١ في معلم متجانس $(O.\vec{i}.\vec{j}.\vec{k})$ لدينا النقطتين $A(2.-1.3).B(1.0.3)$ ان احداثيات $M(0.1.3)$ تحققها واحدة فقط من العلاقات التالية :

A	$2\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AM}=0$	B	$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$	C	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$	D	$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$

٢ $ABCD$ رباعي وجوه فيه النقطة G تحقق $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}$ فان :

A	$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GB}$	B	$G\in(ABC)$	C	$G\in(DBC)$	D	$G\in(ADC)$

٣ في معلم متجانس $(O.\vec{i}.\vec{j}.\vec{k})$ لدينا النقطتين $A(1.2.-1).B(3.0.1)$ و $M(x.y.z)$ تنتمي الى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ اذا و فقط اذا كان $x+my+nz-1=0$

A	$\begin{pmatrix}m=-1\\n=1\end{pmatrix}$	B	$\begin{pmatrix}m=0\\n=1\end{pmatrix}$	C	$\begin{pmatrix}m=1\\n=1\end{pmatrix}$	D	$\begin{pmatrix}m=1\\n=-1\end{pmatrix}$

٤ بفرض الاشعة $\vec{u}(1.1.1).\vec{v}(2.7.-3)$ و $\vec{w}(4.m.-1)$ مرتبطة خطيا عندئذ

A	$m=8$	B	$m=9$	C	$m=-6$	D	$m=-1$

٥ في معلم متجانس $(O.\vec{i}.\vec{j}.\vec{k})$ لدينا النقطتين $A(2.1.0).B(-1.4.2)$ ان قيمة α التي تجعل النقطة $M(1.1.\alpha)$ تنتمي الى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$:

A	$\alpha=0$	B	$\alpha=4$	C	$\alpha=12$	D	$\alpha=13$

٦ بفرض الاشعة $\vec{u}(2.1.-1).\vec{v}(1.0.2)$ و $\vec{w}(8.3.1)$ مرتبطة خطيا عندئذ قيمتي $\alpha.\beta$ اللتان تحققان :

$$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$

A	$\begin{pmatrix}\alpha=2\\\beta=3\end{pmatrix}$	B	$\begin{pmatrix}\alpha=-3\\\beta=1\end{pmatrix}$	C	$\begin{pmatrix}\alpha=3\\\beta=2\end{pmatrix}$	D	$\begin{pmatrix}\alpha=-2\\\beta=3\end{pmatrix}$

٧ في معلم متجانس $(O.\vec{i}.\vec{j}.\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1.2.-1).B(1.4.1)$ و $C(3.4.1)$ ان احداثيات $M(x.y.z)$ التي تجعل $ABCM$ متوازي اضلاع هي :

A	$M(3.5.-1)$	B	$M(-1.3.5)$	C	$M(5.3.-1)$	D	$M(5.-1.3)$

٨ قيمة a غير المعدومة التي تجعل الشعاعين $\vec{u}(-1.a.-1).\vec{v}(4.-8.2a)$ مرتبطين خطيا

A	1	B	2	C	3	D	4

٩ احداثيات النقطة M التي تقع على محور الرواقم و المتساوية البعد عن النقطتين $A(1.1.2)$ و $B(\sqrt{2}.2\sqrt{2}.0)$ هي

A	$M(0.0.-2)$	B	$M(0.0.-1)$	C	$M(0.0.1)$	D	$M(0.0.2)$

في معلم متجانس $(O.\vec{i}.\vec{j}.\vec{k})$ لدينا النقطتين $A(0.m.0).B(7.0.9)$ والشعاعين $\vec{u}(1.4.2)$ و $\vec{v}(4.-2.5)$ فان قيمة m التي تجعل الاشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً هي

A	$m=1$	B	$m=2$	C	$m=3$	D	$m=4$

في معلم متجانس $(O.\vec{i}.\vec{j}.\vec{k})$ لدينا النقطتين $A(0.m.0).B(7.0.9)$ نقرن بكل نقطة $M(x.y.z)$ المقدار $MA^2+MB^2=K$ ان قيمة K التي تجعل مجموعة النقاط M تمثل نقطة وحيدة هي

A	$K=9$	B	$K=18$	C	$K>18$	D	$K\geq 18$

$A.B$ نقطتان متمايزتان من الفراغ فان مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $MA=4MB$ تمثل

A	نقطة وحيدة	B	مجموعة خالية	C	كرة	D	المستقيم (AB)

في حالة ثلاثة نقاط A و B و C من الفراغ فإن AB^2-BC^2 يساوي:

A	$2\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$	B	$\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})$	C	$\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB})$	D	$\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

في معلم متجانس $(O.\vec{i}.\vec{j}.\vec{k})$ لدينا $A(5.2.1)$ و B مسقط A على المستوي xOy و C مسقط B على محور الفواصل فان طول القطعة المستقيمة $[AC]$ هو :

A	$\sqrt{3}$	B	$\sqrt{5}$	C	$\sqrt{2}$	D	1

في معلم متجانس $(O.\vec{i}.\vec{j}.\vec{k})$ لدينا النقطتين $A(1.0.2).B(-1.1.3)$ و $M(x.y.z)$ نقطة تقاطع المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ مع محور التراتيب و بالتالي احداثيات M							
A	$(0.0.3)$	B	$(0.3.0)$	C	$(3.0.0)$	D	$(-3.0.3)$
في معلم متجانس $(O.\vec{i}.\vec{j}.\vec{k})$ لدينا النقطتين $C(0.1.1).A(1.2.-1)$ عندئذ تكون لاحداثيات B نظيرة A بالنسبة الى النقطة C هي :							
A	$B(1.0.3)$	B	$B(-1.0.3)$	C	$B(-1.0.-3)$	D	$B(1.0.-3)$
في معلم متجانس $(O.\vec{i}.\vec{j}.\vec{k})$ لدينا النقاط $B(10.4.3).D(0.4.5)$ و $C(4.3.5)$ ان احداثيات $A(x.y.z)$ التي تجعل D مركز ابعاد متناسبة لـ $(B.1).(A.-2).(C.-2)$.							
A	$(-1.5.4)$	B	$(1.5.4)$	C	$(1.-5.4)$	D	$(1.5.-4)$
$ABCM$ متوازي اضلاع عند ئذ M مركز ابعاد متناسبة للنقاط							
A	$\{(A.1).(B.1),(C.1)\}$	B	$\{(A.1).(B.1),(C.-1)\}$	C	$\{(A.1).(B.-1),(C.1)\}$	D	$\{(A.-1).(B.1),(C.1)\}$
اذا كانت G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(A.1).(B.-1).(C.2)$ فان قيمة العدد k الذي يحقق العلاقة $\overrightarrow{GC}=k\overrightarrow{AB}$							
A	$K=-1/2$	B	$K=1/2$	C	$K=1/3$	D	$K=1/4$
اذا كانت النقطة $B(-1.3.3)$ تقع على الكرة التي مركزها $A(2.3.\alpha)$ و نصف قطره $R=3$ فان							
A	$\alpha=4$	B	$\alpha=3$	C	$\alpha=2$	D	$\alpha=0$
لتكن معادلة المخروط $\begin{cases}x^2+y^2-\frac{16}{100}z^2=0\\ 0\le Z\le 5\end{cases}$ واحدة فقط من النقاط التالية تقع على المخروط :							
A	$A(2.2\sqrt{3}.10)$	B	$B(1.1.3)$	C	$C(-2.1.5)$	D	$D(2.0.5)$
معادلة الأسطوانة التي مركزي قاعدتيها $A(2.0.0).B(5.0.0)$ و تمر من $C(3.4.3)$ هي :							
A	$x^2+z^2=25$ $2\le y\le 5$	B	$y^2+z^2=25$ $2\le x\le 5$	C	$x^2+z^2=25$ $0\le y\le 5$	D	$x^2+y^2=25$ $2\le z\le 5$
$ABCD-EFGH$ مكعب فيه K تحقق : $2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$ فان قيم $\alpha.\beta.\gamma$ التي تجعل K مركز ابعاد متناسبة لـ $(B.\alpha).(C.\alpha).(G.\gamma)$ هي :							
A	$\alpha=-1$ $\beta=-2$ $\gamma=3$	B	$\alpha=1$ $\beta=-2$ $\gamma=3$	C	$\alpha=1$ $\beta=-2$ $\gamma=-3$	D	$\alpha=1$ $\beta=2$ $\gamma=3$
بفرض G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(A.1).(B.2).(C.3)$ فان القيم الممكنة للثلاثية $(\alpha.\beta.\gamma)$ التي تجعل B مركز ابعاد متناسبة لـ $(A.\alpha).(G.\gamma).(C.\beta)$ هي :							
A	$\alpha=-1$ $\beta=3$ $\gamma=-6$	B	$\alpha=1$ $\beta=3$ $\gamma=-6$	C	$\alpha=1$ $\beta=-3$ $\gamma=-6$	D	$\alpha=1$ $\beta=3$ $\gamma=6$
بفرض $A.B.C$ ثلاث نقاط متمايزة و لتكن $E.D$ تحققان $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE}$ و $3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$ فاذا كانت A مركز ابعاد متناسبة لـ $(B.\alpha).(C.\beta).(D.\gamma).(E.\gamma)$ فان							
A	$\alpha=-2$ $\beta=3$ $\gamma=3$ $\delta=-2$	B	$\alpha=2$ $\beta=3$ $\gamma=3$ $\delta=-2$	C	$\alpha=-2$ $\beta=3$ $\gamma=3$ $\delta=2$	D	$\alpha=-2$ $\beta=3$ $\gamma=-3$ $\delta=2$
$E-ABCD$ هرم رباعي رأسه E اذا علمت ان العدد الدال على حجمه يساوي العدد الدال على مساحة قاعدته فان ارتفاعه h يساوي :							
A	$h=4$	B	$h=3$	C	$h=2$	D	$h=1$

انتهت الاسئلة

1 ليكن التابع $f(x) = 2x + \sqrt{1-x}$ المعرف على $]-\infty, 1]$ فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ هي

A	B	C	D
$-\infty$	$+\infty$	-1	$+1$

2 ليكن التابع $f(x) = \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ المعرف على $]-\infty, +\infty[$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ هي

A	B	C	D
$+2$	-2	$-\infty$	$+\infty$

3 ليكن التابع $f(x) = \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ المعرف على $]-\infty, +\infty[$ فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ هي

A	B	C	D
$-\infty$	-2	$+2$	$+\infty$

4 ليكن التابع $f(x) = \frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$ المعرف على $]+3, +\infty[$

A	B	C	D
$\frac{-1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

5 ان نهاية التابع $f(x) = \frac{\sqrt{2x^3-1}-1}{x-1}$ عند $x = 1$

A	B	C	D
3			

6 ان نهاية التابع $f(x) = \sqrt{2x^2+3} - \sqrt{2x^2-5}$ عند $+\infty$

A	B	C	D
1	0	-1	$+\infty$

7 نهاية التابع $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x}-\sqrt{3-x}}$ عند $a = 1$

A	B	C	D
$\frac{-2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{-3\sqrt{2}}{2}$

8 نهاية التابع $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{7+6x^2}}$ عند $a = -\infty$

A	B	C	D
$\frac{-1}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$

9 نهاية التابع $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$ عند $a = 1$

A	B	C	D
-3	$+3$	-1	$+1$

10 اوجد $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\sin\left(\frac{x^2}{\pi+x}\right)\right)$

A	B	C	D
2	1	-1	-2

11 احسب

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi x^2+1}{x^2+3}\right)\right)$$

A	B	C	D
-2	$+1$	-1	$+2$

12

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{5x}$$

A	B	C	D
$-\frac{6}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{5}$

13	$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{5x}$						
A	$\frac{1}{5}$	B	$-\frac{1}{5}$	C	1	D	5
14	$\lim_{x\to 0}\frac{x+x\cos x}{\sin x}$						
A	1	B	2	C	-2	D	-1
15	نهاية $f(x)=\|x-2\|.\cos^2\left(\frac{1}{x-2}\right)$ عند $a=2$						
A	3	B	2	C	0	D	1
16	نهاية $f(x)=\frac{x^2}{2+\cos\frac{1}{x}}$ عند $a=0$						
A	3	B	2	C	1	D	0
17	نهاية التابع $f(x)=\frac{\tan(3x)-x}{x+2\sin x}$ عند $a=0$						
A	$\frac{2}{3}$	B	$-\frac{2}{3}$	C	$\frac{3}{2}$	D	$\frac{-3}{2}$
18	نهاية التابع $f(x)=(\sin x).\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ عند $a=0$						
A	0	B	غير موجودة	C	1	D	2
19	نهاية التابع $f(x)=\frac{\tan^2(2x-2)}{(x-1)^2}$ عند $a=0$						
A	2	B	3	C	4	D	1
20	نهاية التابع $f(x)=\frac{2x+\sin 3x}{x-\tan 6x}$ عند $a=0$						
A	$+2$	B	-2	C	$+1$	D	-1
21	نهاية التابع $f(x)=\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}$ عند $a=0$						
A	4	B	3	C	2	D	1
22	نهاية التابع $f(x)=\frac{\cos(3x)-\cos x}{x\sin x}$ عند $a=0$						
A	$+4$	B	-4	C	-2	D	$+2$
23	نهاية التابع $f(x)=\frac{x.\sin x}{1-\cos x}$ عند $a=0$						
A	-1	B	1	C	2	D	-2
24	نهاية التابع $f(x)=\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ عند $a=2$						
A	$\frac{-9}{2}$	B	$\frac{9}{2}$	C	$-\frac{9}{4}$	D	$\frac{9}{4}$
25	نهاية التابع $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x$ عند $a=+\infty$						

	A	$-\frac{1}{4}$	B	$-\frac{1}{2}$	C	$+\frac{1}{2}$	D	$+\frac{1}{4}$
26	نهاية التابع $f: x \mapsto \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ عند $\frac{\pi}{2}$							
	A	$+2$	B	-1	C	$+1$	D	-2
27	نهاية التابع $f(x)=\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ عند $x=\frac{\pi}{4}$							
	A	-1	B	1	C	2	D	-2
28	ليكن التابع f المعرّف على المجال $]-5.+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$							
	A	$+\frac{1}{2}$	B	$-\frac{1}{2}$	C	$+\frac{1}{3}$	D	$-\frac{1}{3}$
29	بفرض التابع f المُعيّن بالعلاقة $f(x)=\frac{-2x+1}{x+3}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ ، فان قيمة العدد A 'حقّق الشرط: إذا كان $x>A$، كان $f(x)$ في المجال $]-2.05.-1.95[$							
	A	$A=137$	B	$A=17$	C	$A=13$	D	$A=-13$
30	ان نهاية التابع f المُعيّن بالعلاقة $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ عند 5 هي 4 فان مجالاً I مركزه 5 يُحقّق الشرط إذا كان x ينتمي إلى المجال I، كان $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]9.95.4.05[$							
	A	$]4.5[$	B	$]4.97.5.03[$	C	$]4.6[$	D	$]3.5[$
31	ليكن f التابع المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$ فان معادلة المقارب المائل لخطه البياني C_f في جوار $+\infty$							
	A	$y=x$	B	$y=x-1$	C	$y=x+1$	D	$y=2x+1$
32	ليكن f التابع المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\sqrt{x^2+2x+4}$ فان معادلة المقارب المائل لخطه البياني C_f في جوار $+\infty$							
	A	$y=x$	B	$y=x-1$	C	$y=x+1$	D	$y=2x+1$
33	الوضع النسبي لخطه البياني C_f للتابع $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ مع المستقيم $\Delta: y=x-1$ في جوار $-\infty$							
	A	C فوق Δ'	B	C تحت Δ'	C	C مماس Δ'	D	C قاطع Δ'
34	ليكن C الخط البياني للتابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\sqrt{\lvert 4x^2-1\rvert}$ وكانت $g(x)=3x$ وافترضنا ان $x>0$ فان :							
	A	$f(x)\geq g(x)$	B	$f(x)\leq g(x)$	C	$f(x)<g(x)$	D	$f(x)>g(x)$
35	ليكن التابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق:							

	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : x\neq 0\\ m-1 & : x=0\end{cases}$ فإن قيمة m التي تجعل f مستمرّاً على $\mathbb{R}$

A	$m=3$	B	$m=2$	C	$m=1$	D	$m=-1$
36	نهاية التابع $f(x)=\frac{E(x)}{x^2-1}$ عند $+\infty$ هي :						
A	3	B	2	C	1	D	0
37	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{3x+2\sin x}$						
A	$1/3$	B	$+\infty$	C	$-\infty$	D	3
38	عدد مقاربات الخط البياني للتابع $f(x)=\frac{x^2\lvert x\rvert+5}{x^2-1}$						
A	3	B	2	C	1	D	0

تمنياتي للجميع بالتوفيق

المدرس عمـــــار قدوري

1-Je m'abonne à la chaine française avec Pierre……….progresser en français.
a-pour b-afin que c- de façon que d-de manière que

2-Je regarde des vidéos…………..m'améliorer en français.
a-de peur que b-de crainte que c-de peur de d- pour

3-Il est parti ……………ne pas nous déranger.
a-pour que b-afin de c-de façon que d-de manière que

4-Je te donne ce conseil ………………………tu fasses des progrès rapidement.
a-pour que b-afin de c-de façon à d-de manière à

5-Je travaille……………………mes ebfants soient heureux.
a-de peur que b-de vrainte de c-de peur de d-pour

6-Je vous donne ce conseil…………………vous puissiez progresser plus rapidement.
a-pour b-afin que c-de façon à d-de manière à

7-Pouvez-vous me preter des lunettes…………………je puisse lire cet ouvrage.
a-pour b-afin que c-de façon à d-de manière à

8-Je préfère aller au travail à pied………………………éviter les bouchons !
a-de peur que b-de crainte de c-de peur de d- pour que

9-Elle t'a acheté une place de cinéma………………tu puisses venir voir le film avec nous.
a-de peur de b-de crainte de c-de peur que d-pour que

10-Le maire de la ville a décidé de construire de nouvelles routes……améliorer la circulation.
a-pour que b-afin de c-de façon qu' d-de manière qu'

11-Je travaille ………………obtenir une promotion.
a-pour que b-afin que c-de peur que d-pour

12-Berce le bébé ……………………qu'il ne pleure plus.
a-pour que b-afin d' c-de manière qu' d-pour

13-je vais vous relire le texte ………………..il soit plus facile à comprendre.
a-pour qu' b-afin qu' c-de manière qu' d-pour

14-Il a téléphoné en arrivant ………………………..sa famille soit rassurée.
a-pour que b-afin que c- afin de d-de manière à

15-Le jardinier arrose les légumes ………………….il ait une meilleure production.
a-pour qu' b-afin d' c-de manière à d-de peur d'

16-Il travaille ……………………….ses parents soient fiers de lui.
a-pour que b-afin de c-de manière à d-de façon à

17-Marchez sur la pointe des pieds…………………personne ne vous entende.
a-pour que b-afin de c-de manière à d-de peur que

18-Ne parle pas trop fort ………………………….le malade ne se réveille.
a-de peur de b-de crainte que c-afin de d-pour que

19-Je prends mon parapluie………………………il ne pleuve.
a-afin qu' b-pour qu' c-de crainte qu' d-de façon à ce qu'

20-L'organisateur du marathon met des instructions ………un accident ne se produise.
a-pour b-de peur d' c-de peur qu' d-afin qu'

إعداد المدرس : أسامة مجيد 0969721366

اختبارات رياضيات مؤتمتة للبكالوريا السورية

الجزء الأول: الوحدة الخامسة

اختبار وحدة التابع اللوغاريتمي النيبري

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

صلاح أحمد سالم - عماد كزو - أمين الحايك

تنسيق وإخراج: أ. أمين الحايك / أ. نادر أبوراس

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبونبوت	فيصل خالد
محمد السيد علي	هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كعان
زينب يوسف	حسام قاسم	خالد الحداد	فادي الحمد
يوسف منصور	نادر أبوراس	محمد زين جعرور	فادي طنوس
زكي طحاوي	أمين الحايك	علي جول	مهند حريقة
محمد العيسى	مصطفى الرزوق	صلاح سالم	عبد السلام حسن

1	حل المعادلة $2\ln x - 3 = 0$ هو:						
A	$\sqrt{e}$	B	$\frac{3}{2}$	C	e	D	$e\sqrt{e}$
الحل	$\ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$						
إعداد: أ. محمد جمال الخطيب			الجواب: D			كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سلم	

2	العدد: $L = \frac{1}{2}\ln(125) + 2\ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln\sqrt{5}$ يساوي:						
A	0	B	$\ln 5$	C	1	D	$\sqrt{5}$
الحل	$L = \frac{1}{2}\ln 5^3 - 2\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 5$ $L = \frac{3}{2}\ln 5 - 2\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 5 = 0$						
إعداد: أ. محي الدين اسماعيل			الجواب: A			كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك	

3	ليكن المقدار $A = \ln\left(\sqrt{4+e} - 2\right)^4 + \ln\left(\sqrt{4+e} + 2\right)^4$ عندئذ قيمة A تساوي:						
A	2	B	4	C	8	D	16
الحل	$A = 4\ln\left(\sqrt{4+e} - 2\right) + 4\ln\left(\sqrt{4+e} + 2\right)$ $A = 4\left(\ln\left(\sqrt{4+e} - 2\right) \cdot \left(\sqrt{4+e} + 2\right)\right)$ $A = 4\ln(4 + e - 4) = 4$						
إعداد: أ. رياض الحسين			الجواب: B			كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك	

4	مجموعة تعريف التابع f المعطى وفق : $f(x) = \sqrt{\ln(2x-3)}$ هي:						
A	$\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$	B	$]2, +\infty[$	C	$\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$	D	$[2, +\infty[$
الحل	$\ln(2x-3) \geq 0$ $2x - 3 \geq 1$ $2x \geq 4 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2$						
إعداد: أ. علي فؤاد علي			الجواب: D			كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو	

5 عند البحث عن حل المعادلة: $\ln^2 x - \ln x^2 + 1 = 0$ نجد أنه:

A	B	C	D
غير موجود	$\frac{1}{e}$	1	e

الحل

شرط الحل $x > 0$

$$\ln^2 x - 2\ln x + 1 = 0$$

$$(\ln x - 1)^2 = 0$$

$$\ln x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = e$$

إعداد: أ. محمد المصري	الجواب: D	كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

