// الأشعة في الفراغ //

مركبات شعاع في الفراغ :

إذا كانت لدينا النقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ فإن المقدار $\vec{AB}$ يسمى شعاعاً بدايته A و نهايته B جهته من A إلى B حامله هو المستقيم المار من A و B و نظيمه (طويلته) هو طول القطعة المستقيمة بين A و B

العبارة الثنائية للشعاع : $\vec{AB} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1)$

العبارة التحليلية : $\vec{AB} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j$

تطبيق : لدينا النقطتين $A(-3,4)$ و $B(5,-2)$:

① أوجد الشعاع $\vec{AB}$ و $\vec{BA}$.

② اكتب كلاً من الشعاعين بالعبارة التحليلية .

الحل

① الشعاع $\vec{AB}$:

$\vec{AB} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1)$

$= (5+3 , -2-4)$

$\vec{AB} = (8 , -6)$

- الشعاع $\vec{BA}$:

$\vec{BA} = (-3-5 , 4+2)$

$= (-8 , 6)$

② العبارة التحليلية للشعاعين :

$\vec{AB} = 8i - 6j$

$\vec{BA} = -8i + 6j$

ملاحظة : عندما نأخذ مركبات شعاع نقوم بأخذ (ابتدائي x - نهائي x) و (ابتدائي y - نهائي y) لذلك اختلفت الإشارات بين الشعاعين : $\vec{AB}$ و $\vec{BA}$ ...

إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة :

إذا كانت لدينا القطعة المستقيمة [AB] حيث :

$A(x_1 , y_1)$ $B(x_2 , y_2)$

فإن منتصف القطعة المستقيمة [AB] وليكن $M_0(x_0 , y_0)$:

$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ و $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$

تطبيق : ليكن لدينا النقطتين $A(3,4)$ و $B(1,2)$

* أوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة [AB] .

الحل : نفرض أن $M_0(x_0 , y_0)$ منتصف القطعة المستقيمة [AB]

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ y_0 &= \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}\right\} M_0(2 , 3)$$

نظيم شعاع :

إذا كان لدينا الشعاع $\vec{u}(x_1 , y_1)$ فإن نظيمه الذي نرمز له $\|\vec{u}\|$ يعطى بالعلاقة :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

تطبيق : أوجد نظيم الشعاع $\vec{u}$ الذي تعطى إحداثياته وفق : $\vec{u}(-3,4)$

الحل :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$

$\|\vec{u}\| = 5$

المسافة بين نقطتين :

إذا كانت لدينا النقطتين $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ فإن البعد (المسافة) بين النقطتين A و B يعطى كما يلي :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

تطبيق : ليكن لدينا النقطتين $A(2,1)$ و $B(-3,4)$ أحسب البعد بين A و B ..

الحل

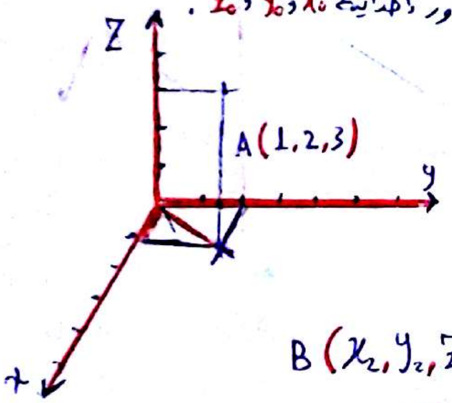
$AB = \sqrt{(-3-2)^2 + (4-1)^2}$

$= \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = \sqrt{25+9}$

$AB = \sqrt{34}$

الشعاع في الفراغ : {المعلم في الفراغ}

ينسب الفراغ إلى ثلاث محاور إحداثية x_0 و y_0 و Z_0 .



