شرح بحث المتتاليات

ماهي المتتالية؟

هو تابع منطلقه N (مجموعة الأعداد الطبيعية)

ومستقره R (مجموعة الأعداد الحقيقية)

نرمز للمتتالية بالشكل: $(U_n)_{n\geq \text{عدد}}$ حيث:

عدد: دليل البدء n: الدليل (U_n): الحد العام

طرق تعريف المتتالية:

1) صيغة تتبع العدد n (أي يعطى الحد العام)

مثال: لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq \text{عدد}}$ المعرفة وفق:

$$U_n = n^2 + 2$$
$$U_0 = 0^2 + 2 = 2$$
$$U_1 = 1^2 + 2 = 3$$

2) صيغة تابع $U_n = f(n)$

مثال: لتكن المتتالية $u_n = \sqrt{n+1}$ وليكن التابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ أوجد الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية:

$$U_0 = f(0) = \sqrt{0+1} = 1$$
$$U_1 = f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$U_2 = f(2) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

3) صيغة التدريجية: "يعطى حد البدء + علاقة U_{n+1} بدلالة U_n"

مثال: لتكن المتتالية: $U_0 = 5$

$$U_{n+1} = U_n + 2$$

أوجد الحدود الثلاثة الأولى:

$$U_0 = 5$$
$$U_1 = U_0 + 2 = 5 + 2 = 7$$
$$U_2 = U_1 + 2 = 7 + 2 = 9$$

جهة اطراد متتالية:

أي معرفة هل المتتالية (متزايدة ام متناقصة)(تماماً)

1) المتتالية المتزايدة تماماً: هي متتالية كلما **ازداد** الدليل **ازدادت** قيمة الحد

أي يحقق الشرط التالي: $U_{n+1} > U_n$

2) المتتالية المتزايدة: هي متتالية كلما **ازداد** الدليل **ازدادت** قيمة الحد او **بقي قيمة الحد**

أي يحقق الشرط التالي: $U_{n+1} \geq U_n$

3) المتتالية المتناقصة تماماً: هي متتالية كلما **ازداد** الدليل **نقصت** قيم الحد

أي تحقق: $U_{n+1} < U_n$

4) المتتالية المتناقصة: هي متتالية كلما **ازداد** الدليل **نقصت** قيمة الحد أو **بقيت** كما هي

أي يحقق الشرط التالي: $U_{n+1} \leq U_n$

5) المتتالية الثابتة $U_{n+1} = U_n$

أنواع المتتاليات:

المتتالية الحسابية:

نقول عن متتالية أنها حسابية اذا نتج كل حد عن سابقه **بإضافة** عدد ثابت يسمى أساس المتتالية (r)

أي تحقق العلاقة التدريجية

$$U_{n+1} = U_n + r$$

لاثبات ان المتتالية حسابية:

$$U_{n+1} - U_n = r$$

- قواعد المتتالية الحسابية:

اذا كان (p ,m) دليلين ل U فان:

$$U_m - U_p = (m-p)r$$

- فائدة القانون السابق:

يفيد في معرفة الأساس وذلك اذا كان لدينا حدين معلومين أو في معرفة حد من أحد الحدود المطلوبة

- مثال:

اوجد الحد ذي الدليل 20 لمتتالية الحسابية$(U_n)_{n\geq0}$ اذا علمت ان$U_2 = 4$ واساسها $r = 2$

الحل:

$$U_m - U_p = (m-p)r$$
$$U_{20} - U_2 = (20-2)2$$
$$U_{20} = 4 + 36 = 40$$

- قانون مجموع المتتالية الحسابية:

$$S = \frac{(\text{حدالأول} + \text{حد الأخير}) \times \text{عدد الحدود}}{2}$$

$$S = \frac{n(a+l)}{2}$$

المتتالية الهندسية:

نقول عن متتالية انها هندسية اذا نتج كل حد عن سابقه بضربه بعدد ثابت (q) يسمى أساس المتتالية

أي تحقق العلاقة التدريجية

$$U_{n+1} = U_n . q$$

لاثبات ان المتتالية هندسية:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$$

