مراجعة النهايات

Mathematics is not just a science, it is a way of life.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

إعداد المدرس:راتب كسيبي

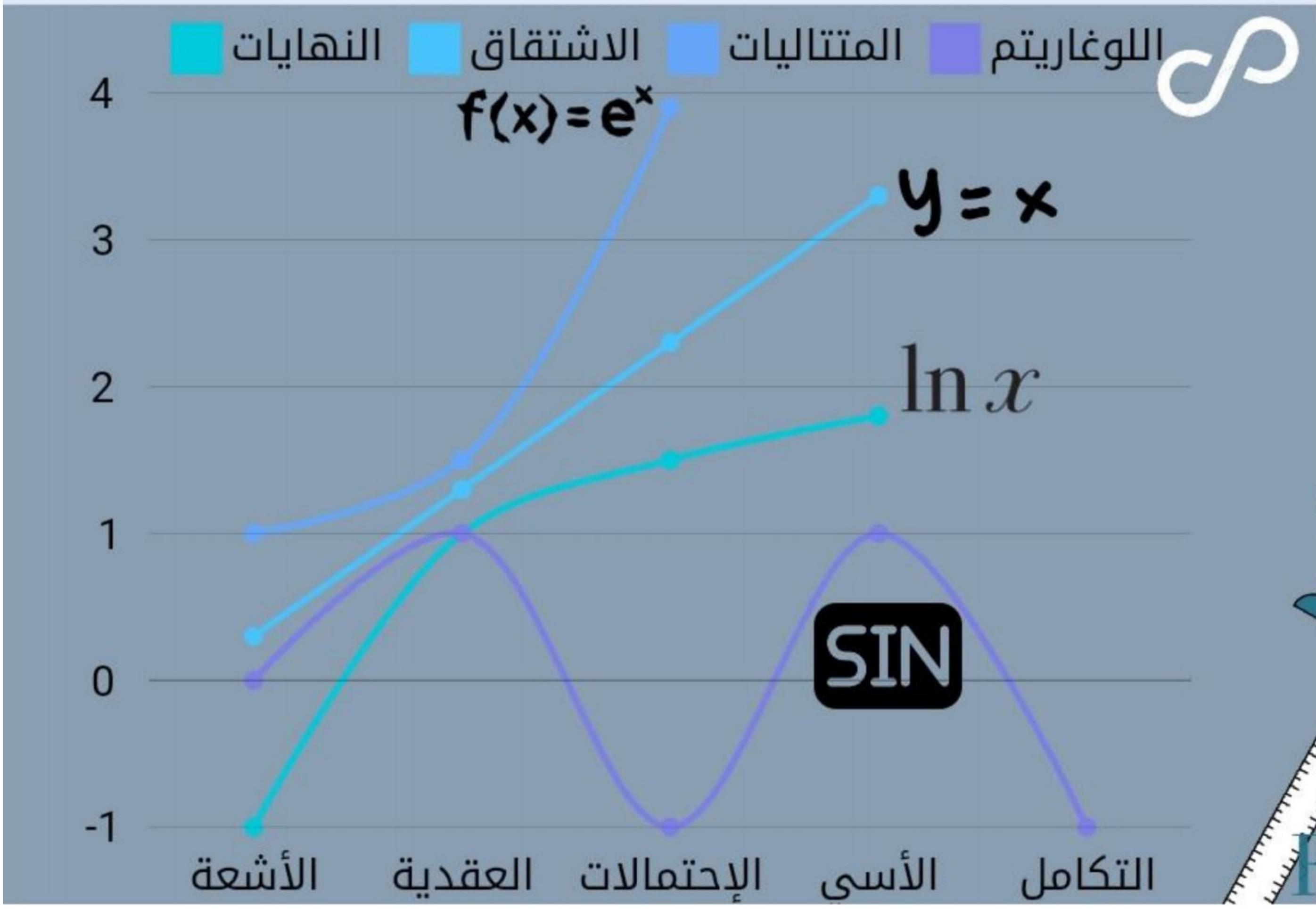
0997047862

Rateb ksaibe

$2x + 3x - 4x$ $\qquad$ $2x + 3x^2 - x^2$

$3a^2 + 2a^2 - a^2$ $\qquad$ $7ab + 4ab^2 - 3a$

$6ab - ab + 4ab$ $\qquad$ $10a + 3b - 2c$



ملاحظات عن∞

$+\infty + \infty = +\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$
$+\infty - \infty$ عدم تعيين	$(\infty)(\infty) = \pm\infty$ نضرب الأشارات
$0 \times \infty$ عدم تعيين	$\infty \times$ عدد $= \pm\infty$ نضرب الأشارات
$\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين	$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$
$\frac{0}{0}$ عدم تعيين	$\frac{\infty}{\text{عدد}} = \pm\infty$ نضرب الأشارات