6 ليكن التابع f المعرف والاشتقاقي على $]1, +\infty[$ وفق: $f(x) = \ln(\ln\sqrt{x})$
عندئذ يعطى مشتقه $f'(x)$ بالصيغة:

A	B	C	D
$\frac{1}{x\ln x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}$	$\frac{1}{x\ln\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}$

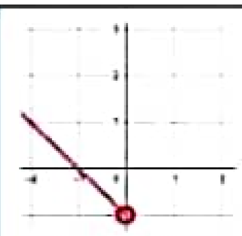
الحل

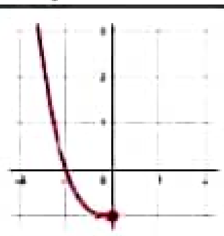
$$f'(x) = \frac{(\ln\sqrt{x})'}{\ln\sqrt{x}} = \frac{\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}}}{\ln\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}$$

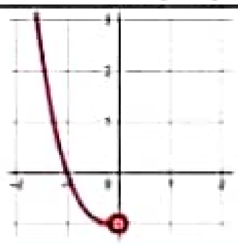
$$f'(x) = \frac{1}{2x\ln\sqrt{x}} = \frac{1}{x\ln x}$$

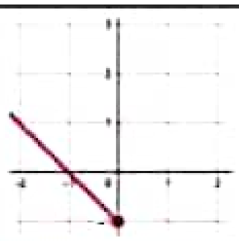
إعداد: أ. ربيع الشيخ عيد	الجواب: A	كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

7 في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، إن التمثيل البياني لمجموعة النقاط $M(x, y)$ التي تحقق العلاقة:
$$3\ln(-x) = \ln(y+1)$$

A


B


C


D


الحل

الشرط $x < 0$ و $y > -1$ وهو محقق في الخيارين A و C والمعادلة تكتب بالشكل:
$\ln(-x^3) = \ln(y+1)$ ومنه $y = -x^3 - 1$

إعداد: أ. عبد الله حناوي	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سلم

8

لتكن المعادلة $x^2 + 4x + \ln(m-1) = 0$

إن قيمة العدد الحقيقي m التي من أجلها يكون للمعادلة جذر مضاعف هي:

A		B		C		D	
A	$e^2 - 1$	B	$e^4 - 1$	C	$e^2 + 1$	D	$e^4 + 1$

الحل

شرط الحل $m > 1$

للمعادلة جذر وحيد $\Delta = 0 \Leftrightarrow$

$$16 - 4\ln(m-1) = 0$$

$$\ln(m-1) = 4 \Rightarrow m - 1 = e^4 \Rightarrow m = e^4 + 1$$

إعداد: أ . ياسر عبادي | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سلم

9

ليكن f تابعاً معرفاً واشتقاقياً على R_+^* وفق: $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}$

إن مجموعة جميع قيم x التي تحقق المعادلة $f'(x) = 0$ هي:

A	$\left\{\frac{1}{e^2}, 1\right\}$	B	$\{1, e^2\}$	C	$\{2, e\}$	D	$\left\{\frac{1}{e}, e^2\right\}$

الحل

$$f'(x) = \frac{2\ln(x)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x\cdot(2 - \ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

إعداد: أ. نورالدين صندقي | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

10

مجموعة حلول المعادلة $\ln(x+3) + \ln(x-1) = \ln(2x+6)$ حيث $x > 1$ هي:

A	$\{2, 3\}$	B	$\{2\}$	C	$\{3\}$	D	$\{-3, 3\}$

الحل

$$\ln((x+3)(x-1)) = \ln(2x+6)$$

$$x^2 + 2x - 3 = 2x + 6$$

$$x^2 = 9$$

مقبول $x = 3$ ، مرفوض $x = -3$

إعداد: أ. صفاء قزق | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

11

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D =]-\infty, 2[\cup]4, \infty[$ وفق: $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right)$

إن قيمة b التي تجعل النقطة $A(3, b)$ مركز تناظر للخط C هي:

A	-2	B	0	C	1	D	2

الحل

$$f(x) + f(2x_0 - x) = 2y_0$$

لدينا $x_0 = 3$ ولنأخذ $x = 0 \in D$

$$f(0) + f(6) = 2b \Rightarrow \ln\left(\frac{-2}{-4}\right) + \ln\left(\frac{4}{2}\right) = 2b$$

$$-\ln 2 + \ln 2 = 2b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

إعداد: أ. يونس حمود | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سلم

12 ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ فإن معادلة المماس الأفقي لخطه البياني هي :

A		B		C		D	
A	$y=\frac{1}{e}$	B	$y=-\frac{1}{e}$	C	$y=-e$	D	$y=e$

الحل:

$$f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2} \Rightarrow f'(x)=0$$

$$1-\ln(x)=0 \Rightarrow \ln(x)=1 \Rightarrow x=e$$

$$y=f(e)=\frac{1}{e}$$

إعداد: أ. حيدرة زعيبة | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

13 ليكن f تابعاً معرفاً واشتقاقياً على المجال $]1,+\infty[$ مشتقه : $f'(x)=\frac{1}{x\ln x}$
عندئذٍ مشتق التابع $g(x)=f(\sqrt{x})$ هو :

A	$g'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}\ln x}$	B	$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}$
C	$g'(x)=\frac{1}{2x\ln x}$	D	$g'(x)=\frac{1}{x\ln x}$

الحل:

$$g'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'\cdot f'(\sqrt{x})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}$$

$$g'(x)=\frac{1}{x\ln x}$$

إعداد: أ. موسى حجيج / أبو نزار | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

14 إن عدد نقاط تقاطع الخط البياني الممثل للتابع f المعرف على R^* وفق : $f(x)=\ln x^4-\ln x^2-2$
مع محور الفواصل يساوي :

A		B		C		D	
A	1	B	2	C	3	D	4

الحل:

$$f(x)=0 \Longrightarrow 2\ln x^2-\ln x^2=2$$

$$\ln x^2=2 \Longrightarrow x^2=e^2 \Longrightarrow x=\mp e$$

إعداد: أ. رامي شقرة | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

15

لدينا في R^2 جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} \ln x \cdot \ln y = -2 \\ \ln x - \ln y = 3 \end{cases}$$

إن إحدى القيم الممكنة للثنائية (x,y) لتكون حلاً للجملة السابقة هي:

A		B		C		D	
A	$(e,\sqrt{e})$	B	$\left(\sqrt{e},\frac{1}{e^4}\right)$	C	$\left(e,\frac{1}{e^2}\right)$	D	$(e^3,1)$

الحل

نفرض $\ln x = X$ و $\ln y = Y$ نعوض:

$$\begin{cases} X \cdot Y = -2 & (1) \\ X - Y = 3 & (2) \end{cases}$$

نعوض (2) في (1) $X^2 - 3X + 2 = 0$

$$(X-1)(X-2) = 0$$

$$\begin{cases} \text{إما } X = 1 \Rightarrow x = e \;, y = \frac{1}{e^2} \Rightarrow \left(e,\frac{1}{e^2}\right) \\ \text{أو } X = 2 \Rightarrow x = e^2 \;, y = \frac{1}{e} \Rightarrow \left(e^2,\frac{1}{e}\right) \end{cases}$$

إعداد: أ. مصطفى الرزوق	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

16

ليكن f التابع المعرف على $[0,+\infty[$ وفق: $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-\ln x} & : x > 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$

إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الصفر هي:

A	-2	B	-1	C	0	D	1

الحل

التابع f مستمر عند الصفر $\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = m$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1} = -1$$

$$\Rightarrow m = -1$$

إعداد: أ. صفوح الأفندي	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

17

حلول المتراجحة $\ln x \cdot (\ln x - 1) < 0$ هي:

A	$]1,e[$	B	$\left]\frac{1}{e},1\right[$	C	$\left]0,\frac{1}{e}\right[$	D	$]0,1[\cup]e,+\infty[$

الحل

شرط الحل $x > 0$

$$\ln x \cdot (\ln x - 1) < 0 \Rightarrow 0 < \ln x < 1$$

$$1 < x < e$$

إعداد: أ. خضر سيفو	الجواب: A	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

22

a و b عددان حقيقيان موجبان تماما بحيث $a.b > 2$ ويحققان

$$\ln\left(a-\frac{2}{b}\right)+\ln\left(a+\frac{2}{b}\right)=\ln\left(\frac{3a}{b}\right)$$

عندها تكون قيمة الجداء $a \cdot b$ تساوي

A		B		C		D	
A	2	B	3	C	4	D	5

الحل

$$\ln\left(a^2-\frac{4}{b^2}\right)=\ln\left(\frac{3a}{b}\right)$$

$$a^2-\frac{4}{b^2}=\frac{3a}{b}$$

$$a^2b^2-4=3ab$$

$$a^2b^2-3ab-4=0$$

$$(ab+1)(ab-4)=0$$

$$ab=4$$

إعداد: أ. مهند حريقة | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة

23

ليكن لدينا العددين

$$a=\ln\left(\frac{e^2}{2e-1}\right) \quad \text{و} \quad b=\ln\left(\frac{2e+1}{4}\right)$$

بالمقارنة بين العددين a و b نجد أن:

A	$a > b$	B	$a < b$	C	$a = b$	D	$a = -b$

الحل

$$a-b=\ln\left(\frac{e^2}{2e-1}\right)-\ln\left(\frac{2e+1}{4}\right)$$

$$\ln\left(\frac{e^2}{2e-1}\times\frac{4}{2e+1}\right)=\ln\left(\frac{4e^2}{4e^2-1}\right)>0$$

لأن $\frac{4e^2}{4e^2-1}>1$ بالتالي $a > b$

إعداد: أ. يوسف منصور | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

24

إذا كان $\log_a(b) = 2$ و $\log(a) = 2$ حيث $a \in \mathcal{R}_+^*/\{1\}$ و $b \in \mathcal{R}_+^*$

عندئذ الثنائية (a , b) تساوي:

A	$(10^2 , 10^3)$	B	$(10^2 , 10^4)$	C	$(10^4 , 10^2)$	D	$(10^4 , 10^3)$

الحل

$$\log(a)=2 \Rightarrow \frac{\ln a}{\ln 10}=2 \Rightarrow \ln a = 2\ln 10 \Rightarrow a = 10^2$$

$$\log_a(b)=2 \Rightarrow \frac{\ln b}{\ln a}=2 \Rightarrow \ln b = 2\ln a \Rightarrow b = a^2 = 10^4$$

إعداد: أ. حسن أصف سليمان | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

25

ليكن f التابع المعرف على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x}$
عند حساب نهاية التابع f عند الصفر نجد أنها تساوي :

A	B	C	D
$-\infty$	0	$\sqrt[3]{e^2}$	$\frac{1}{27}$

الحل

$$f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x}=\frac{1}{(\sqrt[3]{x}\ln x)^3}=\frac{1}{(\sqrt[3]{x}.3\ln\sqrt[3]{x})^3}=\frac{1}{27(\sqrt[3]{x}.\ln\sqrt[3]{x})^3}$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{27}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{(\sqrt[3]{x}.\ln\sqrt[3]{x})^3}=-\infty$$

إعداد: أ. عمرو ماهر معلا | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

26

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R_+^* وفق : $f(x)=\ln x$
إن مماس C في نقطة منه فاصلتها $2e$ يقطع محور التراتيب بنقطة ترتيبها يساوي :

A	B	C	D
-1	$-\ln 2$	$\ln 2$	$1+\ln 2$

الحل

$$f(2e)=\ln(2e)=\ln 2+1$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad f'(2e)=\frac{1}{2e}$$

وبالتالي معادلة المماس: $y=f(2e)+f'(2e)(x-2e)$

$$y=\ln 2+1+\frac{1}{2e}(x-2e)=\ln 2+\frac{1}{2e}x$$

المماس يقطع محور التراتيب $\Rightarrow x=0\Rightarrow y=\ln 2$

إعداد: أ. غياث منصور | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

27

ليكن التابع f المعرف على $]0,\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{\ln(1+x)-(x\ln x)^2}{x}$ فإن نهاية هذا التابع عند الصفر هي:

A	B	C	D
$-\infty$	-1	0	1

الحل

$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{(x\ln x)^2}{x}$ و $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{(x\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2=4\lim_{x\to0}(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2=4(0)^2=0$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=1-0=1$$

إعداد: أ. مازن علي | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سلم

28

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$

عندئذ الخط البياني C_g للتابع $g(x)=\ln(x-1)-\ln(x-3)$ هو:

A		B		C		D	
A	C_f	B	نظير C_f بالنسبة لـ $(1,3)$	C	جزء من C_f على المجال $]3,+\infty[$	D	جزء من C_f على المجال $]-\infty,1[$

الحل:

$$D_g=]3,+\infty[$$

$$g(x)=\ln(x-1)-\ln(x-3)=\ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)=f(x)$$

بالتالي C_g جزء من C_f على المجال $]3,+\infty[$

إعداد: أ. هيثم ديوب	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

29

لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق: $u_n=\ln\left(\frac{n\cdot e}{n+1}\right)$

وليكن: $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ ، عندئذ فإن S_n يساوي:

A	$-\ln(n+1)$	B	$\ln(n+1)$	C	$n-\ln(n+1)$	D	$n+\ln(n+1)$

الحل:

$$S_n=\ln\left(\frac{e}{2}\right)+\ln\left(\frac{2e}{3}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{(n-1)\cdot e}{n}\right)+\ln\left(\frac{n\cdot e}{n+1}\right)$$

$$S_n=\ln\left(\frac{e}{2}\times\frac{2e}{3}\times\ldots\times\frac{(n-1)\cdot e}{n}\times\frac{n\cdot e}{n+1}\right)$$

$$S_n=\ln\left(e^n\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{(n-1)}{n}\times\frac{n}{n+1}\right)$$

$$S_n=\ln(e^n)+\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{(n-1)}{n}\times\frac{n}{n+1}\right)$$

$$S_n=n+\ln\left(\frac{1}{n+1}\right)=n-\ln(n+1)$$

إعداد: أ. علي جقول	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

30

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,0[$ وفق: $f(x)=\ln(-x)$

إذا علمت أن C يقبل مماساً في النقطة $A(a,f(a))$ يمر من المبدأ عندئذ العدد الحقيقي a يساوي:

A	$-e$	B	$-\frac{1}{e}$	C	$\frac{1}{e}$	D	e

الحل:

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

$y=\frac{1}{a}(x-a)+\ln(-a)$ والمماس يمر من المبدأ ومنه

$$0=\frac{1}{a}(0-a)+\ln(-a)\Rightarrow\ln(-a)=1\Rightarrow\boxed{a=-e}$$

إعداد: أ. أحمد ذياب الرفاعي	الجواب: A	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

18

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R_+^* وفق: $f(x)=\frac{a+b\ln(2x)}{4x^2}$ حيث $a,b\in R^*$

فإذا كان C يقبل مماساً أفقياً في نقطة منه $M\left(\frac{1}{2},1\right)$ عندئذ قيمة (a,b) تساوي:

A		B		C		D	
A	$(2,4)$	B	$(-1,-2)$	C	$(1,2)$	D	$(1,-2)$

الحل

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1 \Rightarrow \frac{a+0}{1}=1 \Rightarrow a=1$$

$$f'(x)=\frac{b\left(\frac{2}{2x}\right)\cdot(4x^2)-8x\cdot(a+b\cdot\ln(2x))}{16x^4}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{2b-4}{1}=0 \Rightarrow b=2$$

إعداد: أ. محمد مصطفى اختيار | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

19

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=ax^2+b\,x\ln x$

فإذا كان مماس C في نقطة منه $A(1,1)$ يوازي المستقيم الذي معادلته $y=x-2$ عندئذ قيمة (a,b) هي:

A		B		C		D	
A	$(1,3)$	B	$(2,1)$	C	$(2,-3)$	D	$(1,-1)$

الحل

$$A\in C \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow 1=a+0 \Rightarrow a=1$$

$$m=1=f'(1)$$

$$f'(x)=2a\,x+b\ln x+b \Rightarrow 1=2+0+b \Rightarrow b=-1$$

إعداد: أ. عبدالله الكناوي | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سلم

20

نهاية التابع f المعطى بالشكل: $f(x)=(x+1)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)$ عند $+\infty$ هي:

A		B		C		D	
A	$-\infty$	B	-1	C	0	D	1

الحل

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x+1}}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

إعداد: أ. محمد الحموش | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سلم

21

إن التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\ln x^2-(\ln x)^2$ متزايد تماماً على كامل المجال:

A		B		C		D	
A	$]1,e^2[$	B	$\left]\frac{1}{2},2e\right[$	C	$]e,+\infty[$	D	$]0,e]$

الحل

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}=\frac{2-2\ln x}{x}$$

يكون متزايد تماما من أجل $2-2\ln x\geq 0$

ومنه $\ln x\leq 1$ إذاً $x\leq e$

إعداد: أ. نادر أبو راس | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

اختبارات رياضيات مؤتمتة للبكالوريا السورية

الجزء الثاني: الوحدة الرابعة

اختبار وحدة الأعداد العقدية

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

مهند حريقة - أمين الحايك

تنسيق وإخراج: أمين الحايك / نادر أبوراس

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبونبوت	فيصل خالد
محمد السيد علي	هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كعان
زينب يوسف	حسام قاسم	خالد الحداد	فادي الحمد
يوسف منصور	نادر أبوراس	محمد زين جعرور	فادي طنوس
زكي طحاوي	أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة
محمد العيسى	مصطفى الرزوق	صلاح سالم	عبد السلام حسن

1 نتأمل عدداً عقدياً $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ عندئذ z^{12} يساوي:

A		B		C		D		E	
	-1		$-i$		0		1		i

الحل:

$$z^{12} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{12} = \cos 4\pi + i\sin 4\pi = 1$$

إعداد: أ. خضر سيفو — الجواب: D — كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة

2 إذا كان العدد العقدي $1 - i$ أحد جذور كثير الحدود:

$$P(z) = z^4 - 3z^3 - 2z^2 + 10z - 12$$

فإن أحد الأعداد العقدية الآتية يكون أيضاً جذراً لـ $P(z)$

A		B		C		D		E	
	$2 - i$		$-1 + i$		$-1 - i$		$1 + i$		$2 + i$

الحل:

بما أن أمثال كثير الحدود أعداد حقيقية فإن جذوره تكون مترافقة

فيكون الجذر الثاني هو $1 + i$

إعداد: أ. شاكر كنجو — الجواب: D — كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة

3 حل المعادلة: $\overline{2i - iz} = |1 + \sqrt{3}\, i| - i$ بالمجهول العقدي z هو:

A		B		C		D		E	
	$1 - 2i$		$-1 - 2i$		$1 + 2i$		$-1 + 2i$		$1 + 4i$

الحل:

$$-2i + i\,\overline{z} = \sqrt{1 + 3} - i$$

$$i\,\overline{z} = 2 + i$$

$$\overline{z} = 1 - 2i \Rightarrow z = 1 + 2i$$

إعداد: أ. حسام حسن — الجواب: C — كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة

4 ليكن لدينا العدد العقدي $z = 1 - i$ عندئذ قيمة $Im\left(\frac{1}{z}\right)$ هي:

A		B		C		D		E	
	$-\frac{1}{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		$+1$		$-\frac{1}{2}i$

الحل:

$$\overline{z} = 1 + i \Rightarrow \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{(1+i)}\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$Im\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = -\frac{1}{2}$$

إعداد: أ. ضحى جناد — الجواب: A — كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة

5 في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$-z + z' = 2 + 3i \quad (1)$$
$$3z - z' = -2 + i \quad (2)$$

A	B	C	D	E
$z = 2i$, $z' = 2 + i$	$z = 4i$, $z' = 2 + 7i$	$z = 2i$, $z' = 2 + 5i$	$z = 4i$, $z' = 2 + 5i$	$z = 2i$, $z' = 2 - i$

الحل

بجمع (1) مع (2) نجد:

$$2z = 4i \quad \Rightarrow z = 2i$$

نعوض في (1)

$$-2i + z' = 2 + 3i \quad \Rightarrow \quad z' = 2 + 5i$$

إعداد : أ. حسين رشيد | الجواب : C | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

6 إن العدد $z = 2\sin\theta\, e^{i\theta}$ يمثل عدداً عقدياً مكتوباً بالشكل الأسي من أجل θ تنتمي للمجال:

A	B	C	D	E
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$	$]0, \pi[$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

الحل

يجب أن يكون $\sin\theta > 0$ أي $\theta \in]0, \pi[$

إعداد : أ. احمد ذياب الرفاعي | الجواب : D | كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة

7 العدد العقدي $z = i + \frac{3+i}{1+i}$ يساوي:

A	B	C	D	E
2	$2 + 2i$	i	$2 - i$	1

الحل

$$z = i + \frac{(3+i)(1-i)}{2} = i + \frac{3 - 3i + i + 1}{2}$$
$$z = i + 2 - i = 2$$

إعداد : أ. محي الدين اسماعيل | الجواب : A | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

8 في حالة $k \in \mathbb{Z}$ و $\theta \neq \pi(1 + 2k)$ يكون العدد العقدي $z = \dfrac{2i \cdot \cos\frac{\theta}{2}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}$ مساوياً لـ :

A	B	C	D	E
$-i$	i	1	-1	2

الحل

$$z = \frac{2i \cdot \cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = i$$

إعداد : أ. صلاح أحمد سالم | الجواب : B | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

9

في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$، ليكن y العدد العقدي الممثل بالنقطة $A(2,-3)$
عندئذ يكون العدد العقدي $z = 3 - yi$ يساوي:

A		B		C		D		E	
A	$2-i$	B	$-2i$	C	3	D	$-3+2i$	E	$6-2i$

الحل

$$z = 3-(2-3i)i$$
$$= -2i-3+3$$
$$z = -2i$$

إعداد : أ. محمد أحمد العيسى | الجواب : B | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

10

في حالة $k \in \mathbb{Z}$ و $\theta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$،
فإن العدد العقدي: $Z = \dfrac{1+\cos(2\theta)+i\cdot\sin(2\theta)}{2\cos(\theta)\cdot e^{i\theta}}$ يساوي:

A	1	B	-1	C	i	D	$-i$	E	$\dfrac{1}{\cos(\theta)}$

الحل

$$z = \frac{1+e^{2i\theta}}{2\cos(\theta)\cdot e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}\cdot(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{2\cos(\theta)\cdot e^{i\theta}}$$
$$= \frac{2\cos(\theta)}{2\cos(\theta)} = 1$$