- ليكن لدينا النقطتين :

$A(x_1 , y_1 , z_1)$ و $B(x_2 , y_2 , z_2)$

مركبات الشعاع في الفراغ :

$\vec{AB} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1)$

نظيم الشعاع : (u)

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

المسافة بين نقطتين :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة :

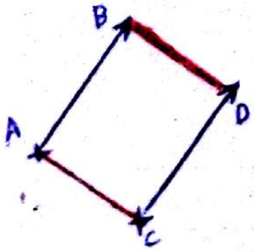
$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_0 &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ z_0 &= \frac{z_1 + z_2}{2} \end{aligned}\right\} M_0(x_0 , y_0 , z_0)$$

ملاحظة : نفس التطبيقات و القوانين تطبق على الحالتين ولكن هنا فقط تم إضافة إحداثيات Z إلى النقطة المعطاة ..

تساوي شعاعين :

إذا كان لدينا الشعاعين :

$\vec{AB}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{CD}(x_2,y_2,z_2)$



نقول عن الشعاعين $\vec{CD}$ و $\vec{AB}$ إنهما متساويان

إذا تحقق : $(x_1=x_2 \ , \ y_1=y_2 \ , \ z_1=z_2)$

تساوي شعاعين هندسياً يعني أن لهما :

① نفس الجهة

② نفس الطول

③ الحاملين متوازيين

نتيجة هامة جداً :

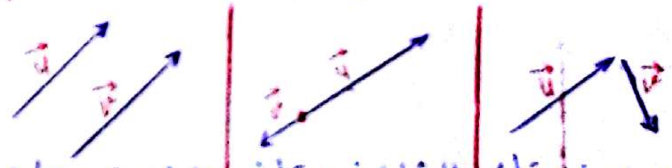
ABDC متوازي أضلاع إذا تحقق الشرطين :

① A,B,D,C لا تقع على استقامة واحدة

② $\vec{AB}=\vec{CD}$

الارتباط الخطي لشعاعين :

يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً عندما ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي أو حاملهما متوازيين .



الشعاعين غير مرتبطين خطياً | الشعاعين مرتبطين خطياً | الشعاعين مرتبطين خطياً

تطبيق : ليكن لدينا الشعاعين $\vec{u}(3,2,1)$ و $\vec{v}(6,4,2)$

- هل الشعاعين مرتبطين خطياً ؟

الحل: نعم الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً لأنه : $\vec{v}=2\vec{u}$

لإثبات أن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة :

① نشكل شعاعين من النقاط الثلاثة .

② نثبت أن الشعاعين مرتبطان خطياً .

ملاحظة : إذا لم يكون الشعاعان مرتبطان خطياً ← النقاط لا تقع على استقامة واحدة .

تطبيق : ليكن لدينا النقاط الثلاثة :

$A(1,2,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(-1,4,3)$

- هل تقع النقاط الثلاثة A و B و C على استقامة واحدة ؟

الحل: $\vec{AB}=(2,-2,2)$, $\vec{AC}(-2,2,4)$

نلاحظ أن أي من الشعاعين غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي .

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}\neq\frac{z_1}{z_2}$$

← الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً

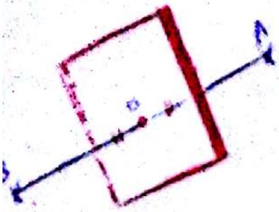
← النقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة .

المستوي المحوري والكرة :

تعريف : هو المستوي العمودي على القطعة المستقيمة في منتصفها .

المستوي المحوري للقطعة [AB] :

هو مجموعة نقاط الفراغ المتساوية البعد عن طرفي القطعة المستقيمة .



تطبيق :

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [AB] حيث $A(2,1,0)$ و $B(-1,3,1)$.

الحل: أياً كانت $M(x,y,z)$ من المستوي المحوري فإن : $MA=MB$

$$MA = MB$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}$$

نربع الطرفين :

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2$$

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2=x^2+2x+1+y^2-6y+9+z^2-2z+1$$

$$-4x-2y+5=2x-6y-2z+11$$

ننقل الطرف الثاني إلى الطرف الأول :

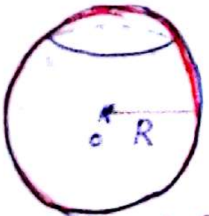
$$-6x+4y+2z-6=0$$

نقسم على 2

$$-3x+2y+z-3=0$$

الكرة :

هي مجموعة نقاط الفراغ المتساوية البعد عن نقطة ثابتة تسمى مركز الكرة والبعد الثابت يسمى نصف قطر الكرة .