$\frac{\text{عدد}}{0} = \pm\infty$ ندرس إشارة المقام ونعوض في البسط وندرس أشارة الصفر

$(-\infty)^{\text{فردي}} = -\infty$	$(-\infty)^{\text{زوجي}} = +\infty$	$(+\infty)^{\text{عدد}} = +\infty$

نستعمل النهايات لحساب نهاية التابع عند أطراف مجموعة التعريف

مجموعة التعريف:

١ مجموعة تعريف كثيرات الحدود والتوابع المثلثية: هي $R =]-\infty, +\infty[$

٢ مجموعة تعريف التابع الكسري: هي R ماعدا القيم اللتي تعدم المقام

٣ مجموعة تعريف التوابع الجذرية: هي ماداخل الجذر اكبر او يساوي الصفر

نهاية تابع كثير حدود عند $\pm\infty$:هي نهاية الحد المسيطر

مثال: $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x - 9$ ماهي نهاية $f(x)$ عند $-\infty$

A	B	C	D
$+\infty$	$-\infty$	0	غير معروف

لأن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (3x^3) = -\infty$

نهاية تابع كسري كل من البسط والمقام كثير حدود عند $\pm\infty$:

هي نهاية الحد المسيطر على الحد المسيطر

مثال: $f(x) = \frac{6x+6}{2-3x}$ نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ هي

A	B	C	D
$+\infty$	$-\infty$	0	-2

لأن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{6x}{-3x}\right) = \frac{6}{-3} = -2$

نهاية تابع كسري كل من البسط والمقام كثير حدود عند عدد: لدينا حالتين

الحالة الأولى: $\frac{\text{عدد}}{0}$ ندرس أشارة المقام ونعوض في البسط ثم ندرس أشارة الصفر من اليمين من اليسار

مثال: $f(x) = \frac{-2x^2}{(x-1)(2-x)}$ نهاية $f(x)$ عند 2 هي

A	B	C	D
$+\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	غير معروف

لإن $\lim_{x\to2} f(x) = \frac{-8}{0}$ وهو غير معروف ولحله ندرس أشارة المقام

المقام هو $(x-1)(2-x) = -x^2 + 3x - 2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{-8}{0^+} - \infty$ $\quad$ $\lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{-8}{0^-} = +\infty$

الحالة الثانية : $\frac{0}{0}$ وهي حالة تعيين نحلل البسط والمقام ثم نختصر

مثال: $f(x) = \frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ نهاية $f(x)$ عند 1 هي

A	B	C	D
$+\infty$	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$

الحل: $\lim_{x\to1} f(x) = \frac{0}{0}$ وهي حالة عدم تعيين

لدينا $f(x) = \frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{(x+2)(x-1)}$ القسمة الأقليدية / التحليل

شرح القسمة الأقليدية: لدينا 1 تحقق المعادلة $2x^3 - x^2 - 1$

إذا $x - 1$ تقسم $2x^3 - x^2 - 1$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 1 & x - 1 \\ \mp 2x^3 \pm 2x^2 & 2x^2 + x + 1 \\ \hline +x^2 & \\ \mp x^2 \pm x & \\ \hline +x - 1 & \\ \mp x \pm 1 & \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

إذا $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x+2}$

و $\lim_{x\to1} f(x) = \frac{4}{3}$

التحليل المباشر للمقام:
عددين مجموعهم 1 وضربهم -2
هم 2 و-1

بسم الله الرحمن الرحيم ماوفقت لخير إلا بفضل الله وماهديت لحسنة إلا بتوفيق من الله هذا الملخص يضمن افكار وحدة النهايات مع امثلة مهمة لفهم الأفكار لكن يوجد أمثلة في الكتاب لم تذكر يجب قرائتها نتمنى ان تنال اعجابكم وبالتوفيق الدائم والنجاح الطباعة ملون حصرا"