إعداد : أ. هيثم ديوب | الجواب : A | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

11

العدد العقدي $z = \dfrac{i}{\cos x - i\sin x}$ يكتب بالشكل:

A	$\cos x + i\sin x$	B	$-\sin x + i\cos x$	C	$\sin x - i\cos x$
D	$\cos x - i\sin x$	E	$\sin x + i\cos x$		

الحل

$$z = \frac{i(\cos x + i\sin x)}{\cos^2 x + \sin^2 x} = i(\cos x + i\sin x)$$
$$z = -\sin x + i\cos x$$

إعداد : أ. فادي المحمد | الجواب: B | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

12 لتكن المعادلة $\imath z^2 + pz - q = 0$ إذا علمت أن العددين $z_1 = 2\imath$, $z_2 = 1 - \imath$ جذران للمعادلة.
فإن قيمة p و q هي:

A	B	C	D	E
$p = 1 + \imath$ $q = 2 - 2\imath$	$p = 1 - \imath$ $q = 2 - 2\imath$	$p = 1 - i$ $q = 2 + 2\imath$	$p = 1 - i$ $q = 1 + \imath$	$p = 2 - 2i$ $q = 1 - \imath$

الحل

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 1 + \imath = -\frac{p}{\imath} \Rightarrow -p = -1 + \imath \Rightarrow p = 1 - \imath$$

$$z_1 . z_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 + 2\imath = -\frac{q}{\imath} \Rightarrow -q = -2 + 2\imath \Rightarrow q = 2 - 2\imath$$

إعداد : أ. عبد الله الكناوي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة

13 لتكن الأعداد العقدية: $z_1 = 1 + 2\imath$ و $z_2 = 1 + 3\imath$ و $z_3 = -2\imath$
عندئذ فإن: $argz_1 + argz_2 + argz_3$ يساوي:

A	B	C	D	E
$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$

الحل

$$\begin{aligned} argz_1 + argz_2 + argz_3 &= arg(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3) \\ &= arg[(1 + 2\imath) \cdot (1 + 3\imath) \cdot (-2\imath)] \\ &= arg[(-5 + 5\imath) \cdot (-2\imath)] \\ &= arg(10 + 10\imath) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

إعداد : أ. نادر أبو راس	الجواب: C	كتابة وتنسيق : أ. نادر أبو راس

14 ليكن z عدد عقدي. إن عدد الحلول المختلفة للمعادلة: $\imath z^4 + 2z^2 - \imath = 0$ يساوي:

A	B	C	D	E
0	1	2	3	4

الحل

معادلة مضاعفة التربيع فيها: $\Delta = 4 - 4(\imath) \cdot (-\imath) = 0$

$$z^2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2i} = \imath$$

$$z^2 = e^{\frac{\pi}{2}\imath} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = e^{\frac{\pi}{4}\imath} \\ z_2 = e^{\frac{5\pi}{4}\imath} \end{cases}$$

إعداد : أ. خالد أحمد شوقي الحداد	الجواب: C	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

15 في مجموعة الأعداد العقدية إذا كان لدينا : $\theta = arg(1+3i) - arg(3-i)$
فإن قياس الزاوية θ يمكن أن يكون :

A	B	C	D	E
$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π

الحل

$$\theta = arg\left(\frac{1+3i}{3-i}\right) = arg\left(\frac{(1+3i)(3+i)}{9+1}\right)$$
$$\theta = arg\left(\frac{10i}{10}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

إعداد : أ. يوسف منصور | الجواب: D | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

16 طويلة العدد العقدي $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$ تساوي :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{2}$

الحل

$$|z| = \frac{|1+\sqrt{3}i|}{|1+i|}\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}}(1) = \sqrt{2}$$

إعداد : أ. أمين الحايك | الجواب : E | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

17 إن حل المعادلة : $2z - \bar{z} = 3 - 3i$ في $\mathbb{C}$ هو:

A	B	C	D	E
$z = 2$	$z = 3 - i$	$z = 3 + i$	$z = 2 - i$	$z = -1 + 3i$

الحل

نفرض: $z = x + yi$ فيكون $\bar{z} = x - yi$ وبالتالي:
$$2(x+yi) - (x-yi) = 3 - 3i$$
$$x + 3yi = 3 - 3i$$
$$x = 3 \quad , \quad y = -1$$

إعداد : أ. محمد السيد علي | الجواب : B | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

18 ليكن العدد العقدي $z = e^{i\theta}$ بفرض n عدد طبيعي فإن المقدار : $(z)^n + (\bar{z})^n$ يساوي

A	B	C	D	E
$cos(n\theta)$	$2i\sin(n\theta)$	0	$2cos(n\theta)$	$i\sin(n\theta)$

الحل

$$(z)^n + (\bar{z})^n = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2cos(n\theta)$$

إعداد : أ. رياض الحسين | الجواب : D | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

19

لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3 - 2iz^2 - z + 2i = 0$
إذا علمت أن المعادلة السابقة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً فإن هذا الحل هو:

A		B		C		D		E	
A	$-2i$	B	$-i$	C	i	D	$3i$	E	$2i$

الحل

طريقة أولى (الطريقة العامة): بفرض $z = bi$ الحل التخيلي البحت: (بالتعويض)

$$-b^3i + 2b^2i - bi + 2i = 0$$

$$-b^3 + 2b^2 - b + 2 = 0$$

$$b^2(-b+2) - b + 2 = 0 \Rightarrow (-b+2)(b^2+1) = 0$$

$$b = 2 \quad \Rightarrow \quad z = 2i$$

طريقة ثانية (طريقة خاصة):

$$z(z^2-1) - 2i(z^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (z^2-1)(z-2i) = 0$$

بالتالي $z = 2i$

ملاحظة: طريقة الدليل لا تصلح لهذا التمرين

إعداد : أ. علي جغول	الجواب: E	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

20

ليكن z_1 و z_2 و z_3 ثلاثة أعداد عقدية تحقق:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2 \quad \text{و} \quad z_1 + z_2 + z_3 = 2$$

عندها تكون قيمة المقدار $\frac{4}{z_1} + \frac{4}{z_2} + \frac{4}{z_3}$ تساوي:

A		B		C		D		E	
A	2	B	4	C	6	D	8	E	12

الحل

نعلم أن $|z|^2 = z.\overline{z}$ ومنه $\overline{z} = \frac{|z|^2}{z}$ بالتالي:

$$\frac{4}{z_1} + \frac{4}{z_2} + \frac{4}{z_3} = \frac{|z_1|^2}{z_1} + \frac{|z_2|^2}{z_2} + \frac{|z_3|^2}{z_3} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}$$

$$= \overline{z_1 + z_2 + z_3} = \overline{2} = 2$$

إعداد : أ. محمد العاشق	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة

21

الشكل الأسي للعدد العقدي $z = e^{i\frac{\pi}{4}} - 1$ هو:

A		B		C		D		E	
A	$2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{5\pi}{8}i}$	B	$2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{5\pi}{8}i}$	C	$2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{9\pi}{8}i}$	D	$2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{9\pi}{8}i}$	E	$2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{3\pi}{8}i}$

الحل

$$z = e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{i\frac{\pi}{8}} - e^{-i\frac{\pi}{8}}\right) = 2i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{5\pi}{8}i}$$

إعداد : أ. محمد غوش	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة

22

في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ ليكن z عدد عقدي ويحقق: $z = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{50}$
عندها تكون $arg(z)$ تساوي:

A	$\frac{\pi}{4}$	B	$\frac{\pi}{3}$	C	$\frac{\pi}{2}$	D	π	E	$\frac{3\pi}{2}$

الحل

z هو عبارة عن مجموع لحدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها i وعدد حدودها 51

$$z = a\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow z = 1\frac{1-i^{51}}{1-i} = \frac{1-i^{48}i^3}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}$$

$$z = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \Rightarrow arg(z) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

إعداد : أ. يونس حمود	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة

23

في المجموعة $\mathbb{C}$ إن المعادلة: $z^2 + \alpha z + 13 + i = 0$ تقبل حلاً $z = 1 + 2i$،
ومنه فإن قيمة العدد العقدي α تساوي:

A	$3 - 5i$	B	$1 + 2i$	C	$-13 + i$	D	i	E	$-4 + 3i$

الحل

نعوض الحل:

$$(1+2i)^2 + \alpha(1+2i) + 13 + i = 0$$

$$1 + 4i - 4 + \alpha(1+2i) + 13 + i = 0$$

$$\alpha(1+2i) = -10 - 5i$$

$$\alpha = \frac{-10-5i}{1+2i} = \frac{(-10-5i)(1-2i)}{1+4} = (-2-i)(1-2i)$$

$$\alpha = -2 + 4i - i - 2 = -4 + 3i$$

إعداد : أ. فاطر يونس	الجواب : E	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

24

مجموعة النقاط $M(z)$ من المستوي العقدي، التي يحقق العدد العقدي $z = x + iy$ الممثل لها العلاقة $|z - \bar{z}| = 2$ هي:

A	محور الفواصل	B	محور التراتيب	C	المستقيم $d: y = 2$
D	المستقيم $d: y = -2$	E	اجتماع المستقيمين $d_1: y = 1$ و $d_2: y = -1$		

الحل

العلاقة $|z - \bar{z}| = 2$ تكافئ $|2yi| = 2$ وبالتالي $|y| = 1$
إما $y = 1$ أو $y = -1$

إعداد : أ. فادي طنوس	الجواب: E	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

25

مجموعة النقاط $M(z)$ من المستوي العقدي، والتي يحقق العدد العقدي z الممثل لها الشرط :
المقدار $\bar{z}(i+z)$ حقيقي . هي:

A	B	C	D	E
دائرة	قطع زائد	مستقيم مائل	محور الفواصل	محور التراتيب

الحل

$$\overline{\bar{z}(i+z)} = \bar{z}(i+z)$$
$$z(-i+\bar{z}) = i\bar{z} + z\cdot\bar{z}$$
$$-iz + z\cdot\bar{z} = i\bar{z} + z\cdot\bar{z}$$
$$-iz = i\bar{z} \Rightarrow \bar{z} = -z$$

إعداد : أ. مصطفى الرزوق	الجواب: E	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

26

إن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يمثلها العدد $z = x + iy$ والمحقق للشرط :
$$|z+\bar{z}|^2 - |z-\bar{z}|^2 = 4$$
تمثل منحنياً معادلته $x^2 - y^2 = a$ حيث تكون قيمة a هي:

A	B	C	D	E
-4	-1	1	2	4

الحل

$$|2x|^2 - |2iy|^2 = 4$$
$$4x^2 - 4y^2 = 4$$
$$x^2 - y^2 = 1$$

إعداد : أ. مهند حريقة	الجواب: C	كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة

27

ليكن $a = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. نضع $z = a - a^6$ عندئذٍ يمكن كتابة z بالشكل:

A	B	C	D	E
$2\cos\frac{2\pi}{7}$	$\cos\frac{2\pi}{7}$	$2\sin\frac{2\pi}{7}$	$2i\sin\frac{2\pi}{7}$	$i\sin\frac{2\pi}{7}$

الحل

$$z = a - \frac{a^7}{a} = a - \frac{e^{2\pi i}}{a} = a - \frac{1}{a} = a - a^{-1}$$
$$= e^{\frac{2\pi}{7}i} - e^{\frac{-2\pi}{7}i} = 2i\sin\frac{2\pi}{7}$$

إعداد : أ. محمد حصرية	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة

28

إن معادلة مجموعة النقاط $M(z)$ التي يحقق العدد العقدي $z = x + yi$ الذي يمثلها الشرط :
$z^2 - \bar{z}^2 = 4i$ هي:

A	B	C	D	E
$x = 1$	$y = 1$	$x\cdot y = -1$	$x\cdot y = 0$	$x\cdot y = 1$

الحل

$$(z-\bar{z})\cdot(z+\bar{z}) = 4i$$
$$(2iy)\cdot(2x) = 4i$$
$$x\cdot y = 1$$

إعداد : أ. صفوح الأفندي	الجواب: E	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

29

إذا كان $w = x + yi$ عدداً عقدياً يحقق: $Re(w) > 0$ ،

وإذا علمت أن w جذر تربيعي للعدد $z = 3 - 4i$ ، فإن $\frac{5}{w}$ يساوي:

A	B	C	D	E
$2+i$	$1+2i$	$2-i$	$1-2i$	$2+2i$

الحل

$$w^2 = z \Rightarrow |w^2| = |z|$$

$$x^2 + y^2 = 5 \quad (1)$$

$$x^2 - y^2 = 3 \quad (2)$$

$$x \cdot y = -2 \quad (3)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2x^2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = 2 \xrightarrow{\text{نعوض في } (3)} y = -1 \\ \text{أو } x = -2 \xrightarrow{\text{نعوض في } (3)} y = 1 \end{cases}$$

وبالتالي $w = 2 - i$ (مع ملاحظة أن $Re(w) > 0$)

$$\frac{5}{w} = \frac{5}{2-i} = \frac{5(2+i)}{5} = 2 + i$$

إعداد : أ. محمد زين جعرور	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

30

في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ إذا كان z_1 و z_2 جذرا المعادلة: $iz^2 + z - 1 = 0$

فإن المجموع $\frac{1}{\overline{z_1}} + \frac{1}{\overline{z_2}}$ يساوي:

A	B	C	D	E
1	-1	$-i$	i	$1-i$

الحل

$$\frac{1}{\overline{z_2}} + \frac{1}{\overline{z_1}} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{z_1 \cdot z_2}} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2}\right)}$$

من المعادلة نجد:

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{i} = i$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{i} = i$$

$$\frac{1}{\overline{z_2}} + \frac{1}{\overline{z_1}} = \overline{\left(\frac{i}{i}\right)} = \overline{(1)} = 1$$

إعداد : أ. عبد الحميد السيد	الجواب: A	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

أتمتة منهاج رياضيات البكالوريا السورية

الجزء الأول: الوحدة الرابعة

اختبار نهاية متتالية

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

مصطفى الرزوق أمين الحايك

تنسيق وإخراج: أمين الحايك

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبو نبوت	فيصل خالد
محمد السيد علي	هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كمان
زينب يوسف	حسام قاسم	خالد الحداد	فادي الحمد
يوسف منصور	نادر أبوراس	محمد زين جعرور	فادي طنوس
زكي طحاوي	أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة
محمد العيسى	مصطفى الرزوق	صلاح سالم	عبد السلام حسن

1 نتأمل متتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ ، إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = 3$

كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ تساوي:

A		B		C		D		E	
A	0	B	$\frac{1}{3}$	C	1	D	3	E	$+\infty$

الحل

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}\left[(x_n\cdot y_n)\cdot\frac{1}{x_n}\right] = (3)(0) = 0$$

إعداد : م. طالب أسعد	الجواب : A	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

2 عند دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث : $u_n = \frac{5^n-7^n}{1-7^n}$ نجد أنها متقاربة من العدد:

A	-1	B	0	C	$\frac{1}{7}$	D	$\frac{5}{7}$	E	1

الحل

$$u_n = \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{7}\right)^n - 1} \quad ; \quad -1 < \frac{1}{7} < \frac{5}{7} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{0-1}{0-1} = 1$$

إعداد : م. صفاء قزق	الجواب : E	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

3 لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{\sin n}{n}$ عندئذ تكون نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ هي:

A	$-\infty$	B	-2	C	0	D	2	E	$+\infty$

الحل

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

وبما أن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

فحسب مبرهنة الإحاطة يكون:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

إعداد : م. حسين رشيد	الجواب : C	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

4	واحدة فقط من المتتاليات الآتية ليس لها نهاية:

A		B		C		D		E	
A	$w_n = 2^n - 1$	B	$x_n = 4^n$	C	$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$	D	$v_n = (-2)^n$	E	$t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4^n$

الحل

المتتالية $v_n = (-2)^n$ هندسية وفيها $q = -2 < -1$

وبالتالي ليس لها نهاية

إعداد : م. وسام علي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

5	ليكن q عدداً حقيقياً يحقق $0 < q < 1$ ولتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $$u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$ إذا علمت أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ فإن q يساوي:

A		B		C		D		E	
A	$\frac{1}{3}$	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{2}{3}$	D	$\frac{3}{5}$	E	$\frac{3}{4}$

الحل

لدينا مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها q وعدد الحدود $n+1$ ومنه:

$$u_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

وبما أن : $0 < q < 1$ فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-q} \Rightarrow \frac{1}{1-q} = 3 \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

إعداد : م. محمد العاشق	الجواب : C	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

6	لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = n\sqrt[3]{n}$ ، إن أصغر عدد طبيعي n_0 يحقق الشرط: من أجل كل $n > n_0$ فإن $u_n > 10^{12}$ هو:

A		B		C		D		E	
A	10^4	B	10^6	C	10^8	D	10^9	E	10^{12}

الحل

$$u_n > 10^{12} \Rightarrow n\sqrt[3]{n} > 10^{12} \Rightarrow n^4 > 10^{12\times 3} \Rightarrow n > 10^9$$

إذن $n_0 = 10^9$

إعداد : م. عبدالله حناوي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

7	θ عدد حقيقي يحقق $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ و $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق: $u_n = 2\cdot cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$:								
A	-1	B	0	C	1	D	2	E	$+\infty$
الحل	$u_n = 2\cos\left[\theta\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0\ ;\ -1<\frac{1}{2}<1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\cos(0) = 2$								
	إعداد : م. محي الدين اسماعيل		الجواب : D		كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق				
8	المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \ge 1$ وفق: $u_n = \sqrt{\frac{n}{n^3+1}} + \sqrt{\frac{n}{n^3+2}} + \sqrt{\frac{n}{n^3+3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{n^2+1}}$ عندئذ تكون نهاية هذه المتتالية:								
A	0	B	$\frac{1}{2}$	C	1	D	$\sqrt{2}$	E	$+\infty$
الحل	يساوي u_n مجموع n حداً أصغرها $\sqrt{\frac{1}{n^2+1}}$ وأكبرها $\sqrt{\frac{n}{n^3+1}}$ إذاً: $n\cdot\sqrt{\frac{1}{n^2+1}} \le u_n \le n\cdot\sqrt{\frac{n}{n^3+1}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sqrt{\frac{1}{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sqrt{\frac{n}{n^3+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3}{n^3+1}} = 1$ وبالتالي حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$								
	إعداد : م. موسى حجيج/ أبو نزار		الجواب : C		كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك				

9	المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ تحقق: $u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ، عندئذ تكون نهاية هذه المتتالية:

A	$-\infty$	B	0	C	$\frac{1}{2}$	D	1	E	$+\infty$

الحل:

لدينا: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ لأنها متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{2} > 1$

وبالتالي حسب مبرهنة المقارنة $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

إعداد : م. خضر سيفو	الجواب : E	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

10	نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n}$ إذا كان: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ عندئذ نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq1}$:

A	-3	B	$-\frac{3}{2}$	C	0	D	$\frac{3}{2}$	E	3

الحل:

$$S_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{1} + \frac{3}{3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{3} + \dots + \frac{3}{n} - \frac{3}{n-1} + \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n}$$

$$S_n = -3 + \frac{3}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -3$$

إعداد : م. نادر أبو راس	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م. نادر أبو راس

11	لتكن المتتاليتان $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ فيهما: $y_0 = 8$, $x_0 = 2$ ولتكن المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $w_n = x_n \cdot y_n$ إذا علمت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ ثابتة، وأن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان عندئذ فإن النهاية المشتركة لهما:

A	8	B	4	C	3	D	2	E	0

الحل:

$$w_n = w_0 = x_0 \cdot y_0 = 16$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = L$$

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$16 = L^2 \quad \Rightarrow L = 4$$

إعداد : م. علي جمول	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

12

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفتان وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = u_n + 4$$

إذا علمت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية، وأن: $s_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

عندئذ نهاية المتتالية $(s_n)_{n\geq0}$:

A	B	C	D	E
14	12	8	6	3

الحل

$$\left.\begin{array}{r} v_0 = 2 + 4 = 6 \\ v_1 = \left(\frac{1}{2}(2) - 2\right) + 4 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow q = \frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{2}$$

$$s_n = 6\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 12\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

لدينا: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ لأنها متتالية هندسية وفيها $-1 < q = \frac{1}{2} < 1$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 12$$

إعداد : م. مروان بركة	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

13

ليكن a و b عددين يحققان $a < b < 0$ ولتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_n = \frac{b^n - a^n}{b^n}$$

عندئذ نهاية المتتالية:

A	B	C	D	E
$-\infty$	0	1	$+\infty$	غير موجودة

الحل

$$u_n = 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad : \quad \frac{a}{b} > 1 > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

إعداد : م.عبد الحميد السيد	الجواب : A	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

14	لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{n!+(-1)^n}{n!}$ عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:								
A	$-\infty$	B	-1	C	0	D	1	E	غير موجودة

الحل

$$u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n!} \quad \Rightarrow u_n - 1 = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow |u_n - 1| = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$$

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

وبالتالي حسب مبرهنة المقارنة $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

إعداد : م. يوسف منصور	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

15	لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+1}$ عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:								
A	$\frac{1}{3}$	B	$\frac{1}{2}$	C	0	D	3	E	$+\infty$

الحل

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2n^2+2} = \frac{n^2+n}{2n^2+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

إعداد : م. زكي طحاوي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

16

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقة:

$$\begin{cases} u_0 = 3\,, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{u^2{}_{n+1}}{u_n} \end{cases}$$

عندئذ تكون نهاية هذه المتتالية:

A		B		C		D		E	
A	غير موجودة	B	0	C	$\frac{1}{3}$	D	3	E	$+\infty$

نحو الحل

العلاقة $u_{n+2} = \frac{u^2{}_{n+1}}{u_n}$ تكافىء $u^2{}_{n+1} = u_{n+2} \cdot u_n$

إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها:

$$q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{3} < 1$$

وبالتالي: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

إعداد : م. عمرو معدل	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

17

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق :

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \cdots + \frac{n}{5^n}$$

إذا علمت أن: $n \leq 2^n$ عندئذ أصغر عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ من بين الأعداد الآتية هو:

A		B		C		D		E	
A	$\frac{1}{5}$	B	$\frac{1}{4}$	C	$\frac{2}{3}$	D	$\frac{4}{5}$	E	$\frac{4}{3}$

نحو الحل

$$u_n \leq \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$u_n \leq \frac{2}{5}\;\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$$

$$u_n \leq \frac{2}{3}$$

إعداد : م. رياض الزامل	الجواب : C	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

18

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق:

$$u_{n+1} = u_n - (u_n)^2 \quad ; \quad u_0 = \frac{1}{2}$$

إذا علمت أن: $u_n \in]0,1[$ ، عندئذ نهاية هذه المتتالية:

A		B		C		D		E	
A	0	B	$\frac{1}{2}$	C	1	D	$+\infty$	E	غير موجودة

الحل

$u_n \in]0,1[$ و $u_{n+1} - u_n = -(u_n)^2 < 0$

فالمتتالية متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

نهايتها هو L هو حل المعادلة $f(x) = x$:

$$x - x^2 = x \Rightarrow x = 0$$

مع ملاحظة أن التابع f مستمر عند 0 وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

إعداد : م. رابعة سليمان	الجواب : A	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

19

$(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة وفق: $u_n = \frac{(-1)^n n+1}{n+\sqrt{n}}$ ، فإن نهاية هذه المتتالية:

A		B		C		D		E	
A	$-\infty$	B	-1	C	0	D	1	E	غير موجودة

الحل

زوجي n: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

فردي n: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n+1}{n+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = -1$

بالتالي ليس للمتتالية نهاية

إعداد : م. خالد العمر	الجواب : E	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

20

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$$

إذا علمت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ تحقق: $u_n < u_{n+1} < 4$

عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

A		B		C		D		E	
A	4	B	3	C	2	D	$\sqrt{3}$	E	غير موجودة

الحل

لدينا $u_n < u_{n+1}$ إذاً المتتالية متزايدة تماماً
ولدينا $u_n < 4$ إذاً المتتالية محدودة من الأعلى
وبالتالي فالمتتالية متقاربة

إذاً نهايتها حل المعادلة: $f(x) = x$

$$\sqrt{2x+3} = x \quad (x \geq 0 \text{ شرط الحل})$$

$$2x + 3 = x^2 \quad \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 & \text{مرفوض} \\ x = 3 \end{cases}$$

مع ملاحظة أن التابع f مستمر عند 3 وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$

إعداد : م. محمد زين جعرور	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

أتمتة تمارين رياضيات
البكالوريا السورية

أتمتة منهاج رياضيات البكالوريا السورية

الجزء الثاني: الوحدة الثالثة

اختبار المستقيمات والمستويات في الفراغ

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

مصطفى الرزوق أمين الحايك

تنسيق واخراج: أمين الحايك

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبو نبوت	فيصل خالد
محمد السيد علي	هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان
زينب يوسف	حسام قاسم	خالد الحداد	فادي الحمد
يوسف منصور	نادر أبو راس	محمد زين جعرور	فادي طنوس
زكي طحاوي	أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة
محمد العيسى	مصطفى الرزوق	صلاح سالم	عبد السلام حسن

1

ABC مثلث والنقطة E تقع في المستوي (ABC) وتحقق:

$$\overrightarrow{AE} - 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

وهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,a),(B,b),(C,c)$

عندئذ إحدى القيم الممكنة للثلاثية (a,b,c) تساوي:

A	B	C	D	E
$(3,2,-4)$	$(1,3,-4)$	$(-4,3,2)$	$(2,3,-4)$	$(-6,4,3)$

الحل

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$$

E مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(B,3),(C,-4),(A,1-(3-4))$ أي $(A,2)$

إعداد : م. مهران زنبيه	الجواب : D	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

2

المستقيم d معرف وسيطيا وفق: $d:\begin{cases} x = at - 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 2t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$ و يمر بالنقطة $A(-2,5,2)$

فتكون قيمة a

A	B	C	D	E
-2	-1	0	1	2

الحل

$$z_A = 2t \Rightarrow 2 = 2t \Rightarrow t = 1$$

$$x_A = at - 1 \Rightarrow -2 = a(1) - 1 \Rightarrow a = -1$$

إعداد : م. محسن الحسين	الجواب : B	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

3

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط: $C(0,0,1)$ ، $B(0,2,0)$ ، $A(1,0,0)$.

إن بعد النقطة O عن المستوي (ABC) يساوي:

A	B	C	D	E
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2

الحل

بفرض $dist(O,(ABC)) = h$ ولدينا: $C(0,0,c)$ ، $B(0,b,0)$ ، $A(a,0,0)$ فإن:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{9}{4} \Rightarrow h = \frac{2}{3}$$

إعداد : د. محمد غوش	الجواب : B	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

4

$ABCD$ رباعي وجوه. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,2)\,,(B,2),(C,2),(D,3)$
والنقطة M مركز ثقل المثلث ABC

عندئذ تكون قيمة العدد الحقيقي a التي تحقق: $\overrightarrow{MG} = a\overrightarrow{MD}$ تساوي:

A	$\frac{1}{3}$	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{2}{3}$	D	2	E	3

الحل

حسب الخاصة التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(D,3)$ و $(M,6)$.

$$\overrightarrow{MG} = \frac{3}{3+6}\overrightarrow{MD} \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MD}$$

إعداد : م. مازن علي	الجواب : A	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

5

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المثلث ABC حيث $A(1,0,-4)$, $B(1,-1,-2)$, $C(3,2,2)$

ان أحد التمثيلات الوسيطية للمستقيم Δ المنطبق على المتوسط النازل من B على الضلع $[AC]$:

A	$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \quad ; \ t \in \mathcal{R} \\ z = t-2 \end{cases}$	B	$\begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t+1 ; t \in [0,+\infty[\\ z = t-1 \end{cases}$	C	$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t+2 \quad ; \ t \in \mathcal{R} \\ z = -t+1 \end{cases}$
D	$\begin{cases} x = -t+1 \\ y = -2t \quad ; \ t \in [0,1] \\ z = -t-4 \end{cases}$	E	$\begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 2t+1 \quad ; t \in \mathcal{R} \\ z = 6t-1 \end{cases}$		

الحل

لدينا النقطة $I(2,1,-1)$ منتصف $[AC]$

وبالتالي شعاع توجيه المستقيم Δ يكون: $\overrightarrow{BI}(1,2,1)$ و $t \in \mathcal{R}$

إعداد : م . محي الدين اسماعيل	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

6

في معلم متجانس $\left(O;\frac{1}{3}\overrightarrow{OA},\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ معادلة المستوي (ABC) قد تكون:

A	$3x+2y+z-1=0$	B	$x+y-z-3=0$	C	$x+y+z-2=0$
D	$3x+2y+z-9=0$	E	$2x+3y+6z-6=0$		

الحل

لدينا: $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$ $C(0,0,1)$

معادلة المستوي (ABC): $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$

وبالتالي $2x+3y+6z-6=0$

إعداد : م . يوسف منصور	الجواب : E	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

7	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستويات الثلاثة P_1 و P_2 و P_3 التي معادلاتها: $P_3: -x+y+2z=3$, $P_2: -x+y-2z=-2$, $P_1: x-y+2z=1$ عند دراسة الوضع النسبي لهذه المستويات نجد أن مجموعة النقاط المشتركة بينها تمثّل:

A	نقطة وحيدة	B	المستوي P_1	C	مجموعة خالية	D	نصف مستقيم	E	مستقيم

الحل: واضح أن المستويين P_1 و P_2 متوازيان تماماً (غير منطبقين)

وبالتالي فإن مجموعة النقاط المشتركة بين المستويات الثلاث هي مجموعة خالية

إعداد : م. مصطفى الرزوق	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

8	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستويان: $Q: y+z-2=0$, $p: x+2z+1=0$ إن التمثيل الوسيطي للفصل المشترك للمستويين P ، Q يمكن أن يكون:

A	$\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases} ; t\in\mathcal{R}$	B	$\begin{cases} x=-t-1 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases} ; t\in\mathcal{R}$	C	$\begin{cases} x=-t+2 \\ y=-2t-1 \\ z=t \end{cases} ; t\in\mathcal{R}$
D	$\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-1 \\ z=t \end{cases} ; t\in\mathcal{R}$	E	$\begin{cases} x=-2t-1 \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases} ; t\in\mathcal{R}$		

الحل:

$$P \Rightarrow x=-2z-1$$

$$Q \Rightarrow y=-z+2$$

نفرض $z=t$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك:

$$\begin{cases} x=-2t-1 \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases} ; t\in\mathcal{R}$$

إعداد : م. خالد الحداد	الجواب : E	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

9

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستويات الثلاثة P_1 و P_2 و P_3 التي معادلاتها:

$$P_1: x + z = 1 \quad , \quad P_2: y + z = 2 \quad , \quad P_3: x + y - z = 3$$

تتقاطع هذه المستويات بنقطة إحداثياتها:

A		B		C		D		E	
A	$(-2,-1,3)$	B	$(0,1,2)$	C	$(2,3,-1)$	D	$(1,2,0)$	E	$(1,-2,0)$

الحل

$$P_1 \Rightarrow x = 1 - z$$

$$P_2 \Rightarrow y = 2 - z$$

بالتعويض في P_3 نجد أن: $z = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - z + 2 - z - z = 3$

وبالتالي: $x = 1 \ , \ y = 2$

إعداد : م. فادي المحمد	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

10

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن المستوي P الذي معادلته: $P: x + y - z + 1 = 0$

وليكن المستقيم d المار من النقطة $A(1,2,3)$ ويعامد المستوي P

عندئذ فإن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d يعطى بالشكل:

A	$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = -t + 3 \end{cases} \; ; \; t \in \mathcal{R}$	B	$\begin{cases} x = 1 \\ y = t + 1 \\ z = 4t + 3 \end{cases} \; ; \; t \in \mathcal{R}$
C	$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \; ; \; t \in \mathcal{R}$	D	$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} \; ; \; t \in \mathcal{R}$
E	$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t + 3 \end{cases} \; ; \; t \in \mathcal{R}$		

الحل

شعاع توجيه المستقيم d هو ناظم المستوي P حيث $\vec{n}(1,1,-1)$

والمستقيم d يمر من النقطة $A(1,2,3)$ .... وبالتالي:

$$(d)\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -t + 3 \end{cases} \; ; \; t \in \mathcal{R}$$

إعداد : م . هيثم ديوب	الجواب : E	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

11

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل المستوي P المعطى بالمعادلة:

$$P: 2x - 2y + \alpha z + 3 = 0$$

والمستقيم d المعطى بالتمثيل الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad ; \ t \in \mathbb{R}$$

ان قيمة العدد الحقيقي α التي يكون من أجلها المستقيم d موازياً للمستوي P هي:

A	-4	B	-2	C	-1	D	2	E	4

الحل:

بما أن المستقيم d يوازي المستوي P عندئذ $\vec{v}_d$ شعاع توجيه المستقيم d يتعامد مع $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P

$$\left.\begin{matrix} \vec{v}_d(1,-1,2) \\ \vec{n}_P(2,-2,\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{v}_d = 0$$

$$\Rightarrow (2)(1) + (-2)(-1) + (2)(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

إعداد : م. عبدالله مصطفى حناوي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

12

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستقيم d المعطى بالتمثيل الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 2 \\ z = 3t \end{cases} \quad ; \ t \in \mathbb{R}$$

والمستوي P المعطى بالمعادلة: $P: 2x + ay - z + b = 0$ حيث a و b عددان حقيقيان .

إذا علمت أن المستقيم d محتوى بالمستوي P فإن الثنائية (a,b) تساوي:

A	$(0,1)$	B	$(-1,4)$	C	$(-1,-4)$	D	$(1,0)$	E	$(-1,0)$

الحل:

نعوض d في P :

$$2t + 2 + at - 2a - 3t + b = 0$$

$$(a-1)t + b - 2a + 2 = 0 \xrightarrow{\text{بالمطابقة}} \begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - 2a + 2 = 0 \end{cases}$$

بالحل المشترك نجد $b = 0$ و $a = 1$

إعداد : م. باسل سطمة	الجواب : D	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

13

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. الكرة S التي معادلتها $x^2+y^2+(z-2)^2=4$

تقطع المستوي P الذي معادلته $2x+y-2z+d=0$

وفق دائرة نصف قطرها $r=\sqrt{3}$ ...... عندئذ تكون إحدى قيم d هي:

A	B		C		D		E	
	-7	-1		0		1		2

الحل

مركز الكرة $A(0,0,2)$ ونصف قطرها $R=2$

$$dist(A,P)=\frac{|0+0-4+d|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{|d-4|}{3}$$

$$R^2=[dist(A,P)]^2+r^2 \Rightarrow 4=\frac{(d-4)^2}{9}+3 \Rightarrow (d-4)^2=9$$

إما $d=7$ أو $d=1$

إعداد : م. أحمد ذياب الرفاعي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

14

ليكن المستقيمان:

$$d:\begin{cases} x=3t-4 \\ y=-t+3 \\ z=7t-5 \end{cases} \quad ; \ t\in\mathbb{R} \qquad و \qquad \Delta:\begin{cases} x=-6s+2 \\ y=2s+1 \\ z=-14s+m \end{cases} \quad ; \ s\in\mathbb{R}$$

عندئذ قيمة m التي تجعل المستقيمين منطبقين هي:

A	B		C		D		E	
	-9	-2		1		3		9

الحل

نأخذ نقطة من d من أجل $t=0$ فتكون $(-4,3,-5)$ نعوض في Δ :

$$x=-6s+2 \Rightarrow -4=-6s+2 \Rightarrow s=1$$

$$z=-14s+m \Rightarrow -5=-14(1)+m \Rightarrow m=9$$

إعداد : م. حسن علي سليمان	الجواب : E	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

أتمتة تمارين رياضيات
البكالوريا السورية

15

نتأمل المستقيمين:

$$d:\begin{cases}x=t-1\\ y=3t-4\\ z=-t+1\end{cases} : t\in\mathcal{R}\ ,\qquad d':\begin{cases}x=2s-1\\ y=3s+a\\ z=s-2\end{cases} : s\in\mathcal{R}$$

إن قيمة a التي تجعل المستقيمين d' و d متقاطعين هي:

A		B		C		D		E	
	-3		-2		-1		0		1

الحل

بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين نجد:

$$\begin{aligned} t-1&=2s-1 \quad (1)\\ 3t-4&=3s+a \quad (2)\\ -t+1&=s-2 \quad (3)\end{aligned}$$

بجمع (1) و(3) نجد:

$$-3s=-3 \Rightarrow s=1$$

نعوض في (1) نجد: $t=2$ وبالتالي حسب (2): $a=-1$

إعداد : م. موسى حجيج / أبو نزار	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

16

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعرف المستوي $P: x+y+z-1=0$ والكرة S التي مركزها $A(-2,0,0)$

إذا كان المستوي P يقطع الكرة S في دائرة مركزها H، فإن إحداثيات H هي:

A		B		C		D		E	
	$(0,2,2)$		$(-1,1,1)$		$(1,0,0)$		$(2,1,-2)$		$(-1,2,0)$

الحل

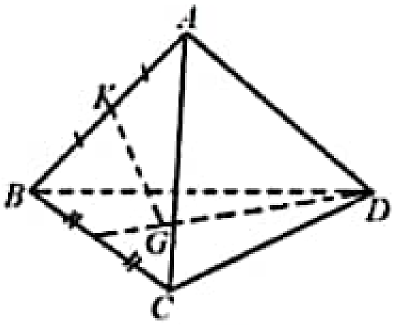
H هي المسقط القائم لـ A على P :

$$d\perp P \Rightarrow \vec{u}_d=\vec{n}_P=(1,1,1) \Rightarrow d:\begin{cases}x=t-2\\ y=t\\ z=t\end{cases} \quad ;\ t\in\mathbb{R}$$

نعوض d في P فنجد $t=1$ إذاً $H(-1,1,1)$

إعداد : م. نور الدين صندقلي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

17	$ABCD$ رباعي وجوه والنقطة G هي مركز ثقل المثلث BCD والنقطة K منتصف $[AB]$ ولتكن النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D,2)$, $(C,2)$, $(B,3)$, $(A,1)$ عندئذ النقطة H تحقق العلاقة: $\overrightarrow{KH} = \lambda \cdot \overrightarrow{KG}$ عندئذ قيمة λ هي:



A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{2}{3}$	C	$\frac{3}{4}$	D	1	E	2

الحل

النقطة K منتصف $[AB]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$

النقطة G مركز ثقل المثلث BCD فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$

النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$, $(B,1)$, $(B,2)$, $(C,2)$, $(D,2)$

حسب الخاصية التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(G,6)$ و $(K,2)$

وبالتالي: $\overrightarrow{KH} = \frac{6}{6+2}\overrightarrow{KG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{KG}$

إعداد : م. فادي طنوس	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

18	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ كرة مركزها $A(1,-3,0)$ وتمس المستوي: $P: x-2y+z=1$ عندئذ إحداثيات نقطة التماس هي:

A	$(0,-1,-1)$	B	$(1,1,-1)$	C	$(2,-5,1)$	D	$(4,2,1)$	E	$(1,1,2)$

الحل

بفرض النقطة B نقطة التماس وبالتالي يكون $(AB) \perp P$

وبالتالي ناظم المستوي $\overrightarrow{n_P}(1,-2,1)$ هو شعاع توجيه المستقيم (AB) وبالتالي نجد:

$$(AB): \begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t-3 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي نجد:

$$(t+1) - 2(-2t-3) + (t) = 1 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

وبالتالي إحداثيات النقطة B: $(0,-1,-1)$

إعداد : م. محمد السيد علي	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

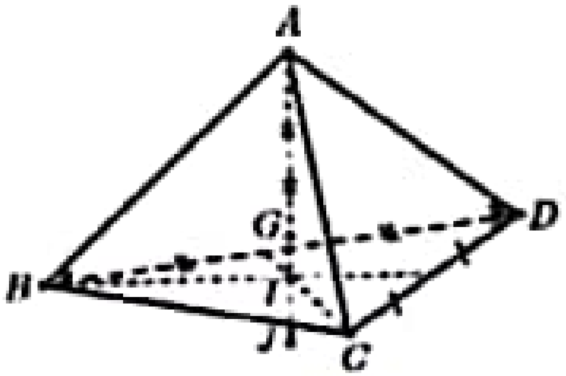
19

$ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G

I مركز ثقل المثلث BCD والنقطتان G و J متناظرتان بالنسبة إلى I

قيمة α لتكون النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

(A,α) ، $(B,1)$ ، $(C,1)$ ، $(D,1)$



A	B	C	D	E
$\frac{-3}{5}$	$\frac{-5}{3}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-5}{4}$

من الشكل لدينا: $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AI}$

وبالتالي النقطة J: مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,5)$ و $(A,-1)$

وبما أن النقطة I مركز ثقل المثلث BCD نضرب الأثقال بـ $\frac{3}{5}$

فتكون النقطة J: مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,3)$ و $\left(A,-\frac{3}{5}\right)$

وبالتالي $\alpha = \frac{-3}{5}$

إعداد : م. رياض الحسين	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

أتمتة منهاج رياضيات البكالوريا السورية

الجزء الأول: الوحدة الثالثة

اختبار وحدة الاشتقاق

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة:

م. حسام قاسم	م. مهند حريقة	د. مصطفى الرزوق

تنسيق وإخراج: المهندس حسام قاسم

ساعد في التنسيق الأستاذ نادر أبو راس

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبو نبوت	محمد السيد علي
هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كعان	زينب يوسف
حسام قاسم	خالد الحداد	فادي الحمد	يوسف منصور
نادر أبو راس	محمد زين جعرور	فادي طنوس	زكي طحاوي
أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة	محمد العيسى
مصطفى الرزوق	صلاح سالم	عبد السلام حسن	

1

f تابع معرف و اشتقاقي على R وفق : $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}$ عندئذ $f'(x)$ يساوي:

A	B	C	D	E
$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\sin\frac{\pi}{2}$	$\sin\frac{\pi}{2}$

حل

f تابع ثابت مشتقه صفر

إعداد : د.مصطفى الرزوق	الجواب : B	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

2

نعرف التابع f على R وفق : $f(x)=(2+x)(2-x)$

عندئذٍ يكون f متزايد تماماً على المجال:

A	B	C	D	E
$[+2,+\infty[$	$]0,+\infty[$	$]-\infty,+2[$	$]-\infty,0]$	$[-2,+2]$

حل

$$f(x)=4-x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x\geq 0 \Rightarrow x\leq 0$$

إعداد : م نادر أبورلس	الجواب : D	كتابة وتنسيق: م مهند حريقة

3

ليكن f تابعاً معرفاً واشتقاقياً على R^* وفق : $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

عندئذٍ قيمة $f'\left(\frac{1}{\pi}\right)$ تساوي:

A	B	C	D	E
-1	$-\frac{1}{\pi}$	1	π	π^2

حل

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{\pi}\right)=-\pi^2(-1)=\pi^2$$

إعداد : م محمد أحمد العيسى	الجواب : E	كتابة وتنسيق: م مهند حريقة

4

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = x^3 - 7$

إن معادلة المماس للخط C_f في النقطة منه التي ترتيبها (1) هي:

A		B		C		D		E	
A	$y = 12x - 2$	B	$y = 12x + 1$	C	$y = 12x - 25$	D	$y = 3x - 5$	E	$y = 12x - 23$

حل

$$y = 1 \Rightarrow 1 = x^3 - 7 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2,1)$$
$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(2) = 12$$
$$\Delta: y = 12x - 23$$

إعداد: م هيثم ديوب	الجواب: E	كتابة وتنسيق: م مهند حريقة

5

ليكن f تابع معرف واشتقاقي على $R \setminus \{-1\}$ وفق: $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

إن مجموعة جميع قيم x التي تعدم $f'(x)$ هي:

A	$\{0,1\}$	B	$\{-2,0\}$	C	$\{0,2\}$	D	$\{-2,1\}$	E	$\{1,2\}$

حل

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - 1(x^2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

إعداد: م محمد زين جرجور	الجواب: B	كتابة وتنسيق: م مهند حريقة

6

f تابع اشتقاقي على R^* ومعطى وفق: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ عندئذٍ $x f'(x) = a f(x)$

حيث a يساوي:

A	-2	B	-1	C	$\frac{1}{2}$	D	1	E	2

حل

$f'(x) = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$ ومنه $x f'(x) = -\frac{2}{x^2} = -2f(x)$ بالتالي $a = -2$

إعداد: م عبد الحميد السيد	الجواب: A	كتابة وتنسيق: المهندس حسام قلسم

7 f و g تابعان معرفان واشتقاقيان على R حيث: $f'(x)=\frac{x}{x^2+1}$ و $g(x)=f(-x)-f(x)$

عندئذ $g'(x)$ يساوي:

A	2	B	$-f'(x)$	C	$2f'(x)$	D	$-2f'(x)$	E	0

الحل:

$$g'(x)=-f'(-x)-f'(x)=-\frac{-x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}=0$$

إعداد: م. فادي طنوس	الجواب: E	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

8 ليكن f تابع دوري معرف على R وفق: $f(x)=\sin\left(-\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$

فإن أصغر دور للتابع f هو:

A	-8π	B	-4π	C	$\frac{\pi}{4}$	D	2π	E	8π

الحل:

$T=\frac{2\pi}{|a|}$ ولدينا $a=-\frac{1}{4}$ وبالتالي $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$

إعداد: م هبة مرهج	الجواب: E	كتابة وتنسيق: م مهند حريقة

9 ليكن f تابع اشتقاقي على $I=]-1,1[$ ويحقق: $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f(0)=0$

عندئذ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ تساوي:

A	-1	B	0	C	1	D	2	E	$+\infty$

الحل:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$$

إعداد: م عدي الخميس	الجواب: C	كتابة وتنسيق: م مهند حريقة

10

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{4\}$ وفق: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-4}$ وليكن b عدداً حقيقياً.