استنتاج معادلة الكرة :

إذا كان لدينا الكرة التي مركزها $O(x_0,y_0,z_0)$ ونصف قطرها R ، أياً كانت $M(x,y,z)$ تقع على الكرة :

$$OM = R$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

نربع الطرفين ← $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

تطبيق : اكتب معادلة الكرة التي مركزها $(2,1,-1)$ ونصف قطرها 4 .

الحل: أياً كانت $M(x,y,z)$ تقع على الكرة $OM=R$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}=4$$

نربع الطرفين ← $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=16$

مبرهنة:

إذا كان لدينا المستقيم Δ المار من A و B فإن Δ هو مجموعة النقاط التي تحقق $\vec{AM} = t \cdot \vec{AB}$.

نسمي هذه المبرهنة: مبرهنة التعريف الشعاعي للمستقيم .

تمرين: اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB) حيث:

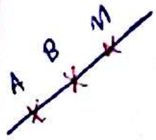
$B(3,0,4)$ / $A(1,2,-1)$

الحل: إذا كانت $M(x,y,z) \in (AB)$

$$\vec{AM} = t \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{AM}(x-1, y-2, z+1) = t \cdot \vec{AB}(2,-2,5)$$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ 5t \end{pmatrix}$$

ملاحظة: نسمي $\vec{AB}$ شعاع توجيه المستقيم (AB)

$x-1 = 2t \Rightarrow x = 2t+1$

$y-2 = -2t \Rightarrow y = 2-2t$

$z+1 = 5t \Rightarrow z = 5t-1$

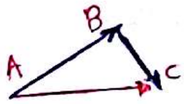
العمليات على الأشعة:

الجمع:

① إذا كان الشعاعين متعاقبين:

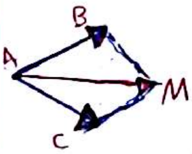
$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

- علاقة شال :



② إذا كان الشعاعين لهما نفس المبدأ:

$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AM}$



- وهو أن نكمل الشكل إلى متوازي أضلاع

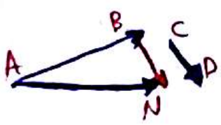
و قطر متوازي الأضلاع المار من نفس المبدأ هو حاصل الجمع.

③ الحالة العامة:

$\vec{AB} + \vec{CD}$

$\vec{AB} + \vec{BN} = \vec{AN}$

حيث: $\vec{CD} = \vec{BN}$



الطرح:

① لهما نفس المبدأ:

$\vec{AB} - \vec{AC} =$

$\vec{AB} + \vec{CA} =$

$\vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$

② لهما نفس النهاية:

$\vec{AB} - \vec{CB} =$

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

ضرب عدد حقيقي بشعاع:

إذا كان لدينا الشعاع $\vec{u}$ والعدد الحقيقي α فإن $\alpha \cdot \vec{u}$ هو شعاع جديد نرمز له بـ $\vec{v}$ حيث: $\vec{v} = \alpha \vec{u}$.

صفات هذا الشعاع:

① $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ لهما نفس المنحى

② $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ متفقين بالجهة عندما α موجب تماماً.

③ $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ متعاكسين بالجهة عندما α سالب تماماً.

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

مبرهنة:

إذا كانت لدينا النقاط الثلاثة A و B و C لا تقع على استقامة واحدة فإن المستوي (ABC) هو مجموعة النقاط H التي تحقق:

$$AM = \alpha AB + \beta AC$$

تسمى هذه النظرية (التعريف الشعاعي للمستوي) أو مبرهنة انتماء نقطة إلى مستوي .

