 27 = (5،\ 27)$

ب) $\text{ح}_{\text{ن}} = \dfrac{(-1)^{\text{ن}}(6\text{ن}-5)}{\text{ن}}$



$\text{ح}_1 = \dfrac{(-1)^1(6-5)}{1} = \dfrac{-1\times1}{1} = -1 \quad (1 ،1)$

$\text{ح}_2 = \dfrac{(-1)^2(6\times2-5)}{2} = \dfrac{1\times7}{2} \quad (2 ،\dfrac{7}{2})$

$\text{ح}_3 = \dfrac{(-1)^3(18-5)}{3} = \dfrac{-13}{3} \quad (3 ،\dfrac{-13}{3})$

$\text{ح}_4 = \dfrac{(-1)^4(24-5)}{4} = \dfrac{1\times19}{4} \quad (4 ،\dfrac{19}{4})$

$\text{ح}_5 = \dfrac{(-1)^5(30-5)}{5} = \dfrac{-25}{5} = -5 \quad (5 ،-5)$

[3] أوجد الحد المشار إليه أمام كل متتالية:

أ) $\langle 3^{\text{ن}} + 5 \rangle$ أوجد ح_9

المتتالية $\text{ح}_{\text{ن}} = 3^{\text{ن}} + 5 \Leftarrow \text{ح}_9 = 3^9 + 5 = 19683 + 5 = 19688$ #

ب) $\langle 7 - 2\text{ن} \rangle$ ، ح_{11}

الحل: $\text{ح}_{\text{ن}} = 7 - 2\text{ن} \Leftarrow \text{ح}_{11} = 7 - 22 = -15$

جـ) $\langle \dfrac{1}{3\text{ن}} \rangle$ أوجد ح_{27}

$\text{ح}_{\text{ن}} = \dfrac{1}{3\text{ن}} \Leftarrow \text{ح}_{27} = \dfrac{1}{3\times27} = \dfrac{1}{81}$ #

[4] أكتب الستة الحدود الأولى للمتتالية المعطاه بالصيغ:

أ) $\text{ح}_1 = 4$ ، $\text{ح}_{\text{ن}} = 3\text{ح}_{\text{ن}-1} + 4$

الحل: $\text{ح}_2 = 3\text{ح}_1 + 4 = 3\times4 + 4 = 12 + 4 = 16$

$\text{ح}_3 = 3\,\text{ح}_2 + 4 = 3\times16+4 = 48+4 = 52$

$\text{ح}_4 = 3\,\text{ح}_3 + 4 = 3\times 52 + 4 = 156+4 = 160$

د) $\text{ح}_1 = 0$ ، $\text{ح}_{\text{ن}+1} = \dfrac{1}{1+\text{ح}_1}$

الحل:

$\text{ح}_2 = \dfrac{1}{1+\text{ح}_1} = \dfrac{1}{1+0} = 1$

$\text{ح}_3 = \dfrac{1}{1+0} = 1$ ، $\text{ح}_4 = 1$، $\text{ح}_5 = 1$ ، $\text{ح}_6 = 1$

هـ) $\text{ح}_1 = 1$ ، $\text{ح}_{\text{ن}+1} = (\text{ن}-1)\,\text{ح}_\text{ن}$

$\text{ح}_2 = (1-1)\,\text{ح}_1 = 0\times1 = 0$

$\text{ح}_3 = \text{ح}_{2+1} = (2-1)\,\text{ح}_2 = 1\times0 = 0$

$\text{ح}_4 = \text{ح}_{3+1} = (3-1)\,\text{ح}_3 = 0$

$\text{ح}_5 = 0$ ، $\text{ح}_6 = 0$

[5] أكتب الحد العام لكل من المتتاليات التالية:

أ) $\langle 2، -2، 2، -2، \dots \rangle$ هندسية أساسها $(\text{ر} = -1) = \begin{cases} 2 & \text{إذا كان ن فردي} \\ -2 & \text{إذا كان ن زوجي} \end{cases}$

$\text{ح}_\text{ن} = \text{ح}_1\,(\text{ر})^{\text{ن}-1} \Leftarrow \text{ح}_\text{ن} = 2\,(-1)^{\text{ن}-1}$

ب) $\langle 1، 5، 9، 13، \dots \rangle$

حسابية حدها العام $\text{ح}_\text{ن} = \text{ح}_1 + (\text{ن}-1)\,\text{د}$ حيث $\text{د} = 4$

$\text{ح}_\text{ن} = 1 + 4\,(\text{ن}-1) = 4\,\text{ن} - 3$

جـ) $\langle \frac{1}{3}، \frac{1}{4}، \frac{1}{5}، \dots \rangle$ حدها العام $\text{ح}_\text{ن} = \dfrac{1}{\text{ن}}$

د) $\langle 4، 4، 4، ...... \rangle \Leftarrow ح_ن = 4$ هندسة أساسها $ر=1$

هـ) $(-1، \frac{1}{2}، \frac{-1}{3}، \frac{1}{4}، ...) \Leftarrow ح_ن = (-1)^ن \times \frac{1}{ن}$

[6] أكتب المتتالية (ح ن) حيث:

$$ح_ن = \begin{cases} \frac{ن-1}{ن+1} & \text{إذا كان ن عدد فردي } \ni 7 \\ -1 & \text{إذا كان ن عدد زوجي } \ni 8 \end{cases}$$

$ح_1 = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

$ح_2 = 0$

$ح_3 = \frac{1-3}{1-3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$ح_4 = -1$

$ح_5 = \frac{5-1}{5+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$ح_6 = -1$

$ح_7 = \frac{7-1}{7+1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$ح_8 = -1 \therefore \langle 0، -1، \frac{1}{2}، -1، 0، \frac{3}{4} \rangle$

[7] حدِّد أياً من المتتاليات الآتية تزايدية وأيها تناقضية وأيها غير ذلك.

أ) $\langle 1 + \frac{1}{\sqrt{ن}} \rangle$

الحل: $ح_ن = 1 + \frac{1}{\sqrt{ن}}$

$ح_{ن+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{ن+1}}$ + $ح_{ن+1} - ح_ن = 1 + \frac{1}{\sqrt{ن+1}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{ن}}$

$= \frac{1}{\sqrt{ن+1}} - \frac{1}{\sqrt{ن}} < 0$ + متناقصة

جـ) $\langle 10 + \frac{1}{2ن} \rangle$

الحل: $ح_ن = 10 + \frac{1}{2ن}$ ، $ح_{ن+1} = 10 + \frac{1}{2ن+2}$

$$ح_{ن+1} - ح_{ن} = 10 + \frac{1}{2ن+2} - 10 - \frac{1}{2ن} = \frac{1}{2ن+2} - \frac{1}{2ن} < 0$$

⇐ تناقصية أنتبه كلما كبر المقام قل الكسر

هـ) (جا $\frac{ن}{2}\pi$)

$ح_{ن} =$ جا $\frac{ن\,\pi}{2}$ متغيرة

د) $\langle 3^{ن-1} \rangle$

الحل: $ح_{ن} = 3^{ن-1}$، $ح_{ن+1} = 3^{ن}$ واضح أن $3^{ن} > 3^{ن-1}$ ∴ $ح_{ن+1} > ح_{ن}$

∴ تزايدية.

المتتاليـــة الحسابيـــة

[9] أيٌ من المتتاليات الآتية تكون متتالية حسابية:

أ) $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = 3ن - 2$

الحل:

$ح_1 = 3 - 2 = 1$	لاحظ $ح_2 - ح_1 = 4 - 1 = 3$
$ح_2 = 6 - 2 = 4$	$ح_3 - ح_2 = 7 - 4 = 3$
$ح_3 = 9 - 2 = 7$	
$ح_4 = 12 - 2 = 10$	بما أن الفرق ثابت ⇐ المتتالية حسابية

ب) (هـ ن) حيث هـ ن $= 2 + \frac{3}{ن}$

الحل:

$هـ_1 = 2 + \frac{3}{1} = 5$	لا يوجد فرق ثابت بين الحدود المتتالية
$هـ_2 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$	$هـ_1 - هـ_2 = \frac{7}{2} - 5 = \frac{-3}{2}$

$\text{ه}_3 = 2 + \frac{3}{3} = 3$	$\text{ه}_3 - \text{ه}_2 = 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$
$\text{ه}_4 = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{2}$	∴ ليست حسابية.

جـ) $(\text{د}_{\text{ن}})$ حيث $\text{د}_{\text{ن}} = 5 - 2\,\text{ن}\,(-1)^{\text{ن}}$

$\text{د}_1 = 5 + 2 = 7$	$\text{د}_2 - \text{د}_1 = -3 - 7 = -10$
$\text{د}_2 = 5 - 8 = -3$	$\text{د}_3 - \text{د}_2 = 23 + 3 = 26$
$\text{د}_3 = 5 + 18 = 23$	الفرق غير ثابت والمتتالية ليست حسابية.

10] أوجد ما يأتي:

أ) عدد حدود المتتالية (11، 13، 15،...، 195)

الحل: $\text{ح}_1 = 11$ ، $\text{د} = 13 - 11 = 2$ ، $\text{ح}_{\text{ن}} = 195$ المطلوب ن=؟

القانون $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ح} + (\text{ن}+1)\,\text{د} \Leftarrow 195 = 11 + (\text{ن}-1)\times 2$

$195 = 11 + 2\text{ن} - 2 \Leftarrow 186 = 2\text{ن} \Leftarrow \text{ن} = \frac{186}{2} = 93$

ب) رتبة الحد الذي قيمته (6) في المتتالية (82، 78، 74،......)

الحل: $\text{ح}_1 = 82$ ، $\text{د} = 78 - 82 = -4$، $\text{ح}_{\text{ن}} = 6$ المطلوب ن=؟

∴ $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ح}_1 + (\text{ن}-1)\,\text{د} \Leftarrow 6 = 82 + (\text{ن}-1)\times -4$

$6 = 82 - 4\text{ن} + 4 \Leftarrow -80 = -4\text{ن} \Leftarrow \text{ن} = \frac{-80}{-4} = 20$

∴ الحد العشرون.

د) الستة الحدود الأولى للمتتالية $\langle (-1)^{\text{ر}} \times (\text{ر})^{-1} \rangle$

الحل: $\text{ح}_{\text{ر}} = (-1)^{\text{ر}} \times (\text{ر})^{-1} = \frac{(-1)^{\text{ر}}}{\text{ر}}$

$ح_1 = \frac{-1}{1} = -1$ | $ح_4 = \frac{1}{4}$

$ح_2 = \frac{1}{2}$ | $ح_5 = \frac{-1}{5}$

$ح_3 = \frac{-1}{3}$ | $ح_3 = \frac{1}{6}$

و) الحد الخامس عشر من المتتالية ⟨87 ، 80، 73،......⟩

الحل: $ح_1$= 87 ، د= 87− 80= 7 ، ن=15

المطلوب $ح_{15}$

$ح_ن = ح_1 + (ن-1)\,د \Leftarrow ح_{15} = 87 + (15-1)\times 7$

$= 87 + 14 \times 7 = 87 + 98 = 185$

[9] أكتب الحدود الستة الأولى للمتتالية <1، 2، 00000> علماً بأن قاعدتها:

$$ح_{ن+2} = ح_{ن} + ح_{ن+1}$$

الحل:

$ح_1=1$ $\quad$ $ح_2=2$

$ح_3= ح_1+ح_2= 1+2 = 3$ $\quad$ $ح_4= ح_2+ح_3= 3+2 =5$

$ح_5= ح_3+ح_4= 3+5=8$ $\quad$ $ح_6= ح_4+ح_5=5+8=13$

[10] أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الآتية.<صن> حيث:

$$ص_ن= \begin{cases} (-1)^ن & \text{إذا كان ن عدداً فردياً.} \\ 2ن-1 & \text{إذا كان ن عدداً زوجياً.} \end{cases}$$

الحل:

$ص_1= (-1)^1=-1$ $\quad$ $ص_2= 2 \times 2-1=3$

$ص_3= (-1)^3= -1$ $\quad$ $ص_4= 2\times4-1=7$

$ص_5= (-1)^5= -1$

[11] أكتب حدود المسلسلة ثم أحسب المجموع:

أ) $\sum_{م=1}^{4} 5م$

الحل: $\sum_{م=1}^{4} 5م = 5\times1 + 5\times 2 + 5\times3+5\times4$

$= 5\ (1+2+3+4)=5\times10=50$

ب) $\sum_{ن=1}^{6} \frac{1}{2ن+1}$

الحل: $\sum_{ن=1}^{6} \frac{1}{2ن+1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}$

[12] أحسب $\sum_{م=1}^{4} (2م+م^2)$ و $\sum_{م=1}^{4} 2م + \sum_{م=1}^{4} م^2$

هل هما متساويان؟

الحل:

(1) $\sum_{\text{م}=1}^{4}(\text{م}^2+2\text{م}) = (1^2+2\times1)+(2^2+2\times2)+(3^2+2\times3)$

$= (4^2+2\times4)$

$= 3+8+15+24=50$

(2) $\sum_{\text{م}=1}^{4}\text{م}^2 + \sum_{\text{م}=1}^{4}2\text{م} = 2 + 1^2 + 2\times2 + 2^2 + 2\times3 + 3^2 + 2\times4 + 4^2 = 3+8+15+24 = 50$

$\therefore (1) = (2)$

ب) هل $\sum_{\text{ر}=1}^{5}2\text{ر}$ يساوي $2\sum_{\text{ر}=1}^{5}\text{ر}$؟

الحل: $\sum_{\text{ر}=1}^{5}2\text{ر} = 2\times1 + 2\times2 + 2\times3 + 2\times4 + 2\times5$

$= 2(1+2+3+4+5)$

$= 2\sum_{\text{ر}=1}^{5}\text{ر}$ #

جـ) أحسب (1) $\sum_{\text{م}=1}^{5}2$ (2) $\sum_{\text{م}=1}^{5}4$، (3) $\sum_{\text{م}=1}^{\text{ن}}\text{ك}$

إرشاد $\sum_{\text{ر}=1}^{5}2\text{ر} = 1+1+1+1+1 = 5\times1 = 5$

الحل: (1) $\sum_{\text{ن}=1}^{5}2 = 2+2+2+2+2 = 5\times2$

(2) $\sum_{\text{م}=1}^{5}4 = 4+4+4+4+4 = 5\times4$

(3) نستنتج $\sum_{\text{م}=1}^{\text{ن}}\text{ك} = \text{ن}\times\text{ك}$

[13] أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متسلسلة من المتسلسلات:

أ) $\sum_{ن=1}^{6} \frac{ن(ن+1)}{2}$

$$\sum_{ن=1}^{6} \frac{ن(ن+1)}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21$$

الحد الأول: 1

الحد الثاني: $1 + 3 = 4$

الحد الثالث: $1 + 3 + 6 = 10$

الحد الرابع: $1 + 3 + 6 + 10 = 20$

الحد الخامس: $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$

ب) $\sum_{ك=1}^{9} \frac{1}{2ك}$

الحل: $\sum_{ك=1}^{9} \frac{1}{2ك} = \frac{1}{2\times1} + \frac{1}{2\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{2\times4} + \frac{1}{2\times5} + \frac{1}{2\times6} + \frac{1}{2\times7} + \frac{1}{2\times8} + \frac{1}{2\times9}$

الحد الأول: $\frac{1}{2}$

الحد الثاني: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

الحد الثالث: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = + \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9+2}{12} = \frac{11}{12}$

الحد الرابع: $\frac{11}{12} + \frac{1}{2\times4} = \frac{11}{12} + \frac{1}{8} = \frac{22+3}{24} = \frac{25}{24}$

الحد الخامس: $\frac{25}{24} + \frac{1}{10} = \frac{125+12}{120} = \frac{137}{120}$

د) $\sum_{ك=1}^{\infty} 2^{ك} = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + ...2^{\infty}$

$ح_1 = 2^1 = 2$ ، $ح_2 = 2^1 + 2^2 = 2 + 4 = 6$،

$ح_3 = 6 + 2^3 = 14$ ، $ح_4 = 14 + 2^4 = 14 + 16 = 30$

$ح_5 = 30 + 2^5 = 30 + 32 = 62 \neq$

المتتاليـــة الحسابيـــة

- $<ع_ن>$ تدعى حسابية إذا كان الفرق بين أي حدين متتاليين ثابت ندعو الفرق الثابت (د) أساس المتتالية. أي $ح_ن - ح_{ن-1} = د$

مثال: <1، 3، 5، 7،...> هل المتتالية حسابية؟

نحسب الفرق $5-3 = 2$ ، $7-5 = 2$ $\therefore$ حسابية وأساسها د = 2

- من خواصها كل حد وسط حسابي بين مجاورية مثلاً $5 = \frac{7+3}{2}$
- $\boxed{\text{الحد العام للمتتالية الحسابية } ح_ن = ح + (ن-1)\,د}$
- $ج_ن = \frac{ن}{2}\,(ح_1 + ح_ن)$
- $ج_ن = \frac{ن}{2}\,(2\,ح_1 + (ن-1)\,د\,)$

تماريـــن ومسائــــــل (2-3)

[1] أوجد الحدود الستة الأولى للمتتاليات الحسابية التالية:

أ) $ح_1 = 2$ ، $د = -\frac{1}{2}$

الحل: $ح_1 = 2$

$\text{ح}_2 = \text{ح}_1 + \text{د} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\text{ح}_3 = \text{ح}_2 + \text{د} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\text{ح}_4 = \text{ح}_3 + \text{د} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\text{ح}_5 = \text{ح}_4 + \text{د} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$\text{ح}_6 = \text{ح}_5 + \text{د} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

ب) $\text{ح}_3 = -9$ $\qquad$ $\text{ح}_4 = -5$

الحل: أولاً نعين أساس المتتالية $\text{د} = \text{ح}_4 - \text{ح}_3 = -5 - (-9) = -5 + 9 = 4$

$\therefore \text{ح}_2 = \text{ح}_3 - 4 = -9 - 4 = -13$ $\qquad$ $\text{ح}_1 = \text{ح}_2 - \text{د} = -5 + 4 = -1$