إن قيمة b التي تجعل النقطة $A(4,b)$ مركز تناظر للخط البياني C هي:

A		B		C		D		E	
A	8	B	4	C	2	D	-2	E	-8

الحل:

$$f(x)+f(2x_0-x)=2y_0$$

$$x=0:\ f(0)+f(8-0)=2b$$

$$-\frac{1}{4}+\frac{65}{4}=2b \Rightarrow b=8$$

إعداد: م . أحمد نيف الرفاعي	الجواب: A	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

11

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x)=x^2$

ولتكن النقاط A و B و D من C التي فواصلها على الترتيب هي: 1 , -3 , α

إن قيمة α التي تجعل المماس لـ C في النقطة D موازياً للمستقيم (AB) هي:

A		B		C		D		E	
A	-2	B	-1	C	1	D	3	E	9

الحل:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{9-1}{-3-1}=-2 \quad , \quad f'(x)=2x$$

$$f'(\alpha)=2\alpha \Rightarrow 2\alpha=-2 \Rightarrow \alpha=-1$$

إعداد: م عبد السلام زكريا	الجواب: B	كتابة وتنسيق: م مهند حريفة

12

g و h تابعان اشتقاقيان على R ويحققان: $h(0)=-1$, $h'(0)=-1$, $g(0)=3$, $g'(0)=-1$

عندها تكون معادلة المماس للخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x)=g(x).h(x)$

في النقطة التي فاصلتها صفر هي:

A		B		C		D		E	
A	$y=2x-3$	B	$y=3x+2$	C	$y=-2x+3$	D	$y=-2x-3$	E	$y=-3x-2$

الحل:

$$f'=g'.h+h'.g \Rightarrow m=f'(0)=g'(0).h(0)+h'(0).g(0)=-2$$

$$f(0)=g(0).h(0)=-3 \Rightarrow T: y=-2x-3$$

إعداد: م خالد العمر	الجواب: D	كتابة وتنسيق: م مهند حريفة

13

ليكن f التابع المعرف على $]1,\infty[$ وفق : $f(x) = -2x + 4\sqrt{x-1} + 1$

إن C_f الخط البياني للتابع f يقبل مماس أفقي في نقطة منه إحداثياتها :

A		B		C		D		E	
	$(2,-1)$		$(2,1)$		$(1,-1)$		$(5,-1)$		$\left(\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right)$

الحل

الخط C_f يقبل مماس أفقي عندما $f'(x) = 0$

f اشتقاقي على $]1,\infty[$ و مشتقه :

$$f'(x) = -2 + \frac{4}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow x = 2\ , \qquad f(2) = 1$$

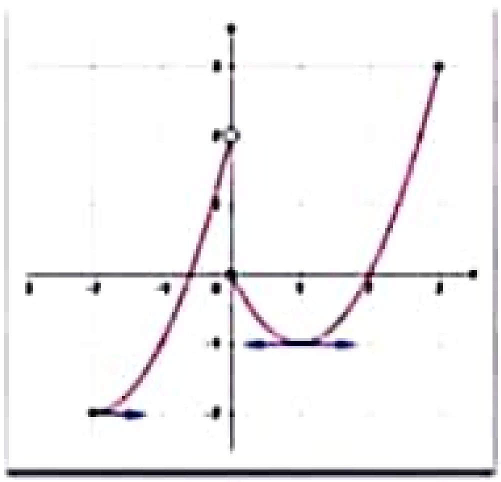
إذا نقطة التماس هي $(2,1)$

إعداد: م . محسن قصير	الجواب : B	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

14

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[-2,3]$.

عدد القيم الحدية التي يبلغها التابع f هو:



A		B		C		D		E	
	1		2		3		4		5

الحل

يوجد ثلاث قيم حدية هي:

$f(-2) = -2$ قيمة حدية صغرى محلياً

$f(1) = -1$ قيمة حدية صغرى محلياً

$f(3) = 3$ قيمة حدية كبرى محلياً

إعداد: م . حسن آصف سليمان	الجواب: C	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

15 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

عندئذٍ يقبل C مماسين أفقيين معادلتيهما :

A		B		C		D		E	
A	$y=-2$, $y=\frac{1}{2}$	B	$y=2$, $y=\frac{1}{2}$	C	$y=2$, $y=-\frac{1}{2}$	D	$y=-2$, $y=2$	E	$y=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$

الحل

$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

بما أن المماسات أفقية عندئذٍ ميلها معدوم

$f'(x) = 0$

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \Rightarrow y = f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

إعداد : م محمد حصرية	الجواب : E	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

16 لتكن التوابع f و g و h التي تحقق : $f(x) = h(g(x))$

وبفرض أن $h'(3) = -2$ و $g'(2) = -1$ و $g(2) = 3$ فإن $f'(2)$ تساوي :

A		B		C		D		E	
A	-6	B	-3	C	-2	D	2	E	3

الحل

$f'(x) = h'(g(x)).g'(x)$

$f'(2) = h'(g(2)).g'(2)$

$f'(2) = h'(3).(-1) = -2(-1) = 2$

إعداد : م سامر المهماني	الجواب : D	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

أتمتة تمارين رياضيات البكالوريا السورية

17

f تابع معرف واشتقاقي على R ويحقق : $f(0) = -1$ و $\sqrt{1+x^2}\, f'(x) = -f(x)$

إنّ قيمة $f''(0)$ تساوي :

A		B		C		D		E	
A	1	B	0	C	-1	D	$-\sqrt{2}$	E	-2

نشتق طرفي المساواة: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot f'(x) + \sqrt{1+x^2}\, f''(x) = -f'(x)$

نعوض $x = 0$: $0 + 1.f''(0) = -f'(0)$

$$\sqrt{1+(0)^2}\, f'(0) = -f(0) \Rightarrow f'(0) = -(-1) \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(0) = -1$$

إعداد : د محمد غوش	الجواب : C	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

18

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف والاشتقاقي على R وفق العلاقة: $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2+1}}$

حيث a و b عددان حقيقيان. إذا علمت أن المماس T للخط C في النقطة $A(0,2)$ منه يعامد المستقيم الذي معادلته $d: y = -x$. فإن قيمة (a, b) هي :

A		B		C		D		E	
A	$(-1,2)$	B	$(2,0)$	C	$(2,1)$	D	$(1,2)$	E	$(2,-1)$

$f(0) = 2$ ومنه نجد $b = 2$

ميل المستقيم d هو $m = -1$ فيكون ميل T هو 1 ومنه نجد $f'(0) = 1$

$$f'(x) = \frac{a\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(ax+b)}{x^2+1}$$

نعوض $x = 0$ فنجد $a = 1$

إعداد : م عبد الله حناوي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

19

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{1}{3}x + 1$

حيث $a, b \in R^*$. عندئذ C_f يقبل مماساً أفقياً وحيداً إذا كان:

A	B	C	D	E
$b = a$	$b^2 = a$	$b = a^2$	$b^2 = 2a$	$b = 2a$

الحل

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + \frac{1}{3}$ المماس أفقي $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3ax^2 + 2bx + \frac{1}{3} = 0$

$\Delta = 4b^2 - 4a$

حتى يقبل الخط C_f مماساً وحيداً يجب أن يكون $\Delta = 0$ ومنه : $4b^2 - 4a = 0 \Rightarrow b^2 = a$

إعداد: م. يوسف منصور	الجواب: B	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

20

عند استخدام التقريب الخطي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.2)$ حيث f تابع معرف واشتقاقي على R وفق $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 3}$ نجد أنها تساوي :

A	B	C	D	E
-1.1	-0.9	0	0.9	1.1

الحل

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \quad , f(1) = -1 , f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a).h$$

$$f(1.2) \approx -1 + \left(\frac{1}{2}\right)(0.2) = -0.9$$

إعداد: م. مروان بركة	الجواب: B	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

21

نعرف التابع f على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \sin^2 \sqrt{x}$

عندئذ $f'(x)$ يساوي:

A	B	C	D	E
$\frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$	$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	$\frac{\cos(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$	$\frac{\sin 2x}{2x}$	$\frac{\sin x}{x}$

الحل

$$f'(x) = 2\sin\sqrt{x}\,(\sin\sqrt{x})' = 2\sin\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\right) = \frac{2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

إعداد: م. فادي المحمد	الجواب: A	كتابة وتنسيق: م. مهند حريقة

22

ليكن التابع f المعرف على $R\setminus\left\{0,\ \frac{\pi}{4}+\pi k\ :\ k\in Z\right\}$ وفق العلاقة :

$$f(x)=\frac{(\sin x-\cos x)^2}{x.\sin 2x-x}$$

عندئذ $f'(3)$ يساوي :

A		B		C		D		E	
A	$-\frac{1}{3}$	B	$-\frac{1}{9}$	C	$\frac{1}{9}$	D	$\frac{1}{3}$	E	3

الحل

$$f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}{x(\sin 2x-1)}=\frac{1-\sin 2x}{x(\sin 2x-1)}=-\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(3)=\frac{1}{9}$$

إعداد : م محمد السيد علي	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

23

f تابع معرف على R وفق : $f(x)=x^3+\lambda x^2+3x-1$ حيث λ وسيط حقيقي.

إن مجموعة قيم λ التي من أجلها يكون التابع f متزايد تماما على R هي :

A		B		C		D		E	
A	$]-\infty,-3[$	B	$]-\infty,+\infty[$	C	$]3,+\infty[$	D	$\mathbb{R}\setminus[-3,3]$	E	$[-3,3]$

الحل

f معرف واشتقاقي على R ومشتقه : $f'(x)=3x^2+2\lambda x+3$

f متزايد تماما على $R \Leftrightarrow f'(x)\ge 0$

بالتالي المعادلة $f'(x)=0$ اما مستحيلة الحل أو لها جذر مضاعف

$$3x^2+2\lambda x+3=0,\quad \Delta\le 0\ \Rightarrow\ \lambda^2-9\le 0\ \Rightarrow\ \lambda\in[-3,3]$$

إعداد: م . بلال أبو حصيني	الجواب : E	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

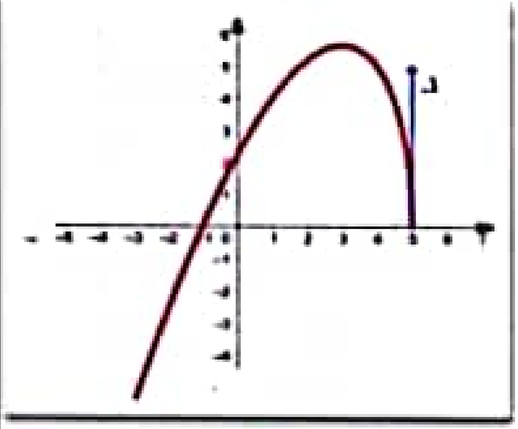
أسئلة لمدرسي رياضيات البكالوريا السورية

24

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,5]$.

Δ مماس شاقولي للخط البياني C_f عند 5 .

عندئذ $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)}{x-5}$ تساوي :



A		B		C		D		E	
A	$-\infty$	B	-5	C	0	D	5	E	$+\infty$

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=-\infty$$

توضيح: لأن المماس شاقولي عند $x=5$ فإن نهاية معدل التغير لانهاية. والاشارة سالبة لأن التابع متناقص بجوارها فالمشتق سالب.

إعداد: م. زينب يوسف	الجواب: A	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

25

C_f و C_g الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفان على R وفق:

$$g(x)=x^2-\frac{1}{2}x \quad , \quad f(x)=\frac{1}{2}x^3$$

عندئذ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في نقطة منهما :

A		B		C		D		E	
A	$(0,0)$	B	$\left(1,\frac{1}{2}\right)$	C	$(2,1)$	D	$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$	E	$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$

بالتعويض نجد أن الخيارين B , A فقط فيهما نقاط مشتركة بين الخطين البيانين:

ولدينا $f'(x)=\frac{3}{2}x^2$, $g'(x)=2x-\frac{1}{2}$

باختيار A نجد $f(0)=0=g(0)$ و $f'(0)=0\neq g'(0)=-\frac{1}{2}$

فالخيار A خاطئ .. ولكن من اجل الخيار B نجد أن:

$$f(1)=\frac{1}{2}=g(1) \quad , \quad f'(1)=\frac{3}{2}=g'(1)$$

إعداد: م. صفوح الأفندي	الجواب: B	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

26 ليكن التابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق : $f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$ حيث : a و b عددان حقيقيان

إذا علمت أن C الخط البياني للتابع f يقبل مماساً موازياً للمستقيم d الذي معادلته $2x + y - 4 = 0$

في النقطة $A(2,5)$ ، فإن قيمة (a,b) هي :

A		B		C		D		E	
A	$(1,3)$	B	$(3,-1)$	C	$(2,1)$	D	$(-1,7)$	E	$(4,-3)$

الحل

$A(2,5) \in C \quad \Rightarrow \quad f(2) = 5 \quad \Rightarrow \quad 2a + b = 5 \quad ...(1)$

$f'(x) = a - \frac{b}{(x-1)^2}$

ميل المستقيم d : $d: y = -2x + 4 \quad \Rightarrow m = -2$

$f'(2) = m = -2 \quad \Rightarrow \quad a - b = -2 \quad ...(2)$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد : $3a = 3$ ومنه $a = 1$ بالتعويض في (1) نجد : $b = 3$

إعداد : م أحمد الكلش | الجواب : A | كتابة وتنسيق : المهندس حسام قلسم

27 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق : $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

إن عدد المماسات T للخط C والمارة من النقطة $(1,3)$ يساوي :

A		B		C		D		E	
A	0	B	1	C	2	D	3	E	4

الحل

لنفرض فاصلة نقطة التماس : a

$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3}$

$f(a) = \frac{1}{(a-1)^2}$

$f'(a) = -\frac{2}{(a-1)^3}$

معادلة المماس للخط C :

$T: \ y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$T: \ y = -\frac{2}{(a-1)^3}(x-a) + \frac{1}{(a-1)^2}$

T مار من النقطة $(1,3)$ عندئذٍ :

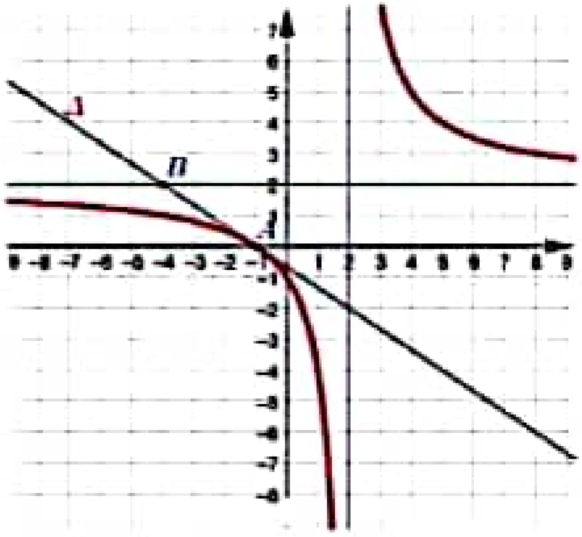
$3 = -\frac{2}{(a-1)^3}(1-a) + \frac{1}{(a-1)^2}$

$3 = \frac{2}{(a-1)^2} + \frac{1}{(a-1)^2}$

$3(a-1)^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 0 , a = 2$

يوجد مماسين

إعداد : م عبد الرحمن الحمصي | الجواب : C | كتابة وتنسيق : المهندس حسام قلسم



في الشكل المجاور لدينا C الخط البياني للتابع f

المعرف على $R\backslash\{2\}$

و Δ المماس للخط C في النقطة $(-1,0)$

احب عن الأسئلة 28 - 29 - 30

28 إن $\lim_{x\to-\infty} f(f(x))$ تساوي:

A	$-\infty$	B	-2	C	1	D	2	E	$+\infty$

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(f(x)) = \lim_{X\to 2^-} f(X) = -\infty$$

29 إن مجموعة تعريف التابع $g(x)=\sqrt{f(x)}$ هي:

A	$R\backslash\{2\}$	B	$]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$	C	$]2,+\infty[$
D	$]-\infty,-1]\cup]2,+\infty[$	E	$]0,+\infty[$		

الحل:

يجب أن يكون $f(x)\geq 0$. من الخط البياني نجد أنه يقع فوق محور الفواصل على

$]-\infty,-1]\cup]2,+\infty[$

30 إن $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}$ هي :

A	$-\infty$	B	$-\frac{3}{2}$	C	$-\frac{2}{3}$	D	0	E	$+\infty$

الحل:

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1) = m_\Delta = -\frac{2}{3}$$

الجواب		
28	29	30
A	D	C

إعداد : م خالد الحداد

كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

أتمتة منهاج رياضيات البكالوريا السورية

الجزء الأول : الوحدة الثالثة

اختبار وحدة الاشتقاق

إشراف الأستاذ : عبد الحميد السيد

كتابة :

م . حسام قاسم		م . مهند حريقة		د . مصطفى الرزوق

تنسيق واخراج : المهندس حسام قاسم

ساعد في التنسيق الاستاذ نادر أبو راس

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبو نبوت	محمد السيد علي
هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان	زينب يوسف
حسام قاسم	خالد الحداد	فادي الحمد	يوسف منصور
نادر أبو راس	محمد زين جعرور	فادي طنوس	زكي طحاوي
أمين الحايك	علي جمل	مهند حريقة	محمد العيسى
مصطفى الرزوق	صلاح سالم	عبد السلام حسن	

1

نتأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على R :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

فإن حلول المتراجحة $f'(x) < 0$ هي :

A	$]-\infty,-1[$	B	$]1,+\infty[$	C	$]-1,1[$	D	$]-\infty,+\infty[$	E	$[-1,1]$

الحل: $f'(x) < 0$ على المجال $]-1,1[$

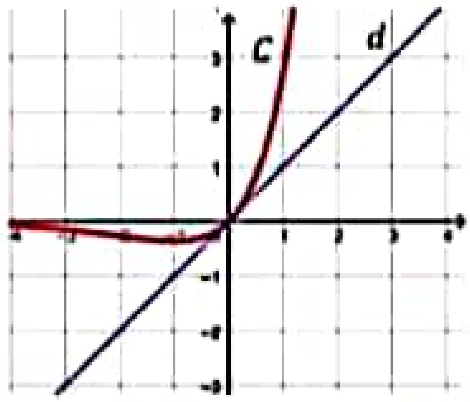
إعداد : م يوسف منصور	الجواب : C	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

2

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R

و المستقيم d مماس للخط C في المبدأ

إن قيمة $f'(0)$ هي :



A	-1	B	0	C	$\frac{1}{2}$	D	1	E	2

الحل: المماس هو منصف الربع الأول وميله واحد وهي قيمة العدد المشتق

إعداد : م خالد الحداد	الجواب : D	كتابة وتنسيق: م مهند حريقة

3

إن معادلة المماس لمنحني التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x.\sin x$

في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب هي:

A	$y = x$	B	$y = 1$	C	$x = 0$	D	$y = 0$	E	$y = -x$

الحل:

$f'(x) = \sin x + x\cos x \Rightarrow f'(0) = 0$, $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

فتكون معادلة المماس $y = 0$

إعداد : م مهند حريقة	الجواب : D	كتابة وتنسيق: م مهند حريقة

4 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف والاشتقاقي على R وفق : $f(x)=x^2-3x$

عندئذ C يقبل مماس في المبدأ معادلته :

A	B	C	D	E
$y=-3x+2$	$y=3x$	$y=-3x$	$y=2x-3$	$y=-2x$

الحل

$f(0)=0$

$f'(x)=2x-3 \quad , \quad f'(0)=-3$

معادلة المماس للخط C في المبدأ

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$y=-3x$

إعداد : م زينب يوسف	الجواب : C	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

5 f تابع معرف و اشتقاقي على R وفق : $f(x)=\sin x$ عندئذ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}$ تساوي :

A	B	C	D	E
0	1	2	3	4

الحل

$f'(x)=\cos x \quad \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

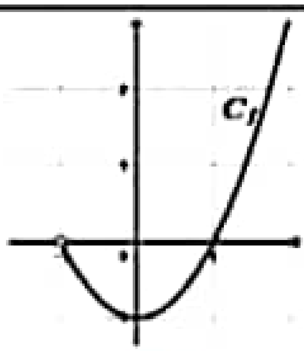
حسب تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{2}$ نجد :

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

إعداد : م صفوح الأفندي	الجواب : A	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

6 تأمل جانبا C_f الخط البياني لتابع f معرف على $I=]-1,+\infty[$

عندئذ $f(I)$ يساوي :



A	B	C	D	E
$[-1,+\infty[$	$]-1,+\infty[$	$[-1,+\infty[\setminus\{0\}$	$[-1,0]$	$]0,+\infty[$

الحل

$f(I)=[-1,+\infty[$

إعداد : م فادي المحمد	الجواب : A	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