تمرين: هام جداً لهذه السنة

لتكن لدينا النقاط التالية:

$A(2,0,-1), B(-1,2,1), D(-3,5,6), C(5,5,0), E(3,1,2)$

① أثبت أن A, B, C لا تقع على استقامة واحدة

② برهن أن D تقع في المستوي ABC

③ أتقع النقطة E في المستوي ABC

الحل:

① $\vec{AC}(3,5,-1)$ و $\vec{AB}(-1,-2,0)$

الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن: $\frac{3}{-1} \neq \frac{5}{-2}$

النقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة .

② تكون D تقع في المستوي (ABC) عندما توجد α و β بحيث تحقق العلاقة الشعاعية:

$\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$

$\vec{AD} = (-5,-5,5), \vec{AB} = (-1,-2,0), \vec{AC} = (3,5,-1)$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\beta \\ 5\beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + 3\beta \\ -2\alpha + 5\beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$-\alpha + 3\beta = -5$ --- ①

$-2\alpha + 5\beta = -5$ --- ②

$-\beta = 5$ --- ③

((لدينا ثلاث معادلات بمجهولين نأخذ معادلتين نجد منهما α و β ونعوض في المتبقية))

يتبع ....

$-2\alpha+5\beta=-5$ ...... ②

$-\beta=5$ ...... ③

من ③ نجد: $\beta=-5$

نعوض في ②:

$-2\alpha-25=-5$

$\rightarrow -2\alpha=20 \rightarrow \alpha=-10$

نتحقق في ①

$+10-15=-5$

$\rightarrow -5=-5$

D تقع في المستوي ABC ←

② تكون النقطة E واقعة في ABC إذا وجدنا: $\vec{AE}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$

$\vec{AE}=(1,1,1)$, $\vec{AB}=(-1,-2,0)$, $\vec{AC}=(3,5,-1)$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha+3\beta\\-2\alpha+5\beta\\-\beta\end{pmatrix}$$

$-\alpha+3\beta=1$ ...... ①

$-2\alpha+5\beta=1$ ...... ②

$-\beta=1$ ...... ③

«لدينا ثلاث معادلات بمجهولين نأخذ معادلتين لإيجاد α و β ثم نحقق في المتبقية.»

نأخذ ② و ③:

$-2\alpha+5\beta=1$ ...... ②

$-\beta=1$ ...... ③

من ③ نجد: $\beta=-1$

نعوض في ② نجد:

$-2\alpha-5=1$

$-2\alpha=6 \rightarrow \alpha=-3$

نتحقق في ①:

$+3-3=1 \rightarrow 0\neq1$

غير محققة ← $E\notin ABC$

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

تعريف الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

إذا كان لدينا الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ نقول عن هذه الأشعة أنها مرتبطة خطياً إذا كانت موجودة في مستوي واحد.

مبرهنة: إذا كانت الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ نقول عن هذه الأشعة أنها مرتبطة خطياً إذا كانت: $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

أي: كتبنا أحدها بدلالة الاثنين الباقيين..

نتيجة: إذا كان لدينا شعاعين مرتبطين خطياً فإن أي شعاع ثالث معهما نستنتج جميع الأشعة مرتبطة خطياً.

ملاحظة:

حتى نبرهن أن ثلاثة أشعة مرتبطة خطياً نبرهن واحدة مما يلي

1. أن تكون الأشعة الثلاثة محتواة في مستوي واحد.
2. أن توجد علاقة تربط أحدها بالشعاعين الباقيين.
3. أن يكون اثنين منها مرتبطان خطياً.