$\therefore \text{ح}_5 = \text{ح}_4 + \text{د} = -5 + 4 = -1$

جـ) $\text{ح}_1 = 23.2$، $\text{د} = 0.6$

$\text{ح}_2 = \text{ح}_1 + \text{د} = 23.2 + 0.6 = 23.8$

$\text{ح}_3 = \text{ح}_2 + \text{د} = 23.8 + 0.6 = 24.4$

$\text{ح}_4 = \text{ح}_3 + \text{د} = 24.4 + 0.6 = 25$

$\text{ح}_5 = \text{ح}_4 + \text{د} = 25 + 0.6 = 25.6$

و) $\text{ح}_1 = 9\text{س} + 5$، $\text{د} = 2\text{س} - 3$

الحل: $\text{ح}_1 = 9\text{س} + 5$

$\text{ح}_2 = \text{ح}_1 + \text{د} = 9\text{س} + 5 + 2\text{س} - 3 = 11\text{س} + 2$

$\text{ح}_3 = \text{ح}_2 + \text{د} = 11\text{س} + 2 + 2\text{س} - 3 = 13\text{س} - 1$

$\text{ح}_4 = \text{ح}_3 + \text{د} = 13\text{س} - 1 + 2\text{س} - 3 = 15\text{س} - 4$

$\text{ح}_5 = \text{ح}_4 + \text{د} = 15\text{س} - 4 + 2\text{س} - 3 = 17\text{س} - 7$

[2] أوجد ما يأتي:

أ) الحد الثالث عشر والعشرين للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (1) وأساسها (−8)

الحل:

المعطيات: $ح_1 = 1$ ، د= −8 المطلوب (1) $ح_{13}$، (2) $ح_{20}$

$$\boxed{ح_ن = ح_1 + (ن-1)\,د}$$

$$ح_{13} = 1 + (13-1) \times (-8) = 1+ 12 \times -8 = 96-1 = -95$$

$$ح_{20} = 1+ (20-1) \times -8 = 1+ 19\times -8 = 1- 152 = -151$$

ب) الحد الرابع من متتالية حسابية حدها العاشر (250) وحدها السابع (217)

الحل: المعطيات $ح_{10} = 250$، $ح_7 = 217$

المطلوب $ح_4$ = ؟

$$\therefore \boxed{ح_ن = ح_1 + (ن-1)\,د}$$

$$ح_{10} = ح_1 + (10-1)\,د = 250 \Leftarrow \boxed{ح_1 + 9د = 250} \rightarrow (1)$$

$$ح_7 = ح_1 + (7-1)\,د \Leftarrow \boxed{ح_1 + 6د = 217} \rightarrow (2)$$

بطرح (2) من (1) $\Leftarrow 3د = 33 \Leftarrow \boxed{د = \frac{33}{3} = 11}$

عوض في (1) $ح_1 + 9 \times 11 = 250 \Leftarrow \boxed{ح_1 = 250 - 99 = 151}$

$$\therefore ح_4 = ح_1 + (4-1)\,د = 151 + 3\times 11 = 151 + 33 = 184\#$$

ج(أوجد الحد الخامس والحد الحادي والعشرين من المتتالية:

$\langle 7.5، 7، 6.5، \ldots \rangle$

الحل:معك $ح_1 = 7.5$

$د = 7 - 7.5 = -0.5$

$$\boxed{ح_ن = ح_1 + (ن-1)\,د}$$

$ح_5 = 7.5 + (5-1) \times -0.5 = 7.5 - 4 \times 0.5 = 7.5 - 2 = 5.5$

$ح_{21} = 7.5 + (21-1) \times -0.5 = 7.5 + 20 \times -0.5$

$= 7.5 - 10 = -2.5$

د) رتبة الحد الذي قيمته 7 من المتتالية $\langle \frac{1}{4}، \frac{1}{2}، \frac{3}{4}، \ldots \rangle$

الحل: معك $ح_1 = \frac{1}{4}$ ، $د = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$ح_ن = 7$ المطلوب ن =؟

القانون: $ح_ن = ح_1 + (ن - 1)\, د$

$7 = \frac{1}{4} + (ن - 1) \times \frac{1}{4}$ أضرب كل حد بـ4

$28 = 1 + (ن - 1) \times 1$

$28 = \cancel{1} + ن - \cancel{1} \Leftarrow \boxed{ن = 28} \therefore ح_{28}$

هـ) أوجد رتبة الحد الذي قيمته (−80) من المتتالية ⟨512، 496، 480،...⟩

الحل: معك $ح_1 = 512$ ، $د = 496 - 512 = -16$

$ح_ن = -80$ المطلوب ن =؟

القانون: $ح_ن = ح_1 + (ن - 1)\, د$

$-80 = 512 + (ن - 1) \times -16$

$-80 = 512 - 16ن + 16$

$-80 - 512 - 16 = -16ن$

$-608 = -16ن \Leftarrow ن = \frac{608}{16} = 38 \quad \therefore ح_{38}$

[3] أوجد ما يأتي:

أ) متتالية حسابية مجموع حديها الأول والثاني يساوي (7) ومجموع مربعي حديها

الثاني والثالث يساوي (89)

الحل:معك ح$_1$ + ح$_2$ = 7 ← (1)

ح$_2^2$ + ح$_3^2$ = 89 ← (2)

المطلوب أوجد حدود المتتالية.

من (1) ح$_1$+ ح$_1$ + د = 7 ⇐ 2ح$_1$ + د = 7 ⇐ $\boxed{\text{د} = 7 - 2\,\text{ح}_1}$ ← (3)

من (2) (ح$_1$+ د)^2 + (ح$_1$ + 2د)^2 = 89 عوض عن (د)

(ح$_1$ + 7−2 ح$_1$) + (ح$_1$ + 14 − 4 ح$_1$)^2 = 89

(7− ح$_1$)^2 + (14 − 3 ح$_1$)^2 = 89

49− 14 ح$_1$ + ح$_1^2$ + 196 − 84 ح$_1$ + 9 ح$_1^2$ = 89

10 ح$_1^2$ − 98ح$_1$ + 156 = 0 قسم كل حد على (2)

5 ح$_1^2$ − 49ح$_1$ + 78 = 0

(5 ح$_1$− 39) (ح$_1$ −2) = 0

أما ح$_1$−2 = 0 ⇐ $\boxed{\text{ح}_1 = 2}$ ⇐ $\boxed{\text{د} = 7 - 2 \times 2 = 3}$

وتكون المتتالية ⟨2، 5 ، 8،......⟩

أو 5ح$_1$ − 39= 0 ⇐ 5ح$_1$ = 39 ⇐ ح$_1$ = $\frac{39}{5}$

⇐ د = 7 − 2 × $\frac{39}{5}$ = $\frac{35-78}{5}$ = $\frac{-43}{5}$

وتكون ⟨$\frac{39}{5}$، −$\frac{4}{5}$، − $\frac{47}{5}$، ......⟩

ب) أوجد رتبة أول حد سالب من المتتالية (35، 33، 31،...) الفكرة نحسب ح$_ن$ = 0 وتتوصل إلى رتبة أول حد سالب.

الحل: المعطيات ح$_1$ = 35، د= 33 − 35 = −2

ح$_ن$= ح$_1$+(ن−1) د=35+(ن−1)×−2 = 35 − 2ن + 2 = 37 − 2ن

ضع $ح_{ن} = 0 \Leftarrow 37 - 2ن = 0 \Leftarrow 2ن = 37 \Leftarrow ن = \frac{37}{2} = 18.5$

$\therefore$ ن = 18 آخر حد موجب

ن = 19 رتبة أول حد سالب.

جـ) الحد الذي ترتيبه الخامس عشر من النهاية من المتتالية:

(4، 7، 10، 10، 10،......، 100)

الحل: المعطيات $ح_1 = 4$، د $= 7-4 = 3$

لو عكسنا المتتالية يصبح $ح_1 = 100$، د $= -3$

$ح_{15} = ؟$

القانون: $ح_{ن} = ح_1 + (ن - 1)$ د

$ح_{15} = 100 + (15-1) \times -3$

$= 100 - 42 = 58$

د) المتتالية التي حدها النوني (العام) (5ن + 3)

الحل: $ح_1 = 5 \times 1 + 3 = 8$

$ح_2 = 5 \times 2 + 3 = 13$

$ح_3 = 5 \times 3 + 3 = 18$

$\Leftarrow$ (8، 13، 18،.........)

هـ) أوجد قيمة (ن) إذا كان الحد العام للمتتالية (7، 13، 19،...) يساوي الحد العام من المتتالية ⟨77، 73، 69،......⟩

الحل: في الأولى $ح_1 = 7$، د $= 13-7 = 6$

$ح_{ن} = ح_1 + (ن-1)$ د $= 7 + (ن-1) \times 6 = 7 + 6ن - 6 = 1 + 6ن \rightarrow (1)$

في الثانية $ح_1 = 77$ ، د $= 73 - 77 = -4$

$ح_{ن} = ح_1 + (ن-1)$ د $= 77 + (ن-1) \times -4 = 77 - 4ن + 4 = 81 - 4ن \rightarrow (2)$

المعادلة (1) = (2) $\Leftarrow 1 + 6ن = 81 - 4ن$

$10ن = 80 \Leftarrow \boxed{ن = 8}$

[4] أوجد الحد الأخير من المتتاليات الآتية:

أ) $\langle 2 + ب ، صفر ، -(2+ب)، \ldots\ldots\ldots \rangle$ إلى 9 حدود.

الحل: $ح_1 = 2 + ب$ ، $د = 0 - (2+ب) = -2 - ب$

$ن = 9$

القانون $ح_ن = ح_1 + (ن - 1)\, د$

$ح_9 = 2+ب + (9-1) \times (-2 - ب)$

$= 2+ب + 8\,(-2 - ب) = 2+ب - 16 - 8ب$

$= -14 - 7ب$

ب) $\langle (س+ ص)^2، س^2+ ص^2 ، (س- ص)^2، \ldots\ldots \rangle$ إلى 7 حدود.

الحل: المعطيات $ح_1 = (س + ص)^2$

$د = س^2 + ص^2 - (س+ص)^2 = س^2 + ص^2 - (س^2 + 2س ص + ص^2)$

$د = س^2 + ص^2 + س^2 - 2س ص - ص^2 = -2 س ص$

$ن = 7$

المطلوب: $ح_7$

القانون: $ح_ن = ح_1 + (ن - 1)\, د$

$ح_7 = (س + ص)^2 + (7-1) \times -2س ص$

$= س^2 + 2س ص + ص^2 - 12س ص$

$= س^2 + ص^2 - 10 س ص$

[5] أكمل الحدود الناقصة في المتتالية الحسابية:

أ) $\langle \ldots\ldots، \ldots\ldots، 9، \ldots\ldots، 15، \ldots\ldots \rangle$

المعطيات $ح_3 = 9$ ، $ح_5 = 15$

ح$_{ن}$ = ح$_1$ + (ن − 1) د

∴ ح$_3$ = ح$_1$ + 2 د ⇐ $\boxed{ح_1 + 2د = 9}$ → (1)

ح$_5$ = ح$_1$ + 4 د ⇐ $\boxed{ح_1 + 4د = 15}$ → (2)

بطرح (2) من (1) ⇐ −6 = −2 د ⇐ د = $\dfrac{-6}{-2}$ = 3

عوض في (1) ح$_1$ + 2× 3 = 9 ⇐ ح$_1$ = 3

∴ المتتالية ⟨3، 6، 9، 12، 15، 18،......⟩

ب) ⟨75،......،...... ......، 87، ......،......⟩

الحل: ح$_1$ = 75 ، ح$_5$ = 87

ح$_{ن}$ = ح$_1$ + (ن − 1) د

ح$_5$ = 75 + (5−1) × د = 87

75 + 4 د = 87 ⇐ 4د = 87 − 75 = 12

⇐ د = $\dfrac{12}{4}$ = 3

∴ ⟨75، 78، 81، 84، 87، 90، 91،...⟩

جـ) ⟨4.5، ....، 12،...،... ⟩ 19.5

الحل:

ح$_1$ = 4.5 ، ح$_4$ = 12

ح$_{ن}$ = ح$_1$ + (ن−1) د ⇐

ح$_4$ = 4.5 + (4−1) × 9 ⇐ 4.5 + 3د = 12

⇐ 3د = 12 − 4.5

⇐ 3د = 7.5 ⇐ د = $\dfrac{7,5}{3}$ = 2.5

⟨4.5، 7، 9.5، 12، 14.5، 17، 19.5، ...⟩

د) ⟨......،......، −5،......،......⟩ 16

الحل: $\text{ح}_3 = -5$، $\text{ح}_6 = 16 \Leftarrow \text{ح}_\text{ن} = \text{ح}_1 + (\text{ن}-1)\,\text{د}$

$\therefore \text{ح}_3 = \text{ح}_1 + (3-1)\,\text{د} = \boxed{\text{ح}_1 + 2\text{د} = -5} \leftarrow (1)$

$\text{ح}_6 = \text{ح}_1 + (6-1)\,\text{د} = \text{ح}_1 + 5\text{د} \Leftarrow \boxed{\text{ح}_1 + 5\text{د} = 16} \leftarrow (2)$

بطرح (2) من (1) $\Leftarrow -3\text{د} = -21 \Leftarrow \text{د} = \dfrac{-21}{-3} = 7$

عوض في (2) $\Leftarrow \text{ح}_1 + 5\times 7 = 16 \Leftarrow \text{ح}_1 = 16-35 = -19$

$\langle -19، -12، -5، 2، 9، 16، \dots \rangle$

[6] في المتتالية الحسابية $\langle 3، \text{أ}، \dots\dots، \dots\dots، \dots\dots، 81، \text{هـ} \rangle$ أوجد قيمة كلاً من أ، هـ

الحل: $\text{ح}_1 = 3$، $\text{ح}_6 = 81$

$\text{ح}_\text{ن} = \text{ح}_1 + (\text{ن}-1)\,\text{د} \Leftarrow \text{ح}_6 = 3 + (6-1)\,\text{د} = 3+5\text{د}$

$\therefore 3 + 5\text{د} = 81 \Leftarrow 5\,\text{د} = 78 \Leftarrow \text{د} = \dfrac{78}{5} = 15.6$

$\Leftarrow \text{أ} = \text{ح}_1 + \text{د} = 3 + 15.6 = 18.6$

$\Leftarrow \text{هـ} = 81 + \text{د} = 81 + 15.6 = 96.6$

[7] أوجد ما يلي:

أ) وسطين بين 5.26، 6.34

الحل: 5.26 ، $\square$ ، $\square$ ، 6.34

معك $\text{ح}_1 = 5.26$ ، $\text{ح}_4 = 6.34$

$\text{ح}_\text{ن} = \text{ح}_1 + (\text{ن}-1)\,\text{د}$

$\text{ح}_4 = 5.26 + (4-1)\,\text{د} = 5.26 + 3\text{د}$

$\therefore 5.26 + 3\text{د} = 6.34$

$\Leftarrow$ 3د = 6.34 − 5.26 = 1.08

$\Leftarrow$ د = $\frac{1.08}{3}$ = 0.36

الوسط الأول: 5.26 + 0.36 = 5.62

الوسط الثاني: 5.62 + 0.36 = 5.98

∴ (5.26 ، $\boxed{5.26}$ ، $\boxed{5.98}$ ، 6.34)

ب) خمسة أوساط بين 40، 10

40 ، ☐ ، ☐ ، ☐ ، ☐ ، ☐ ، 10

الحل: المعطيات $ح_1$ = 40 ، $ح_7$ = 10، ن= 7 المطلوب د = ؟

$ح_ن$ = $ح_1$ + (ن−1) د

$ح_7$ = 40+ (7−1) د ⇐ 10 = 40+ 6د

10− 40 = 6د ⇐ − 30 = 6د ⇐ د = $\frac{-30}{6}$ = −5

∴ د = −5

الحدود 40 ، $\boxed{35}$ ، $\boxed{30}$ ، $\boxed{25}$ ، $\boxed{20}$ ، $\boxed{15}$ ، 10

ج(أدخل أربعة أوساط بين 9، 41

الحل: 9 ، ☐ ، ☐ ، ☐ ، ☐ ، 41

معك: $ح_1$ = 9 ، $ح_6$ = 41

∴ من القانون $ح_ن$ = $ح_1$ + (ن− 1) د

$ح_6$ = 9 + (6−1) د = 9+5 د

∴ 9 + 5 د = 41 ⇐ 5 د = 41 − 9 = 32

⇐ د = $\frac{32}{5}$ 6.4

⟨9، $\boxed{15.4}$ ، $\boxed{21.8}$ ، $\boxed{28.2}$ ، $\boxed{34.6}$ ، 41⟩

هـ) أربع عشر وسطاً بين -5 ، 25

الحل: $ح_1 = -5$ ، $ح_{16} = 25$

$ح_{16} = -5 + (16-1)\,د = -5 + 15د$

$\therefore\ -5 + 15د = 25 \Leftarrow 15د = 25 + 5$

$\therefore\ 15د = 30 \Leftarrow د = \frac{30}{15} = 2$

$\langle -5, \boxed{-3}, \boxed{-1}, \boxed{1}, \boxed{3}, \boxed{5}, \boxed{7}, \boxed{9}, \boxed{11}, \boxed{13}, \boxed{15}, \boxed{17}, \boxed{19}, \boxed{21}, \boxed{23}, 25 \rangle$

[8] أوجد ما يأتي:

أ) مجموع حدود المتتالية التي فيها $ح_1 = 5$ ، $د = 3$ وحدها الأخير $ح_ن = 56$:

الحل: $مج_ن = \frac{ن}{2}\,[ح_1 + ح_ن]$ ولحساب ن

$ح_ن = ح_1 + (ن - 1)\,د$

$56 = 5 + (ن-1) \times 3 \Leftarrow 56 = 5 + 3ن - 3 \Leftarrow 56 - 5 + 3 = 3ن$

$54 = 3ن \Leftarrow \boxed{ن = 18}$

$\therefore\ مج_ن = \frac{ن}{2}\,[ح_1 + ح_2] = \frac{18}{2}\,[5 + 56] = 9 \times 61 = 549$

ب) المتتالية الحسابية التي مجموع ثلاثة حدود فيها يساوي 39 وحاصل ضربهم $= 2184$

الحل: $ح_1 + ح_1 + د + ح_1 + 2د = 39$

$3ح_1 + 3د = 39 \Leftarrow \boxed{ح_1 + د = 13} \Leftarrow ح_1 = \boxed{13 - د}$ ...(1)

$ح_1 \times (ح_1 + د)\,(ح_1 + 2د) = 2184$

$ح_1\,(13)\,(ح_1 + د + د) = 2184$ عوض عن $ح_1$ من (1)

13 (13− د) (13+ د) = 2184

13 (169 −$د^2$) = 2184 قسمه على 13

169 − $د^2$ = 168

⇐ 169 − 168 = $د^2$ ⇐ 1 = $د^2$ ⇐ د= ± 1

لما د = 1 ⇐ $ح_1$ = 13 − د = 12

وتكون ⟨12، 13، 14، 15،...⟩ ولما د =−1 ⇐ $ح_1$=13+1=14

وتكون ⟨14، 13، 12، 11،......⟩

ج(المتتالية الحسابية التي حدها الثاني عشر نصف حدها التاسع عشر ومجموع العشرين حداً الأولى منها 270.