ملاحظة: من أهم طرق التحليل

١ أخراج عامل مشترك

٢ التحلليل المباشر

٣ القسمة الأقليدية

٤ المميز Δ

٥ المتطابقات الشهيرة

$\Delta = b^2 - 4ac$

الحالة الأولى: $\Delta > 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ او $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

الحالة الثانية: $\Delta < 0$ مستحيل الحل في R

الحالة الثالثة: $\Delta = 0$ تملك جذر مضاعف

هو $x = \frac{-b}{2a}$

أهم المتطابقات:

١ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

٢ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

نهاية التوابع الكسري الجذري:

الحالة الأولى: حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$ نخرج عامل حتى لو لم يكن موجود ثم نختصر

مثال: $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ ما هي نهاية $f(x)$ عند $+\infty$

A	B	C	D
1	$-\infty$	0	$+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$ وهي حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1+0}{\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1} = 1$$

$\sqrt{x} = |x| = \begin{cases} +x: x \to +\infty \\ -x: x \to -\infty \end{cases}$

الحالة الثانية: حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ نضرب بالمرافق

مرافق $\sqrt{a} \pm b$ هو $\sqrt{a} \mp b$
مرافق $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ هو $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

مثال: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$ مانهاية $f(x)$ عند 0

A	B	C	D
4	$-\infty$	0	$+\infty$

لأن $\lim_{x\to0} f(x) = \frac{0}{0}$ وهي حالة عدم تعيين لإزالتها نضرب بالمرافق

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$= \frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = \frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = 2(\sqrt{x+1}+1)$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = 2(1+1) = 4$$

الحالة الثالثة: عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$ يحل اما بطريقة المرافق أو العامل حسب شكل التمرين

مثال: $f(x) = \frac{x^2+x-\sqrt{x}}{x^2+1}$ نهاية $f(x)$ عند أطراف المجالات المفتوحة من مجموعة التعريف هي

A	B	C	D
1	$-\infty$	0	$+\infty$

لأن مجموعة تعريف التابع $f(x)$ هي

التابع الجذري $\sqrt{x}$ معرف على $x \geq 0$
$[0, +\infty[$

التابع الكسري معرف على R ماعدا القيم اللتي تعدم المقام $x^2 + 1 \neq 0$ لإنه مقدار موجب وأكبر تماما من الصفر إذا المقام لا ينعدم وهو معرف على R

تقاطع المجموعتين السابقتين

هو $[0, +\infty[$ المجال مفتوح عند $+\infty$ فقط

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty - \infty$ وهي حالة عدم تعيين

$x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$

بما أن $x > 0$ فأن:

$$f(x) = \frac{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1+0-0}{1+0} = 1$$

ملاحظة مهمة : يمكن حل حالات عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ عند أعداد بطريقة اوبيتال وسنذكرها لاحقا

نهاية التوابع المثلثية:

نهاية التابع المثلثي عند 0 :نستعمل القوانين التالية

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$
$1-\cos 2x = 2\sin^2 x$	$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

مثال: نهاية $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ هي

A	B	C	D
$+\infty$	$-\infty$	1	0

لإن:
$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$ وهي حالة عدم تعيين

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{0}{1}=0$$

نهاية التوابع المثليثة عند $\pm\infty$ نستعمل مبرهنات المقارنة

مبرهنة المقارنة الأولى : (مبرهنة الأحاطة)

$g(x)\le f(x)\le h(x)$ ونهاية g و h عند $+\infty$ هي l عندئذ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

ملاحظة: نبدأ ب أحد القوانين

$-1<\sin x<1$	$-1<\cos x<1$
$0<\sin^2 x<1$	$0<\cos^2 x<1$

مثال: ما نهاية $f(x)=\frac{\cos x}{x+1}$ عند ال$+\infty$ $x>-1$

A	B	C	D
$+\infty$	$-\infty$	-1	0

لإن عند $+\infty$ نستعمل الإحاطة

لدينا $x+1>0$ نقسم الطرفين على $x+1$

$$-1<\cos x<1$$
$$\frac{-1}{x+1}<\frac{\cos x}{x-1}<\frac{1}{x+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}=0$$