7 ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \sqrt{3 + \sin x + \cos x}$

عندئذٍ $f'(0)$ يساوي :

A	B	C	D	E
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	2

حل

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{2\sqrt{3 + \sin x + \cos x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1 - 0}{2\sqrt{3 + 0 + 1}} = \frac{1}{4}$$

إعداد : م عمرو محل	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

8 ليكن التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق : $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^3$

والاشتقاقي على $]0, +\infty[$ فإن $f'(x)$ يساوي :

A	B	C	D	E
$\frac{3(\sqrt{x}+1)^2}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{3\sqrt{x}}$	$\frac{3(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}$	$\frac{3(\sqrt{x}-1)^3}{2\sqrt{x}}$	$\frac{3(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}}$

حل

$$f'(x) = 3 \times (\sqrt{x} - 1)^2 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

إعداد : م هشام مصطفى	الجواب : E	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

9 f تابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(x) = \frac{1}{x^2+3}$ و $h(x) = f(3x)$ عندئذ $h'(x)$ يساوي :

A	B	C	D	E
$\frac{1}{3x^2 - 1}$	$\frac{-1}{1 + 3x^2}$	$\frac{3}{x^2 + 3}$	$\frac{1}{3x^2 + 1}$	$\frac{-3}{x^2 + 3}$

حل

$$h'(x) = f'(3x) \times (3x)' = \frac{3}{3 + (3x)^2} = \frac{1}{1 + 3x^2}$$

إعداد: م. محي الدين اسماعيل	الجواب : D	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

10	ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x^4 - 4x + 1$ إنّ عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ هو :

A	0	B	1	C	2	D	3	E	4

الحل

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 4x^3 - 4$

$f'(x) = 0$

$4x^3 - 4 = 0$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = -2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات نجد أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلين في R

إعداد : م رياض الحسين	الجواب : C	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

11	ليكن f تابع معرف على R وفق: $f(x) = \sin x$ ولتكن $f^{(n)}$ المشتق من المرتبة n للتابع f على R . عندئذ المجموع : $f^{(2)}(\pi) + f^{(3)}(\pi) + f^{(4)}(\pi)$ يساوي :

A	−2	B	−1	C	0	D	1	E	2

الحل

$$f'(x) = \cos x$$

$$f^{(2)}(x) + f^{(3)}(x) + f^{(4)}(x) = -\sin x - \cos x + \sin x = -\cos x$$

$$f^{(2)}(\pi) + f^{(3)}(\pi) + f^{(4)}(\pi) = -\cos \pi = 1$$

إعداد: م. محمد زين جعرور	الجواب: D	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

12	ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ عندئذٍ إحدى النقاط التي يقبل فيها C_f مماساً موازياً للمستقيم $d: 2x+y=0$ هي:

A	$\left(4,\frac{5}{3}\right)$	B	$(0,1)$	C	$(-1,0)$	D	$(3,2)$	E	$(2,3)$

الحل

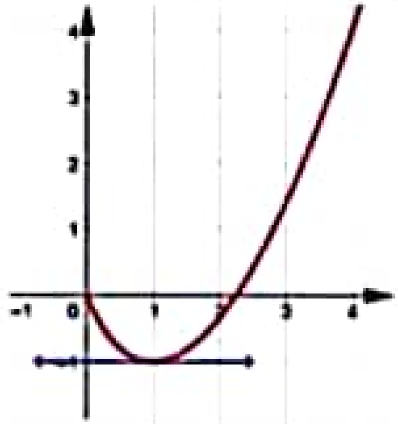
ميل d هو $m=-2$ و بالتالي ميل المماس هو -2 ومنه يجب أن يكون $f'(x)=-2$

$$-\frac{2}{(x-1)^2}=-2 \Rightarrow (x-1)^2=1$$

إما $x=0$ والنقطة هي $(0,-1)$ أو $x=2$ والنقطة هي $(2,3)$

إعداد : م شاكر كنجو	الجواب : E	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

13	في الشكل المجاور C_f الخط البياني لتابع f المعرف والاشتقاقي على $[0,+\infty[$ وفق : $f(x)=ax+bx\sqrt{x}$ إن قيم (a,b) تساوي :



A	$(-3,2)$	B	$(-3,-2)$	C	$(3,-2)$	D	$(2,-3)$	E	$(-2,3)$

الحل

$$\begin{cases} (1,-1)\in C_f \Rightarrow a+b=-1 \\ f'(x)=a+\frac{3}{2}b\sqrt{x} \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow a+\frac{3}{2}b=0 \end{cases}$$

بالحل المشترك نجد $(a=-3\,,b=2)$

إعداد : م نادر أبوراس	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

14 ليكن f التابع المعرف والاشتقاقي على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x.\cos x$ عندئذ فإن: $f''(x) + f(x)$ يساوي:

A	B	C	D	E
$-2\sin x$	$2\sin x$	$2\cos x$	$-2\cos x$	0

حل

$$f(x) = x.\cos x$$

$$f'(x) = \cos x - x\sin x$$

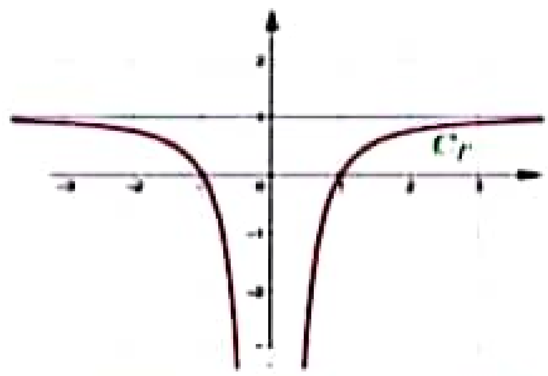
$$f''(x) = -\sin x - \sin x - x\cos x = -2\sin x - f(x)$$

$$f''(x) + f(x) = -2\sin x$$

إعداد: م. أمين الحايك	الجواب: A	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

15 يوضح الشكل جانبا $C_{f'}$ الخط البياني للتابع f' مشتق التابع f المعرف والاشتقاقي على R^*.

عندئذ عدد القيم الحدية للتابع f يساوي:



A	B	C	D	E
0	1	2	3	4

حل

ينعدم المشتق عند $x = -1$ ويغير إشارته.

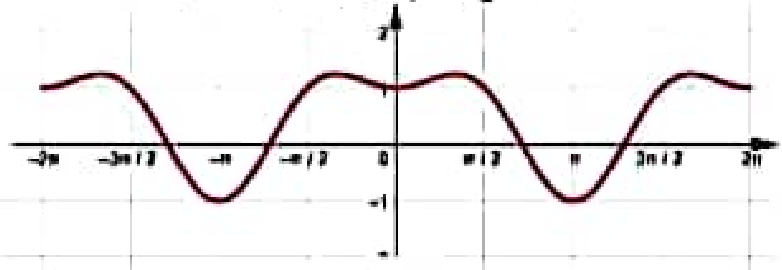
كما ينعدم عند $x = 1$ ويغير إشارته. لذا للتابع قيمتان حديتان

إعداد: م. نور الدين صندقي	الجواب: C	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

أتمتة تمارين رياضيات البكالوريا السورية

16

يوضح الشكل المرفق الخط البياني C للتابع f المعرف على المجال $[-2\pi, 2\pi]$
وهو تابع دوري وأصغر دور له T



فالتابع f و T:

A		B		C		D		E	
A	f زوجي $T = 2\pi$	B	f زوجي $T = \pi$	C	f فردي $T = \pi$	D	f فردي $T = 2\pi$	E	f ليس زوجي ولا فردي $T = 2\pi$

الحل

واضح من الرسم أن الخط C متناظر بالنسبة لمحور التراتيب ويكرر نفسه على مجال طوله 2π

إعداد : م عبد السلام حسن	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

17

ليكن لدينا التابع f المعرف والاشتقاقي على R وفق : $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b}$ حيث $a , b \in R^*$

فإن قيمة (a, b) التي لأجلها يكون للتابع f قيمة حدية محلية تساوي 2 عند $x = -2$ هي :

A		B		C		D		E	
A	$(-4, 8)$	B	$(4, 8)$	C	$(2, 4)$	D	$(-2, 4)$	E	$(2, 8)$

الحل

$f(-2) = 2$

$\sqrt{4 - 2a + b} = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 - 2a + b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 2a \ ...(1)$

$$f'(x) = \frac{2x + a}{2\sqrt{x^2 + ax + b}}$$

$f'(-2) = 0$

$$\frac{-4 + a}{2\sqrt{4 - 2a + b}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -4 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

نعوض في (1) نجد : $b = 8$

إعداد : م باسل سلطة	الجواب : B	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

18

ليكن لدينا تابعان f و g معرفان واشتقاقيان على المجال $]0,+\infty[$

ولدينا $g(x)=f(\sqrt{x})$. فإذا علمت أن $g'(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x}}$. عندئذ $f'(x)$ يساوي:

A	$\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$	B	$2x^4+4$	C	$\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$	D	x^4+2	E	$2x^2+4$

الحل

$$f(\sqrt{x})=g(x)\Rightarrow f(x)=g(x^2)$$

$$f'(x)=2x.g'(x^2)$$

$$f'(x)=2x\,.\,\frac{x^4+2}{x}=2x^4+4$$

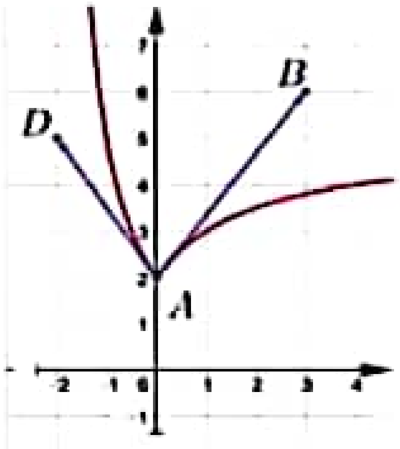
إعداد : م يونس حمود	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

19

في الشكل المجاور C_f الخط البياني للتابع f المعرف على R ولدينا:

$$a=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\quad,\quad b=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

عندئذٍ تكون قيمة الجداء $a.b$ تساوي :



A	-4	B	-2	C	-1	D	$-\dfrac{1}{2}$	E	2

الحل

لدينا النقطتان $D(-2,5)\,,A(0,2)$

$$a=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0^-)=\frac{2-5}{0+2}=-\frac{3}{2}$$

لدينا النقطتان $B(3,6),A(0,2)$

$$b=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0^+)=\frac{2-6}{0-3}=\frac{4}{3}\Rightarrow a.b=-2$$

إعداد : م زكي طحاوي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

20	ليكن التابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \sin^4 x - \cos x$ إن التابع f هو تابع :								
A	زوجي ودوري دوره الأصغر π	B	فردي ودوري دوره الأصغر 2π	C	فردي ودوري دوره الأصغر π	D	زوجي ودوري دوره الأصغر 2π	E	زوجي وغير دوري

الحل:

زوجي لأن $f(-x) = (\sin(-x))^4 - \cos(-x) = \sin^4 x - \cos x = f(x)$

$$f(x+\pi) = \sin^4(x+\pi) - \cos(x+\pi) = \sin^4 x + \cos x \neq f(x)$$

2π هو دوره $f(x+2\pi) = \sin^4(x+2\pi) - \cos(x+2\pi) = \sin^4 x - \cos x = f(x)$

إعداد : م محمد أحمد العيسى	الجواب: D	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

21	في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{x}$ وليكن Δ المستقيم المماس لـ C_f في النقطة التي فاصلتها 4 منه . نعرف النقطتان $A(1,\alpha)$ و $B(2,1)$. إن قيمة α التي تجعل المستقيمان Δ و (AB) متعامدان هي :								
A	-5	B	-1	C	0	D	2	E	5

الحل:

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقه : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$m_\Delta = f'(4) = \frac{1}{4} \quad , \quad m_{(AB)} = \frac{\alpha - 1}{1-2} = 1 - \alpha$$

$$\Delta \perp (AB) \iff m_\Delta \times m_{(AB)} = -1 \Rightarrow \frac{1}{4}(1-\alpha) = -1 \Rightarrow \alpha = 5$$

إعداد: م . خضر سيفو	الجواب: E	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

22	ليكن C_f الخط البياني لتابع f معرف واشتقاقي على R ولتكن $\Delta : y - 2x = 3$ معادلة المماس للخط C_f في نقطة منه فاصلتها صفر . فإن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}$ تساوي:								
A	-2	B	-1	C	$-\frac{1}{2}$	D	$\frac{1}{2}$	E	2

الحل:

من معادلة المماس $f(0) = 3$ و $f'(0) = m_\Delta = 2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 2$$

إعداد : م علي جمول	الجواب : E	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

23 ليكن التابع f المعرف على R وفق: $f(x) = (m-1)\,x^{n+1}$ حيث $n \in N$ و $m \in R\backslash\{1\}$

إذا علمت أن $f''(x) = -6x^2$ فإن قيمة (n,m) هي:

A		B		C		D		E	
A	$(3,-2)$	B	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	C	$\left(3,-\frac{1}{2}\right)$	D	$\left(3,\frac{2}{3}\right)$	E	$(2,3)$

الحل:

$f'(x) = (n+1)(m-1)\,x^n$

$f''(x) = n(n+1)(m-1)\,x^{n-1}$

بالمطابقة مع عبارة $f''(x)$ نجد $n-1=2$ ومنه $n=3$

$n(n+1)(m-1) = -6$

$3(3+1)(m-1) = -6 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

ملاحظة ((كان بالإمكان معرفة درجة التابع أنها من الدرجة الرابعة كون المشتق الثاني من الدرجة الثانية))

إعداد : م محمد نصر الله	الجواب : B	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

24 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \,;\, k \in Z\right\}$ وفق:

$f(x) = a\tan x + b$ حيث: a و b عددان حقيقيان

إن قيمة (a,b) التي من أجلها يكون المستقيم $\Delta: y = x-\pi$ مماساً للخط C في النقطة التي فاصلتها π هي:

A		B		C		D		E	
A	$(2,0)$	B	$(1,-1)$	C	$(1,0)$	D	$(-1,-1)$	E	$(-1,0)$

الحل:

$x_0 = \pi \Rightarrow y_0 = \pi - \pi = 0 \Rightarrow$ نقطة التماس $(\pi,0)$

$(\pi,0) \in C \Rightarrow f(\pi) = 0$

$a\tan(\pi) + b = 0 \Rightarrow a(0)+b = 0 \Rightarrow b = 0$

$f'(x) = a\,(1+\tan^2 x)$

$f'(\pi) = m_\Delta = 1$

$a\,(1+\tan^2\pi) = 1 \Rightarrow a\,(1+0) = 1 \Rightarrow a = 1$

إعداد : م أنطوان جلوف	الجواب : C	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

25 التابع f معرف على $\mathbb{R}_+$ وفق :
$$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & , x>0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

إن قيمة مشتق التابع f عند الصفر هي :

A		B		C		D		E	
A	-1	B	0	C	1	D	$\sin 1$	E	غير معينة

الحل

$$x>0\ ,\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$$

$$-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1\Rightarrow -\sqrt{x}\le\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\le\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(-\sqrt{x})=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x})=0$$

حسب مبرهنة الإحاطة: $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}.\sin\frac{1}{x}=0$ ومنه : $f'(0)=0$

إعداد: م. عبد الحميد السيد	الجواب: B	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

26 ليكن التابع f المعرف على المجال $I=[-1,1]$ وفق : $f(x)=(x+1)\sqrt{1-x^2}$

عندئذ يكون للخط البياني C_f مماساً شاقولياً معادلته هي :

A		B		C		D		E	
A	$x=1$	B	$x=-1$	C	$x=0$	D	$y=0$	E	$y=1$

الحل

يقبل الخط C_f مماساً شاقولياً $x=a$ اذا تحقق : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$

من أجل $x=-1$ نجد أن $f(-1)=0$ ويكون:

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\sqrt{1-x^2}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\sqrt{1-x^2}=0$$

أي أن f قابل للاشتقاق عند $x=-1$

من أجل $x=1$ لدينا $f(1)=0$ ويكون

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\sqrt{1-x^2}}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-(x+1)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+1)\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}=-\infty$$

f مستمر عند $x=1$ ولخطه البياني عندها مماس شاقولي

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $R\setminus\{-1\}$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \| +\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

أجب عن الأسئلة 27 - 28 - 29

27	مجموعة تعريف التابع $g(x) = \sqrt{f'(x)}$ هي:					
A	$]-\infty,-3[$	B	$]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$	C	$]-1,+\infty[$	
D	$[1,+\infty[$	E	$]-\infty,-3] \cup [1,+\infty[$			
الحل	يجب أن يكون $f'(x) \geq 0$. من الجدول نجد أن المتراجحة محققة أيا كانت x تنتمي إلى : $]-\infty,-3] \cup [1,+\infty[$					

28	عدد حلول المعادلة $f^2(x) - 1 = 0$ هو :								
A	4	B	3	C	2	D	1	E	0
الحل	المعادلة تكافئ $f^2(x) = 1$ وبالتالي إما $f(x) = 1$ ليس لها حلول . أو $f(x) = -1$ ولها حل وحيد								

29	عدد المماسات الأفقية للخط البياني للتابع f هو:								
A	0	B	1	C	2	D	3	E	4
الحل	من سطر المشتق نجد أنه ينعدم مرتين فلخطه البياني مماسين أفقيين								

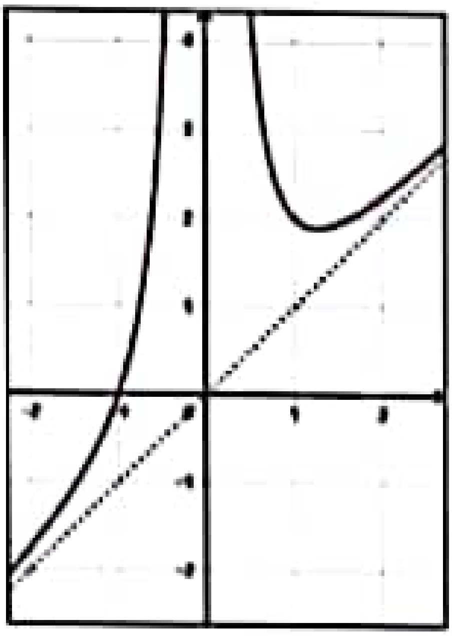
إعداد : م هيثم ديوب	الجواب			كتابة وتنسيق : م مهند حريفة
	27	28	29	
	E	D	C	

30

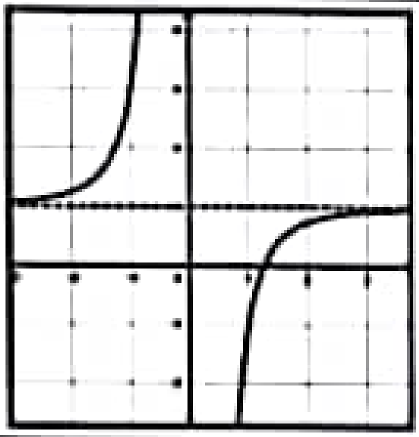
في الشكل المجاور C هو الخط البياني لتابع f

معرف واشتقاقي على $R\setminus\{0\}$

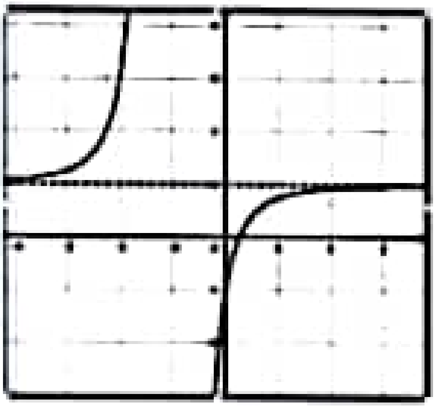
الخط البياني الذي يمثل التابع المشتق f' هو :



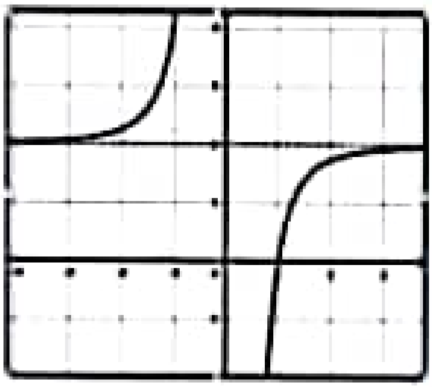
C



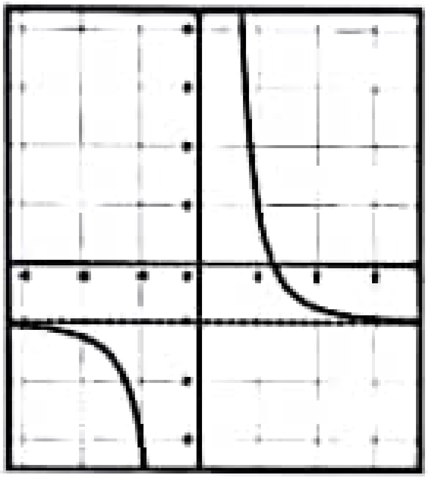
B



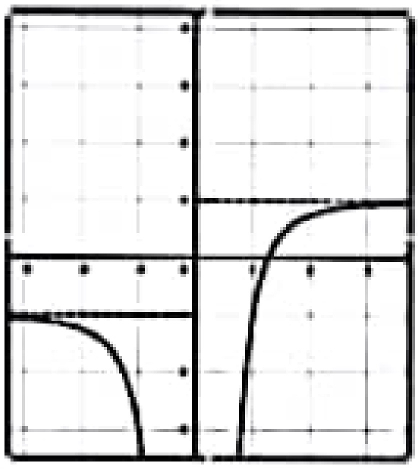
A



E



D



○ نلاحظ من الرسم أن C الخط البياني للتابع f يملك مماس أفقي في نقطة فاصلتها $\alpha \in]1,2[$

أي $f'(\alpha) = 0$ وهذا لايتحقق في A و B

○ التابع f متزايد تماما على المجال $]-\infty,0[$ وبالتالي يجب أن يتحقق $f'(x) > 0$

وهذا لايتحقق في D و E ○ بالتالي الخيار الصحيح هو C

طريقة أخرى : C يقبل مقارب مائل معادلته $y = x$ في جوار $\pm\infty$ فيحقق $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = 0$

وبالاشتقاق $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f'(x) - 1) = 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = 1$ أي أن الخط البياني للتابع المشتق يقبل