الحل: المعطيات $ح_{12}$ = $\frac{1}{2}$ $ح_9$ ، $مج_{20}$ = 270

$ح_1$ + 11د = $\frac{1}{2}$ × ($ح_1$ + 8د) أضرب بـ2

2$ح_1$+ 22د = $ح_1$ +8د

2$ح_1$−$ح_1$ = 8د − 22 د ⇐ $\boxed{ح_1 = −14 د}$ ⟵(1)

$مج_ن$ = $\frac{ن}{2}$ [2$ح_1$ + (ن− 1)د]   عوض عن ن = 20

270 = 10 [2$ح_1$ + 19د]

27 = 2$ح_1$ + 19د عوض عن $ح_1$ =−14 د من (1)

27 = −28 د + 19 د

27 = −9د ⇐ $\boxed{د = −3}$ ⇐ $ح_1$ = −14 د = −14×−3=42

⟨42،39، 36، 33، 30،.........⟩

[11] لتكن ($ح_ن$) = ⟨1، 5، 9،...⟩......(1) متتالية حسابية.

و(ح$_{ن2}$) = 〈−18، −10، −2،......〉... (2) متتالية حسابية. فإذا كان ح$_{ن1}$ ينقص عن ح$_{ن2}$ بمقدار (5) أوجد قيمة (ن) وأوجد ح$_{4ن-3}$ في كل منها:

الحل: من الأولى ح$_1$ = 1، د = 5−1 = 4 ⇐

ح$_{ن1}$ = ح$_1$+ (ن−1) د = 1+ (ن−1) × 4 = 1+ 4ن − 4 = 4ن− 3

$\boxed{\text{ح}_{ن1} = 4ن - 3}$

من الثانية: ح$_1$= −18، د = −10 − (−18)= +8

ح$_{ن2}$ = ح$_1$ + (ن−1) د= −18 + (ن−1) 8= −18 + 8ن − 8

ح$_{ن2}$ = −26 +8ن

المعادلة: ح$_{ن1}$ + 5 = ح$_{ن2}$ ⇐ 4ن−3 +5 = −26 + 8ن

−3 + 5 +26= 8ن−4ن ⇐ 28 = 4ن ⇐ ن = $\frac{28}{4}$ = 7

∴ $\boxed{ن = 7}$ فيكون ح$_{4ن-3}$ = ح$_{25}$

في الأولى: $\boxed{\text{ح}_{ن1} = 4ن - 3}$ ⇐ ح$_{25}$ = 4×25 − 3 = 97

في الثانية: $\boxed{\text{ح}_{ن2} = -26 + 8ق}$ ⇐ح$_{25}$ = −26 + 8×25= −26+200=174

[12] أوجد الحد الرابع والعشرين من المتتالية الحسابية:

〈3، 5،7، ...〉 وما رتبة الحد الذي قيمته (−3) من المتتالية 〈43 ،41، 39،...〉 إذا علمت أن مجموع 2ن حداً من المتتالية الأولى يساوي مجموع ن حداً من المتتالية الثانية فما قيمة ن؟

الحل: في الأولى معك ح$_1$= 3 ، د = 5−3 = 2

∴ ح$_ن$ = ح$_1$ +(ن−1) د ⇐ح$_{24}$ = 3+ (1024)×2 = 3+ 46 = 49

من الثانية: ح$_1$ = 43 د= 41 − 43 = −2 ، ح$_ن$= −3 المطلوب ن =؟

لدينا ح$_ن$ = ح$_1$ + (ن−1) د

−3 = 43 + (ن−1) × −2 ⇐ −3 = 43− 2ن + 2

$2ن = 43 + 2 + 3 = 48 \Leftarrow \boxed{ن = 24}$

المرحلة الثانية:

من الأولى $مج_{ن} = \frac{\cancel{2}ن}{\cancel{2}} (2ح_1 + (2ن - 1)\ د)$

$= ن\ (6 + (2ن - 1) \times 2) \qquad = 6ن + 4ن^2 - 2ن$

$= 4ن + 4ن^2$

من الثانية: $مج_{ن} = \frac{ن}{2} (2ح_1 + (ن - 1)\ د) = \frac{ن}{2} (86 + (ن - 1) \times -2)$

$= \frac{ن}{2} (86 - 2ن + 2) = \frac{ن}{2} (88 - 2ن) = 44ن - ن^2$

المعادلة: $مج_{2ن} = مج_{ن} \Leftarrow 4ن + 4ن^2 = 44ن - ن^2$

$5ن^2 - 40ن = 0 \Leftarrow 5ن\ (ن - 8) = 0$

أما $5ن = 0 \Leftarrow \boxed{ن = 0}$ مرفوض.

أو $ن - 8 = 0 \Leftarrow ن = 8$ مقبول .#

[13] كم حداً يلزم أخذه من المتتالية (−16، −15، −14،...) ابتداءً من الحد الأول ليكون مجموعها = −100

الحل: $ح_1 = -16$، $د = -15 - (-16) = 1$ أوجد ن=؟

$مج_{ن} = \frac{ن}{2} [2ح_1 + (ن - 1)د\ ]$

$-100 = \frac{ن}{2} [2 \times -16 + (ن - 1) \times 1\ ]$

$-100 = \frac{ن}{2} [-32 + ن - 1]$ أضرب بـ(2)

$-200 = ن\ (-33 + ن) \Leftarrow -200 = -33ن + ن^2$. صفّرها

$ن^2 - 33ن + 200 = 0$

$(ن - 25)\ (ن - 8) = 0$

أما $\text{ن} - 25 = 0 \Leftarrow \boxed{\text{ن} = 25}$ أو $\text{ن} - 8 = 0 \Leftarrow \boxed{\text{ن} = 8}$

[14] أوجد المتتالية الحسابية التي مجموع العشرة الحدود الأولى منها يساوي (250) ومجموع العشرة الحدود التالية لها (450):

الحل: أولاً: $\text{مج}_{10} = \frac{10}{2}(2\text{ح}_1 + 9\text{د}) = 5(2\text{ح}_1 + 9\text{د}) = 5(2\text{ح}_1 + 9\text{د}) = 10\text{ح}_1 + 45\text{د}$

$\therefore \boxed{10\text{ح}_1 + 45\text{د} = 250} \leftarrow (1)$

ثانياً: الحد الأول $\text{ح}_{11} = \text{ح}_1 + 10\text{د}$

$\text{مج}_{10} = \frac{10}{2}\,[2\text{ح}_{11} + (10-1)\,\text{د}] = 5\,[2\text{ح}_1 + 20\text{د} + 9\text{د}]$

$= 10\text{ح}_1 + 145\text{د}$

$\therefore \boxed{10\text{ح}_1 + 145\text{د} = 450} \leftarrow (2)$ بطرح (2) من (1)

$-100\text{د} = -200 \Leftarrow \boxed{\text{د} = 2}$ عوض في (1)

$10\text{ح}_1 + 90 = 250 \Leftarrow 10\text{ح}_1 = 160 \Leftarrow \boxed{\text{ح}_1 = 16}$

$\therefore \langle 16،\ 18،\ 20،\ \ldots\ldots \rangle$

[15] أوجد مجموع الأعداد الصحيحة للمتتالية المحصورة بين 50، 500 وكل منها لا يقبل القسمة على 11.

الحل: المسألة عبارة عن طرح مجموع متتاليتين حسابيتين.

الأولى: $\boxed{50}$، 51، 52، 53، ....، 499، $\boxed{500}$

المعطيات $\text{ح}_1 = 51$، $\text{ن} = 499 - 50 = 449$

$\text{ح}_{\text{ن}} = 499 \quad \therefore \quad \text{مج}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{2}\,(\text{ح}_1 + \text{ح}_{\text{ن}})$

$\therefore \quad \text{مج}_{449} = \frac{449}{2}\,(51 + 449) = 449 \times \frac{550}{2}$

$= 449 \times 275 = 123475$

الثانية: $\boxed{50}$ ، 55، 66، 77،.........، 495، $\boxed{500}$

المعطيات: $ح_1=55$، $ح_ن= 495$، $د = 11$ ، $ن=؟$

$\therefore ح_ن= ح_1 + (ن-1)\ د \Leftarrow 495 = 55 + (ن-1)\times 11$

$440= (ن-1) \times 11 \therefore ن-1 = \frac{440}{11} \Leftarrow$

$ن-1 = 40 \Leftarrow ن = 41$ عوض في $جـ_ن = \frac{ن}{2}(ح_1 + ح_ن)$

$\therefore جـ_{41} = \frac{41}{2}(55+495) = \frac{41}{2} \times 550$

$= 41 \times 275 = 11275$

$\therefore$ مجموع الأعداد الصحيحة التي لا تقبل القسمة على $11 = جـ_{449} - جـ_{41}$

$= 123475 - 11275 = 112200$

[16] برهن أن كلاً من المتسلسلتين هي متسلسلة حسابية أوجد مجموعها:

أ) $\sum_{ك=1}^{20} 2ك-1$

الحل: $\sum_{ك=1}^{20} 2ك-1 = 1+ 3 + 5 + 7+ ... 39$

هي مجموع حدود المتتالية $\langle 1، 3، 5، 7،...... \rangle$

$ح_1= 1$ ، $د= 3-1 = 2$ $\therefore$ حسابية

$جـ_{20} = \frac{20}{2}[2 + 19 \times 2] = 10 \times 40 = 400$

[17] يبدأ شخص في قيادة دراجة هوائية من أعلى منحدر فيقطع في الثانية الأولى 90سم، وفي كل ثانية بعد ذلك يقطع مسافة تزيد عن المسافة التي يقطعها في الثانية السابقة لها مباشرة بمقدار 120سم فإذا وصل الشخص إلى نهاية المنحدر بعد (20) ثانية فما طول المنحدر.

الحل: لنعتبر بدء عملية العد بعد الثانية الأولى فتكون لدينا متتالية:

حسابية $ح_1 = 90$ ، $د = 120$ ، $ن = 20 - 1 = 19$

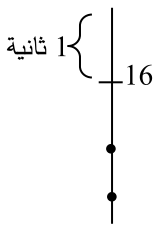
$$\text{مجـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{2}\left(2\text{ح}_1 + (\text{ن}-1)\,\text{د}\right) =$$

$$\text{مجـ}_{19} = \frac{19}{2}\left[2\times 90 + (19-1)\times 120\right] = \frac{19}{2}\left[180+2160\right]$$

$$= \frac{19}{2}\times 2340 = 19 \times 1170 = 22230$$

المسافة الكلية $90 + 22230 = 22320$ #

[19] سقط جسم من السكون راسياً في الفضاء فقطع في الثانية الأولى 16قدماً ثم قطع 32 قدماًً زيادة في كل ثانية عن الثانية السابقة لها مباشرة فما هي المسافة التي يقطعها الجسم في 11 ثانية؟ وما هي المسافة المقطوعة؟



الحل: لنعتبر بدء عد المسافات بعد الثانية الأولى.

المعطيات: ن = 11، $\text{ح}_1 = 16$، د = 32

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ح}_1 + (\text{ن}-1)\,\text{د}$$

$$\therefore\ \text{ح}_{11} = 16 + (10)\times 32 = 16 + 320 = 336$$

المتتاليــة الهندسيـــــة

تعريـف: تقول عن المتتالية بأنها هندسية إذا كان:

$$\frac{\text{ح}_{\text{ن}+1}}{\text{ح}_{\text{ن}}} = \text{ر} = \text{ثابت}$$

- النسبة الثانية (ر) تدعى الأساس.
- الحد العام $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ح}_1 \times \text{ر}^{\text{ن}-1}$.
- $\text{مجـ}_{\text{ن}} = \text{ح}_1 \times \dfrac{1-\text{ر}^{\text{ن}}}{1-\text{ر}}$.
- صورة أخرى $\text{مجـ}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{ح}_1 - \text{ر}\,\text{ح}_{\text{ن}}}{1-\text{ر}}$.

• كل حد وسط هندسي بين مجاوريه.

مثال: $\langle 3، 15، 75، ...... \rangle$ هندسية.

$$\frac{15}{3}=\frac{75}{15} \Rightarrow (15)^2 = 3\times 75 \Rightarrow 15 = \sqrt{3\times 75}$$

بالمثل أ، ب، جـ، $\Leftarrow$ $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$ $\Leftarrow$ $\text{ب}^2 = \text{أ} \times \text{جـ}$

$\Leftarrow$ $\boxed{\text{ب} = \sqrt{\text{أ} \times \text{جـ}}}$ قانون

تماريــن ومسائــل (3- 3)

[1] أكتب المتتالية الهندسية التالية (مكتفياً بخمسة حدود)

أ) حدها الأول 3 وأساسها 4

الحل: $\text{ح}_1 = 3$

$\text{ح}_2 = \text{ح}_1 \times \text{ر} = 3 \times 4 = 12$

$\text{ح}_3 = \text{ح}_2 \times \text{ر} = 12 \times 4 = 48$

$\text{ح}_4 = \text{ح}_3 \times \text{ر} = 48 \times 4 = 192$

$\text{ح}_5 = \text{ح}_4 \times \text{ر} = 192 \times 4 = 768$

$\therefore$ المتتالية $\langle 3، 12 ، 48، 192، 768، ... \rangle$

ب) حدها الأول 8 وأساسها $-\frac{1}{2}$

الحل: * $\text{ح}_1 = 8$ * $\text{ح}_2 = \text{ح}_1\, \text{ر} = 8 \times -\frac{1}{2} = -4$

* $\text{ح}_3 = \text{ح}_2\, \text{ر} = -4 \times \frac{-1}{2} = +2$ * $\text{ح}_4 = \text{ح}_3\, \text{ر} = 2 \times -\frac{1}{2} = -1$

$\text{ح}_5 = \text{ح}_4 \times \text{ر} = -1 \times -\frac{1}{2} = +\frac{1}{2}$

$\therefore \langle 8، -4، 2، -1، -\frac{1}{2}، ...... \rangle$

جـ(حدها الأول 3 وأساسها $\frac{1}{\sqrt{3}}$

الحل: * $\text{ح}_1 = 3$ * $\text{ح}_2 = \text{ح}_1\,\text{ر} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

* $\text{ح}_3 = \text{ح}_2\,\text{ر} = \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$

* $\text{ح}_4 = \text{ح}_3\,\text{ر} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$ ، $\text{ح}_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$

$\langle 3، \sqrt{3}، 1 ، \frac{1}{\sqrt{3}}، \frac{1}{3}، ...... \rangle$

[2] بيّن نوع المتتاليات الآتية: ثم أوجد الحد الخامس لِكل منها:

أ) ((أ + ب) ، ($\text{أ}^2 - \text{ب}^2$) ، (أ + ب) $(\text{أ} - \text{ب})^2$......)

الحل: يحدد نوعها (ر) $\frac{\text{ح}_2}{\text{ح}_1} = \frac{\text{أ}^2 - \text{ب}^2}{\text{أ} + \text{ب}} = \frac{(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})}{(\text{أ} + \text{ب})} = \text{أ} - \text{ب}$

لازم $\frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2} = \frac{(\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} - \text{ب})^2}{\text{أ}^2 - \text{ب}^2} = \frac{(\text{أ} + \text{ب})(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} - \text{ب})}{(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})} =$

أ − ب ∴ ر= أ − ب والمتتالية هندسية

$\text{ح}_\text{ن} = \text{ح}_1\,\text{ر}^{\text{ن}-1} \Leftarrow \text{ح}_5 = (\text{أ} + \text{ب}) \times (\text{أ} - \text{ب})^4$

جـ) $(2، -2\sqrt{2}، 4، ...)$

الحل: $\frac{\text{ح}_2}{\text{ح}_1} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

$\frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2} = \frac{4}{-2\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

النسبة ثابتة ⇐ متتالية هندسية وأسسها (ر = − $\sqrt{2}$)

$\text{ح}_\text{ن} = \text{ح}_1 \times \text{ر}^{\text{ن}-1} \Leftarrow \text{ح}_5 = 2 \times (-\sqrt{2})^4 = 2 \times 4 = 8$

د) $(\sqrt{3}، 1 ، \frac{1}{\sqrt{3}}، ....)$

الحل: * $\frac{ح_2}{ح_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ * $\frac{ح_3}{ح_2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ متتالية هندسية أساسها ر = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$ح_ن = ح_1 ر^{ن-1} \Leftarrow ح_5 = \sqrt{3} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \sqrt{3} \times \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

ب) (أ + 2ب، 2أ + 4ب ، 3أ + 6ب، ......)

الحل: $ح_2 - ح_1$ = 2أ + 4ب − أ − 2ب = أ + 2ب

$ح_3 - ح_2$ = أ + 2ب ⇐ المتتالية الحسابية.

$ح_1$ = أ + 2ب، د = أ + 2ب ∴ $\boxed{ح_ن = ح_1 + (ن-1)\, د}$

⇐ $ح_5$ = أ + 2ب + 4 (أ + 2ب) = 5أ + 10ب

هـ) ⟨23.2، 23.8، 24.4،......،...⟩

الحل: الفرق الثابت $ح_2 - ح_1 = 23.8 - 23.2 = 0.6$

$ح_3 - ح_2 = 24.4 - 23.8 = 0.6$

∴ الفرق ثابت والمتتالية حسابية د = 0.6

$ح_ن = ح_1 + (ن-1)\, د \Leftarrow ح_5 = 23.2 + 4 \times 0.6 = 23.2 + 2.4$

$= 25.6$

[3] أوجد ناتج ما يلي:

أ) الحدين الثامن والثاني عشر لمتتالية هندسية حدها الأول 64 وأساسها $\left(\frac{1}{2}\right)$

الحل: $ح_ن = ح_1 \times ر^{ن-1}$

- $ح_8 = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{8-1} = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 2^6 \times \frac{1}{2^7} = \frac{1}{2}$
- $ح_{12} = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 2^6 \times \frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ #

ب) المتتالية الهندسية التي مجموع حديها الأول والثاني يساوي 72 ومجموع حديها الأول والرابع يساوي 56:

الحل: $ح_1 + ح_1 ر = 72 \Leftarrow \boxed{ح_1 (1+ر) = 72} \leftarrow (1)$

$ح_1 + ح_1 ر^3 = 56 \Leftarrow \boxed{ح_1 (1+ر^3) = 56} \leftarrow (2)$

بقسمة (1) على (2) $\Leftarrow \frac{ح_1 (1+ر)}{ح_1 (1+ر^3)} = \frac{72}{56} \Leftarrow$

$\frac{(1+ر)}{(1+ر)(1-ر+ر^2)} = \frac{9}{7} \Leftarrow 9ر^2 - 9ر + 2 = 0$

$(3ر - 1)(3ر - 2) = 0$

أما $3ر - 1 = 0 \Leftarrow \boxed{ر = \frac{1}{3}}$ أو $\boxed{ر = \frac{2}{3}}$

من أجل $ر = \frac{1}{3}$ عوض في (1) $\boxed{ح_1 (1+\frac{1}{3}) = 72} \leftarrow$

$\frac{4}{3} ح_1 = 72 \Leftarrow ح_1 = 72 \times \frac{3}{4} = 18 \times 3 = 54$

(54، 18، 6، ...)

من أجل $ر = \frac{2}{3}$ عوض في (1) $\Leftarrow ح_1 \times (1+\frac{2}{3}) = 72 \Leftarrow$

$\frac{5}{3} ح_1 = 72 \Leftarrow ح_1 = 72 \times \frac{3}{5} = \frac{216}{5}$

$\langle \frac{216}{5}، \frac{144}{5}، \frac{96}{5}، ...... \rangle$

ج) رتبة الحد الذي قيمته $\frac{1}{27}$ من المتتالية الهندسية:

(3، $\sqrt{3}$، 1، ......)

الحل: $ح_1 = 3$، $ر = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{1}{27}$ المطلوب ن= ؟

$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ح}_1\, \text{ر}^{\text{ن}-1}$

$\frac{1}{27} = 3 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\text{ن}-1} \Leftarrow \frac{1}{27} \times \frac{1}{3} = \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{\text{ن}-1}$

$\frac{1}{81} = 3^{\frac{-\text{ن}+1}{2}} \Leftarrow 3^{-4} = 3^{\frac{-\text{ن}+1}{2}} \Leftarrow \frac{-4}{1} = \frac{-\text{ن}+1}{2}$

$\Leftarrow -8 = -\text{ن} + 1 \Leftarrow \text{ن} = 1 + 8 = 9 \quad \therefore \boxed{\text{ن} = 9}$

[9] أوجد ما يأتي:

أ) المتتالية الهندسية التي مجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوي 26 ومجموع الحدود الثلاثة التالية لها (702).

الحل: $\text{ح}_1 + \text{ح}_1\text{ر} + \text{ح}_1\text{ر}^2 = 26 \Leftarrow \boxed{\text{ح}_1(1 + \text{ر} + \text{ر}^2) = 26} \rightarrow (1)$

$\text{ح}_4 + \text{ح}_5 + \text{ح}_6 = 702 \Leftarrow \text{ح}_1\text{ر}^3 + \text{ح}_1\text{ر}^4 + \text{ح}_1\text{ر}^5 = 702$

$\boxed{\text{ح}_1\text{ر}^3(1 + \text{ر} + \text{ر}^2) = 702} \rightarrow (2)$

بقسمة (1) على (2) $\Leftarrow \frac{\text{ح}_1(1+\text{ر}+\text{ر}^2)}{\text{ح}_1\text{ر}^3(1+\text{ر}+\text{ر}^2)} = \frac{26}{702}$

$\frac{1}{\text{ر}^3} = \frac{1}{27} \Leftarrow \text{ر}^3 = 27 \Leftarrow \boxed{\text{ر} = 3}$ عوض في (1)

$\text{ح}_1(9+3+1) = 26 \Leftarrow \text{ح}_1 = \frac{26}{13} = 2$

$\langle 2، 6، 18، \ldots\ldots \rangle$

ب) أوجد المتتالية الهندسية التي حدها الأول 9 وحدها السادس (−288)

الحل: $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ح}_1\, \text{ر}^{\text{ن}-1}$

$\text{ح}_6 = 9 \times (\text{ر})^{6-1} \Leftarrow 9\text{ر}^5 = -288$

$\text{ر}^5 = \frac{-288}{9} = -32 = (-2)^5 \Leftarrow \text{ر} = -2$

$\langle 9، -18، +36، -72، \ldots \rangle$

ج(أوجد عدد حدود المتتالية الهندسية ⟨320، 160، ......،10⟩

الحل: $ح_1 = 320$، $ر = \frac{160}{320} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

$ح_ن = 10$ المطلوب (ن = ؟)

نعلم أن $ح_ن = ح_1 ر^{ن-1}$

$$10 = 320 \left(\frac{1}{2}\right)^{ن-1}$$

$$\frac{10}{320} = \left(\frac{1}{2}\right)^{ن-1} \Leftarrow \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^{ن-1} \Leftarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{ن-1}$$

$$\Leftarrow ن - 1 = 5 \Leftarrow ن = 6$$

د) أوجد الحد السادس من متتالية هندسية موجبة مجموع الحدين الأول والثاني منها يساوي (24) وحدها الثالث يساوي (2).

الحل: $ح_1 + ح_1 ر = 24 \Leftarrow \boxed{ح_1 (1+ر) = 24} \leftarrow (1)$

$\boxed{ح_1 ر^2 = 2} \leftarrow (2)$

قسمة (1) على (2) $\frac{ح_1 (1+ر)}{ح_1 ر^2} = \frac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{2}_1} \Leftarrow 12ر^2 = ر+1$

$\Leftarrow 12ر^2 - ر - 1 = 0$ $\qquad (4ر + 1)(3ر - 1) = 0$

أما $4ر + 1 = 0 \Leftarrow 4ر = -1 \Leftarrow \boxed{ر = \frac{-1}{4}}$ أو $3ر - 1 = 0 \Leftarrow \boxed{ر = \frac{1}{3}}$

- لما $ر = -\frac{1}{4}$ عوض في (2) $\Leftarrow ح_1 \left(\frac{1}{16}\right) = 2$

$$ح_1 = 2 \times \frac{16}{1} = 32$$

$$\Leftarrow ح_ن = ح_1 ر^{ن-1} \Leftarrow ح_6 = 32 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^5 = -32 \times \frac{1}{4^5} = \frac{-1}{32}$$

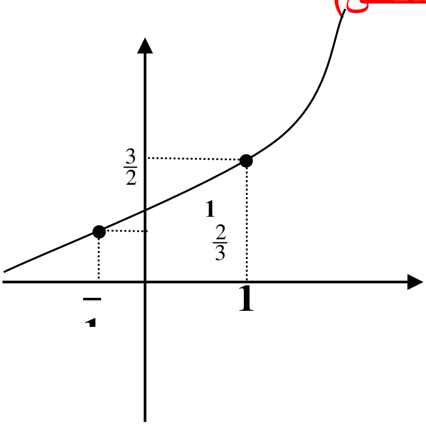
- لما $ر = \frac{1}{3}$ عوض (2) $ح_1 \times \frac{1}{3} = 2 \Leftarrow ح_1 = 2 \times \frac{9}{1}$

$$\Leftarrow ح_6 = 2 \times 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{6-1} = \frac{2 \times 9}{3^5} = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27}$$

تمارين عامة (الملحـــق)

الدالـــــة الأسيـــة:

[1] أرسم منحنى الدالة د (س) = $\left(\frac{3}{2}\right)^{س}$



س	1-	0	1
ص	$\left(\frac{3}{2}\right)^{1-}$ $= \frac{2}{3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{0}$ $=1$	$\frac{3}{2}$

[2]حل المعادلة $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{2} = 3^{س-\frac{1}{2}}$

الحل: $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^{2} = 3^{س-\frac{1}{2}}$

$$(3)^{\frac{2}{5}} = 3^{س-\frac{1}{2}} \Leftarrow \frac{2}{5} = س - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = س \Leftarrow \frac{5+4}{10} = س \Leftarrow \boxed{\frac{9}{10} = س}$$

[3] أوجد مجموعة تعريف الدالة ص= $أ^{س}$

الحل: تعريف الدالة الأسية من تعريف أسها (س) $\therefore$ م ت = ح.

اللوغاريتم والدالة اللوغاريتمية

[1] حوِّل كلاً مما يأتي إلى صيغة اللوغارتم.

أ) $32 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5-}$

الحل: $لو_{\frac{1}{2}} 32 = 5-$

ب) $7\sqrt{7} = \left(\sqrt{7}\right)^{3}$

الحل: $لو_{\sqrt{7}} 7\sqrt{7} = 3$

[2] أجب عن الأسئلة التالية:

أ) حوّل ما يأتي إلى الصيغة الأسية لو$_{5}$ 625 = 4

الجواب: $625 = 5^{4}$

ب) إذا كانت لو$_{\sqrt{2}}$ س= 6 فما قيمة س.

الحل: س = $(\sqrt{2})^{6} = 8$

جـ) حل المعادلة لو7 + لوس = 2لو7

الحل: لو7س = لو7^{2}

لو 7س = لو49 $\Leftarrow$ 7س = 49

$\Leftarrow$ س = $\frac{49}{7} = 7$

استفد من الخاصيتين: لوب + لوجـ = لو ب ×جـ ن لو ب = لو ت

د) أوجد مجموعة تعريف الدالة ص= لو$_{أ}$س−3

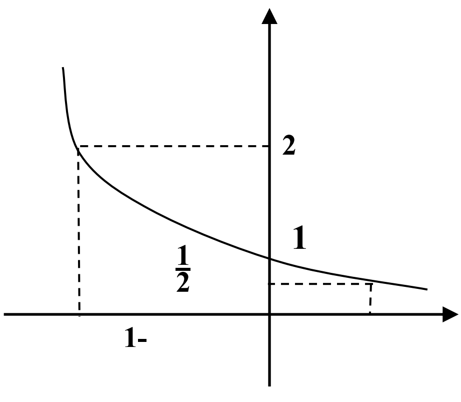
الحل: الدالة اللوغارتمية لما ما بعد لو 〉0 معرفة لما س〉0

$\Leftarrow$ م ت =] 0، + ∞[

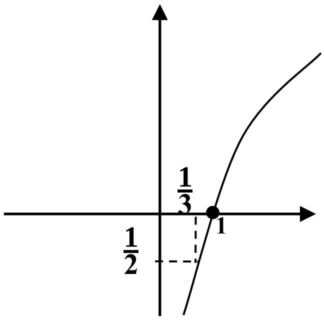
[3] أرسم كلاً من الدوال التالية:

أ) لو$_{\frac{1}{2}}$س = ص

الحل: س = $(\frac{1}{2})^{ص}$



ب) ص = لو$_9$ س



الحل: س = $9^{ص}$

* لما ص = $-\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ س = $9^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

$(\frac{1}{3} ، \frac{-1}{2})$

* لما ص = 0 $\Leftarrow 9^0 = 1$ (1 ، 0)

* لما ص = $\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ س = $9^{\frac{1}{2}}$ = 9 = 3 $(3، \frac{1}{2})$

قوانيـــن اللوغاريتمـــات

[1] ضع المقدار لو $\frac{5}{3}$ + لو $\frac{15}{625}$ − لو $\frac{9}{25}$ لو $\frac{27}{5}$ في أبسط صورة.

الحل: استفد من الخاصيتين لو ب × جـ = لو ب + لو جـ، لو $\frac{ب}{جـ}$ = لوب − لوجـ

$\therefore$ المقدار لو $\frac{5}{3}$ + لو $\frac{15}{625}$ + لو $\frac{27}{5}$ − لو $\frac{9}{25}$.

= لو $\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \times \frac{15}{625} \times \frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\cancel{5}}$ − لو $\frac{9}{25}$ = لو $\frac{9\times15}{625} \div \frac{9}{25}$

= = لو $\frac{9\times15}{625} \times \frac{25}{9}$ = لو $\frac{15}{25}$ = لو $\frac{5}{3}$

[2] أوجد قيمة كلاً من:

أ) لو 0.0001 أنتبه هنا الأساس (10)

الحل: لو$_{10}$ $\frac{1}{10000}$ = لو$_{10}$ 10^{-4} = −4 لو$_{10}$ 10 = −4

ب) لو$_3$ (لو$_6$ 6) = لو$_3$ (1) = صفر

[3] أثبت أن لو$_5$ 25 + لو$_5$ 125 = لو$_5$ 3125

الحل: الطرف الأيمن لو$_5$ 25 + لو$_5$ 125 = لو$_5$ 25× 125= لو 3125

تمارين عامة

[1] حل المعادلات الآتية:

أ) $\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 27^{\text{س}+2}$

الحل: $\sqrt[3]{(3^{-2})} = (3^{3})^{\text{س}+2} \Rightarrow 3^{-\frac{2}{3}} = (3)^{3(\text{س}+2)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{-2}{3} = 3\text{س} + 6 \Rightarrow$$

$$\frac{-2}{3} - 6 = 3\,\text{س} \Rightarrow \text{س} = \frac{-2-18}{3} \Rightarrow \boxed{\text{س} = \frac{-20}{9}}$$

ب) $\left(\text{س} - \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$

الحل: $\left(\text{س} - \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = (6)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \text{س} - \frac{2}{3} = 6$

$$\Rightarrow \text{س} = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

جـ) $(25)^{\text{س}-1} - 6 \times 5^{\text{س}-1} + 5 = 0$

الحل: $(5^{2})^{\text{س}-1} - 6\,(5^{\text{س}-1}) + 5 = 0$

$(5^{\text{س}-1})^{2} - 6(5^{\text{س}-1}) + 5 = 0$ بفرض $\boxed{\text{ع} = 5^{\text{س}-1}}$

$$\text{ع}^{2} - 6\text{ع} + 5 = 0$$

$$(\text{ع}-5)(\text{ع}-1) = 0$$

$\Rightarrow$ أما $\text{ع} - 5 = 0 \Rightarrow \text{ع} = 5 \Rightarrow 5^{\text{س}-1} = 5^{1} \Rightarrow \text{س} - 1 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\text{س} = 2}$$

أو $\text{ع} - 1 = 0 \Rightarrow \text{ع} = 1 \Rightarrow 5^{\text{س}-1} = 5^{0} \Rightarrow \text{س} - 1 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\text{س} = 1}$$

ج) $5^{س} = 125\sqrt{5}$

الحل: $5^{س} = 5^{3} \times 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 5^{س} = 5^{\frac{7}{2}} \Rightarrow س = \frac{7}{2}$

و) $3^{\frac{1}{س}} \times 3^{\frac{1}{س}} = 243$

الحل: $3^{\frac{2}{س}} = 3^{5} \Rightarrow \frac{2}{س} = 5 \Rightarrow \frac{2}{س} = \frac{5}{1} \Rightarrow س = \frac{2}{5}$

ج) $2^{س} \times \sqrt[3]{4} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$

الحل: $2^{س} \times (2^{2})^{\frac{1}{3}} = ((2)^{-4})^{\frac{1}{3}}$

$2^{س} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow 2^{س+\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow$

$س + \frac{2}{3} = \frac{-4}{3} \Rightarrow س = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-6}{3} = -2$

$\therefore س = -2$

ط) $\sqrt{3} \times 9^{س+1} = \sqrt[3]{9}$

الحل: $3^{\frac{1}{2}} \times (3^{2})^{س+1} = (3^{2})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{2س+2} = 3^{\frac{2}{3}}$

$3^{2س+2+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{2}{3}} \Rightarrow 2س + 2 + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

$2س + \frac{5}{2} = \frac{2}{3}$ أضرب كل حد بـ6

$12س + 15 = 4 \Rightarrow 12س = -11 \Rightarrow س = \frac{-11}{12}$

[2] ما هو أساس الدالة الأسية التي يمر بيانها بالنقطة (−4، 81)

الجواب:الدالة ص = $3^{-س}$ $\therefore$ الأساس(3) أو ص=$\left(\frac{1}{3}\right)^{س}$

فيكون الأساس= $\left(\frac{1}{3}\right)$

[3] أكتب ما يلي بالصورة اللوغارتمية:

أ) $216=6^3$ الجواب $\text{لو}_6 216 = 3$ #

ب) $7^{-3} = \frac{1}{343}$ $\Leftarrow$ $\text{لو}_7 \frac{1}{343} = -3$ #

[4] ضع ما يأتي في الصورة الأسية:

أ) $\text{لو}_{10} 0.0001 = -4 \Leftarrow 10^{-4} = 0.0001$

ب) $\text{لو}_{13} 2197 = 3 \Leftarrow 13^{3} = 2197$

[5] أحسب قيمة كل مما يأتي:

أ) $\text{لو}_{\sqrt{5}} 5\sqrt{25} =$

الحل: نعلم $5=\sqrt{5}\times\sqrt{5}=(\sqrt{5})^2$ ، $\sqrt{25} = 5 = \sqrt{5}\times\sqrt{5} = (\sqrt{5})^2$

$\therefore \text{لو}_{\sqrt{5}} 5\sqrt{25} = \text{لو}_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^2(\sqrt{5})^2 = \text{لو}_{\sqrt{5}} (\sqrt{5})^4 = 4\ \text{لو}_{\sqrt{5}} \sqrt{5} = 4\times1 = 4$

ب) $\text{لو}_{\sqrt{2}} 32\sqrt{2}$

الحل: $\text{لو}_{\sqrt{2}} 2^5\times2^{\frac{1}{2}} = \text{لو}_{\sqrt{2}} 2^{\frac{11}{2}} = 11\ \text{لو}_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 11$

جـ) $\text{لو}_{\sqrt{2}} 32\sqrt{2} = \text{لو}_{\sqrt{2}} 2^5\times2^{\frac{1}{2}} = \text{لو}_{\sqrt{2}} 2^{\frac{11}{2}} = \text{لو}_{\sqrt{2}} (2^{\frac{1}{2}})^{11} = 11\ \text{لو}_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 11$

د) $\text{لو}_{\sqrt{2}} 16 = \text{لو}_{\sqrt{2}} 2^4 = \text{لو}_{\sqrt{2}} (2^{\frac{1}{2}})^8 = 8\ \text{لو}_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 8\times1 = 8$

هـ) $\text{لو}_{\sqrt{2}} 8\sqrt{32} = \text{لو}_{\sqrt{2}} 2^{\frac{11}{2}} = 11\ \text{لو}_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 11$ #

[6] حل المعادلات التالية:

أ) $\text{لو}_3 \frac{1}{81} =$ س -2 الحل حوّل إلى الشكل الأسي وأنتبه $= \frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$

$\therefore \frac{1}{81} = (3)^{\text{س}-2} \Leftarrow 3^{-4} = 3^{\text{س}-2} \Leftarrow \text{س}-2 = -4 \Leftarrow \text{س} = -2$

ب) $\text{لو}_{\text{س}} 2\frac{3}{8} = \frac{3}{2} \Leftarrow$

الحل: $2\frac{3}{8} = س^{\frac{3}{2}} \Leftarrow \frac{19}{8} = س^{\frac{3}{2}} \Leftarrow \frac{361}{64} = س^{3}$ 1 جذر تكعيباً.

$\Leftarrow س = \sqrt[3]{\frac{361}{64}} = \frac{\sqrt[3]{361}}{4}$ #

ب) $لو_{8}(س+3) = \frac{1}{3} =$

الحل: $س + 3 = 8^{\frac{1}{3}} \Leftarrow (س + 3) (2^{3})^{\frac{1}{3}} \Leftarrow س+3 = \Leftarrow 2$ $س = -1$

د) $لو_{10} \sqrt[3]{10} = \frac{س}{6} \Leftarrow لو_{10} 10^{\frac{1}{3}} = \frac{س}{6} \Leftarrow$

$\frac{1}{3} لو_{10} 10 = \frac{س}{6} \Leftarrow \frac{1}{3} = \frac{س}{6} \Leftarrow 3س = \Leftarrow 6$ $س = \frac{6}{3} = 2$

و) $لو_{2\sqrt{32}} (س^{2} - 8س) = \Leftarrow 2س^{2} - س = (2^{\frac{7}{2}})^{2}$

$2\sqrt{32} = 2^{1} \times 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{7}{2}}$

$س^{2} - 8س = \Leftarrow 2^{7} س^{2} - 8س - 128 = 0$

$(س - 16) (س+8) = 0$

$س = 16$، $س = - \Leftarrow 8$

ط) $لو_{2} [لو_{2} 16) = س]$

نحسب $لو_{2} 16 = لو_{2} 2^{4} = 2 لو_{2} 4 = 4 \times 1 = 4$

$\therefore لو_{4} (لو_{2} 4) = س \Leftarrow لو_{4} (لو_{2} 2^{2}) = س \Leftarrow$

$لو_{4} (2 لو_{2} 2) = س \Leftarrow لو_{4} 2 = س$

$\therefore س = \frac{لو_{10} 2}{لو_{10} 4} = \frac{0,301}{0,602} = \frac{301}{602} = \frac{1}{2}$

[7] أثبت أن

أ) $لو_{3} 27 = لو_{3} 2187 - لو_{3} 81$

الحل الطرف الأيسر: $\log_{3}\frac{2187}{81} = \log_{3}27$ = الطرف الأيمن.

ب) $\log_{2}8 + \log_{2}128 = \log_{2}1024$

الحل: الطرف الأيمن $\log_{2}8 + \log_{2}128 = \log_{2}8\times128 = \log_{2}1024$

[8]أختصر كلاً مما يأتي:

أ) $\log\frac{7}{15} + \log\frac{35}{3} + \log\frac{25}{7} - \log\frac{5}{3} = \log\frac{\cancel{7}}{1\cancel{5}}\times\frac{35}{\cancel{3}}\times\frac{\overset{5}{2\cancel{5}}}{\cancel{7}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}$

$= \log\frac{175}{3}$

ب) $\log_{4}45 - 3\log_{4}2 + \log_{4}12 = \log_{4}45 + \log_{4}12 - \log_{4}9 = \log_{4}\frac{12\times45}{9} =$

$\log_{4}5\times12 = \log_{4}60 = \log_{4}4\times15 = \log_{4}4 + \log_{4}15 = 1 + \log_{4}15$

جـ) $\log_{3}36 - \log_{3}4 - \log_{3}25 = \log\frac{36}{25\times4} = \log\frac{9}{25}$

[9] ما هو العدد الذي لو غاريتمه للأساس 5 يساوي -4

الحل: نفرض العدد س فيكون $\log_{5}$س $= -4 \Leftarrow$ س $= 5^{-4} = \frac{1}{5^{4}}$

$= \frac{1}{625}$ ∴ العدد $\frac{1}{625}$

[10] أيهما أكبر $\log_{\frac{1}{2}}3$ ، $\log_{\frac{1}{5}}3$

الحل: $\log_{\frac{1}{2}}3 =$ س $\Leftarrow 3 = (\frac{1}{2})^{\text{س}} \leftarrow (1)$ بمقارنة (1) مع (2) نجد

$\log_{\frac{1}{5}}3 =$ ع $\Leftarrow 3 = (\frac{1}{5})^{\text{ع}} \leftarrow (2)$ $(\frac{1}{2})^{\text{س}} = (\frac{1}{5})^{\text{ع}}$

$\frac{1}{2} \rangle \frac{1}{5} \Leftarrow$ س 〉 ع لأنه إذا كان العدد <1 كلما كبر الأس صغر المقدار

$\frac{\text{أ}}{1}$

[11] اثبت أن:

أ) $\frac{\text{لو}_2 8 - 3\ \text{لو}_3 9}{\text{لو}_2 4 - 4\ \text{لو}_3 3} = \frac{3}{2}$

الحل: $\frac{\text{لو}_2 8 - 3\ \text{لو}_3 9}{\text{لو}_2 4 - 4\ \text{لو}_3 3} = \frac{\text{لو}_2 2^3 - 3\ \text{لو}_3 3^2}{\text{لو}_2 2^2 - 4\ \text{لو}_3 3} = \frac{3\ \text{لو}_2 2 - 6\ \text{لو}_3 3}{2\ \text{لو}_2 2 - 4\times1} = \frac{3\times1 - 6\times1}{2\times1 - 4}$

$= \frac{3-6}{2-4} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ #

جـ) $\text{لو}\ \frac{245}{297} - \text{لو}\ \frac{49}{81} + \text{لو}\ \frac{11}{15} = 0$

الحل. $\text{لو}\ \frac{245}{297} + \text{لو}\ \frac{11}{15} - \text{لو}\ \frac{49}{81} = \text{لو}\ \frac{245}{297} \times \frac{11}{15} \div \frac{49}{81}$

$= \text{لو}\ \frac{11 \times 245}{15 \times 297} \times \frac{81}{49} = \text{لو}\ 1 =$ صفر

هـ) $\text{لو}\ \frac{256}{3} + 3\ \text{لو}\ \frac{5}{3} + \text{لو}\ \frac{81}{32} = 3\ \text{لو}\ \frac{5}{3}$

الحل: $\text{لو}\ \frac{256}{3} + \text{لو}\ \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \text{لو}\ \frac{81}{32}$

$= \text{لو}\ \frac{256}{3} \times \frac{125}{27} \times \frac{81}{32} = \text{لو}\ \frac{125}{8} = \text{لو}\ \left(\frac{5}{3}\right)^3 = 3\ \text{لو}\ \frac{5}{3}$ #

[12] أوجد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية:

تعريف الدالة اللوغاريتمية: (معرفة لما بعد لو أكبر من الصفر)

أ) د(س) = لو (س− 3)

الحل: معرفة لما س − 3 > 0 ⇐ س > 3 ⇐ م ت=]3، + ∞[

ب) ص = لو (4− س^2)

الحل: معرفة لما 4− س^2 > 0 ⇐ 4 > س^2 ⇐ 2 > |س| ⇐

2 > س > −2 ∴ م ت =]−2 ، 2[

جـ) ص = لو (3س + 1)

الحل: معرفة لما 3س + 1 > 0 ⇐ 3س > −1 ⇐ س > $-\frac{1}{3}$

∴ م ت =]$-\frac{1}{3}$ ، ∞[

د) ص = $\frac{\text{لو}_{\text{أ}}\text{ س}}{1+\text{لو}_{\text{أ}}\text{ س}}$

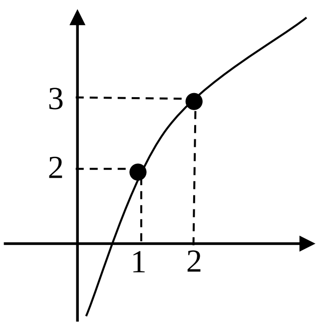
الحل: لكسر معرفة لما 1+ لو$_{\text{أ}}$س ≠ 0

⇐ لو$_{\text{أ}}$س ≠ − ⇐ 1 س ≠ $\frac{1}{\text{أ}}$

{$\frac{1}{\text{أ}}$}

كلوغاريتم: معرفة لما س > 0 ⇐ م ت=]0، +∞[

[13] أرسم بيان كل من الدوال التالية:



أ) ص = 2 + لو$_2$س

الحل: معرفة لما س > 0

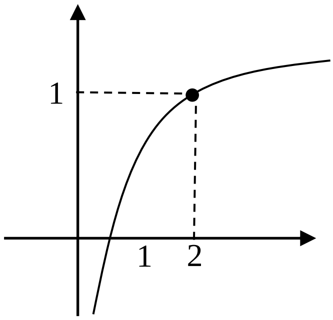
ص − 2 = لو$_2$س ⇐ س = 2$^{\text{ص}-2}$

لما ص = ⇐ 1 = 2^{-1} = $\frac{1}{2}$ $(\frac{1}{2}$ ، 1)

لما ص = $\Leftarrow$ 2 س $= 2^{0} = 1$ (1 ، 2)

لما ص = $\Leftarrow$ 3 س $= 2^{1} = 2$ (2 ، 3)

جـ(ص = لو$_{2}$س معرفة لما س 〉 0



الحل: س = $2^{ص}$

لما ص = $- \Leftarrow 1$ س = $2^{-1} = \frac{1}{2}$ $(\frac{1}{2}$ ، 1)

لما ص = 0 $\Leftarrow$ س = $2^{0} = 1$ (1 ، 0)

لما ص = 1 $\Leftarrow$ س = $2^{1} = 2$ (2 ، 1)

[14] أوجد نقاط تقاطع بيان كل دالة من الدوال التالية مع أحد المحورين:

أ) ص = 2 + لو$_{2}$س

الحل: ضع ص = 0 $\Leftarrow$ 0 = 2 + لو$_{2}$س $\Leftarrow$ لو$_{2}$س = -2

$\therefore$ س = $2^{-2} = \frac{1}{2^{2}} = \frac{1}{4}$ $\qquad (\frac{1}{4}$ ، 0)

[15] ما هو أساس الدالة اللوغارتيمية التي يمر بيانها بالنقطة ($25\sqrt{125}$ ، $\frac{7}{2}$)

الحل: ص = لو$_{أ}$ $25\sqrt{125}$

$\frac{7}{2}$ = لو$_{أ}$ $25\sqrt{125} \Leftarrow$ أ$^{\frac{7}{2}}$ = $25\sqrt{125}$

$\Leftarrow$ أ$^{\frac{7}{2}}$ = $5^{2} \times 5^{\frac{3}{2}} \Leftarrow$ أ$^{\frac{7}{2}}$ = $5^{\frac{7}{2}} \Leftarrow$ أ = 5

[16] باستخدام قوى العدد عشرة أكتب كل عدد فيما يلي على صورة عدد صحيح وكسر بحيث يكون العدد الصحيح أقل من العشرة.

أ) $32 = 3.2 \times 10^{-3}$

ب) = $0.0065 = 6.5 \times 10^{-3}$

[17] اثبت أن:

أ) لو$_{10}$ 350 = لو$_{10}$ 35+1

الحل: لو$_{10}$ 350 = لو$_{10}$ 35 × 10 = لو$_{10}$ 35 + لو$_{10}$ 10 = لو$_{10}$ 35 +1

ب) لو$_{10}$ 325 = لو 3.25 + 2

الحل: لو$_{10}$ 3.25× 10^2 = لو$_{10}$ 3.25 +لو10^2= لو 3.25 + 10 لو$_{10}$ 2

= لو 3.25 + 2

جـ(لو$_{10}$ 0.001 = لو$_{10}$ 1 −3

الحل: لو$_{10}$ 1 × 10^{-3} = لو$_{10}$ 1+ لو$_{10}$ 10^{-3}= 0 −10 لو$_{10}$ 3 = −3

د) لو$_{10}$ 0.0023 = لو$_{10}$ 2.3 − 3

الحل: لو$_{10}$ 0.0023 = لو$_{10}$ 2.3 × 10^{-3}= لو$_{10}$ 2.3 + لو$_{10}$ 10^{-3}

= لو$_{10}$ 2.3 − 10 لو$_{10}$ 3= لو$_{10}$ 2.3 −3

[20] أوجد قيمة س فيما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة إذا كان:

أ) لو$_{هـ}$ س= 3.24 ⇐ الجواب 25.5337

3	0	2	**LNV**	**L_N**	=	25.5337215

ب) لو$_{10}$س= 1.23

1	0	3	**LNV**	**Log**	=	16.98243652

[21] أوجد أ) لو$_4$ 60

الحل: $لو_4 60 = \frac{لو_هـ 60}{لو_هـ 4} = \frac{4.0943}{1,3862} = 2.9536$

ب) $لو_2 7 = \frac{لو_{10} 7}{لو_{10} 2} = \frac{0,8451}{0,301} = 2.81$

جـ) $لو_7 75 = \frac{لو_هـ 75}{لو_هـ 7} = \frac{4,317}{1,946} = 2.218$

[23] حل المعادلات التالية:

ب) $لو_هـ (لو_هـ س) = 1$

الحل: $\cancel{لو_هـ} (لو_هـ س) = لو_هـ (هـ) \Leftarrow لو_هـ س = هـ$

$\Leftarrow س = هـ^{هـ}$

و) $لو_هـ س = 2 + لو_هـ (1 - س)$

الحل: $لو_هـ س = لو_هـ هـ^2 + لو_هـ (1 - س)$

انتبه

$2 = 2 \times 1 = لو_هـ 2هـ$

$= لو_هـ (هـ^2)$

$\cancel{لو_هـ} س = \cancel{لو_هـ} هـ^2 (1 - س) \Leftarrow س = هـ^2 (1 - س)$

$\Leftarrow س = هـ^2 - هـ^2 س \Leftarrow س + هـ^2 س = هـ^2 \Leftarrow س(1 + هـ^2) = هـ^2$

$س = \frac{هـ^2}{1 + هـ^2}$

[24] إذا كانت $لو_هـ \frac{أ + ب}{3} = \frac{1}{2} (لو_هـ أ + لو_هـ ب)$ أثبت أن $أ^2 + ب^2 = 7 أ ب$

الحل: أضرب بـ2

$2 لو_هـ \frac{أ + ب}{3} = لو_هـ أ ب$

$لو_هـ \frac{(أ + ب)^2}{3^2} = لو_هـ أ ب$

$(أ + ب)^2 = 9 أ ب$

$أ^2 + 2 أ ب + ب^2 = 9 أ ب$

$\frac{(أ+ب)^2}{9}$ = أ ب ⇐ | ∴ $أ^2 + ب^2 = 7$ أ ب

[25] إذا كانت $لو_{هـ}$ (س + ص) = $لو_{هـ}$ س + $لو_{هـ}$ ص

أوجد قيمة ص بدلالة س

الحل: $\cancel{لو_{هـ}}$ (س + ص) = $\cancel{لو_{هـ}}$ س ص ⇐ س + ص = س ص

ص − س ص = −س ⇐ ص (1 − س) = −س ⇐ ص = $\frac{-س}{1-س}$

اختبـــار الوحـــــدة

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: (1) حل المعادلة $3^{س^2 - س} = 9$

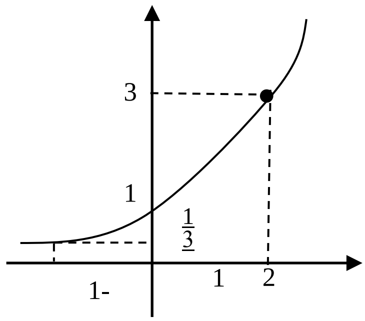
الحل: $3^{س^2 - س} = 3^2$ ⇐ $س^2$ − س = 2 ⇐

$س^2$ − س − 2 = 0 ⇐ (س − 2) (س + 1) =0

⇐ س − 2 = 0 ⇐ $\boxed{س = 2}$ أو س + 1 = 0 ⇐ $\boxed{س = -1}$

(2) أرسم بيان الدالة ص = $3^{س}$

س	−1	0	1
ص	$\frac{1}{3}$	1	3



(3) أوجد مجموعة تعريف الدالة

ص = $لو_{2}$ (س −3)

الحل معرفة لما س − 3 > 0 ⇐ س > 3 ⇐ م ت =]3، +∞[

(4) السؤال الثاني:

(1) حل المعادلة $لو_{2\sqrt{2}} 32\sqrt[5]{4}$ = س أصلاً هذه الصورة تدل على أن المسألة محلولة

الحل: لو$_{2\sqrt{2}}$ $2^5 \times 2^{\frac{3}{2}}$ = س $\Leftarrow$ لو$_{2^{\frac{3}{2}}}$ $2^{\frac{27}{2}}$ = س

= لو$_{\frac{3}{2}}$ $(2^{\frac{2}{5}})^9$ = س $\Leftarrow$ $2^{\frac{3}{2}}$ لو$_{\frac{3}{2}}$ 9 = س $\Leftarrow$ س = 9

(3) حل المعادلة لو$_2$ (س−3) + لو$_2$ (س+ 4) = لو$_2$ 8

الحل: ~~لو$_2$~~ (س −3) (س +4) = ~~لو$_2$~~ 8 $\Leftarrow$ (س−3) (س+4) = 8

س^2 + س −20 = 0

(س+ 5) (س −4) = $\Leftarrow$ 0 = س+5 = $\Leftarrow$ 0 $\boxed{\text{س} = -}\boxed{5}$ مرفوض

أو س − 4 = $\Leftarrow$ 0 $\boxed{\text{س} = +}\boxed{4}$

(4) أثبت أن لو$_{10}$ $\frac{20^2}{7}$ − لو$_{10}$ $\frac{18}{35}$ + لو $\frac{72}{24}$ = 2

الحل: لو $\frac{20^2 \times 72 \times 35}{7 \times 24 \times 18}$ = لو$_{10}$ 20 × 5 = لو$_{10}$ 100 = لو$_{10}$ 10^2 = 10 لو$_{10}$ 2 = 2

السؤال الثالث:

1) أكتب ما يلي على شكل [عدد قياسي× $10^{ن}$]

- 0.325 = 325×10^{-3}
- 325 = 32500×10^{-2}

2) باستخدام الآلة الحاسبة. أوجد كلاً من:

أ) لو$_{هـ}$ 0.00325 = − 5.7291

ب) لو$_{10}$ 1.0035 = 1.517376824

جـ) لو$_{هـ}$ 18 = 2.8903

د) لو$_{10}$ 0.009 = −2.0457

3) ما هو أساس الدالة اللوغارتيمة التي يمر بيانها بالنقطة (32 ، جـ)

الحل: ص = لو$_{أ}$ س $\Leftarrow$ جـ = لو$_{أ}$ 32

$\therefore$ أ^{جـ} = $\Leftarrow$ 2^5 أ^{جـ} = 2^5 $\therefore$ $\boxed{\text{أ} =}\boxed{2}$ ، $\boxed{\text{جـ} =}\boxed{5}$

تماريـــن الملحـق
النهـأيــات والاتصــال والاشتقاق

[1] أوجد كلاً من النهايات الآتية ∀ ن ∈ ص⁺

(أ) $\underset{ن\to\infty}{\text{نها}} = \dfrac{1+3+5+\dots\dots+(2ن-1)}{1+4+7+\dots\dots+(3ن-2)}$

الحل: البسط متتالية حسابية ح$_1$= 1، د = 2 ⇐

$$مج_ن = \frac{ن}{2}\,[2 + (ن-1)\times 2] = \frac{ن}{2}\,[2 + 2ن-2] = ن^2$$

المقام متتالية حسابية ح$_1$=1، د= 3

$$مج_ن = \frac{ن}{2}\,[2 + (ن-1)\times 3] = \frac{ن}{2}\,[3ن-1] = \frac{3ن^2}{2} - \frac{ن}{2}$$

∴ $\underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \dfrac{ن^2}{\frac{3}{2}ن^2 - \frac{ن}{2}}$ قلنا نتعامل مع الكبير ويهمل الصغير من البسط والمقام.

$$= \underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \frac{\cancel{ن}^2}{\frac{3}{2}\cancel{ن}^2} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

ب) $\underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\dots \left(\frac{1}{2}\right)^ن\right) \Leftarrow$

المتتالية هندسية ح$_1$= 1، ر = $\frac{1}{2}$ ⇐ $\qquad مج_ن = ح_1 \dfrac{(1-ر^ن)}{1-ر}$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^ن}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^ن\right)$$

$\underset{ن\to\infty}{\text{نها}}\, 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^ن\right) = 2\,(1-0) = 2$ أنتبه $\left(\frac{1}{2}\right)^ن \to 0$

جـ) $\underset{ن\to\infty}{\text{نها}} \left(\sqrt{ن+1} - \sqrt{ن+2}\right)$

نضرب بالمرافق $\sqrt{ن+1} + \sqrt{ن+2}$

$$\therefore \text{نها} \frac{\left(\sqrt{ن+1}-\sqrt{ن+2}\right)\left(\sqrt{ن+1}+\sqrt{ن+2}\right)}{\sqrt{ن+1}+\sqrt{ن+2}} = \text{نها} \frac{ن+1-(ن+2)}{\sqrt{ن+1}+\sqrt{ن+2}}$$

$$= \text{نها} \frac{-1}{\sqrt{ن+1}+\sqrt{ن+2}} = \frac{-1}{\infty} = \text{صفر}$$

نهايـة دالـــــة حقيقيـة

أولاً: نهاية دالة عند نقطة:

1) $\underset{س \to 2}{\text{نها}} (2س+1) =$ تعويض مباشر $= 2\times 2 + 1 = 4+1 = 5$

2) $\underset{س \to -1}{\text{نها}} (س-1) = -1-1 = -2$

3) $\underset{س \to \frac{1}{2}}{\text{نها}} \frac{4س^2-1}{2س-1} = \frac{4\times\frac{1}{4}-1}{2\times\frac{1}{2}-1} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعيين.

المعالجة الرياضية: $\underset{س \to \frac{1}{2}}{\text{نها}} \frac{(2س-1)(2س+1)}{(2س-1)} = \underset{س \to \frac{1}{2}}{\text{نها}} (2س+1) = 2\times\frac{1}{2}+1 = 2$

4) $\underset{س \to -1}{\text{نها}} (3س-1) = 3(-1) - 1 = -4$

5) $\underset{س \to 4}{\text{نها}} \left(\sqrt{س} - \frac{4}{س^2}\right) = \left(\sqrt{4} - \frac{4}{16}\right) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{8-1}{4}$

$= \frac{7}{4}$ #

6) $\underset{س \to 5}{\text{نها}} \frac{س^2-25}{\sqrt{س^2+1}} = \frac{25-25}{\sqrt{125+1}} = \frac{0}{\sqrt{126}} = \text{صفر}$

ثانياً: نهاية دالة عند اللانهاية:

أوجد:

1) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}^3+2\text{س}^2+1}{3\text{س}^2-\text{س}-3}$ = قلنا نتعامل مع الكبير ونهمل الصغير.

$\therefore \lim \dfrac{\text{س}^3}{3\text{س}^2} = \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}}{3} = \dfrac{\infty}{3} = \infty$

2) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8\text{س}^3-5\text{س}^2+1}}{3\text{س}-2} = \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8\text{س}^3}}{3\text{س}} = \lim \dfrac{2\text{س}}{3\text{س}} = \dfrac{2}{3}$

3) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{2\times 3^{\text{س}} - 4\times 5^{\text{س}}}{3\times 5^{\text{س}} - 2\times 4^{\text{س}}}$ = نتعامل مع الكبير

$3^{\text{س}} < 5^{\text{س}}$

$4^{\text{س}} < 5^{\text{س}}$

$\therefore \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{-4\ 5^{\text{س}}}{3\ 5^{\text{س}}} = \dfrac{-4}{3}$ #

4) $\lim\limits_{\text{م}\to\infty} \dfrac{3^{\text{م}+1} - 4\times 2^{\text{م}-2}}{1+3^{\text{م}}} = \lim\limits_{\text{م}\to\infty} \dfrac{3\times 3^{\text{م}} - 2^{\text{م}}}{1+3^{\text{م}}} = \lim \dfrac{3^{\text{م}}\times 3^1}{3^{\text{م}}} = 3$

5) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty} \left(\sqrt{\text{س}^2-\text{س}+1} - \sqrt{\text{س}^2+\text{س}+1}\right) = (\infty-\infty)$ عدم تعيين المعالجة.

بالضرب بالمرافق.

$= \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{\text{س}^2-\text{س}+1} - \sqrt{\text{س}^2+\text{س}+1}\right)\times\left(\sqrt{\text{س}^2-\text{س}+1} + \sqrt{\text{س}^2+\text{س}+1}\right)}{\sqrt{\text{س}^2-\text{س}+1} + \sqrt{\text{س}^2+\text{س}+1}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{\text{س}^2-\text{س}+1-(\text{س}^2+\text{س}+1)}{\sqrt{\text{س}^2-\text{س}+1}+\sqrt{\text{س}^2+\text{س}+1}} = \lim \dfrac{\text{س}^2-\text{س}+1-\text{س}^2-\text{س}-1}{\sqrt{\text{س}^2-\text{س}+1}+\sqrt{\text{س}^2+\text{س}+1}}$

$= \lim \dfrac{-2\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2}+\sqrt{\text{س}^2}} = \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \dfrac{-2\text{س}}{|\text{س}|+|\text{س}|} = \lim \dfrac{-2\text{س}}{\text{س}+\text{س}}$

$\lim \dfrac{-2\text{س}}{2\text{س}} = -1$ #

6) $\lim\limits_{\text{س}\to-\infty} \dfrac{3\text{س}+5}{\sqrt{4\text{س}^2+1}} = \lim \dfrac{3\text{س}}{\sqrt{4\text{س}^2}} = \lim\limits_{\text{س}\to-\infty} \dfrac{3\text{س}}{2|\text{س}|} = \lim \dfrac{3\text{س}}{-2\text{س}} = \dfrac{-3}{2}$

7) $\lim \dfrac{\sqrt{\text{س}^2+1}}{\sqrt{\text{س}^4+1}} = \lim\limits_{\text{س}\to-\infty} \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}^2} = \lim \dfrac{-\text{س}}{\text{س}^2} = \lim\limits_{\text{س}\to-\infty} \dfrac{-1}{\text{س}} =$ صفر

[1] أبحث اتصال الدوال الآتية عند النقاط المذكورة:

−	2	+
$\frac{\text{س}-2}{-2(\text{س}-2)} = \frac{-1}{2}$		$\frac{\text{س}-2}{2(\text{س}-2)} = \frac{1}{2}$

أ) $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}-2}{2|\text{س}-2|}$ عند س = 3

* $\text{د}(3) = \frac{3-2}{2|3-2|} = \frac{1}{2} \leftarrow (1)$

$\lim\limits_{\text{س}\to 3^+} \text{د}(\text{س}) = \text{نها}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leftarrow (2) \therefore (1) = (2) \therefore$ د متصلة عند س=3 من اليمين.

$\lim\limits_{\text{س}\to 3^-} \text{د}(\text{س}) = \frac{-1}{2} \leftarrow (3) \therefore (1) \neq (3)$ غير متصلة من اليسار بشكل عام غير متصلة.

ب) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 3-\text{س} : & \text{س} \neq -1 \\ 1 & \text{س} = -1 \end{cases}$

الحل: $\text{د}(-1) = 1 \leftarrow (1)0$

$\lim\limits_{\text{س}\to -1} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س}\to -1} (3-\text{س}) = 1+3 = 4 \leftarrow (2) \therefore (1) \neq (2)$

$\Leftarrow$ د غير متصلة عند س= −1

−	0	+
$\text{س}^2 + \text{س}$		$\text{س}^2 - \text{س}$

جـ) $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^2 - |\text{س}|$ عند س = 0

$\text{م}(0) = 0 \leftarrow (1)$

$\lim\limits_{\text{س}\to (0)^+} \text{م}(\text{س}) = \text{نها}(\text{س}^2 - \text{س}) = 0 \leftarrow (2)$ لاحظ $(1) = (2) \Leftarrow$ متصلة عن يمين(0).

$\lim\limits_{\text{س}\to (0)^-} \text{م}(\text{س}) = \text{نها}(\text{س}^2 + \text{س}) 0+0=0 \leftarrow (3) \Leftarrow (1) = (3)$ غير متصلة من اليسار بشكل عام متصلة عند س = 0

[2] أبحث اتصال الدوال الآتية على الفترات المذكورة:

د) د(س) = $\begin{cases} 2س & : 0 \leq س < 1 \\ 4 & : س = 1 \\ 5-3س & : 1 < س \leq 3 \end{cases}$

أولاً:على الفترات المفتوحة: على]0، 1[، د(س)= 2س كثيرة حدود ∴ متصلة على]1، 3[[د (س) = 5-3س كثيرة حدود متصلة

∴ متصلة على الفترات المفتوحة.

ثانياً: عند الأطراف:

(1) عند س = 0 من اليمين

د(0) = 2 (0) = 0 ← (1)

نها د(س) = نها 2س = 0 ← (2)
$_{س \leftarrow (0)^+}$

(1) = (2) متصلة من اليمين

(2) عند س = 1

د(1) = 4 ← (1)

نها د(س) = نها(5-3س) = 5-3 = 2 ← (2)
$_{س \leftarrow (0)^+}$

(1) ≠ (2) غير متصلة من اليمين

نها د(س) = نها (2س) = 2 ← (3) ∴ **(1) ≠ (3) غير متصلة عند س=1 من اليسار**
$_{س \leftarrow (1)^-}$

بشكل عام غير متصلة عند س = 1

(3) عند س = 3 من اليسار

د(3) = 5 - 3×3 = 5-9 = -4 ← (1)

نها د(س) = نها(5-3س)= 5-3×3= -4 ← (2)
$_{س \leftarrow (3)^-}$

متصلة من اليسار عند س = 03

ب) د (س) = $\begin{cases} 5-2س & -1 \leq س < 2 \\ 2س-3 & 2 \leq س \leq 3 \end{cases}$

الحل:**<u>أولاً على الفترات المفتوحة:</u>**

- على]−1، 2[⇐د (س) = 2−5س ∴متصلة لأنها كثيرة حدود.
- على]2، 3[، د(س) = 2س −3 كثرة حدود ∴ متصلة.

<u>ثانياً: عند الأطراف:</u> (1) **<u>عند س = −1 من اليمين.</u>**

د(−1) = 2−5× −1=2+5= 7 ←(1)

$\underset{س\leftarrow(-1)^+}{نها}$ د(س) نها (2−5س)=2−5×−1= ←7(2)

(1) = (2)∴ متصلة عند س =−1

<u>(2) عند س =2</u>

د(2) = 2× 3−2= 1 ←(1)

$\underset{س\leftarrow(2)^-}{نها}$ د(س) = نها (2−5س) = 4−5 = ← 1(2)   (1)=(2)متصلة من اليسار

$\underset{س\leftarrow(2)^+}{نها}$ د(س)=نها(2س−3)=3−4= ←1(3) ⇐ (1) = (3) متصلة من اليمين عند س=2

<u>(3) عند س = 3 من اليسار</u>

د(3) = 2 × 3−3 = 3   ←(1)

$\underset{س\leftarrow(3)^-}{نها}$ د(س)= نها (2س−3) = 3−6=3 ←(2)

(1) = (2)   ∴ متصلة من اليسار

∴متصلة على م ت

[3] افرض أن مجتمع ما ينمو متبعاً العلاقة $ح_ق$= 3000+60ق حيث (ق) الزمن مقاساً بالأيام أوجد معدل النمو عندما (ق) = صفر، 2، 5

الحل:

معدل التغير= $\underset{هـ\leftarrow0}{نها} \frac{د(ق_1+هـ) - د(ق_1)}{هـ} = \underset{هـ\leftarrow0}{نها} \frac{300+60(ق_1+هـ) - (300+60ق_1)}{هـ}$

$= \underset{هـ\leftarrow0}{نها} \frac{300+60ق_1+60هـ - 300 - 60ق_1}{هـ}$ $نها \frac{60هـ}{هـ} = 60$ = ثابت.

لما ق = صفر ⇐ المعـــدل   (60)

لما ق = 2 ⇐ المعدل (60)

لما ق = 5 ⇐ المعدل (60)

المشتقـــة

[1] أوجد باستخدام تعريف المشتقة ($د^{/}$ (س))

هـ) ص = |س−1|

+	1	−
س−1		−س+1

$$د^{/}(س) = \underset{هـ \to 0}{نها} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$$

$$د^{/}(س^{+}) = \underset{هـ \to 0}{نها} \frac{س+هـ-1-(-س+1)}{هـ} \quad نها \frac{هـ}{هـ} = 1$$

$$د^{/}(س^{-}) = نها \frac{س+هـ-1-(س-1)}{هـ}$$

$$= نها \; نها \frac{-س-هـ+1+س-1}{هـ} = نها = \frac{-هـ}{هـ} = -1$$

[2] أوجد ميل المماس للمنحنيات الآتية عند النقاط المبينة أمام كل منها:

(أ) د(س) = س^{2} −6س+3 عندما س= 2

الحل: $د^{/}$(س) = 2س −6 ضع س = 2 تحصل على الميل.

∴ ضع س =2 ⇐ م = 2 (2) − 6 = 6−4 = −2

∴ $\boxed{م = -2}$

(ب) د(س) = س^{2} +س+1 عندما س =0

الحل: $د^{/}$(س) = 2س+1

الميل: ضع س= 0 ⇐ م = $د^{/}$(0) = 2 (0) +1 = 1+0

∴ $\boxed{م = 1}$

المشتقة عند نقطة وعلى فترة

[1] ابحث قابلية الاشتقاق للدوال التالية عند النقاط المبينة أمام كل منها:

(أ) د (س) = { 2س ، س ≤ 1 عند $\boxed{س=1}$

س^2+1 ، س< 1

الحل: د″(س) = { 2 ، س> 1

2س س < 1

د/ ($\overset{+}{1}$) = 2 ، د/ ($\overset{-}{1}$) = 2 × 1 = 2 لاحظ

د/ ($\overset{+}{1}$)=د/ ($\overset{-}{1}$) ⇐د/ (1) = 2 ∴ قابلة للاشتقاق

ب) د(س) = { 2س+1 س < 3

3س+4 س ≤3

الحل: د/ (س) = { 2 س< 3

3 س>3

د/($\overset{+}{3}$)=2 ، د/($\overset{-}{3}$) = 3 واضح أن د/($\overset{+}{3}$) ≠د/ (3)

∴ د غير قابلة للاشتقاق.

جـ(د (س) = { س+2 ، 0≤ س 2≤

3س−1 ، 2<س 5≤

عند النقاط الآتية س=2 ، س= 0، س=5

الحل: $\boxed{\text{س= 0}}$ طرف فترة ∴ د/(0) غير معرفة.

س= 5 طرف فترة ∴ د/(5) غير معرفة.

د/ (س) = { 1 ، 2< س> 0 لاحظ د($\overset{+}{2}$) = 3

3 ، 5> س> 2 د ($\overset{-}{2}$) =1

∴ د/ (2) غير معرفة.

[2] د (س) = { 0 ، س < 0

$\frac{1}{2}$ ، س =0

1 ، س <0

أ) أثبت أن د(س) ليست متصلة وليست قابلة للاشتقاق عند س=0

الحل: $\left.\begin{array}{l}د\,(0) = \frac{1}{2} \leftarrow (1) \\ \lim\limits_{س \to 0^+} د(س) = \leftarrow 1(2)\end{array}\right\}$ $(1) \neq (2) \Leftarrow$ د غير متصلة عند س=0

∴ غير قابلة للاشتقاق عند س = 0

ب) أثبت أن ر (س) = س د (س) متصلة عند س = 0 ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند س= 0

الحل: ر (س) = $\left\{\begin{array}{ll}0 & ، س< 0 \\ \frac{1}{2}س & س =0 \\ س & س > 0\end{array}\right.$ $\Leftarrow$ ر/(س)= $\left\{\begin{array}{ll}0 & س< 0 \\ \frac{1}{2} & س=0 \\ 1 & س> 0\end{array}\right.$

الاتصال: ر(0) = 0

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{س \to 0^+} ر(س) = 0 \\ \lim\limits_{س \to 0^-} ر(س) = 0\end{array}\right\}$ ∴ $\lim\limits_{س \to 0}$ ر(س) = ر(0)

∴ ر متصلة عند $\boxed{س =} \boxed{0}$

الاشتقاق: $\left.\begin{array}{l}ر^/(0^+) =1 \\ ر^/(0^-) =0\end{array}\right\}$ ∴ ر/ (0) غير معرفة

ج(الدالة ق (س) = س^2× د (س) متصلة وكذلك قابلة للاشتقاق عند س=0

الحل:

ق(س)= $\left|\begin{array}{l}0 \quad س<0 \; /\end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l}0 \quad ، س <0\end{array}\right.$

$\frac{أ}{1}$

$\frac{1}{2}$س^2 ،س=0 $\Leftarrow$ ق(س)=	س س=0
س^2 س> 0	2س س0>

الاتصال:

ق(0) = $\frac{1}{2}$ (0) = 0

نهاق (س)= 0 ، نهاق (س) = = $\Leftarrow$ 0
س←(0)$^+$ ، س←(0)$^-$

نهاق(س) =ق (0) ∴متصلة عند س =0
س←(0)$^+$

الاشتقاق ق$^/$($\overset{+}{0}$)= 0 ، ق$^/$ ($\bar{0}$) = 0 ∴ ق$^/$ (0) =0

∴ قابلة للاشتقاق عند س =0

الوحدة الخامسة

نهاية متتالية

تعريف: إذا كانت <حن> متتالية غير منتهية تقترب من النهاية (ل η ح) إذا كان لكل عدد حقيقي ε 〈 0 (مهما صغرت قيمته) يوجد ر η ط* (تعتمد قيمته على اختبار ε) متحققة إذا كان |حن − ل| ∀ ε 〈 ن 〈 ر حيث ر أصغر عدد طبيعي يحقق المتراجحة.

التعريف رمزياً:

$\lim\limits_{ن\to\infty}$ حن = ل ⇔ ∀ ε 〈 0 يوجد ر 〈 0 بحيث ∀ ن 〈 ر ⇐ |حن −ل| 〈 ε.

<u>**أنتبـه:**</u> كلمه يوجد ردت المسألة للبحث عن ذلك العدد ر الذي يحقق المتراجحة من يساعدني في عملية البحث؟ بالحقيقة معي |حن − ل| 〈 ε دوماً صحيح لأن ε اختياري كيفي كما أريد.

أسير به إلى أن أصل إلى $\boxed{\text{ن 〈 رقم}}$ فيكون ذلك الرقم هو (ر) الذي أبحث عنه وهو أصغر عدد طبيعي يحقق المتراجحه.

* توضيح بفرض ε = 0.0001، حن = $\frac{1}{ن}$ ، ل =0 أوجد (ر)

الحل: |حن − ل| 〈 ε ⇐ |$\frac{1}{ن}$ − 0| 〈 0.0001 ⇐ $\frac{1}{ن}$ 〈 0.0001

أقلب تقلب: ن 〈 $\frac{1}{0.0001}$ ن 1000 ∴ ر = 1000

* توضيح بفرض ε = 10^{-5}، حن = $\frac{ن+1}{ن}$ ، ل = 1

أوجد ر:

أشكل المتراجحة $|\text{ح}_{\text{ن}} - \text{ل}| < \varepsilon \Leftarrow \left|\frac{\text{ن}+1}{\text{ن}} - 1\right| < 10^{-5} \Leftarrow \left|\frac{\text{ن}+1-\text{ن}}{\text{ن}}\right| < 10^{-5}$

$\Leftarrow \left|\frac{1}{\text{ن}}\right| < 10^{-5} \Leftarrow \frac{1}{\text{ن}} < 10^{-5}$ أقلب $\text{ن} > \frac{1}{10^{-5}} \Leftarrow \text{ن} > 10^{5}$

$\Leftarrow \text{ن} > 100000$ $\therefore$ ر $= 100000$

سؤال كيف نوجد النهاية؟ بالحقيقة طالما $\text{ن} \to \infty$

فهناك مبدأ بقول نتعامل مع الكبير (أكبر أس ونهمل الباقي) وأن كانت المتتالية كسر فإننا:

$$\frac{\text{نتعامل مع الكبير من البسط ونهمل الباقي}}{\text{الكبير من المقام ونهمل الباقي}}$$

مثال:

$$\lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{5\text{ن}^3 - 2\text{ن}^2 + \text{ن}}{3\text{ن}^3 - 1} = \text{نها} \frac{\text{الكبير من البسط}}{\text{الكبير من المقام}} = \text{نها} \frac{5\text{ن}^3}{3\text{ن}^3} = \frac{5}{3}$$

مثال: $$\text{نها} \frac{\text{ن}^3 - \text{ن} + 1}{\text{ن}^2 + \text{ن} + 1} = \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ن}^3}{\text{ن}^2} = \frac{\text{الكبير}}{\text{الكبير}} = \lim_{\text{ن}\to\infty} \text{ن} = \infty$$

تمارين ومسائل (5 - 1)

[1] سقطت كرة راسياً من ارتفاع معين فارتدت بعد الارتطام بالأرض إلى أعلى ارتفاع قدرة (10م) فإذا كانت ترتد كل مرة بعد الارتطام ارتفاعاً بمقدار $\frac{3}{4}$ الارتفاع السابق له مباشرة فكم عدد الارتطامات بالأرض لتصل الكرة إلى ارتفاع (1.33 متراً).

الحل: نفرض عدد الارتطامات (ن)

لاحظ ارتطم فارتفع أي كل ارتطام بقابله ارتفاع

∴ تتحول إلى متتالية هندسية حدها الأول $ح_1=10$ وأساسها $\left(=\frac{3}{4}\right.$ ، $\left.ح_{ن}=1.33\right)$

∴ حدودها $\langle 10 ، \frac{30}{4} ، \frac{90}{16} ، .... 1.33 \rangle$

القانون $ح_{ن} = ح_1\, ر^{ن-1} \Leftarrow 1.33 = 10 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{ن-1}$ قسم على (10)

$0.133 = \left(\frac{3}{4}\right)^{ن-1} \Leftarrow$ لو $0.133 =$ لو $\left(\frac{3}{4}\right)^{ن-1}$

∴ لو $0.133 = (ن-1)$ لو $\left(\frac{3}{4}\right)$

∴ $ن - 1 = \frac{\text{لو } 0.133}{\text{لو } 0.75} \Leftarrow ن = 1 + \frac{\text{لو } 0.1330}{\text{لو } 0.75}$ استخدم الآلة

$\Leftarrow ن = 1 + \frac{0.876}{0.125} = 1 + 7 = \Leftarrow 8\, ن = 8$

[2] بيِّن أن $\lim_{ن \to \infty} \frac{2ن^2 + 3ن + 4}{ن^2} = 2$

الحل بالتعريف: $\forall\, \varepsilon > 0$ يوجد $ر > 0$ بحيث $ن > ر \Leftarrow |ح_{ن} - ل| < \varepsilon$

∴ $|ح_{ن} - ل| < \varepsilon$

$\Leftarrow \left| \frac{2ن^2 + 3ن + 4}{ن^2} - \frac{2}{1} \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{2ن^2 + 3ن + 4 - 2ن^2}{ن^2} \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{3ن + 4}{ن^2} \right| < \varepsilon$

∴ $\frac{3ن + 4}{ن^2} < \varepsilon$

∴ $\frac{3ن}{ن^2} < \varepsilon$

∴ $\frac{3}{ن} < \varepsilon$

أقلب تقلب $\frac{ن}{3} > \frac{1}{\varepsilon}$

أضرب بـ3

$\Leftarrow ن > \frac{3}{\varepsilon}$ وبأخذ

ر أصغر

عدد طبيعي (يكبر $\frac{3}{\varepsilon}$ أو يساويه)

يكون $\lim_{ن \to \infty} ح_{ن} = 2$

[3] إذا كانت $\left|\frac{1}{\text{ن}}\right| < 0.002 \;\; \forall$ ن> ر حيث ن $\in$ ط* ، ر أصغر عدد طبيعي

أوجد ن:

الحل: $\left|\frac{1}{\text{ن}}\right| < 0.002$

$$\frac{1}{\text{ن}} < 0.002 \text{ أقلب تقلب } \text{ن} > \frac{1}{0.002}$$

$$\text{ن} > \frac{1000}{2} \Leftarrow \text{ن} > 500$$

بأخذ ر = 500 يكون $\left|\frac{1}{\text{ن}}\right| < 0.002 \quad \therefore$ ن $\in$ {500، 501،...}

[4] بين أن المتتالية $\frac{3}{4}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{5}{6}$ ...... $\frac{\text{ن}+2}{\text{ن}+3}$ تسعى إلى (1) لما ن $\to \infty$

الحل: بالتعريف: $\forall\, \varepsilon > 0$ يوجد ر>0 بحيث ن > ر $\Leftarrow |\text{ح}_{\text{ن}} - 1| < \varepsilon$

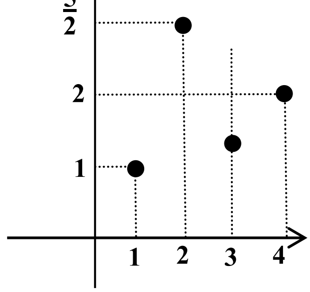
الحل: $|\text{ح}_{\text{ن}} - 1| < \varepsilon \Leftarrow \left|\frac{\text{ن}+2}{\text{ن}+3} - 1\right| < \varepsilon \Leftarrow \left|\frac{\text{ن}+2-\text{ن}-3}{\text{ن}+3}\right| < \varepsilon$

$$\Leftarrow \left|\frac{-1}{\text{ن}+3}\right| < \varepsilon \Leftarrow \frac{1}{\text{ن}+3} < \varepsilon \Leftarrow \text{ بالقلب } \text{ن} + 3 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \text{ن} > \frac{1}{\varepsilon} - 3$$

وبأخذ ر أصغر عدد طبيعي يكبر $\left(\frac{1}{\varepsilon} - 3\right)$ أو يساويه تكون النهاية صحيحة.

[6] مثِّل المتتالية (حن) بيانياً إذا كانت $\text{ح}_{\text{ن}} = 2 + \frac{(-1)^{\text{ن}}}{\text{ن}}$ ثم برهن أنها تسعى نحو العدد (2).



الحل: $\text{ح}_1 = 2 + \frac{-1}{\text{ن}} = 2 - \frac{1}{1} = 1 \quad (1 \text{ ، } 1)$

$$\text{ح}_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \qquad \left(2 \text{ ، } \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{ح}_3 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \qquad \left(3 \text{، } \frac{5}{3}\right)$$

$ح_4 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ $\quad (4 ، \frac{9}{4})$

لاحظ النقاط كلما كبرت ن نقترب من الرقم (2)

مما يؤكد $ح_ن \leftarrow 2$ لما ن $\leftarrow \infty$ ممكن التأكد بالتعريف.

[7] المتتاليات التالية غير منتهية ناقش أياً منها متقاربة وأوجد نهايتها:

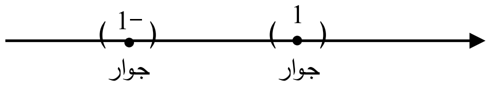
أ) ($ح_ن$) حيث $ح_ن = 3$ لجمع قيم ن η ط*.

الحل: نعلم أن المتتالية متقاربة من $س_0$ إذا كان أي جوار لـ $س_0$ يحتوي على معظم حدود المتتالية. بما أن $ح_1 = 3$ ، $ح_2 = 3$ ، $ح_3 = 4$...

لاحظ أي جوار لـ(3) يحتوي جميع حدود المتتالية.

$\therefore$ $ح_ن$ متقاربة ونهايتها الرقم (3).

ب) ($ع_ن$) حيث $ع_ن = (-1)^ن$



الحل: $ع_1 = (-1)^1 = -1$

$ع_2 = (-1)^2 = 1$ $ع_3 = (-1)^3 = -1$ $ع_4 = (-1)^4 = 1$	لاحظ أن جوار لـ(1) يوجد خارجة عدد لا نهائي من الحدود. وكل جوار لـ(−1) يبقى خارجة عدد لا نهائي من الحدود $\therefore$ ع ن ليست متقاربة ولا توجد نهاية

ج( )$أ_ن$) حيث $أ_ن = \sqrt{ن}$

الحل: $أ_1 = \sqrt{1} = 1$

$أ_2 = \sqrt{2}$

$أ_3 = \sqrt{3}$

لاحظ $1 < \sqrt{2} ، \sqrt{3} < \sqrt{4}$......

المتتالية تزايديه. $\quad \therefore$ متباعدة وليس لها نهاية $\neq$

نهاية دالة حقيقية

التعريف: $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن |س − أ| $< \delta \Leftarrow$

|د (س) − ل| $< \varepsilon$

ملاحظة:

ملاحظة (1):يستخدم التعريف عندما يطلب إثبات النهاية.

ملاحظة(2): للدالة نهاية عند $س_0$ إذا كان أي جوار لـ س. يحتوي معظم حدود المتتالية وخارجه عدد منتهية من الحدود.

ملاحظة (3): نقول للدالة نهاية إذا كانت النهاية من اليمين = النهاية من اليسار.

أنتبه: يمين ($س_0$) أصغر منه ونعبِّر عنه $س_0^+$

يسار ($س_0$) أصغر منه ونعبِّر عنه $س_0$

مثال: د (س) = $\begin{cases} 1 - س & س \le 0 \\ 1 - س^3 & س > 0 \end{cases}$ هل لها نهاية عند $\boxed{س = 0}$ ؟

الحل

يمين	يسار
1 − س	1 − $س^3$

$\lim_{س \to (0^+)}$ د (س) = $\lim_{س \to (0^+)}$ (1 − س) = 1 − 0 = 1 $\therefore$ النهاية اليمنى = اليسرى

$\lim_{س \to (0^-)}$ د (س) = $\lim_{س \to (0^-)}$ (1 − $س^3$) = 1 − 0 = 1 $\therefore$ $\lim_{س \to 0}$ د(س) = 1

ملاحظة(4) عند حساب النهاية تقسم التمارين إلى قسمين:

أولاً: حساب النهاية عند نقطة (نعوض تعويض مباشر)

مثال: $\lim_{س \to 2}$ ($س^2$ − 1) = $(2)^2$ − 1 = 4 − 1 = 3

ثانياً: عند اللانهاية كما قلنا نتعامل مع الحد الأكبر أساً ونهمل الباقي:

مثال: $\lim_{س \to \infty}$ نها $(س^2 - س + 1) = \lim_{س \to \infty}$ نها $س^2 = (\infty)^2 = \infty$

ملاحظة(5): قد يرافق عمليه التعويض مشاكل ندعوها: حالات عدم تعين مثل: $\frac{صفر}{صفر}$، $\infty - \infty$ أو $0 \times \infty$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ **كيف نتغلب عليها؟**

بالحقيقة نعتمد على معلوماتنا الرياضية السابقة مثل التحليل.

مثل: نها$_{س \to 1}$ $\frac{س^2 - 1}{س - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{صفر}{صفر}$ عدم تعيين.

المعالجة الرياضية: نها$_{س \to 1}$ $\frac{(س - 1)(س + 1)}{(س - 1)}$ = نها $(س+1) = 1+1 = 2$ #

أو قد تستخدم الضرب بالمرافق في حالة الجذور عملاً بالقاعدة:

$(ب - ج)(ب + ج) = ب^2 - ج^2$ لو كان في أحدهم جذراً لطار.

مثال: نها$_{س \to 1}$ $\frac{\sqrt{س} - 1}{س - 1} = \frac{\sqrt{1} - 1}{1 - 1} = \frac{صفر}{صفر}$ = عدم تعيين

المعالجة الرياضية: نها $\frac{\sqrt{س} - 1}{س - 1} \times \frac{\sqrt{س} + 1}{\sqrt{س} + 1} =$ نها $\frac{(\sqrt{س})^2 - (1)^2}{(س - 1)(\sqrt{س} + 1)}$

= نها $\frac{(س - 1)}{(س - 1)(\sqrt{س} + 1)} =$ نها $\frac{1}{\sqrt{س} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

تمارين ومسائل(5 – 2)

[1] أوجد ما يلي:

أ) نها$_{س \to 1}$ $(س^2 - 2س + 3) =$

الحل: بالتعويض المباشر

نها$_{س \to 1}$ $(س^2 - 2س + 3) = (1)^2 - 2(1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$ #

ب) نها$_{س \to (-1)}$ $\frac{1}{(2س^2 + س - 1)^2}$

الحل بالتعويض المباشر $= \frac{1}{(2(-1)^2 - 1 - 1)^2} = \frac{1}{(2-2)^2} = \frac{1}{0} = \infty$

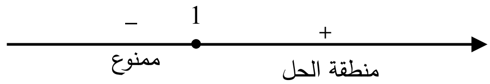
ج) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{2\text{س} + \text{س} + 1}$ تعويض مباشر $= \frac{4 - 10 + 6}{2 \times 4 + 2 + 1}$

$= \frac{\text{صفر}}{1} =$ صفر #

د) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \sqrt{\text{س} - 1}$

الحل: الدالة معرفة لما س − 1 ≥ 0

$\Leftarrow$ س ≥ 1



النهاية من اليمين

$\underset{\text{س}\to 1^+}{\text{نها}} \sqrt{\text{س} - 1} = \sqrt{1 - 1} = 0$

النهاية من اليسار $\Leftarrow \underset{\text{س}\to 1^-}{\text{نها}} \sqrt{\text{س} - 1} = \sqrt{\text{سالب}}$ مستحيل

∴ اليمنى ≠ اليسرى ولا توجد نهاية

[2] أوجد نهاية ما يلي:

أ) $\underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}} - 2}{\text{س} - 4}$ تعويض مباشر $= \frac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عدم تعيين.

المعالجة بالضرب بالمرافق عملاً بالقاعدة (ب − ج) (ب + ج) = ب^2 − ج^2

∴ نها $\frac{(\sqrt{\text{س}} - 2)}{(\text{س} - 4)} \times \frac{(\sqrt{\text{س}} + 2)}{(\sqrt{\text{س}} + 2)} =$ نها $\frac{(\text{س}) - 4)}{(\text{س}) - 4)(\sqrt{\text{س}} + 2)}$

$= \underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}} \frac{1}{\sqrt{\text{س}} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$

ب) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{(2\text{س} - 5)^3 - 1}{\text{س} - 3}$ تعويض مباشر $= \frac{(6 - 5)^3 - 1}{3 - 3} =$ عدم تعيين

المعالجة الرياضية: $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{(2\text{س} - 5 - 1)((2\text{س} - 5)^2 + 1(2\text{س} - 5) + 1)}{(\text{س}) - 3)}$

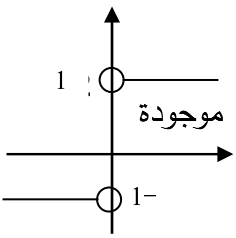
$$= \lim \frac{(2س-6)\left((2س-5)^2+1(2س-5)+1\right)}{(س-3)}$$

$$= \lim \frac{2(س-3)\left((2س-5)^2+1(2س-5)+1\right)}{(س-3)} = 2\left((6-5)^2+(6-5)+1\right)$$

$$= 2\,(1+1+1) = 2 \times 3 = 6 \quad \#$$

[3] أبحث نهاية الدالة $\frac{|س|}{س}$ عندما س $\leftarrow 0$ موضحاً حالة وجودها بالرسم

الحل: د (س) = $\begin{cases} \frac{س}{س} = 1 & س > 0 \\ \frac{-س}{س} = -1 & س < 0 \end{cases}$



نهاد(س)=1 ($س \leftarrow 0^+$)، نها د (س) = −1 ($س \leftarrow 0^-$) $\therefore$ نها د(س) غير موجودة ($س \leftarrow 0$)

[4] أثبت أن $\lim_{س \leftarrow 0} \frac{\sqrt{1+س} - \sqrt{1-س}}{2س} = \frac{1}{2}$

الحل: تعويض مباشر = $\frac{\sqrt{0+1} - \sqrt{0-1}}{2\times 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ عدم تعيين.