تعيين إحداثيات في معلم:

- كل نقطة تقع على مستوي الـ x فإن: $y=0$ / $z=0$
- كل نقطة تقع على مستوي الـ y فإن: $x=0$ / $z=0$
- كل نقطة تقع على مستوي الـ z فإن: $x=0$ / $y=0$

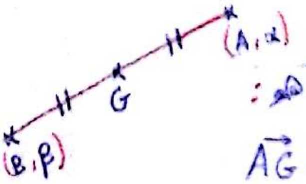
مركز الأبعاد المتناسبة:

① مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين:

إذا كان لدينا النقطتين المثقلتين (A,α) و (B,β) تكون G مركز الأبعاد المتناسبة لهاتين النقطتين إذا تحقق:

1. $\alpha+\beta\neq0$
2. $\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}=\vec{0}$

ملاحظة: مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين مثقلتين بثقلين متساويين هي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين.



إن القانون الذي يعين مركز الأبعاد المتناسبة G للنقطتين (A,α) و (B,β) هو:

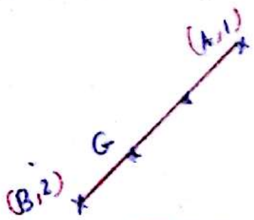
$$\vec{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$$

ملاحظة: إذا كانت النقطتين المثقلتين غير متساويتين بالنسبة للأثقال المحملة بها فإن G هي أقرب إلى النقطة الأثقل.

تمرين: أنشئ مركز الأبعاد المتناسبة G للنقطتين التاليتين:

1. $(A,1)$ و $(B,2)$

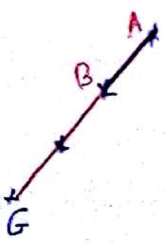
$$\vec{AG}=\frac{2}{3}\vec{AB}$$



2. $(A,-2)$ و $(B,3)$

$$\vec{AG}=\frac{3}{1}\vec{AB}$$

$$\vec{AG}=3\vec{AB}$$



مركز الأبعاد المتناسبة لثلاثة نقط :

إذا كان لدينا النقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) نقول عن G أنها مركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقط إذا تحقق :

1) $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

2) $\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}+\gamma\vec{GC}=\vec{0}$

ملاحظة: لإيجاد مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط نجد H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β) ثم نجد G مركز الأبعاد المتناسبة $(H,\alpha+\beta)$ و (C,γ) .

تمرين: أنشئ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ $(B,2)$ $(C,3)$.

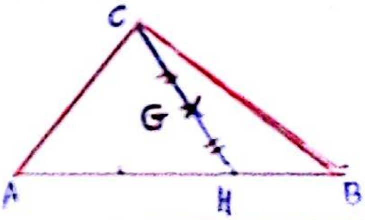
الحل: نجد H مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ $(B,2)$

$$\vec{AH}=\frac{2}{3}\vec{AB}$$

نجد G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(H,3)$ $(C,3)$

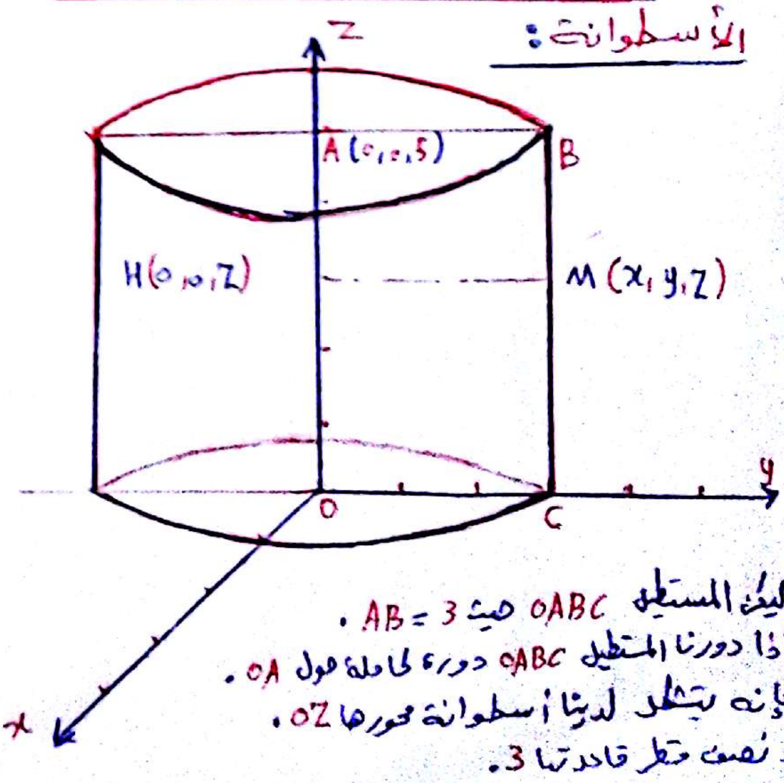
$$\vec{CG}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\vec{CH}$$