- قواعد المتتالية الهندسية:

اذا كان (p ,m) دليلين ل Uفان:

$$\frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$$

- فائدة القانون السابق:

يفيد في معرفة الأساس وذلك اذا كان لدينا حدين معلومين أو في معرفة حد من أحد الحدود المطلوبة

- مثال:

$(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ و$U_1 = 3$ اوجد الحد ذي الدليل 8

$$\frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$$
$$\frac{U_8}{U_1} = 2^{(8-1)} \Rightarrow U_8 = 3 \times 2^7 = 384$$

- قانون مجموع المتتالية الهندسية:

$$S = \text{الحد الأول} \times \frac{1 - (\text{الأساس})^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}}$$

$$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

- **ملاحظة هامة:** لمعرفة عدد الحدود نميز عدة حالات منها:

1. اذا كانت الأدلة متعاقبة فان عدد الحدود يعطى كما يلي:

عدد الحدود = الدليل الأخير – الدليل الأول + 1

2. اذا كانت الأدلة زوجية بدءا من العدد 2 فان عدد الحدود يعطى كما يلي:

$$\text{عدد الحدود} = \frac{\text{الدليل الأخير}}{2}$$

المتتاليات

- جهة اطراد متتالية
- المتتالية الحسابية
- المتتالية الهندسية
- الاثبات بالتدريج

جهة اطراد متتالية

متزايد تماماً: $U_{n+1} > U_n$

متناقص تماماً: $U_{n+1} < U_n$

ثابتة: $U_{n+1} = U_n$

المتتالية الحسابية

$$U_{n+1} = U_n + r \quad , \quad U_m - U_p = (m-p)r$$

المجموع: $S = \frac{n(a+l)}{2}$

اذا كانت a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية كان:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

المتتالية الهندسية

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q \quad , \quad \frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$$

المجموع: $S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$

اذا كانت a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية كان:

$$b^2 = a.c$$

الاثبات بالتدريج (الاستقراء الرياضي):

نطبق الخطوات التالية:

1) نبرهن صحة العلاقة من أجل اصغر عدد طبيعي في المجموعة المعطاة :

2) نفرض صحة العلاقة من أجل أي عدد طبيعي n

3) نبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$ يعني بحط محل كل n بالتمرين $n+1$

وهون عنا اربع حالات لطرح السؤال عن الاثبات بالتدريج :

اولاً: حالة المتتالية :

1)بنطلق من الفرض $E(n)$

2)بعمل عمليات حسابية عالفرض (الطرف الموجود فيه u_n

لوصل لشكل المتتالية المطلوب ولحولها ل u_{n+1}

ثانياً (معادلة او متراجحة)بس يكون بالسؤال مجموع

1)بنطلق من الفرض $E(n)$

2)بضيف مقدار للطرفين وبعمل عمليات حسابية عليها متل الضب او الإضافة وبستفاد من انو فيني حذف المقدار السالب من طرف المتراجحة الكبير او حذف مقدار موجب من طرف المتراجحة الصغير لحتى اصل لعلاقة $E(n+1)$

ثالثاً:مقدار مضاعف لعدد:

1)هون بنطلق من $E(n+1)$

وبحاول لاقي من احد الأطراف طريقة لعوض العلاقة $E(n)$

وهي عالاغلب بتكون مجموعين او اكتر واحد منن بكون هو الخاصة $E(n)$ والباقي بكون المضاعف للعدد المفروض بإخراج العدد عامل مشترك منكون وصلنا ل $E(n+1)$

رابعاً: بالاستفادة من اطراد تابع f المعرف وفق $u_{n+1} = f(u_n)$

1)اول شي بعرف $(u_n)_{n \geq n_0}$ بالعلاقة التدريجية وعلى اساسها بعرف التابع $f(x)$ وباثبت انو مطرد تماماً على المجال المدروسة فيه المتتالية وهون بميز حالتين:

اول حالة التابع متزايد تماماً:هون بستخدم تصوير الأطراف والمتراجحة بتضل متل مهية.

تاني حالة التابع متناقص تماماً: هون بستخدم تصوير الأطراف كمان بس بغير بجهة المتراجحة

وعلماً انو $u_{n+1} = f(u_n)$ وبالاستفادة من انو يمكن حذف مقدار سالب من طرف المتراجحة الكبير وحذف مقدار موجب من طرف المتراجحة الصغير بكون وصلت ل $E(n+1)$

- **وبمجمل الحالات الأربعة** هالحالات هية الي بتجي عن الاثبات بالتدريج كسؤال بالإضافة انو ممكن تصادف تمارين مارح تقدر تحلها الا اذا كان عندك خبرة **وحالل** كتير تمارين عن البرهان بالتدريج **(يعني هالحالات مانها قانون ثابت لنمشي عليه بكل الأوقات)**

مثال: أثبت أنه من اجل العدد الطبيعي الموجب تماماً N فان :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الحل: نبرهن صحة العلاقة من أجل $n = 1$

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \Longrightarrow 1 = 1 \text{ محققة}$$

نفرض صحة العلاقة من أجل n:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad *$$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

في كل الملفات ننطلق من * لكن في هذا التمرين سننطلق من الطرف الأول وصولاً للطرف الثاني:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$l_1 = 1^3 + 2^3 + \cdots + (n^3) + (n+1)^3$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$(n+1)^2 . \left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right]$$

$$(n+1)^2 \left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right] = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = l_2$$

تخمين متتالية:

- فكرة :

1) حساب حدود + تخمين عبارة u_n بدلالة n او اقترح صيغة

2) اثبت أو عبر أو حدد أو أوجد u_n بدلالة n

- قانون التخمين: $u_n = (u_0 - L).a^n + L$

منطلق l من القانون الاتي $L = \frac{b}{1-a}$ والمتتالية الهندسية المتخفية أساسها q هي: $w_n = u_n - L$

كيفية طرح السؤال بالامتحان النهائي وكيفية حل التمرين:

- السؤال:

1) احسب الحدود وخمن عبارة u_n بدلالة n او اقترح صيغة

2) اثبت او عبر او حدد او اوجد u_n بدلالة n

المتتالية هي:

$$\begin{cases} u_n = \text{رقم} \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

- طريقة الحل:

1) نعوض الرقم بدل كل n :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						
$a^n = (\ )^n$						

1. ونكمل بإحدى الطريقتين:

(1)

نستنتج من الجدول مباشرة

من السطرين الثاني والثالث

$u_n + (\ )^n =$ عدد

$u_n =$ عدد $- (\ )^n$

(2)

$L = \frac{b}{1-a}$

$u_n = (u_0 - L).a^n + L$

نعوض قيم L, a, u_0 فنجد

انا نتج $u_n = \cdots$

2. نحل التمرين بطريقتين:

الطريقة الأولى: نثبت صحة التخمين عن طريق الاثبات بالتدريج

الطريقة الثانية: $w_n = u_n - L$

$\frac{w_{n+1}}{w_n} = q$

$\frac{w_n}{w_0} = q^n \Rightarrow u_n = w_n + L$

التمرين الثاني صفحة 22:

المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$ في حالة أي عدد طبيعي n

1) احسب $u_1 \rightarrow u_5$ ثم خمن عبارة u_n بدلالة n

2) بحساب عبارة $u_n - 3$ عند كل $n \geq 0$ عبر عن u_n بدلالة n

الحل:

1. نوجد الحدود :

$$n = 0 \Rightarrow u_1 = 2u_0 - 3 = 2(2) - 3 = 1$$
$$n = 1 \Rightarrow u_2 = 2u_1 - 3 = 2(1) - 3 = -1$$
$$n = 2 \Rightarrow u_3 = 2u_2 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$$
$$n = 3 \Rightarrow u_4 = 2u_3 - 3 = 2(-5) - 3 = -13$$
$$n = 4 \Rightarrow u_5 = 2u_4 - 3 = 2(-13) - 3 = -29$$

n	0	1	2	3	4	5
u_n	2	1	-1	-5	-13	-29
$2^n = (2)^n$	1	2	4	8	16	32

ونكمل بإحدى الطريقتين:

(1)