مبرهنة المقارنة الثانية:

$|f(x)-l|\le g(x)$ وكان $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

مثال: نهاية f اللتي تحقق $|f(x)+4|\le\frac{1}{x+1}$ عند $+\infty$ هي

A	B	C	D
$+\infty$	$-\infty$	-1	-4

لإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$ حسب مبرهنة المقارنة $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-4$

مبرهنة المقارنة الثالثة :

إذا كان $f(x)\ge g(x)$ وكان $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

إذا كان $f(x)\le g(x)$ وكان $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

مثال: نهاية f اللتي تحقق $f(x)\ge\frac{1}{4}x^2$ عند $+\infty$ هي

A	B	C	D
$+\infty$	$-\infty$	-1	0

لإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}x^2=0$ حسب مبرهنة المقارنة $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نهاية التابع المركب:

لنفرض أن $f(x)=goh=g(h(x))$ إذا كان $\lim_{x\to a}h(x)=b$ وكان $\lim_{t\to b}g(t)=c$ عندئذ $\lim_{x\to a}f(x)=c$

مثال: $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ مانهاية $f(x)$ عند $+\infty$

A	B	C	D
1	$-\infty$	-1	0

لإن نجري تحويل للمتغير $X=h(x)=\frac{1}{x}$ عندئذ يكون $f(x)=\frac{\sin X}{X}$

و $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ إذا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{X\to0}\frac{\sin X}{X}=1$

ليكن $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$ ما نهاية $f(f(x))$ عند $+\infty$

A	B	C	D
$\frac{-1}{3}$	$-\infty$	-1	0

لإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \Leftarrow \lim_{x\to1}f(x)=-\frac{2}{6} \Leftarrow \lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\frac{-1}{3}$

ليكن $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$ ماهو $f(f(x))$ مما يلي

A	B	C	D
$\frac{9x-18}{6x+12}$	$\frac{6x+18}{6x+12}$	$\frac{-2x-12}{6x+12}$	$\frac{-2x-18}{6x+12}$

لإن
$$f(f(x))=\frac{f(x)-3}{f(x)+5}=\frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5}=\frac{\frac{x-3}{x+5}-\frac{3(x+5)}{x+5}}{\frac{x-3}{x+5}+\frac{5(x+5)}{x+5}}=\frac{\frac{-2x-18}{x+5}}{\frac{+6x+12}{x+5}}=\frac{-2x-18}{6x+12}$$

لاحظ يمكن استبعاد الخيارين A وB لأنه من المثال السابق $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\frac{-2}{6}$

تعريف النهايات بشكل دقيق

الحالة الأولى: تعيين عدد A ليكون $f(x)$ ينتمي إلى مجال مفتوح $I=]a,b[$

نستعمل $|f(x)-l|<\varepsilon$

مثال: إن نهاية $f(x)=\frac{-2x+1}{x+3}$ عند $+\infty$ هي -2 ماهو العدد A اللذي يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]-2.05,-1.95[$

A	B	C	D
37	49	-1	137

$l=\frac{b+a}{2}$ هي مركز المجال
$\varepsilon=\frac{b-a}{2}$ وهي نصف قطر المجال

لإن $|f(x)-l|<\varepsilon$ $\;l=-2$ و $\varepsilon=0.05=\frac{1}{20}$

نعوض في القانون

$$\left|\frac{-2x+1}{x+3}+2\right|<\frac{1}{20}$$

بتوحيد المقامات $\left|\frac{7}{x+3}\right|<\frac{1}{20}$ بما أن $x\to+\infty$ إذا $\frac{7}{x+3}<\frac{1}{20}$

$140<x+3 \Rightarrow x>137$ نختار A=137

الحالة الثانية: تعيين مجال I ليكون $f(x)$ ينتمي إلى مجال مفتوح $I=]a,b[$

نستعمل $a<f(x)<b$

مثال: $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ إن نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ هي 5 ماهو المجال I اللذي يحقق الشرط: إذا انتمى x الى المجال I كان $f(x)$ في المجال $]3.95,4.05[$

A	B	C	D
$]4,5[$	$]4.98,5.02[$	$]4,7,5.3[$	$]4.97,5.03[$

لإن $3.95<f(x)<4.5$

$3.95<\frac{x+3}{x-3}<4.05$ نستخدم القسمة الأقليدية

$3.95<1+\frac{6}{x-3}<4.05$ نطرح1 $2.95<\frac{6}{x-3}<3.05$

نقلب $\frac{1}{2.95}>\frac{x-3}{6}>\frac{1}{3.05}$ نضرب 6 $\frac{6}{2.95}>x-3>\frac{6}{3.05}$

نجمع 3 بالأصلاح $\frac{6}{2.95}+3>x>\frac{6}{3.05}+3$ $\;4.97>x>5.03$

الحالة الثالثة : تعيين مجال i ليكون $f(x)>A$ احيانا" يوجد معادلة درجة تانية من الشكل : $a(x-1)^2+b(x-1)+c$ نحلها بالΔ

مثال : $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$ ماهو المجال الذي مركزه 1 ويحقق $f(x)>10^6$

A	B	C	D
$]0.9,1.01[$	$]0.9,0.01[$	$]0.99,1.01[$	$]0.999,1.001[$

$$f(x)>10^6 \Rightarrow \frac{x}{(x-1)^2}>10^6 \Rightarrow x>10^6(x-1)^2$$
$$x+1-1>10^6(x-1)^2 \Rightarrow 0>10^6(x-1)^2-(x-1)-1$$

نحلها بالΔ $\;a=10^6$ $\;b=-1$ $\;c=-1$ $\;\sqrt{\Delta}=2\times10^3$

$x_1=1+10^{-3}$ $\quad(x-1)=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+2\times10^3}{2\times10^6}\approx\frac{2\times10^3}{2\times10^6}=10^{-3}$

$x_2=1-10^{-3}$ $\quad(x-1)=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-2\times10^3}{2\times10^6}\approx\frac{-2\times10^3}{2\times10^6}=-10^{-3}$

$I=]0.999,1.001[$

اللهم ارزقني قوة الحفظ وسرعة الفهم وصفاء الذهن اللهم ألهمني الصواب في الجواب وبلغني أعلى المراتب في الدين والدنيا والآخرة

المقاربات:

1- **المقارب الافقي** : نقول $y=b$ عن انه مقارب افقي للخط البياني للتابع f اذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$

2- **المقارب الشاقولي** : نقول $x=a$ عن انه مقارب شاقولي للخط البياني للتابع f اذا كان : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

3- **المقارب المائل** : نقول عن $\Delta: y = ax + b$ أنه مقارب مائل للخط البياني للتابع f اذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$

مثال: $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ عدد المقاربات ل $f(x)$ هو

0	D	1	C	2	B	4	A

لإن $D_f =]-\infty, 3[\cup]3, +[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ اذا $y = 1$ مقارب افقي عند $+\infty$ يوازي $x\acute{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ اذا $y = 1$ مقارب افقي عند $-\infty$ يوازي $x\acute{x}$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$ اذا $x = 3$ مقارب شاقولي عند $+\infty$ يوازي $y\acute{y}$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -\infty$ اذا $x = 3$ مقارب شاقولي عند $-\infty$ يوازي $y\acute{y}$

ملاحظة : لدراسة وضع c بالنسبة للمقارب الافقي او المائل ندرس اشارة الفرق $f(x) - y_\Delta$

طرق ايجاد معادلة المقارب المائل :

١) مجموع تابعين احدهم نهايته عند $\pm\infty$ تساوي 0

مثال: $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$ المقارب المائل ل $f(x)$ عند $+\infty$ هو

$1 - \frac{x}{2}$	D	$\frac{-2}{x}$	C	$1 + \frac{2}{x}$	B	$1 + \frac{x}{2}$	A

لإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -\frac{2}{x} = 0$ إذا $f(x) - y_\Delta = \frac{-2}{x}$ و $y_\Delta = 1 + \frac{x}{2}$

٢) بتوزيع البسط على المقام

مثال: $f(x) = \frac{2x^2+5x-4}{x}$ المقارب المائل ل $f(x)$ عند $+\infty$ هو

$2x$	D	$\frac{-4}{x}$	C	$-2x^2$	B	$2x + 5$	A

لإن $f(x) = \frac{2x^2+5x-4}{x} = \frac{2x^2}{x} + \frac{5x}{x} - \frac{4}{x} = 2x + 5 - \frac{4}{x}$

لإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -\frac{4}{x} = 0$ إذا $f(x) - y_\Delta = \frac{-4}{x}$ و $y_\Delta = 2x + 5$

٣) البسط والمقام كثيري حدود ودرجة البسط اكبر من درجة المقام بمقدار واحد نستخدم القسمة الاقليدية

مثال: $f(x) = \frac{2x^2-7x-3}{x-4}$ المقارب المائل ل $f(x)$ عند $+\infty$ هو

$-2x - 1$	D	$\frac{1}{x-4}$	C	$2x - 1$	B	$2x + 1$	A

لإن نقسم $f(x)$ بالقسمة المطولة نحصل على

$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{1-4}$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-4} = 0$

٤) اذا كان التابع من الشكل $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ نكتب المقدار $ax^2 + bx + c$ بالصيغة القانونية لتكون بالشكل $ax^2 + bx + c = (\grave{a}x + \grave{b})^2 + \grave{c}$ عندها التابع يقبل مقاربين مائلين من الشكل $\Delta_1: y = \grave{a}x + \grave{b}$ و $\Delta_2: y = -\grave{a}x - \grave{b}$

مثال: $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ المقارب المائل ل $f(x)$ عند $-\infty$ هو

$x + 1$	D	$2x$	C	$x - 1$	B	$-x - 1$	A

نتمم $x^2 + 2x + 4$ الى مربع كامل بالشكل

$x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 4 = (x + 1)^2 + 3$

اذا المقارب المائل عند $-\infty$ هو $y_\Delta = -x - 1$

طريقة ثانية: $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$
مقاربه عند $+\infty$ هو $y = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$
مقاربه عند $-\infty$ هو $y = -\sqrt{a}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}$

للإتمام إلى مربع كامل نقسم أمثال الـx على 2 ثم نربعها ثم نضيفها ونطرحا من المعادلة والحدود الثلاثة الأولى تكتب بشكل قوس مربع

٥) الطريقة العامة : لايجاد معادلة المقارب المائل للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$ (مثلا) نتبع الخطوات التالية :

a) نتأكد أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) نعين العددين الحقيقيين a, b حيث : $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$

c) عندئذ تكون معادلة المقارب المائل من الشكل $\Delta: y = ax + b$

مثال: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ المقارب المائل ل $f(x)$ عند $-\infty$ هو

$y = 3x + 1$	D	$y = 2x$	C	$y = x$	B	$y = -x$	A

لإن $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ حالة عدم تعيين نزيلها بإخراج عامل

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$x \to -\infty \quad \sqrt{x^2} = -x$

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = -1$$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} + x)$ حالة عدم تعيين نضرب بالمرافق

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{x^2+1} - x)}{(\sqrt{x^2+1} - x)}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(\sqrt{x^2+1} - x)} = 0$$

والمقارب من الشكل $y = ax + b$ اذا $y = -x$

ملاحظة لدراسة الوضع النسبي: هو دراسة اشارة $f(x) - y_\Delta$

$\lvert x\rvert > 0$	$\sqrt{x} > 0$	$x^2 > 0$
$-\lvert x\rvert < 0$	$-\sqrt{x} < 0$	$-x^2 < 0$

مثال: $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x^2}$ الوضع النسبي بين $f(x)$ ومقاربه المائل عند $+\infty$

فوق وتحت	D	لايوجد مقارب	C	c_f فوق y_Δ	B	c_f تحت y_Δ	A

لإن من الواضح أن $f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{x^2}$ و $x^2 > 0$

$\frac{-1}{x^2} < 0$ وهو سالب اذا "$f(x) - y_\Delta < 0$" اذا "c_f تحت y_Δ"

مثال: $f(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x+1}$ الوضع النسبي بين $f(x)$ ومقاربه المائل عند $]-1, +\infty[$

فوق وتحت	D	لايوجد مقارب	C	c_f فوق y_Δ	B	c_f تحت y_Δ	A

ندراسة اشارة $f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x+1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	−	‖	+
الوضع النسبي	c_f تحت y_Δ		c_f فوق y_Δ

مثال : $f(x) = x + \sqrt{\lvert 4x^2 - 1\rvert}$ يقبل $y = 3x$ مقاربا" مائلا" عند $+\infty$ ان نقطة تقاطع $f(x)$ مع y_Δ هي

$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\right)$	D	$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2}\right)$	C	$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$	B	$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$	A

لان : ندرس الوضع النسبي بين $f(x)$ و y_Δ

$f(x) - y_\Delta = \sqrt{\lvert 4x^2 - 1\rvert} - 2x = 0$

$\sqrt{\lvert 4x^2 - 1\rvert} = 2x$ نربع الطرفين بشرط $2x > 0$ $x > 0$

$\lvert 4x^2 - 1\rvert = 4x^2$ اما $4x^2 - 1 = 4x^2$ اذا $-1 = 0$ وهي مستحيلة

او $4x^2 - 1 = -4x^2$ اذا $8x^2 = 1$ اذا $x^2 = \frac{1}{8}$ اذا $x = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ مرفوض من الشرط $x = +\frac{1}{2\sqrt{2}}$ مقبول

x	$-\infty$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	+	0	−
الوضع النسبي	c_f فوق y_Δ	$\frac{3}{2\sqrt{2}}$	c_f تحت y_Δ

تحديد الثوابت:

١ c_f مار من نقطة $A(a,b)$ إذا $f(a)=b$

٢ c_f يملك مقارب شاقولي معادلته $x=a$ إذا المقام ينعدم عند $x=a$

٣ c_f يملك مقارب أفقي معادلته $y=b$ إذا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$

٤ c_f يملك مقارب مائل من الشكل $y=ax+b$

حاول كتابة $f(x)$ بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$

مثال: $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$ ماهي الأعداد الحقيقية اللتي تحقق

$$f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

A	B	C	D
$a=3$, $b=1$, $c=8$	$a=1$, $b=2$, $c=8$	$a=1$, $b=2$, $c=3$	$a=0$, $b=2$, $c=3$

نقسم البسط على المقامبالقسمة الإقليدية

$$f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}=3+\frac{9x+6}{x^2-x-2}=3+\frac{9x+6}{(x+1)(x-2)}$$

بالمقارنة مع الشكل المطلوب نجد إن $a=3$ بقي لدينا

$$\frac{9x+6}{(x+1)(x-2)}=\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

بتوحيد المقامات في الطرف الأيمن

$$\frac{9x+6}{(x+1)(x-2)}=\frac{b(x-2)+c(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

بالمقارنة بالبسط $9x+6=b(x-2)+c(x+1)$

عندما $x=-1$ $b=1$ عندما $x=2$ $c=8$

الاستمرار :

١) نقول عن التابع f انه مستمر عند النقطة a اذا تحققت العلاقة $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

٢) نقول عن f انه مستمر على مجال I اذا كان مستمر عند كل نقطة من نقاط هذا المجال

٣) جميع التوابع المرجعية مستمرة على المجالات التي تشكل مجموعة التعريف

مثال: $f(x)=\begin{cases}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & : x\neq 0\\ m & : x\neq 0\end{cases}$ قيمة m التي تجعل f مستمر عند 0

A	B	C	D
2	3	0	1

ليكون $f(x)$ مستمر عند الصفر يجب ان يكون $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\frac{0}{0}$ وهي حالة عدم تعيين نضرب بالمرافق

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}-1\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x}=2$$

$$f(0)=m=\lim_{x\to 0} f(x)=2$$

تابع الجزء الصحيح: $E(x)$ هوتابع يعطي قيم صحيحة للأعداد ويحقق $x-1<E(x)\leq x$ او $n\leq x<n+1$

نكتب المجال على شكل مجالات جزئية طول كل منها يساوي الواحد (من الأيمن مفتوح ومن الايسر مغلق)

مثال: $E(x)=0$ ⬅ $[0,1[$

$E(x)=1$ ⬅ $[1,2[$

$E(x)=2$ ⬅ $[2,3[$

استمرار $E(x)$ عند نقطة

$f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$

رسم $E(x)$

نهاية $E(x)$

مثال: $f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$ إن $f(x)$ على المجال $[1,2[$ هو

A	B	C	D
x^2	$1+(x-1)^2$	$2+X^2$	x

لإن $E(x)=1$ ⬅ $[1,2[$ اذا نعوض بدل كل $E(x)$ ب1 في المعدلة

مثال: $f(x)=x-E(x)$ ماهي $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$

A	B	C	D
2	3	0	4

لإن $x-1<E(x)\leq x$ $-x+1>-E(x)\geq -x$

$+1>x-E(x)\geq 0$ و $\frac{1}{x^2}>\frac{f(x)}{x^2}\geq 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

وحسب مبرهنة الإحاطة : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$

ملاحظة: يمكن دراسة هذا الدرس مع وحدة الأشتقاق

دراسة التغيرات :

1)نوجد مجموعة تعريف التابع $f(x)$

2) نحسب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف المفتوحة والصور عند الاطراف المغلقة

3) نعين معادلة كل مقارب افقي او شاقولي ان وجد وندرس الاوضاع النسبية

4) نشتق التابع f ونعدمه وندرس اشارة $\acute{f}(x)$ على مجموعة تعريفه

5) نصور القيمة التي عدمت المشتق

6) تنظيم جدولا" بتغيرات f

حل المعادلة : $f(x)=k$ (عن طريق الجدول)

نقول أن للمعادلة $f(x)=k$ حل وحيد على المجال $]a,b[$ إذا تتحقق الشرطين 1 f مطردة تماما 2 $k\in f(]a,b[)$

حالة خاصة $f(x)=0$

F مستمر ومطرد تماما" على $I=[a,b]$

و $f(a)\times f(b)<0$ اذا" للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على I

مثال: $f(x)=x^3-x^2+x-2$ كم عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ في المجال $]1,2[$

A	B	C	D
1	2	3	0

ندرس تغيرات f : f مستمر واشتقاقي على R

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\acute{f}(x)=3x^2-2x+1$ نعدم $\acute{f}(x)$

$3x^2-2x+1=0$ $\Delta=-8<0$ اذا $\acute{f}(x)$ لاينعدم اذا لايغير اشارته

x	$-\infty$		$+\infty$
$\acute{f}(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

$f(x)$ مستمر ومستمر تماما على R فهو مستمر ومتزايد تماما على $]1,2[$

$f(1)=1-1+1-2=-1$ $f(2)=8-4+2-2=4$

$f(1)\times f(2)=-4<0$ اذا يوجد حل وحيد فقط

صورة مجال	f متزايد تماما"	f متناقص تماما"
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=]a,b]$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to a} f(x),f(b)\right]$	$f(I)=\left[f(b),\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$I=[a,b[$	$f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to b} f(x),f(a)\right]$
$I=]a,b[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to a} f(x),\lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$f(I)=\left]\lim\limits_{x\to b} f(x),\lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

مثال:ماهي صورة المجال $I=]-\infty,-1]$ وفق الجدول التالي

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	-2 ↗	0	4 ↘	3

A	B	C	D
$]2,+\infty[$	$]-1,2[$	$]-2,+\infty[$	$]-\infty,-1[$

ملاحظة : عدد حلول $f(x)=0$ في الجدول السابق حلين احدهم في المجال $]-\infty,-1[$ والأخر في المجال $]-1,2[$ لإن الصفر تنتمي الى المجالين $]-2,+\infty[$ و $]-2,4[$ وهي صور المجالات السابقة

ملاحظة : الخط البياني للتقابل والتقابل العكسي متناظران بالنسبة الى مستقيم $d: y=x$

مثال : $f(x)=x^2$ $f(x)=\sqrt{x}$ هما :

A	B	C	D
متناظران بالنسبة للمبدأ	متناظران بالنسبة لـ$y=0$	متناظران بالنسبة الى مستقيم $y=x$	غير متناظران

لان F,g تقابل وتقابله عكسي

ملاحظات :

f متزايد تماما إذا $\acute{f}>0$	f متناقص تماما إذا $\acute{f}>0$
التابع زوجي $f(-x)=f(x)$	التابع فردي $f(-x)=-f(x)$
$\cos -x=\cos x$	$\sin -x=-\sin x$

اللهم وفق كل من أجتهد طلبا" للعلم

0997047862

المدرس : راتب كسيبي