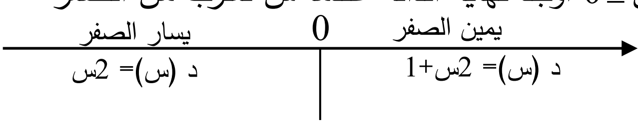
المعالجة بالضرب بالمرافق = $\lim_{س \leftarrow 0^+} \frac{\left(\sqrt{1+س} - \sqrt{1-س}\right)\left(\sqrt{1+س} + \sqrt{1-س}\right)}{2س \times \left(\sqrt{1+س} + \sqrt{1-س}\right)}$

$$= \lim_{س \leftarrow 0^+} \frac{1+س-(1-س)}{2س\left(\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}\right)} = \lim \frac{2س}{2س\left(\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \#$$

[5] د (س) معرفة على النحو التالي:

د (س) = $\begin{cases} 2س & : س < 0 \\ 2س+1 & : س \geq 0 \end{cases}$ أوجد نهاية الدالة عندما س تقترب من الصفر



$\therefore$ النهاية اليمنى $\lim\limits_{س \to 0^+}$ د(س) $=\lim\limits_{س \to 0^+}$ (2س + 1) = 2 × 0 + 1 ← 1 = 1 (1)

النهاية اليسرى $\lim\limits_{س \to 0^-}$ د(س) = نها (2س) = 2 × 0 = 0 ← (2)

(1) $\neq$ (2) $\Leftarrow$ اليمنى $\neq$ اليسرى $\Leftarrow$ لا توجد نهاية

[6] أوجد نهاية الدوال التالية:

أ) د (س) = $\sqrt{س^2 + س + 1} - \sqrt{س^2 - س + 1}$ عندما س ← ∞

الحل: نتعامل مع الكبير ونهمل المقادير الأصغر.

$\therefore$ $\lim\limits_{س \to \infty}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to \infty}\sqrt{س^2} - \lim\limits_{س \to \infty}\sqrt{س^2} = \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty}$ عدم تعيين $\therefore$ نضرب بالمرافق

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\left(\sqrt{س^2 + س + 1} - \sqrt{س^2 - س + 1}\right)\left(\sqrt{س^2 + س + 1} + \sqrt{س^2 - س + 1}\right)}{\left(\sqrt{س^2 + س + 1} + \sqrt{س^2 - س + 1}\right)}$$

$$= \lim \frac{س^2 + س + 1 - (س^2 - س + 1)}{\sqrt{س^2 + س + 1} + \sqrt{س^2 - س + 1}} = \lim \frac{2س}{\sqrt{س^2 + س + 1} + \sqrt{س^2 - س + 1}}$$

$$= \lim \frac{2س}{\sqrt{س^2} + \sqrt{س^2}} = \lim_{س \to \infty} \frac{2س}{|س| + |س|} = \lim \frac{2س}{2س} = 1$$

ب) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س + 3}{س^2 - 9}$

الحل: نتعامل مع الكبير $= \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س}{س^2} = \lim \dfrac{1}{س} = \dfrac{1}{\infty} =$ صفر

ج) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{3 + 2س - س^2}{5 + 3س - 2س^2}$

الحل: نتعامل مع الكبير $= \lim \dfrac{س^2}{2س^2} = \dfrac{1}{2}$

د) $\lim\limits_{س \to 4} \dfrac{7}{(4 - س)^2}$

الحل: $\lim \dfrac{7}{(4 - س)^2} = \dfrac{7}{(4 - 4)^2} = \dfrac{7}{0+} = +\infty$

[7] أدرس نهاية الدالة د (س) = $\frac{1}{|س-1|}$ عندما س ← (1)

الحل: م ت = ح1 {1}

−	0	+
د (س)= $\frac{-1}{س-1}$		د (س)= $\frac{1}{س-1}$

النهاية اليمنى = $\lim\limits_{س\to 1}$ − $\frac{1}{س-1} = \frac{1}{+0} = +\infty$

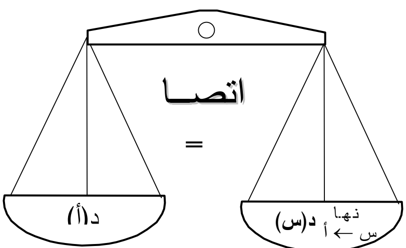
النهاية اليسرى = $\lim\limits_{س\to 1}$ = $\frac{-1}{س-1} = \frac{-1}{-0} = \infty$

∴ $\lim\limits_{س\to 1} \frac{1}{|س-1|} = \infty$ #

الاتصـــال

أصدق تعبير عن الاتصال الميزان

نضـع القيمـة د (أ) فـي كفـة ونضـع $\lim\limits_{س\to أ}$ د(س) فـي الكفـة الأخـرى فـإذا حصـل التساوي كانت الدالة في وضع اتصال:



من الشكل نستنتج شروط الاتصال عند نقطة (أ)

1− د (أ) موجودة (معروفة)

2− $\lim\limits_{س\to أ}$ د(س) موجودة

3− $\lim\limits_{س\to أ}$ د(س) = د (أ)

<u>مـلاحظـات:</u>

(1) د متصلة في اليمين عند س = أ إذا كان $\lim\limits_{س\to أ^+}$ د (س) = د (أ)

(2) د متصلة في اليسار عند س=أ إذا كان نها$_{\text{س}\to\text{أ}^-}$ د (س)= د (أ)

(3) إذا كانت الدالة متصلة من اليمين ومن اليسار قل د متصلة عند س=أ

(4) ابحث الاتصال من اليمين واليسار إذا غيرت الدالة قاعدتها حول تلك النقطة أي بظهور | | أو [ ] أو >< أو فترات من النوع [أ ، ب]

(5) عند بحث الاتصال على فترة مفتوحة]ب ،جـ[نأخذ ممثل عن نقاط الفترة أي ∀ أ ∍]ب ، جـ [لازم نها$_{\text{س}\to\text{أ}}$ د(س) = د (أ).

(6) عند بحث الاتصال على فترة مغلقة [ب ، جـ [تقوم بما يلي:

1) بحث الاتصال على المفتوحة] ب ، جـ[

2) بحث الاتصال على يمين ب وعن يسار جـ

(7) **فائدة:** كثيرات الحدود–الدوال الكسرية–الجذرية–الدورية متصلة على م ت

تماريـــــن (5 -2)

[1] أبحث اتصال الدالة د (س) = |س −1| عند س = 1

الحل:

إشارة س −1	+	1	−
|س−1|	س−1		−(س−1)

* د (1) = |1 − 1| = 0 ← (1) أنتبه عوض بالأصل.

* نها$_{\text{س}\to\text{أ}^+}$ د(س)= نها$_{\text{س}\to 1}$ (س−1)=1−1=صفر ← (2) ⇐ (1)=(2)متصلة من اليمين

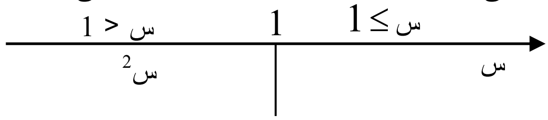
* نها$_{\text{س}\to\text{أ}^-}$ د(س) = نها − (س −1) = − (1−1) = −0 = 0 ← (3)

(1) = (3) ⇐ متصلة من يسار $\boxed{\text{س} = \boxed{1}}$

∴ بشكل عام د متصلة عند س = 1

[2] إذا كانت ر (س) $\begin{cases} = س^2 & س < 1 \\ = س & س \geq 1 \end{cases}$ هل د متصلة عند س = 1

الحل:



د (1) = 1 ← (1)

$\lim_{س \to 1^+}$ د (س) = نها (س) = 1 ← (2) ⇐ (1) = (2) متصلة في اليمين

$\lim_{س \to أ^-}$ د(س) = نها (س²) = $(1)^2$ = 1 ← (3) ⇐ (1) = (3)

∴ متصلة عند س = 1 من اليسار.

∴ بشكل عام متصلة عند س = 1

[3] لتكن الدالة د (س) = $\frac{س^2 - س - 12}{س - 4}$ لما س ≠ 4 عِّرف الدالة حتى تكون متصلة عند س = 4

الفكرة: أحسب النهاية وأقدمها على طبق من ذهب للقيمة.

التنفيذ $\lim_{س \to 4} \frac{(س - 4)(س + 3)}{(س - 4)}$ = 4 + 3 = 7 ∴ المفروض د (4) = 7

∴ إعادة تعريف الدالة ∴ د(س) = $\begin{cases} \frac{(س - 4)(س + 3)}{(س - 4)} & لما\ س \neq 4 \\ 7 & س = 4 \end{cases}$

[4] حِّدد مجال الدالة هـ (س) = $\sqrt{4 - س^2}$ ثم أدرس اتصال الدالة على هذا المجال.

الحل: معرفة لما $4 - س^2 \geq 0 \Leftarrow 4 \geq س^2 \Leftarrow 2 \geq |س| \Leftarrow$

$-2 \leq س \leq 2$ ∴ م ت = [-2 ، 2]

عند بحث الاتصال:

<u>أولاً:</u> على الفترة المفتوحة]−2 ، 2[كالتالي:

∀أ ∈]−2،2[نحسب هـ (أ) = $\sqrt{4-\text{أ}^2}$ ← (1)

نها$_{\text{س}\leftarrow\text{أ}}$ هـ (س) = نها$_{\text{س}\leftarrow\text{أ}}$ $\sqrt{4-\text{س}^2}$ = $\sqrt{4-\text{أ}^2}$ ← (2) ∴ (1) = (2) متصلة على]−2،2[

<u>ثانياً:</u> عند الأطراف (1) عند س = −2 من اليمين

هـ (−2) = $\sqrt{4-(-2)^2}$ = $\sqrt{4-4}$ = 0 ← (1)

نها$_{\text{س}\leftarrow(-2)^+}$ هـ (س) = نها $\sqrt{4-\text{س}^2}$ = $\sqrt{4-4}$ = 0 ← (2) ∴ (1) = (2) متصلة من اليمين

(2) عند س = 2 من اليسار

هـ (2) = 4−4 = 0 ← (1)

نها$_{\text{س}\leftarrow 2^-}$ هـ (س) = 4−س^2 = 4−4 = 0 ← (2) ∴ (1)=(2) ⇐ متصلة عند س = 2 من اليسار

∴ بشكل عام متصلة على م ت = [−2، 2]

[5] ناقش اتصال الدالة على مجالها موضحاً إجابتك بالرسم بكل من الدوال.

أ) ر (س) = { س + 1 لما س < 2 ، س + 2 لما س ≥ 2 }

الحل: المجال = م ت = ح

أولاً: على الفترات المفتوحة ر (س) = س +1 على]−∞ ، 2[

∴ متصلة لأنها كثيرة الحدود

ر (س) = س + 2 على]2، +∞[∴ متصلة لأنها كثيرة الحدود

∴ ر متصلة على الفترات المفتوحة

ثانياً: عند الأطراف: أي عند س= 2

د (2) = 2 + 2 = 4 ← (1)

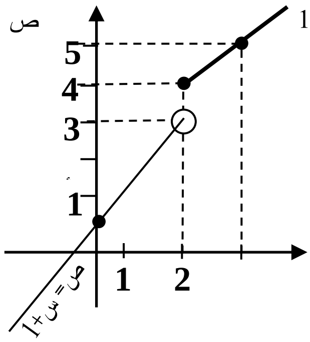
نها$_{\text{س}\leftarrow 2^+}$ د(س) = نها (س + 2) = 2 + 2 = 4 ← (2) ∴ (1)=(2) متصلة من اليمين

$\underset{س \leftarrow 2^-}{\text{نها}}$ د(س) نها (س+1) = 1+2 = 3 ← 3 د(3) لاحظ د(1) ≠ د(3) ∴ غير متصلة من اليسار

التوضيح لما س> 2 ⟸ ص= س+1 لما س ≤ 2 ⟸ ص = س+2

س	2	0
ص	3	1

س	2	3
ص	4	5

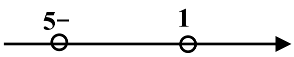


ب) د(س) = $\dfrac{\text{س}^2 - 3\text{س} - 4}{\text{س}^2 + 4\text{س} - 5}$

الحل: م ت = ح − {أصفار المقام} ∴ أصفار المقام (س+5) (س−1) = ⟸ 0

س = −5 ، س = 1

∴ المجال = ح/ {−5 ، 1}



أولاً: على الفترات المفتوحة: على]−∞ ، −5[،]1،+∞[متصلة لأنها دالة كسرية متصلة على م ت.

عند الأطراف: د(1)= $\dfrac{1-3-4}{0}$ = −∞ ∴ غير معرفة عند س=1

∴ غير متصلة عند س = 1

د (−5) = $\dfrac{25+15-4}{0}$ = ∞ ∴ غير معرفة ∴ غير متصلة عند س= −5

أما التوضيح بالرسم أعتقد غير ممكن.

جـ(هـ)س) = $\dfrac{\text{س}^2 - 3\text{س} + 4}{\text{س}^2 + 5\text{س} - 4}$

الحل: أصفار المقام: س^2+ 5س−4=0

أ = 1

ب=5

جـ= −4

Δ= ب^2 −4 أجـ= 25−4 × 1× −4 = ⇐ 41 $\sqrt{\Delta}$ = $\sqrt{41}$

س$_1$= $\frac{-ب-\sqrt{\Delta}}{2أ}$ = $\frac{-5+\sqrt{41}}{2}$ ، س$_2$= $\frac{-ب-\sqrt{\Delta}}{2أ}$ = $\frac{-5-\sqrt{41}}{2}$

∴ م ت = ح/ {س$_1$، س$_2$}

س$_2$ س$_1$

بحث الاتصال:

أولاً: على الفترات المفتوحة متصلة لأنها كسرية متصلة على م ت

ثانياً: عند الأطراف : د (س$_1$) غير معروفة ∴ غير متصلة عند س$_1$

د(س$_2$) غير معروفة ∴ غير متصلة عند س$_2$أما الرسم (أعتذر)

[6] لتكن د (س) = $\frac{|س^2-4س+3|}{س-1}$ ناقش اتصال الدالة في ح

كما يلي:أولاً: بحث الاتصال في الفترات الجزئية من المجال.

ثانياً: بحث الاتصال عند النقاط التي يتغير عندها تعريف الدالة.

الحل: م ت = ح/ {1}

أصفار المقياس (س−3) (س−1) = 0

⇐س = 3 ، س= 1

+	3	−	1	+
$\frac{(س-3)(س-1)}{س-1}$ = س−3		−(س−3)		س−3

أولاً: على الفترات المفتوحة على]−∞، 1[⇐ د (س) =س−3 كثيرة حدود ∴ متصلة عليها

على]1 ، 3[⇐د (س) = −3س+3 كثيرة حدود ∴ متصلة عليها.

على]3 ، ∞ [⇐ د (س) = س−3 كثيرة حدود ∴ متصلة عليها.

ثانياً: عند نقاط التغير: عند س= $1 \Leftarrow$ د(1) غير معرفة ∴ غير متصلة.

عند س = 3

د(3) = $\frac{|9-12+3|}{3-1}$ = $\frac{\text{صفر}}{2}$ = صفر ← (1)

نها د(س) = نها − (س −3) = −(3−3) = ← 0 (2)
 $_{\text{س} \leftarrow 3^-}$

(1) = (2) متصلة من اليسار

نها د(س) = نها (س−3) = 3−3 = ← 0 (3) ∴ (1) = (3) ⇐ متصلة من اليمين
 $_{\text{س} \leftarrow 3^+}$

∴ متصلة عند س=3

[7] إذا كانت د (س) = $\frac{|\text{س}^3-1|}{\text{س}-1}$ حيث س= $\neq 1$

أعد تعريف الدالة عند س= 1 لتكون متصلة عند هذه النقطة.

الحل: د (1) غير معروفة ∴ أحسب النهاية وأقدمها للقيمة

نها $\frac{\text{س}^3-1}{\text{س}-1}$ = نها (س−1) $\frac{(\text{س}^2+\text{س}+1)}{(\text{س}-1)}$ = 1 + 1 + 1 =3
 $_{\text{س} \leftarrow 1}$

∴ المفروض د (1) = 3

إعادة التعريف د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^3-1}{\text{س}-1} & \text{لما س} \neq 1 \\ 3 & \text{لما س} = 1 \end{cases}$

[8] إذا كانت د (س) = س^4+ 1 أبحث الاتصال عند س=−1

الحل: د (−1) = (1)^4+1 = 1 + 1 = 2 ←(1)

نها= نها (س^4 + 1) = (−1)^4+1 = 1+1 = 2 ← (2)
 $_{\text{س} \leftarrow -1}$

∴ (1) = (2) ⇐ متصلة عند س= (−1)

[9] إذا كانت د (س) = 3−2س، ه(س) = س^2−1 فهل الدالة د (ه(س)) متصلة عند $\boxed{\text{س} = 0}$

الحل: نحسب د (هـ (س)) = د (س^2−1) = 3−2(س^2−1) = 3−2س^2+3

= 5−3س^2

∴ د (هـ (0)) = 3−5 $(0)^2$ = ← (1)

نها$_{\text{س}\leftarrow 0}$ د (هـ (س)) = نها$_{\text{س}\leftarrow 0}$ (5−3س^2) = 3−5 $(0)^2$ = ← 5 (2)

∴ (1) = (2) ⟸ د (هـ (س)) متصلة عند $\boxed{\text{س}=\boxed{0}}$