نستنتج من الجدول مباشرة

من السطرين الثاني والثالث

$u_n + (2)^n = 3$

$u_n = -(2)^n + 3$

(2)

$L = \frac{b}{1-a} = \frac{-3}{1-2} = 3$

$u_n = (u_0 - L).a^n + L$

نعوض قيم L, a, u_0 فنجد

انا نتج $u_n = \cdots$

$u_n = (2-3).2^n + 3$

$= -2^n + 3$

2. طريقة أولى:

متتالية هندسية $w_n = u_n - L \Rightarrow w_n = u_n - 3$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+1}-3}{u_n-3} = \frac{2u_n-3-3}{u_n-3} = \frac{2u_n-6}{u_n-3} = \frac{2(u_n-3)}{u_n-3} = 2$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q = 2$

نعوض بالقانون:

$$\frac{w_n}{w_0} = q^n \Rightarrow w_n = (u_0 - 3)2^n = -2^n$$
$$u_n = w_n + 3 = -2^n + 3$$

طريقة ثانية: عن طريق الاثبات بالتدريج:

$$u_n = -2^n + 3$$

نبرهن صحة العلاقة من اجل $n = 0$ ونعوض:

$u_0 = -2^0 + 3 = -1 + 3 = 2$ محققة

نفرض صحة العلاقة من اجل n:

$$u_n = -2^n + 3$$

نبرهن صحة العلاقة من اجل $n+1$:

$$u_{n+1} = -2^{n+1} + 3$$

$$L_1 = u_{n+1} = 2u_n - 3 = 2(-2^n + 3) - 3$$
$$= -2^n.2 + 6 - 3 = -2^{n+1} + 3$$
$$= L_2$$

وهو المطلوب.

دراسة اطراد متتالية:

لدينا ثلاث طرق او معايير لدراسة الاطراد:

1) معيار القسمة: اذا كانت المتتالية ذات حدود موجبة تماماً فاننا نستخدم هذا المعيار فاننا نستخدم هذا المعيار حيث نحسب المقدار $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ونميز ما يلي: (ونقارن مع العدد واحد)

المتتالية المتزايدة تماماً: $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$

المتتالية المتناقصة تماماً: $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

مثال: لتكن المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $W_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ادرس اطراد هذه المتتالية:

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1$$

والمتتالية متناقصة تماماً

2) معيار الطرح: (ليس لدينا قاعدة محددة لاستخدامه) ولكن يلزمنا خبرة لدراسة اشارة الناتج

المتتالية متزايدة تماماً: $U_{n+1} - U_n > 0$

المتتالية المتناقصة تماماً: $U_{n+1} - U_n < 0$

مثال: لتكن المتتالية المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق

$$U_n = \frac{2n-1}{n+4}$$

ادرس طراد هذه المتتالية:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+4} - \frac{2n-1}{n+4}$$
$$\Rightarrow \frac{(n+4)(2n+1) - (n+5)(2n-1)}{(n+4)(n+5)}$$
$$= \frac{2n^2 + n + 8n + 4 - (2n^2 - n + 10n - 3)}{(n+4)(n+5)}$$
$$= \frac{9}{(n+4)(n+5)} > 0$$

المتتالية متزايدة تماماً

3) معيار الاشتقاق:

نكتب المتتالية بالشكل $U_n = f(x)$ ثم ندرس اطراد التابع كما يلي:

1- نوجد المشتق الأول $\acute{f}(x)$

2- نعدم المشتق الأول ان امكن

3- نرسم جدول الإشارة للمشتق الأول

اذا كان $\acute{f}(x)$ موجب فالتابع متزايد تماماً واذا كان $\acute{f}(x)$ سالب فالتابع متناقص تماماً

مثال:

$$U_n = \sqrt{3n+1}$$

نفرض $U_n = f(x)$

$$f(x) = \sqrt{3x+1} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} > 0$$

فالتابع متزايد تماماً فالمتتالية متزايدة تماماً

دون ملاحظاتك

....

....

....

....

إلى هنا نصل

لنهاية شرح بحث المتتاليات
ولايزال لدينا الكثير من الرياضيات الجميلة
بانتظاركم "_"