مقارب أفقي معادلته $y = 1$ نستبعد الخيارات التي لا تحقق ذلك ثم نتابع للوصول إلى الإجابة الصحيحة

اختبارات مؤتمتة لمنهاج رياضيات البكالوريا السورية

اختبار وحدة

الجداء السلمي في الفراغ

الإشراف:

الأستاذ: عبد الحميد السيد

ساعد في الإشراف الأساتذة:

أ. خالد الحداد - أ. يوسف منصور - أ. هيثم ديوب

كتابة وتنسيق وإخراج:

الأستاذ: نادر أبوراس

لجنة التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة:

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبو نبوت	محمد السيد علي
حسام قاسم	بشار كمان	صفوح الأفندي	زينب يوسف
نادر أبوراس	فادي الحمد	زكي طحاري	محمد زين جعرور
فادي طنوس	أيمن الحايك	مهند حرمة	مصطفى الرزوق
علي جمول	محمد أحمد العيسى	صلاح سالم	عبد السلام حسن

1

إذا علمت أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان و $\|\vec{v}\| = 1$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$

عندئذ فإن قيمة $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ تساوي:

A	B	C	D	E
5	4	$2\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$

الحل:

$$0 = \vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 3+1 = 4 \Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\| = 2$$

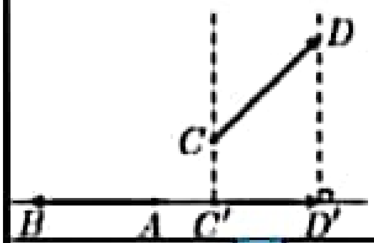
إعداد: م مريم زرزور	الجواب: D	كتابة وتنسيق: م. نادر أبوراس

2

في مستو P إذا علمت أن الشعاع $\overrightarrow{C'D'}$ المسقط القائم ل $\overrightarrow{CD}$ على (AB)

وأن $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -10$

عندئذ فإن قيمة $\|\overrightarrow{C'D'}\|$ يساوي:



A	B	C	D	E
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	2	5

الحل:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'} = -10 \Rightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\|\overrightarrow{C'D'}\|.\cos\pi = -10 \Rightarrow \|\overrightarrow{C'D'}\| = 2$$

إعداد: م. علي جمول	الجواب: D	كتابة وتنسيق: م. نادر أبوراس

3

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا الشعاعان $\vec{u}(2,-1,1)$, $\vec{v}(1,-1,0)$

إن قيمة الزاوية الهندسية θ بين الشعاعين $\vec{u}$, $\vec{v}$ تكون:

A	B	C	D	E
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

الحل:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

إعداد: م.ابتسام عيسى	الجواب: B	كتابة وتنسيق: م.نادر أبوراس

4

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,2,1)$ ، $B(2,a,1)$ ، $C(2,2,2)$
إذا علمت أن قياس الزاوية $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{3}$ فإن قيم a الموافقة تساوي:

A		B		C		D		E	
A	$\{1,3\}$	B	$\{-1,2\}$	C	$\{1,-3\}$	D	$\{-1,-3\}$	E	$\{1,2\}$

الحل

$$\overrightarrow{AB}=(1,a-2,0)\ ,\ \overrightarrow{AC}=(1,0,1)\ ,$$

$$\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{1+(a-2)^2}\cdot\sqrt{2}}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2+2(a-2)^2}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{1}{2+2(a-2)^2}\Rightarrow 2+2(a-2)^2=4\Rightarrow|a-2|=1\Rightarrow\begin{cases}a=3\\a=1\end{cases}$$

إعداد : م. وائل عنيزان	الجواب: A	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

5

$ABDC$ متوازي أضلاع فيه $AC=4$ و $AB=3$ والزاوية $\theta=\widehat{BAC}=\frac{\pi}{3}$ فتكون قيمة AD تساوي:

A		B		C		D		E	
A	$\sqrt{37}$	B	5	C	$\sqrt{13}$	D	$\sqrt{7}$	E	$\sqrt{3}$

الحل

بما أن الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع فهو يحقق $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ نربع:

$$AD^2=AB^2+AC^2+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$AD^2=AB^2+AC^2+2\,AB\cdot AC\cdot\cos\theta$$

$$AD^2=3^2+4^2+2\,(3)\cdot(4)\cdot\cos\frac{\pi}{3}=37\ \Rightarrow\ AD=\sqrt{37}$$

إعداد : م. عمرو محل	الجواب: A	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

6

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(6,0,0)$ ، $B(0,6,0)$ ، $C(0,0,3)$
إذا علمت أن $K(1,\alpha,\beta)$ هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC فإن قيم (α,β) تساوي:

A		B		C		D		E	
A	$(1,-2)$	B	$(1,2)$	C	$(2,1)$	D	$(-1,2)$	E	$(2,-1)$

الحل

$\overrightarrow{AB}(-6,6,0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-6,0,3)$ ، $\overrightarrow{CK}(1,\alpha,\beta-3)$ ، $\overrightarrow{BK}(1,\alpha-6,\beta)$

بما أن K هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC فإن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CK}=0$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BK}=0$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BK}=-6+0+3\beta=0\\\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CK}=-6+6\alpha+0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=2\end{cases}$$

إعداد : م. عبد الله الكناوي	الجواب: B	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

7 إذا علمت أن $\|\vec{u}\| = 3$ و $\|\vec{v}\| = 2$ وأن $\vec{u}.\vec{v} = 4$ ، فإن قيمة المقدار $\|\vec{u} - 2\vec{v}\|$ تساوي :

A		B		C		D		E	
A	0	B	2	C	3	D	5	E	9

الحل

$$\|\vec{u} - 2\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 4.\vec{u}.\vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2 \Rightarrow \|\vec{u} - 2\vec{v}\|^2 = 9 - 16 + 4(4) = 9$$

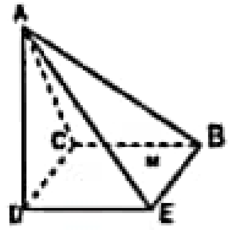
$$\Rightarrow \|\vec{u} - 2\vec{v}\| = 3$$

إعداد : م. محمد زين جرور	الجواب :C	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

8 نتأمل في الشكل جانباً $A - BCDE$ هرم ارتفاعه 2

D هو المسقط القائم لـ A على المستوي $(BCDE)$

إذا كانت M نقطة من المستوي $(BCDE)$ فإن قيمة الجداء: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD}$ تساوي



A		B		C		D		E	
A	-4	B	-2	C	0	D	2	E	4

الحل

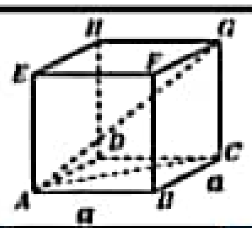
أياً كانت M من مستوي القاعدة فإن مسقط الشعاع $\overrightarrow{MA}$ على الارتفاع (AD) هو $\overrightarrow{DA}$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AD} = -AD^2 = -4$$

إعداد : م علي حسن	الجواب :A	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

9 نتأمل الشكل جانباً $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a

إذا علمت أن: $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AC} = 8$ فإن قيمة a الموافقة :



A		B		C		D		E	
A	$2\sqrt{2}$	B	2	C	$\sqrt{2}$	D	$\frac{1}{2}$	E	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

الحل

$\overrightarrow{AC}$ المسقط القائم لـ $\overrightarrow{AG}$ على المستقيم (AC)

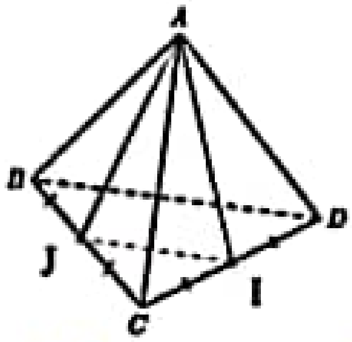
$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} = AC^2 = (a^2 + a^2) = 2a^2 = 8 \Rightarrow a = 2$$

إعداد : م. رابعة سليمان	الجواب :B	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

10

نتأمل رباعي الوجوه المنتظم $ABCD$ طول حرفه 2

إن قيمة الجداء السلمي $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$ تساوي:



A	$\frac{5}{2}$	B	$\frac{3}{2}$	C	$\frac{5}{4}$	D	$\frac{2\sqrt{3}}{4}$	E	$\frac{\sqrt{3}}{4}$

الحل

من علاقة المتوسط نعوض :

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC})$$

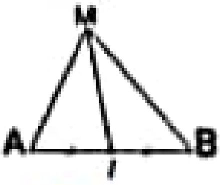
$$=\frac{1}{4}\left(2\times 2.\cos\frac{\pi}{3}+2\times 2.\cos\frac{\pi}{3}+2\times 2.\cos\frac{\pi}{3}+2^2\right)=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

إعداد: م. أنس البوشي	الجواب: A	كتابة وتنسيق: م. نادر أبوراس

11

نتأمل نقطتين A و B من الفراغ بحيث $AB=5$ ولتكن I منتصف $[AB]$

في حالة M نقطة ما من الفراغ فإن الجداء السلمي $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ يساوي:



A	$\frac{25}{4}-MI^2$	B	$25-MI^2$	C	$MI^2-\frac{25}{4}$	D	MI^2-25	E	$MI^2-\frac{25}{2}$

الحل

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})$$

$$=MI^2-IA^2=MI^2-\frac{25}{4}$$

إعداد : م. مروان بركة	الجواب: C	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

12

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن ξ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة:

$x^2+y^2+z^2-2x-4y+k=0$ حيث k عدد حقيقي

إن مجموعة قيم العدد k التي تجعل ξ تمثل مجموعة خالية هي :

A	$]0,+\infty[$	B	$]-5,+\infty[$	C	$]-\infty,0[$	D	$]-\infty,5[$	E	$]5,+\infty[$

الحل

بالإتمام لمربع كامل : $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=5-k$

مجموعة النقاط M تمثل مجموعة خالية عندما $5-k<0$ وبالتالي $5<k$

إعداد : م. حسن آصف سليمان	الجواب: E	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

13

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن ξ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة: $x^2+y^2+z^2+6y+9=0$ فهي تمثل:

A		B		C	
A	كرة مركزها $(0,-3,0)$	B	مجموعة خالية	C	نقطة وحيدة $(0,3,0)$
D	نقطة وحيدة $(0,-3,0)$	E	كرة مركزها $(0,3,0)$		

الحل

$$x^2+y^2+z^2+6y+9=0$$

$$x^2+y^2+6y+9+z^2-9+9=0$$

$$x^2+(y+3)^2+z^2=0$$

مجموعة النقاط ξ تمثل نقطة وحيدة $(0,-3,0)$

إعداد: م. زينب يوسف | الجواب: D | كتابة وتنسيق: م. نادر أبوراس

14

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستوي P الذي معادلته:
$P: x-2y+2z+\lambda=0$ (حيث λ عدد حقيقي موجب تماماً)
والكرة S التي معادلتها : $S:\ x^2+y^2+(z-1)^2=4$
إذا علمت أن المستوي P يمس الكرة S عندئذ قيمة λ تساوي:

A	1	B	2	C	4	D	6	E	8

الحل

من معادلة الكرة S نصف قطرها $R=2$ ومركزها $A(0,0,1)$ وبما أن المستوي P يمس الكرة S يكون:

$$dist(A,P)=R$$

$$\frac{|0+0+2+\lambda|}{\sqrt{1+4+4}}=2 \Rightarrow |\lambda+2|=6 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=-8 & \text{مرفوض}\\ \lambda=4 & \text{مقبول}\end{cases}$$

إعداد: م محمد أحمد العيسى | الجواب: C | كتابة وتنسيق: م نادرأبوراس

15

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(2,0,-1)$ و $B(0,4,3)$ و $M(x,y,z)$
إذا علمت أن $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ فإن مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل كرة مركزها ونصف قطرها هما:

A	$(1,2,1)$ R=$\sqrt{3}$	B	$(-1,2,1)$ R=3	C	$(-1,-2,-1)$ R=3	D	$(-1,-2,-1)$ R=$\sqrt{3}$	E	$(1,2,1)$ R=3

الحل

مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ تمثل كرة قطرها $[AB]$
مركزها N منتصف $[AB]$ أي $N(1,2,1)$

$$\overrightarrow{AB}(-2,4,4) \Rightarrow R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{4+16+16}}{2}=3$$

إعداد: م محمد حصرية | الجواب: E | كتابة وتنسيق: م نادر أبوراس

16 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ إن الكرة التي مركزها $(1,1,0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{2}$ تقطع محور الفواصل في نقطتين البعد بينهما يساوي:

A	B	C	D	E
$2\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

الحل

معادلة الكرة: $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=2$

نعوض بالمعادلة $y=z=0$

$(x-1)^2=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=2 \\ x=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(2,0,0)$ و $O(0,0,0) \Rightarrow OA=2$

إعداد: م. سلمى عبدو	الجواب: B	كتابة وتنسيق: م. نادر أبوراس

17 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا الكرة S التي مركزها $A(2,-1,3)$ وتمر من النقطة $N(-2,1,1)$ إن معادلة المستوي المماس للكرة S في النقطة N هي:

A	$2x-y+z+4=0$	B: $2x-y+2z+4=0$
C	$2x+y-z=0$	D: $2x-y-3z+8=0$
E	$x+y-z+2=0$	

الحل

المستوي يمس الكرة في $N(-2,1,1)$ ويقبل $\overrightarrow{NA}(4,-2,2)$ ناظماً له نجد معادلته:

$4(x+2)-2(y-1)+2(z-1)=0 \Rightarrow 2x-y+z+4=0$

إعداد: م. هشام التركماني	الجواب: A	كتابة وتنسيق: م. نادر أبوراس

18 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن المستويان:

$P:(\sqrt{2}-a)x+y+az-3=0$

$Q:(\sqrt{2}+a)x+6y-az+1=0$

حيث a عدد حقيقي موجب تماماً) عندئذ إن قيمة a التي تجعل المستويين متعامدين تساوي:

A	B	C	D	E
5	4	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	2

الحل

$\vec{n}_P.\vec{n}_Q=0 \Rightarrow (\sqrt{2}-a,1,a).(\sqrt{2}+a,6,-a)=0$

$\Rightarrow 2-a^2+6-a^2=0 \Rightarrow -2a^2=-8 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 & \text{مرفوض} \\ a=2 & \text{مقبول} \end{cases}$

إعداد: م أحمد الشيخ عيسى	الجواب: E	كتابة وتنسيق: م. نادر أبوراس

19

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطة $M(3,3,3)$

والمستويين المتعامدين: $P: 2x+y+2z-6=0$ و $Q: 2x-2y-z+6=0$

عندئذ بُعد M عن المستقيم Δ الفصل المشترك للمستويين P و Q هو:

A		B		C		D		E	
A	10	B	$2\sqrt{5}$	C	$\sqrt{10}$	D	$\sqrt{5}$	E	2

الحل

$$d_1 = dist(M,P) = \frac{|6+3+6-6|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$d_2 = dist(M,Q) = \frac{|6-6-3+6|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{3}{3} = 1$$

$$l = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

إعداد : م بشار كنعان	الجواب: C	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

20

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستويان P و Q معادلتاهما

$P: 2x - y + 2z + 7 = 0$

$Q: -x + \frac{1}{2}y - z + 1 = 0$

إذا علمت أن المستويين متوازيان فإن البعد بينهما يساوي:

A	1	B	3	C	5	D	7	E	9

الحل

$M(0,0,1)$ من Q

عندئذ بعد $M(0,0,1)$ عن المستوي P يساوي البعد بين المستويين لأنهما متوازيين

$$dist(M,P) = \frac{|0+0+2+7|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3$$

إعداد: م يوسف منصور	الجواب: B	كتابة وتنسيق: م نادر أبوراس

21	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ إن معادلة المستوي R المار من النقطتين $A(2,0,1)$ ، $B(1,0,0)$ والعمودي على المستوي: $P: x+y-z+2=0$ هي :		
A	$2x-y+z-2=0$	B	$x-2y-z+3=0$
C	$x+y+2z-4=0$	D	$-x+2y+z+1=0$
E	$2x+2y+z-3=0$		
الحل	بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً لمستوي المطلوب ، $\vec{n}_P(1,1,-1)$ و $\overrightarrow{BA}(1,0,1)$ $\begin{cases}\vec{n}.\vec{n}_P=0 \Rightarrow a+b-c=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{BA}=0 \Rightarrow a+c=0\end{cases}$ نختار $c=1$ نجد : $a=-1$ و $b=2$ المستوي يمر من $B(1,0,0)$ ويقبل $\vec{n}(-1,2,1)$ ناظماً له $-(x-1)+2(y-0)+1(z-0)=0 \Rightarrow -x+2y+z+1=0$		

إعداد : م. أماني الحسين	الجواب: D	كتابة وتنسيق :م. نادر أبوراس

22	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستويان P و Q معادلتاهما $P: x-y+3z-5=0$ $Q: 3x+y+z+1=0$ إن معادلة المستوي R المار من النقطة $M(2,5,-2)$ والعمودي على المستويين P و Q هي :		
A	$x-2y-z+10=0$	B	$x+y-4z-15=0$
C	$x-2y-z=0$	D	$-x+2y+z+5=0$
E	$-x+2y+z-6=0$		
الحل	المستويان متقاطعان $\Leftarrow \frac{1}{3} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{3}{1} \Leftarrow \left.\begin{matrix}\vec{n}_P(1,-1,3)\\ \vec{n}_Q(3,1,1)\end{matrix}\right\}$ بتعويض $z=t$ وكتابة المعادلتين بالشكل: $\begin{cases}x-y=-3t+5\\ 3x+y=-t-1\end{cases}$ وبالحل المشترك لجملة المعادلتين بدلالة t نجد الفصل المشترك (Δ): $\{M(-t+1,2t-4,t); t\in R\}$ $\vec{n}_R=\vec{u}_\Delta(-1,2,1)$ والمستوي R يمر بالنقطة $M(2,5,-2)$ فنجد معادلته : $R: -1(x-2)+2(y-5)+1(z+2)=0 \Rightarrow R: -x+2y+z-6=0$		

إعداد : م. محمد مصطفى المختار	الجواب: E	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

23

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,2,0)$ والمستوي $P: x+y-z-1=0$

إذا علمت أن المسقط القائم للنقطة A على المستوي P هو النقطة $A'(x,y,z)$ فإن إحداثياتها هي :

A	$(0,0,-1)$	B	$(2,1,2)$	C	$(1,1,-1)$	D	$(1,1,1)$	E	$(3,-3,1)$

الحل

لدينا $\overrightarrow{AA'}$ و $\vec{n}_P$ مرتبطان خطيا أي $\overrightarrow{AA'}=\lambda.\vec{n}_P$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda+2 \\ y=\lambda+2 \\ z=-\lambda \end{cases}$$

بالتعويض في معادلة المستوي

$$\lambda+2+\lambda+2+\lambda-1=0$$

نجد $\lambda=-1$ وبالتالي إحداثيات المسقط $A'(1,1,1)$

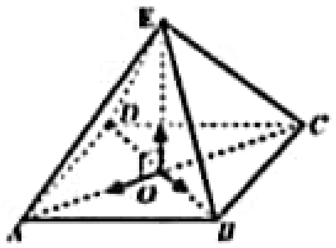
إعداد: م محي الدين إسماعيل	الجواب: D	كتابة وتنسيق: م نادر أبوراس

24

نتأمل في الشكل جانبا $E-ABCD$ هرم منتظم رأسه E

مركز قاعدته O هو مبدأ المعلم المتجانس $\left(O;\frac{1}{2}\overrightarrow{OA},\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\frac{1}{4}\overrightarrow{OE}\right)$

إن معادلة المستوي (DCE) هي :



A	$3x-2y+z-4=0$	B	$2x+y-z+4=0$
C	$x+y+3z+2=0$	D	$2x+y+3z-2=0$
E	$-2x-2y+z-4=0$		

الحل

$E(0,0,4)$ ، $D(0,-2,0)$ ، $C(-2,0,0)$

$\overrightarrow{DE}(0,2,4)$ ، $\overrightarrow{DC}(-2,2,0)$

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظما له :

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{DE}=0 \Rightarrow 2b+4c=0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{DC}=0 \Rightarrow -2a+2b=0 \end{cases}$$

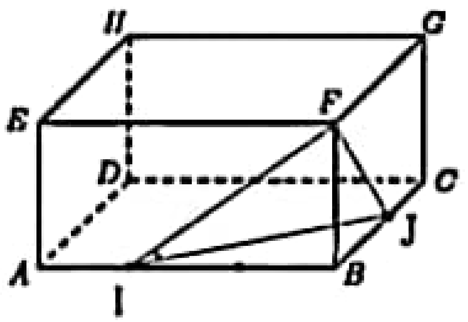
نختار $C=1$ نجد: $a=-2$ و $b=-2$

المستوي يمر من $E(0,0,4)$ ويقبل $\vec{n}(-2,-2,1)$ ناظما له

$$-2(x-0)-2(y-0)+1(z-4)=0 \Rightarrow -2x-2y+z-4=0$$

إعداد: م. حسان داوود	الجواب: E	كتابة وتنسيق: م. نادر أبوراس

25



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه:

$AB = 3$ و $BC = 2$ و $AE = 1$

والنقطتان I تحقق: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و J منتصف $[BC]$

ولنكن المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

فإن قيمة $\sin \widehat{FIJ}$ تساوي:

A	B	C	D	E
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

الحل

لدينا: $F(3,0,1)$, $J(3,1,0)$, $I(1,0,0)$

$$\overrightarrow{IJ}(2,1,0) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{IF}(2,0,1) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{IF}\right\| = \sqrt{5}$$

$$\cos\widehat{FIJ} = \frac{\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IF}}{\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|.\left\|\overrightarrow{IF}\right\|} = \frac{4+0+0}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\widehat{FIJ} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