إذاً G هي منتصف CH بسبب تساوي الثقلين



ملاحظة: إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) (B,β) فإن النقاط A و B و G تقع على استقامة واحدة.

الأسطوانة:



ليكن المستطيل $OABC$ حيث $AB=3$.
إذا دورنا المستطيل $OABC$ دورة كاملة حول OA .
فإنه تتشكل لدينا أسطوانة محورها OZ .
و نصف قطر قاعدتها 3 .

لإيجاد معادلتها :

$M(x,y,z)$ تقع على الأسطوانة مسقطها على OZ هو $H(0,0,z)$.

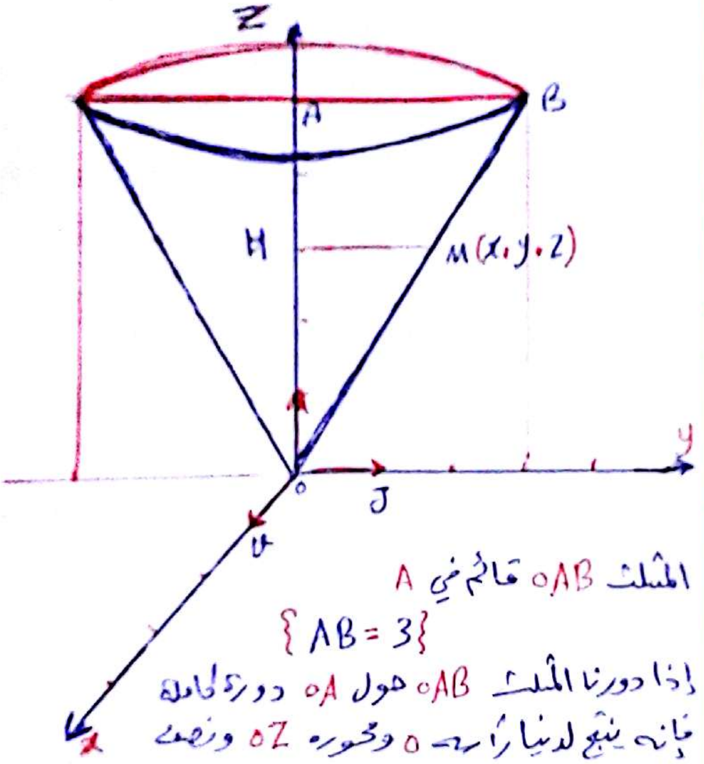
$$MH=3$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=3$$

نربع الطرفين ← $x^2+y^2=9$

$$0\leq z\leq 5$$

المخروط :



المثلث OAB قائم في A

$\{AB=3\}$

إذا دورنا المثلث OAB حول OA دورة كاملة فإنه ينتج لدينا رأسه O ومحوره OZ ونصف قطر قاعدته 3 .

لإيجاد معادلته:

بفرض $M(x,y,z)$ تقع على المخروط مسقطها على OZ هو H حيث $H(0,0,z)$.

- المثلثين OMH و OBA متشابهين نكتب نسب التشابه:

$$\left.\begin{matrix} OMH \\ OBA \end{matrix}\right) \Rightarrow \frac{OM}{OB}=\frac{MH}{BA}=\frac{OH}{OA}$$

$$MH=\frac{3z}{5}$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=\frac{3z}{5}$$

نربع الطرفين ← $x^2+y^2=\frac{9z^2}{25}$

$$5\geq z\geq 0$$

انتهى البحث