إعداد: م. هيثم ديوب | الجواب: C | كتابة وتنسيق: م. نادر أبوراس

أتمتة تمارين رياضيات البكالوريا السورية

اختبارات مؤتمتة لرياضيات البكالوريا السورية

الجزء الأول : الوحدة الثانية

اختبار النهايات والاستمرار

إشراف المهندس : عبد الحميد السيد

كتابة وتنسيق

المدرس : محمد السيد علي

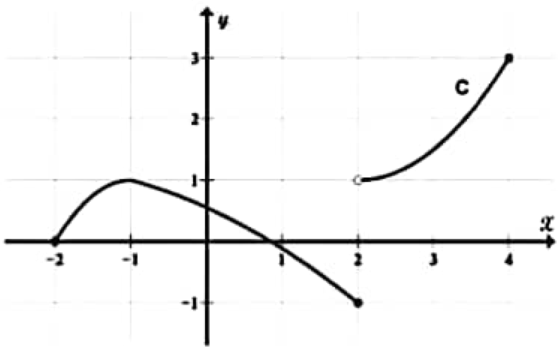
التدقيق العلمي واللغوي

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	عبد الحميد السيد	محمد السيد علي	حسام قاسم
خالد الحداد	هيثم ديوب	بشار كنعان	صفوح الأفندي	زينب يوسف
نادر أبو راس	فادي الحمد	يوسف منصور	زكي طحاوي	عامر سيو
محمد زين جعرور	فادي طنوس	أمين الحايك	مصطفى الرزوق	مهند حريقة
علي جمول	محمد العيسى	عبد السلام حسن	صلاح سالم	آلدار كلابدون

1 – في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f

المعرف على $I=[-2,4]$

عندئذٍ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ تساوي :



Ⓐ	0	Ⓑ	1	Ⓒ	4	Ⓓ	-2	Ⓔ	-1

الحل

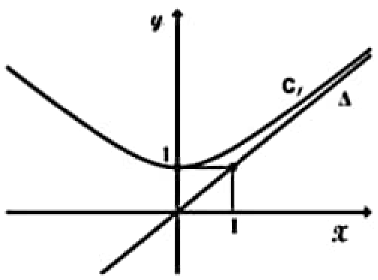
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1$

إعداد : أ . عبد السلام زكريا	الجواب Ⓔ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

2 – الشكل المجاور يمثل C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

والمستقيم Δ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$

عندئذٍ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ تساوي :



Ⓐ	1	Ⓑ	2	Ⓒ	-1	Ⓓ	0	Ⓔ	3

الحل

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m_\Delta = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

إعداد : أ . مضر الأحمد	الجواب Ⓐ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

3 – نتأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

إنّ عدد حلول المعادلة $f(x)-1=0$ هو :

Ⓐ	0	Ⓑ	1	Ⓒ	2	Ⓓ	3	Ⓔ	4

الحل

من جدول التغيرات نلاحظ أن المعادلة $f(x)=1$ ليس لها حلول

إعداد : أ . أحمد الكلش	الجواب Ⓐ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

4 - ليكن $E(x)$ الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x عندئذٍ قيمة $E(2-\pi)$ هي :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
-1	-3	2	1	-2

الحل: $2-\pi = 2-3.14 = -1.14$ و منه نجد : $E(2-\pi) = -2$

إعداد : أ . حسن آصف سليمان	الجواب Ⓔ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

5 - C_f, C_g الخطان البيانيان للتابعين f, g المعرفان على المجال $]2,+\infty[$ بحيث $f(x) - g(x) \geq 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

عندئذٍ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ تساوي :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
-2	0	$-\infty$	$+\infty$	2

الحل: لدينا $g(x) \leq f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ وحسب مبرهنة المقارنة الثالثة نجد $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

إعداد : أ . علي فؤاد علي	الجواب Ⓒ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

6 - ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2mx + 4}$ خطه البياني C

عندئذٍ قيمة m ليكون المستقيم $\Delta : y = x + 1$ مقارباً مائلاً للخط C في جوار $+\infty$ هي :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
1	2	0	-1	-2

الحل:

$x^2 - 2mx + 4 = x^2 - 2mx + m^2 - m^2 + 4 = (x-m)^2 + 4 - m^2$

ومنه المستقيم الذي معادلته $y = x - m$ مستقيماً مقارباً للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$

وبالمقارنة مع المستقيم $\Delta : y = x + 1$ نستنتج أن $\boxed{m = -1}$

إعداد : أ . محمد السيدعلي	الجواب Ⓓ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

7 - ليكن f تابعاً معرفاً على $]0,+\infty[$

إذا علمت أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) + 2x\right] = 1 - \sqrt{2}$ عندئذٍ معادلة المستقيم المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$ هي :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
$y = 2x + 1 - \sqrt{2}$	$y = 2x - 1 + \sqrt{2}$	$y = 2x + 1 + \sqrt{2}$	$y = -2x + 1 - \sqrt{2}$	$y = -2x - 1 - \sqrt{2}$

الحل:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) + 2x\right] = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (-2x + 1 - \sqrt{2})\right] = 0$

ومنه معادلة المقارب المائل هي : $y = -2x + 1 - \sqrt{2}$

إعداد : أ . محمد زين جعرور	الجواب Ⓓ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

8 – ليكن التابع f المعرف على $I = [0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{kx} & : 0 \le x \le 2 \\ x & : x > 2 \end{cases}$ حيث k عدد موجب تماماً

عندئذٍ قيمة k التي تجعل f مستمراً على I هي :

Ⓐ		Ⓑ		Ⓒ		Ⓓ		Ⓔ	
Ⓐ	$\frac{1}{2}$	Ⓑ	1	Ⓒ	2	Ⓓ	$\sqrt{2}$	Ⓔ	4

الحل

يكون التابع f مستمراً على I إذا كان مستمراً عند $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = \sqrt{2k} \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2k} = 2 \Rightarrow k = 2$$

إعداد : أ . غياث منصور	الجواب Ⓒ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

9 – ليكن f التابع المعرف على $]-\infty, b[$ وفق : $f(x) = \dfrac{ax+3}{x-b}$ حيث a, b عددان حقيقيان موجبان تماماً

إذا علمت أن لخطه البياني مقاربين معادلتاهما $y = 3$ و $x = 2$ عندئذٍ (a, b) تساوي :

Ⓐ	$(1,2)$	Ⓑ	$(2,3)$	Ⓒ	$(3,1)$	Ⓓ	$(1,1)$	Ⓔ	$(3,2)$

الحل

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$ ومنه نجد $y = a$ مقارب أفقي وبالتالي $a = 3$

$\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$ ومنه $x = b$ مقارب شاقولي وبالتالي $b = 2$

إعداد : أ . محمد جمال خطيب	الجواب Ⓔ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

10 – C_f هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

إذا علمت أن C_f يقبل مقارباً مائلاً Δ في جوار $+\infty$

عندئذٍ معادلة المستقيم d المار بالنقطة $(2,1)$ والذي يوازي Δ هي :

Ⓐ	$y = x - 1$	Ⓑ	$y = 2x - 3$	Ⓒ	$y = x + 3$	Ⓓ	$y = x + 1$	Ⓔ	$y = 2x + 1$

الحل

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} = 1$$

$$d \parallel \Delta \Rightarrow m_d = m_\Delta \Rightarrow m_d = 1$$

والمستقيم d يمر بالنقطة $(2,1)$ ومعادلته من الشكل $y - y_0 = m(x - x_0)$

بالتعويض نجد : $d : y = x - 1$

إعداد : أ . أمين الحايك	الجواب Ⓐ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

11 – ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x) = |x+3| - \frac{1}{x}$

إذا علمت أن للخط C مقاربين مائلين d في جوار $+\infty$ و d' في جوار $-\infty$ عندئذٍ يتقاطع d و d' في النقطة :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
$(0,3)$	$(0,-3)$	$(-3,0)$	$(0,0)$	$(3,6)$

الحل:

في جوار $+\infty$ يكون $d : y = x + 3$

في جوار $-\infty$ يكون $d' : y = -x - 3$

وعند الحل المشترك للمعادلتين السابقتين نجد : $x + 3 = -x - 3$ ومنه نجد $x = -3$ و $y = 0$

إعداد : أ . محمد أحمد العيسى	الجواب Ⓒ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

12 – ليكن C_f الخط البياني لتابع f معرف على $\mathbb{R}_+^*$ إذا علمت أنه أياً كان $x > 0$ كان $-\frac{1}{x} + 1 \le f(x) - x \le \frac{1}{x} + 1$

عندئذٍ C_f يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ معادلته :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
$y = x - 1$	$y = -x + 1$	$y = -x$	$y = x + 1$	$y = x$

الحل:

نعلم أن $\lim_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} + 1) = \lim_{x \to +\infty} (-\frac{1}{x} + 1) = 1$

وحسب مبرهنة الإحاطة يكون $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 1$ ومنه $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x+1)\right] = 0$

أي المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$

إعداد : أ . رابعة سليمان	الجواب Ⓓ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

13 – ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق : $f(x) = 1 - x - \frac{1}{x}$ خطه البياني C

إذا قطع المستقيم $\Delta : y = m$ الخط C في نقطتين فإن إحداثيي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
$(\frac{m-1}{2}, m)$	$(\frac{m-1}{2}, \frac{m}{2})$	$(m-1, m)$	$(\frac{1-m}{2}, m)$	$(\frac{1-m}{2}, \frac{m}{2})$

الحل:

$$f(x) = m \Rightarrow 1 - x - \frac{1}{x} = m \Rightarrow x^2 + (m-1)x + 1 = 0$$

للمعادلة جذران مختلفان : $x_1 + x_2 = \frac{-(m-1)}{1} = 1 - m$

ومنه نجد إحداثيي المنتصف $(\frac{1-m}{2}, m)$

إعداد : أ . زكي محمود طحاوي	الجواب Ⓓ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

17 – ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}^*$ وفق : $f(x) = \dfrac{|2x-1|-|1-3x|}{x}$ ، عند دراسة نهاية f عند الصفر نجدها :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
0	1	2	3	غير موجودة

الحل:

في جوار الصفر نجد $2x-1<0$ و $1-3x>0$

وبالتالي نجد : $f(x) = \dfrac{1-2x-(1-3x)}{x} = \dfrac{1-2x-1+3x}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

إعداد : أ . سومر سليمان	الجواب Ⓑ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

18 – ليكن التابع f المعرف على $\mathcal{R}\setminus\{3\}$ وفق : $f(x) = \dfrac{x-3}{|x-3|}$ عندئذٍ المستقر الفعلي للتابع f هو :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
$\{-3,3\}$	$\{-1,1\}$	$]-1,1[$	$[-1,1]$	$[-3,3]$

الحل:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-3} = 1 & : x > 3 \\ \dfrac{x-3}{3-x} = -1 & : x < 3 \end{cases}$$

إعداد : أ . سلمى عبدو	الجواب Ⓑ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

19 – ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}\setminus\{1\}$ وفق : $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1 - \dfrac{2}{x-1}$ خطه البياني C

عندئذٍ عدد المقاربات للخط C هو :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
1	2	3	4	0

الحل:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ ومنه $x = 1$ مقارب شاقولي

لدينا $\Delta : y = \dfrac{x}{2} + 1$ مقارب مائل لأن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$

ومنه للخط C مقارب شاقولي ومقارب مائل

إعداد : أ . هيثم ديوب	الجواب Ⓑ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

14 – C_f هو الخط البياني للتابع f المعرف وفق : $f(x) = x - 3\cos\frac{x}{2}$

إنّ C_f محدود بالمستقيمين اللذين معادلتاهما :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
$y = x - 3$ $y = x + 3$	$y = x - 3$ $y = x - 5$	$y = x + 3$ $y = x + 5$	$y = x + 3$ $y = x + 1$	$y = x + 1$ $y = x - 3$

الحل

نعلم أن $-1 \le \cos\frac{x}{2} \le 1$ ومنه $-3 \le -3\cos\frac{x}{2} \le 3$

وبالتالي $x - 3 \le x - 3\cos\frac{x}{2} \le x + 3$

إعداد : أ . مصطفى الرزوق	الجواب Ⓐ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

15 – ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق $f(x) = a + \frac{bx}{\sqrt{x^2 + 2}}$ حيثُ $a, b \in \mathcal{R}$

إذا علمت أن C الخط البياني للتابع f يقبل مقاربين $d : y = 6$ في جوار $+\infty$ و $d' : y = 2$ في جوار $-\infty$ عندئذٍ (a,b) تساوي :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
$(3,3)$	$(4,-2)$	$(-4,2)$	$(4,2)$	$(1,1)$

الحل

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[a + \frac{bx}{\sqrt{x^2+2}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(a + \frac{b}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}\right) \Rightarrow a + b = 6 \quad .... (1)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[a + \frac{bx}{\sqrt{x^2+2}}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(a - \frac{b}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}\right) \Rightarrow a - b = 2 \quad .... (2)$$

بجمع المعادلتين نجد : $2a = 8 \Rightarrow a = 4$ ، نعوض في إحدى المعادلتين السابقتين نجد : $b = 2$

إعداد : أ . باسل سطمة	الجواب Ⓓ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

16 – f تابع معرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(x) = 2 + \frac{4}{x^2 + 4}$ عندئذٍ المستقر الفعلي للتابع f هو :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
$[0,3]$	$[2,3]$	$]2,3[$	$[2,3[$	$]2,3]$

الحل

$$\forall x \in \mathcal{R} : x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 + 4 \ge 4 \Rightarrow 0 < \frac{4}{x^2+4} \le 1 \Rightarrow 2 < 2 + \frac{4}{x^2+4} \le 3 \Rightarrow f(x) \in]2,3]$$

ملاحظة : يمكن البحث عن المستقر الفعلي عن طريق دراسة تغيرات التابع

إعداد : أ . صفوح الأفندي	الجواب Ⓔ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

20 – عند البحث عن نهاية التابع المعطى بالعلاقة $f(x)=\sin(\frac{1}{x})+\sin x$ عند $+\infty$ نجد أنها :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
-1	0	1	$+\infty$	غير موجودة

الحل

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\frac{1}{x})=0$

فإن نهاية f تؤول إلى نهاية التابع $x\mapsto\sin x$

وهذا التابع دوري وليس ثابتاً وبالتالي ليس له نهاية عند $+\infty$

إعداد : أ . عبد الحميد السيد	الجواب Ⓔ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

21 – ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}-|x|$ عندئذٍ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ تساوي :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\infty$	$+\infty$

الحل

في جوار $-\infty$ يكون $|x|=-x$ ويصبح $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}+x$

وعند إيجاد $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ نحصل على عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$ لذلك نكتب :

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+3x+1}+x)(\sqrt{x^2+3x+1}-x)}{\sqrt{x^2+3x+1}-x}=\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}-x}$$

$$=-\frac{x(3+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)}=-\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{3}{2}$

إعداد : أ . ابتسام عيسى	الجواب Ⓐ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

22 – إذا علمت أنَّ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos ax}{x.\sin ax}=\frac{1}{6}$ (حيث a عدد حقيقي غير معدوم) فإن قيمة a تساوي :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

الحل

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos ax}{x.\sin ax}=a.\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos ax}{(ax)^2}}{\frac{\sin ax}{ax}}=a.\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{a}{2}=\frac{1}{6}\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

(علماً أن : $\lim\limits_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}$)

إعداد : أ . نادر أبوراس	الجواب Ⓓ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

23 – ليكن f التابع المعرف على المجال $I = [-2, 0[$ وفق العلاقة $f(x) = (x + mE(x))^2$ حيث $E(x)$ يرمز إلى الجزء الصحيح للعدد x ، إن قيمة العدد الحقيقي m غير المعدوم التي تجعل f مستمراً عند -1 هي :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$

الحل

$$E(x) = \begin{cases} -2 : x \in [-2, -1[\\ -1 : x \in [-1, 0[\end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x - 2m)^2 : x \in [-2, -1[\\ (x - m)^2 \ : x \in [-1, 0[\end{cases}$$

f مستمراً عند -1 عندئذ $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$

وبالتالي : $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$

ومنه $\lim_{x \to -1^-} (x - 2m)^2 = \lim_{x \to -1^+} (x - m)^2$

$$(-1 - 2m)^2 = (-1 - m)^2 \Rightarrow$$
$$1 + 4m + 4m^2 = 1 + 2m + m^2 \Rightarrow$$
$$3m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m(3m + 2) = 0$$

إما $m = 0$ مرفوض ، أو $m = -\frac{2}{3}$ مقبول

إعداد : أ . عبد الله حناوي	الجواب Ⓒ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

24 – نتأمل جدول التغيرات للتابع f المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty \ \| -\infty$	$\nearrow$	1

إنّ $\lim_{x \to +\infty} f\left[f(x)\right]$ تساوي :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
$-\infty$	-1	$+\infty$	0	1

الحل

وبما أن f تابع متزايد على المجال $]1, +\infty[$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1^-$

ومنه فإن $\lim_{x \to +\infty} f\left[f(x)\right] = \lim_{X \to 1^-} f(X) = +\infty$

إعداد : أ . خالد أحمد شوقي الحذاد	الجواب Ⓒ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

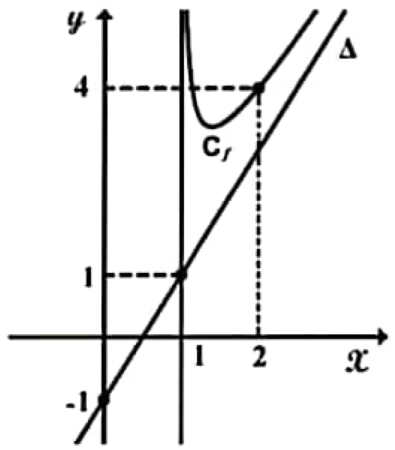
25 – الشكل المجاور يمثل C_f الخط البياني للتابع f المعرف وفق :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{\sqrt{x - d}}$$

والمستقيم Δ مقارب مائل لخطه البياني في جوار $+\infty$

و $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

عندئذٍ (a, b, c, d) تساوي :



Ⓐ		Ⓑ		Ⓒ		Ⓓ		Ⓔ	
Ⓐ	$(\frac{1}{2}, -1, 2, 1)$	Ⓑ	$(2, -1, 1, 1)$	Ⓒ	$(2, -1, 2, 1)$	Ⓓ	$(2, -1, 1, -1)$	Ⓔ	$(\frac{1}{2}, -1, 1, 4)$

الحل

مجموعة التعريف : من الخط البياني $D_f =]1, +\infty[$ ومن قاعدة الربط $D_f =]d, +\infty[$ ومنه $d = 1$

المقارب المائل : من الخط البياني $m_\Delta = \frac{1+1}{1-0} = 2$ و يكون : $\Delta : y = 2x - 1$

من قاعدة الربط $\Delta : y = ax + b$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{c}{\sqrt{x - d}} = 0$

ومنه نجد : $a = 2, b = -1$

$(2, 4) \in C_f$ حيث $f(x) = 2x - 1 + \frac{c}{\sqrt{x - 1}}$

$$f(2) = 4 \Rightarrow 4 - 1 + \frac{c}{1} = 4 \Rightarrow c = 1$$

وبالتالي نجد : عندئذٍ $(a, b, c, d) = (2, -1, 1, 1)$

إعداد : أ . أنس البوشي	الجواب Ⓑ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

26 – ليكن f التابع المعرف على $[0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$

عندئذٍ أصغر قيمة للعدد A الذي يحقق الشرط أياً كان $x > A$ كان $f(x) \in]0.9, 1.1[$ هي :

Ⓐ	9	Ⓑ	81	Ⓒ	100	Ⓓ	29	Ⓔ	31

الحل

$$|f(x) - c| < r \Rightarrow |f(x) - 1| < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{x} + 1}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} + 1 > 10 \Rightarrow \sqrt{x} > 9 \Rightarrow x > 81$$

ومنه $A = 81$

إعداد : أ . عمر محمد	الجواب Ⓑ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

27 – ليكن f التابع المعرف وفق : $f(x) = 2 + (x^2 - x)\sin\frac{1}{x-1}$ عندئذ $\lim_{x\to1} f(x)$ تساوي :

A	B	C	D	E
1	-1	2	0	$\frac{1}{2}$

الحل

$$|f(x) - 2| = |x^2 - x|.|\sin\frac{1}{x-1}|$$

في حالة $x \neq 1$ لدينا $|\sin\frac{1}{x-1}| \le 1$

ومنه : $|f(x) - 2| \le |x^2 - x|$

وبما أن $\lim_{x\to1}(x^2 - x) = 0$ فإن : $\lim_{x\to1} f(x) = 2$

إعداد : أ . محي الدين اسماعيل	الجواب C	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

28 – إذا علمت أن $\lim_{x\to3}\frac{x^2 + ax + b}{x-3} = 2$ حيث $a,b \in \mathcal{R}$ عندئذ (a,b) تساوي :

A	B	C	D	E
$(4,3)$	$(-4,3)$	$(-4,-3)$	$(4,-3)$	$(3,4)$

الحل

بالقسمة الإقليدية نجد :

$$\frac{x^2 + ax + b}{x-3} = x + a + 3 + \frac{3a + b + 9}{x-3}$$

بما أن النهاية عدد حقيقي فإن : $3a + b + 9 = 0$ ..... (1)

$\lim_{x\to3}\left[x + a + 3\right] = 2$ ..... (2)

بالحل المشترك نجد : $a = -4$ و $b = 3$

إعداد : أ . علي الأحمد	الجواب B	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

29 – ليكن f كثير حدود من الدرجة n معرفاً وفق : $f(x) = x^n + x^5 + x^3 + x + 1$ حيث $(n > 5)$

إذا كان n عدداً فردياً فإن عدد نقاط تقاطع الخط البياني للتابع f مع محور الفواصل هو :

A	B	C	D	E
نقطة واحدة	نقطتان	ثلاث نقاط	أربع نقاط	خمس نقاط

الحل

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = nx^{n-1} + 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ ($n-1$ عدد زوجي)

وبالتالي f مستمر ومتزايد تماماً على $\mathcal{R}$ وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

إعداد : أ . يوسف منصور	الجواب A	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

30 – ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق : $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}$ ، عند دراسة نهاية f عند الصفر نجدها :

Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
0	$-\infty$	$+\infty$	1	غير موجودة

الحل

عند إيجاد نهاية f عند الصفر نحصل على حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$

سندرس النهاية في جوار الصفر ونكتفي بالدراسة على $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}=\frac{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|}{x}=\begin{cases}\dfrac{-2\sin\frac{x}{2}}{x} & : x\in]-\pi,0[\\[2ex] \dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{x} & : x\in]0,\pi[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-2\sin\frac{x}{2}}{x}=-\lim_{x\to0^-}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=-1$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$$

مما سبق نجد $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ ومنه النهاية غير موجودة

إعداد : أ . سوسن كنعان	الجواب Ⓔ	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي