① تعريف المتتالية:

• المتتالية: هي قائمة مرتبة من الأعداد

2, 4, 6, 8, 10, ...

3, 3, 3, 3, 3, ...

1, -1, 1, -1, 1, ...

• المتتالية: هي تابع منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية أو أي مجموعة جزئية غير منتهية منها.
مستقره R.

المنطلق: x

المستقر: y

② المقارنة بين التابع والمتتالية:

	التابع	المتتالية
الرمز	$f, g, h, \ldots$	$U, V, W, \ldots$
المتغير	x	n $\quad n \in \mathbb{N}$
القاعدة	$f(x)$	U_n
الشكل	$f: D \to H$	$(U_n)_{n \geq n_0}$ مجموعة الحدود

③ كيفية كتابة حدود متتالية:

أ- طريقة الحد العام (الحد بدلالة n)

يعطينا صيغة الحد العام ومن خلاله نوجد باقي الحدود

مثال: $U_n = 2n - 5$

أوجد U_0, U_1, U_2, U_3

$U_0 = 2(0) - 5 = -5$

$U_1 = 2(1) - 5 = -3$

$U_2 = 2(2) - 5 = -1$

$U_3 = 2(3) - 5 = 1$

ب- طريقة العلاقة التدريجية.

ومنها نحسب كل حد من خلال حد سابقه وذلك من خلال علاقة تسمى بالعلاقة التدريجية.

$U_{n-1} \leftarrow U_n \rightarrow U_{n+1}$

سابق $\quad$ لاحق

مثال:

$U_0 = 2$

$U_{n+1} = 3U_n - 5$

أوجد U_1, U_2, U_3

$U_1 = 3U_0 - 5 = 3(2) - 5 = 1$

$U_2 = 3U_1 - 5 = 3(1) - 5 = -2$

$U_3 = 3U_2 - 5 = 3(-2) - 5 = -11$

④ دراسة جهة اطراد متتالية:

2, 4, 6, 8 ... مطردة (متزايدة تماماً)

8, 4, 2, 1, ... مطردة (متناقصة تماماً)

3, 3, 3, 3, ... مطردة (ثابتة)

2, -2, 2, -2, 2, ... غير مطردة (متناوبة)

Date : / / Subject:

غير مطردة (متذبذبة): 2, 4, 6, 0, -5, 3, ...

* طرائق دراسة جهة اطراد متتالية:

① الفرق (مقارنة مع الصفر)

$U_{n+1} - U_n > 0$ متزايدة تماماً

$U_{n+1} - U_n < 0$ متناقصة تماماً

$U_{n+1} - U_n = 0$ ثابتة

② القسمة (المقارنة مع الواحد).

$\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ متزايدة تماماً

$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ متناقصة تماماً

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ ثابتة

ملاحظة هامة: يجب أن تكون المتتالية ذات حدود موجبة، وتستخدم في القوى أو العاملة.

③ المشتق:

نحول المتتالية لتابع من خلال العلاقة

$U_n = f(n)$

ونشتق التابع

$f' > 0$ متزايدة تماماً

$f' < 0$ متناقصة تماماً

لدراسة جهة اطراد متتالية معطاة بالصيغة التدريجية نستخدم الاستقراء الرياضي.

⑤ المتتالية الحسابية:

• التعريف: كل حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد ثابت يسمى الأساس ونرمز له بـ r

2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

• الحد العام: $U_n = U_0 + nr$

حد البدء، رقم الحد، الأساس

• حدين كيفيين:

$U_m = U_p + (m-p)r$

$\Rightarrow r = \frac{U_m - U_p}{m - p}$

Date : / / Subject:

• إثبات متتالية:

$$U_{n+1} - U_n = \text{ثابت} = r$$

• ثلاث حدود متوالية (a, b, c):

$$b = \frac{a+c}{2}$$

الوسط الحسابي

$$\Rightarrow 2b = a + c$$

• المجموع:

$$S_n = U_i + U_{i+1} + \dots + U_j$$

$$\Rightarrow S_n = n\,\frac{a+P}{2}$$

عدد الحدود: $n = j - i + 1$

الحد الأول: $a = U_i$

الحد الأخير: $P = U_j$

⑥ المتتالية الهندسية:

• التعريف: كل حد فيها ينتج عن سابقه بضربه بعدد ثابت يسمى الأساس ونرمز له بـ q.

2, 4, 8, 16, 32, ...

• الحد العام:

$$U_n = U_0 \cdot q^n$$

• صيغة لا على التعيين:

$$U_m = U_p \cdot p^{m-p}$$

$$\Rightarrow q^{m-p} = \frac{U_m}{U_p}$$

• إثبات متتالية:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \text{ثابت} = q$$

• ثلاث حدود متتالية:

$$b^2 = a \cdot c$$

• المجموع:

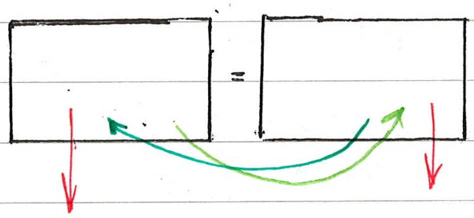
$$S_n = U_i + U_{i+1} + \dots + U_j$$

$$\Rightarrow S_n = a\,\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

⑧ الاستقراء الرياضي // الإثبات بالتدريج //.

وهو إثبات علاقة نونية.

$$\underbrace{|\;\;|\;\;|\;\;|\;\dots\;||}_{n\ \text{حد}}$$



وأتم ذلك من خلال مرحلتين:

المرحلة الأولى: أثبت صحة العلاقة من أجل حد البدء.

المرحلة الثانية:

الفرض: هو فرض المسألة.

الطلب: هو أن نستبدل كل $n \to n+1$

الإثبات:

1) مساواة: ننطلق من الطرف الأول من الطلب ونتوصل للطرف الثاني من الطلب وذلك بالاستفادة من الفرض.

2) متراجحات: ننطلق من الطرف الأول من الطلب ونتوصل للطرف الثاني من الطلب وذلك بالاستفادة من الفرض (وأثناء البرهان نحصل على عدد نكتبه بشكل مجموع عددين أحدهما صاحب السؤال)

3) قابلية: ننطلق من الفرض ونتوصل للطلب وذلك باستخدام خواص قابلية القسمة.

تدرّب ص 18:

$\boxed{1}$ لتكن $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية وجد أساسها.

الحل:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{2^n}$$

$$= \frac{2\cancel{2^n} \times 3\cancel{3^n}}{3^2\cancel{3^n} \times \cancel{2^n}} =$$

$$= \frac{2 \times 3}{3^2} = \frac{2}{3} = q$$

متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

$\boxed{2}$ الأسئلة الآتية تتعلق بمتتاليات حسابية أو هندسية:

① متتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$ احسب u_{20}.

$$r = \frac{u_m - u_p}{m-p} = \frac{u_5 - u_2}{5-2} = \frac{-13-41}{5-2}$$

$$= -18$$

$$u_m = u_p + (m-p)r \qquad m = 20$$

$$u_{20} = u_5 + (20-5)(-18) \qquad p = 5$$

$$= -13 + (15)(-18)$$

$$= -283$$

② متتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ هندسية فيها $u_7 = \frac{1}{1080}$ و $u_{10} = \frac{25}{2197}$ احسب u_{30}

$$q^{m-p} = \frac{u_m}{u_p} \qquad m = 10, \quad p = 7$$

$$q^3 = \frac{\frac{25}{2197}}{\frac{1}{1080}} = \frac{27000}{2197}$$

$$q = \frac{30}{13}$$

Date : / / Subject:

② $U_n = \sqrt{3n+1}$

$U_n = f(x)$

$f(x) = \sqrt{3x+1}$

$f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}} > 0$

متزايدة تماماً

③ $U_n = \dfrac{2n-1}{n+4}$

$U_n = f(n)$

$f(x) = \dfrac{2x-1}{x+4}$

$f'(x) = \dfrac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0$

متزايدة تماماً

④ $U_n = \dfrac{1}{n^2+1}$

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\frac{1}{(n+1)^2+1}}{\frac{1}{n^2+1}}$

$= \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2+1} < 1$

متناقصة تماماً

$S = 20\,\dfrac{10+\frac{1}{2}}{2}$

$= 10\,(10+\tfrac{1}{2})$

$= 100 + 5 = 105$

⑧ a ، b ، c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية احسبها علماً أن.

$abc = 216$ ①

$a+b+c = 21$ ②

بما أن المتتالية هندسية إذن

$b^2 = a.c$ ③

$b^2 b = 216$ نعوض ③ في ①

$b^3 = 216$

$b = 6$

$a.c = 36$ نعوض في ③

$a+c = 15$ نعوض في ②

إما $a = 3$ $b = 12$

أو $a = 12$ $b = 3$

4 ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية :

① $U_n = \dfrac{3}{n^2}$

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\frac{3}{(n+1)^2}}{\frac{3}{n^2}} = \dfrac{n^2}{(n+1)^2} < 1$

متناقصة

متزايدة تماماً ،

8 $u_0 = 1$

$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$

متناقصة تماماً

9 $u_0 = 1$

$u_{n+1} = 2u_n$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$

متزايدة تماماً

$\boxed{3}$ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق

$v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$ ، $v_0 = 1$

1. تحقق أن $v_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n.
2. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة $u_n = \frac{1}{v_n}$ حسابية
3. استنتج عبارة v_n بدلالة n

الحل:

من أجل $n=0$

$v_0 = 1 > 0$

فالعلاقة محققة من أجل $n=0$

الفرض: $v_n > 0$

الطلب: $v_{n+1} > 0$

البرهان:

لدينا $v_n > 0$ فرضية إذاً

5 $u_n = \frac{3n+1}{n-2}$ $n > 2$

$u_n = f(x)$

$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

$f'(x) = \frac{3(x-2)-(3x+1)}{(x-2)^2}$

$= \frac{-7}{(x-2)^2} < 0$

متناقصة تماماً

6 $u_n = \frac{n}{10^n}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}}$

$= \frac{\cancel{10^n}(n+1)}{10^n \cdot 10(n)}$

$= \frac{n+1}{10n} < 0$

متناقصة تماماً من أجل $n > 0$

7 $u_0 = 2$

$u_{n+1} = u_n - 3$

$u_{n+1} - u_n = -3 < 0$

فهي متناقصة تماماً.

Date : / /

Subject:

$U_n > 0$

$1 + U_n > 0$

$\frac{U_n}{1+U_n} > 0 \Leftrightarrow U_{n+1} > 0$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي صحيحة.

$\boxed{2}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{V_{n+1}} - \frac{1}{V_n}$

$= \frac{1}{\frac{V_n}{1+U_n}} - \frac{1}{V_n}$

$= \frac{1+V_n}{V_n} - \frac{1}{V_n}$

$= \frac{V_n}{V_n} = 1 =$ ثابت

فهي متتالية حسابية أساسها $r=1$

$U_0 = \frac{1}{V_0} = \frac{1}{1} = 1$

$U_n = U_0 + nr$

$U_n = 1 + n$

$U_n = \frac{1}{V_n}$

$V_n = \frac{1}{U_n} = \frac{1}{1+n}$

تدريب 2:

$\boxed{4}$ نعرف في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار:

$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$

① احسب S_1, S_2, S_3, S_4 وعبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n

② أثبت بالتدريج أنه في حالة أي عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا:

$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

الحل:

$S_1 = 1^2$

$S_2 = 1^2 + 2^2 = S_1 + 2^2$

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = S_2 + 3^2$

$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = S_3 + 4^2$

نلاحظ أن:

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

من أجل $n=1$

$P_1 = S_1 = 1^2 = 1$

$P_2 = \frac{1(2)(3)}{6} = 1 = P_1$

$P_1 = P_2$

العلاقة محققة من أجل $n=1$

الفرض: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

الطلب: $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

البرهان: $L_1 = S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

Sabbagh

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = P_2$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي علاقة صحيحة

$\boxed{2}$ ليكن $x \geq -1$ في جملة عدد طبيعي n نرمز $E(n)$

الخاصية $(1+x)^n \geq 1+nx$

أثبت أن الخاصية $E(n)$ محققة أياً كان n

الحل:

من أجل $n=0$

$(1+x)^0 \geq 1+0$

$1 \geq 1$

محققة من أجل $n=0$

الفرض: $(1+x)^n \geq 1+nx$

الطلب: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

البرهان: لدينا فرضاً

$(1+x)^n \geq 1+nx$

نضرب طرفي المعادلة بـ $1+x$

$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+\cancel{nx^2}$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+(1+n)x$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$

فالعلاقة صحيحة

تمرينات الوحدة:

$\boxed{4}$ أثبت بالتدريج صحة العلاقتين:

(a) $1+2\times2!+3\times3!+\dots+n\times n! = (n+1)!-1$

الحل:

من أجل $n=1$

$P_1 = 1$

$P_2 = (1+1)!-1 = 1$ $\Rightarrow P_1 = P_2$

فالعلاقة محققة من أجل $n=1$

الفرض: $1+2\times2!+3\times3!+\dots+n\times n! = (n+1)!-1$

الطلب: $1+2\times2!+3\times3!+\dots+(n+1)\times(n+1)! = (n+2)!-1$

البرهان:

$\underbrace{1+2\times2!+3\times3!+\dots+n\,n!}_{\text{فرضاً}}+(n+1)(n+1)!$

$= (n+1)!-1+(n+1)(n+1)!$

$= (n+1)!\,(1+n+1)-1$

$= (n+1)!\,(n+2)-1$

$= (n+2)!-1 = P_2$ العلاقة محققة

⑤ $n! \geq 2^{n-1}$

من أجل $n=1$

$1! \geq 2^0 \Rightarrow 1 \geq 1$

العلاقة محققة من أجل $n=1$

الفرض: $n! \geq 2^{n-1}$

الطلب: $(n+1)! \geq 2^n$

الإثبات: المناقشة

$n! \geq 2^{n-1}$

نضرب طرفي المتراجحة بـ $0 < n+1$

$(n+1)(n!) \geq (n+1)2^{n-1}$

$(n+1)! \geq (1+1)\,2^{n-1}$

$(n+1)! \geq 2\,2^{n-1}$

$(n+1)! \geq 2^n$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فالعلاقة صحيحة

6 ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c و $a \neq 0$،
نعلم أن a, b, c هي ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية، أساسها q
ونعلم $c, 2b, 3a$ هي ثلاثة حدود متتالية من متتالية حسابية. أوجد q.

الحل:

a, b, c ثلاث حدود متتالية من متتالية هندسية.

$b = aq$ ①

$c = bq = aq^2$ ②

$c, 2b, 3a$ حدود متتالية من متتالية حسابية.

$2(2b) = c + 3a$

$4b = c + 3a$ ③

نعوض ① و ② في ③:

$4aq = aq^2 + 3a$

$\div a \neq 0$

$4q = q^2 + 3$

$q^2 - 4q + 3 = 0$

إما $q = 1$

أو $q = 3$

8 نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة تدريجيا وفق:

* $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n$ و $u_0 = 5$

① عين كثير حدود من الدرجة الثانية P بحيث تحقق المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ التي حدها العام $t_n = P(n)$ العلاقة التدريجية * نفسها أي: أيًا كان n

$t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$

② اثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ هي متتالية هندسية.

③ اكتب عبارة v_n ثم u_n بدلالة n و 5

Date : / / Subject:

الحل:

$P_n = an^2 + bn + c$

$\Rightarrow t_n = an^2 + bn + c$

$t_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$

$\frac{1}{2}t_n + n^2 + n = a(n^2 + 2n + 1) + b(n+1) + c$

$\frac{1}{2}(an^2 + bn + c) + n^2 + n = an^2 + 2an + a + bn + b + c$

$\frac{1}{2}an^2 + \frac{1}{2}bn + \frac{1}{2}c + n^2 + n = an^2 + (2a+b)n + a + b + c$

$(\frac{1}{2}a + 1)n^2 + (\frac{1}{2}b + 1)n + \frac{1}{2}c = an^2 + (2a+b)n + a + b + c$

بالمطابقة:

$\frac{1}{2}a + 1 = a \xrightarrow{\times 2} a + 2 = 2a \Rightarrow a = 2$

$\frac{1}{2}b + 1 = 2a + b \xrightarrow{\times 2} b + 2 = 8 + 2b \Rightarrow b = -6$

$\frac{1}{2}c = a + b + c \xrightarrow{\times 2} c = 4 - 12 + 2c \Rightarrow c = 8$

$P_n = 2n^2 - 6n + 8 = t_n$

$v_n = u_n - t_n$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - t_{n+1}}{u_n - t_n}$

$= \frac{\frac{1}{2}u_n + \cancel{n^2} + \cancel{n} - \frac{1}{2}t_n - \cancel{n^2} - \cancel{n}}{u_n - t_n}$

$= \frac{\frac{1}{2}\cancel{(u_n - t_n)}}{\cancel{u_n - t_n}} = \frac{1}{2}$

فهي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$v_n = v_0 \cdot q^n$

حيث $v_0 = u_0 + t_0 = 5 - 8$

$v_n = (5 - 8)(\frac{1}{2})^n$

لدينا $v_n = u_n - t_n \Rightarrow u_n = v_n + t_n$

$u_n = (5 - 8)(\frac{1}{2})^n + 2n^2 - 6n + 8$

5) نعطي عددين حقيقيين a, b ونفترض أن $a \neq 1$ نتأمل المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ التي تحقق $v_{n+1} = av_n + b$ أياً كان العدد الطبيعي n.

1) عين تابع f يحقق $v_{n+1} = f(v_n)$ أياً كانت $n \geq 0$

2) احسب ℓ حل المعادلة $f(x) = x$

3) نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ حيث $u_n = v_n - \ell$ أثبت أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية، استنتج u_n بدلالة n، a، b، v_0 ثم استنتج v_n بدلالة هذه المعاملات.

الحل:

1) $f(x) = ax + b$

2) $f(x) = x$

$ax + b = x \Rightarrow$

$ax - x = -b \Rightarrow$

Date : / /

Subject:

15 نتأمل متتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالتدريج وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 1 , U_1 = 4 \\ U_{n+1} = 5U_n - 6U_{n-1} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

① عين عددين حقيقيين b, a حقيقيان $ab=6 , a+b=5$

② لتكن $(V_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $V_n = U_{n+1} - aU_n$ اثبت أن $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية؛ أساسها b.

③ لتكن $(W_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $W_n = U_{n+1} - bU_n$ اثبت أن $(W_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية؛ أساسها a

④ عبر عن V_n و W_n بدلالة n. ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n.

الحل:

$a.b = 6$
$a+b = 5$ ⟹ إما $a=2$ $b=3$ أو $a=3$ $b=2$

$a=2$ $b=3$

$$V_n = U_{n+1} - 2U_n$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+2} - 2U_{n+1}}{U_{n+1} - 2U_n}$$

$$= \frac{5U_{n+1} - 6U_n - 2U_{n+1}}{U_{n+1} - 2U_n}$$

$$= \frac{3U_{n+1} - 6U_n}{U_{n+1} - 2U_n}$$

$$= \frac{3\cancel{(U_{n+1} - 2U_n)}}{\cancel{U_{n+1} - 2U_n}}$$

$$= 3$$

هي متتالية هندسية؛ أساسها $q=3$

$$x = \frac{-b}{a-1}$$

$$f = \frac{-b}{a-1}$$

$$U_n = V_n - f$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{V_{n+1} - f}{V_n - f}$$

$$= \frac{aV_n + b - \frac{-b}{a-1}}{V_n - f}$$

$$= \frac{aV_n + \frac{ab - b + b}{a-1}}{V_n - f}$$

$$= \frac{a(V_n + \frac{b}{a-1})}{V_n - f}$$

$$= \frac{a\cancel{(V_n - f)}}{\cancel{V_n - f}}$$

$$= a$$

هي متتالية هندسية؛ أساسها $q = a$

$U_n = U_0 q^n$ حيث $U_0 = V_0 - f$

$$= V_0 + \frac{b}{a-1}$$

$$U_n = (V_0 + \frac{b}{a-1}) a^n$$

لدينا $U_n = V_n - f$

$$V_n = U_n + f = (V_0 + \frac{b}{a-1})a^n + \frac{-b}{a-1}$$

$$v_n = v_0 q^n$$

لكن $v_0 = u_1 - 2u_0 = 4 - 2 = 2$

منه $v_n = 2(3)^n$

$$w_n = u_{n+1} - 3u_n$$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+2} - 3u_{n+1}}{u_{n+1} - 3u_n}$$

$$= \frac{5u_{n+1} - 6u_n - 3u_{n+1}}{u_{n+1} - 3u_n}$$

$$= \frac{2u_{n+1} - 6u_n}{u_{n+1} - 3u_n}$$

$$= \frac{2\cancel{(u_{n+1} - 3u_n)}}{\cancel{u_{n+1} - 3u_n}}$$

$$= 2$$

فهي متتالية هندسية أساسها $q = 2$

$$w_n = w_0 q^n$$

لكن $w_0 = u_1 - 3u_0$
$= 4 - 3 = 1$

$$w_n = 2^n$$

$$v_n = u_{n+1} - 2u_n$$
$$w_n = u_{n+1} - 3u_n$$

$$v_n - w_n = u_n$$

$$u_n = v_n - w_n$$

$$u_n = 2(3)^n - 2^n$$

$\boxed{11}$ مراجعة تدريجية:

1. أثبت أياً كان العدد الطبيعي n، $n \geq n$ فإن: $3 \times n^2 \geq (n+1)^2$
2. نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية « $3^n \geq 2^n + 5n^2$ »
3. ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم تكون $E(n)$ صحيحة عنده؟
4. أثبت أن $E(n)$ صحيحة، أياً كان العدد الطبيعي n الذي يحقق الشرط $n \geq 5$

الحل:

$\boxed{1}$ من أجل $n = 2$

$$3(4) \geq (2+1)^2$$

$12 \geq 9$ العلاقة محققة من أجل $n = 2$

الفرض: $3n^2 \geq (n+1)^2$

$$3n^2 \geq n^2 + 2n + 1$$

الطلب: $3(n+1)^2 \geq (n+2)^2$

$$3n^2 + 6n + 3 \geq n^2 + 4n + 4$$

الإثبات: لدينا فرضاً

$3n^2 \geq n^2+2n+1$

نضيف للطرفين جراجحة $6n+3$

$3n^2+6n+3 \geq n^2+2n+1+6n+3$

$3n^2+6n+3 \geq n^2+8n+4$

$3n^2+6n+3 \geq n^2+4n+4+\cancel{4n}$

$3n^2+6n+3 \geq n^2+4n+4$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$

فالعلاقة صحيحة

$\boxed{2}$ من أجل $n=1$:

$3^1 \geq 2^1+5$ غير محققة

من أجل $n=2$:

$9 \geq 4+20$ غير محققة

من أجل $n=3$:

$27 \geq 8+45$ غير محققة

من أجل $n=4$:

$81 \geq 16+80$ غير محققة

من أجل $n=5$:

$243 \geq 32+125$ محققة

الفرض: $3^n \geq 2^n+5n^2$

الطلب: $3^{n+1} \geq 2^{n+1}+5(n+1)^2$

الإثبات: لدينا فرضاً

$3^n \geq 2^n+5n^2$

نضرب طرفي جراجحة بـ 3

$3\cdot 3^n \geq 3\cdot 2^n+5\cdot 3n^2$

من الفرض

$3^{n+1} \geq (2+1)2^n+5(n+1)^2$

$3^{n+1} \geq 2\cdot 2^n+\cancel{2^n}+5(n+1)^2$

$3^{n+1} \geq 2^{n+1}+5(n+1)^2$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$

فهي علاقة صحيحة

$\boxed{3}$ نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية « $3^n \geq (n+2)^2$ »

① أتكون القضايا صحيحة ؟

② أثبت بالتدريج أن القضية $E(n)$ صحيحة عند كل عدد طبيعي n يحقق الشرط $n \geq 3$

الحل:

$E(0) :\ 3^0 \geq (0+2)^2$

$1 \geq 4$ غير محققة

$E(1) :\ 3^1 \geq (1+2)^2$

$3 \geq 9$ غير محققة

$E(2) :\ 9 \geq (2+2)^2$ غير محققة

$E(3) :\ 27 \geq (3+2)^2$ محققة

Date : / / Subject: $a, b = c$ ، b و a مضاعف c

الفرض: $3^n \geq (n+2)^2$

$3^n \geq n^2+4n+4$

الطلب: $3^{n+1} \geq (n+3)^2$

$3^{n+1} \geq n^2+6n+9$

الإثبات: لدينا وحسب

$3^n \geq n^2+4n+4$

نضرب بـ 3

$3\,3^n \geq 3n^2+12n+12$

$3^{n+1} \geq n^2+6n+9+\cancel{2n^2+6n+3}$

$3^{n+1} \geq n^2+6n+9$

العلاقة محققة من أجل $n+1$

فهي علاقة صحيحة

$\boxed{13}$ أثبت بالتدريج صحة كل من الخواص الآتية، n

① 3 من مضاعفات 4^n+5

من أجل $n=0$

$4^0+5 = 6$ وهو من مضاعفات 3

والعلاقة محققة من أجل $n=0$.

الفرض: 4^n+5 من مضاعفات 3

الطلب: $4^{n+1}+5$ " " 3

البرهان: $4^{n+1}+5 = 4^n\,4+5$

$=(3+1)4^n+5$

$=3\,4^n+4^n+5$

من مضاعفات العدد 3 ... من مضاعفات 3

فالعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي علاقة صحيحة.

② 7 مضاعف للعدد $2^{3n+1}-1$

من أجل $n=0$

$1-1=0$ وهو مضاعف للعدد 7

والعلاقة محققة من أجل $n=0$

الفرض: $2^{3n}-1$ من مضاعفات 7

الطلب: $2^{3n+3}-1$ من مضاعفات 7

الإثبات: $2^{3n+3}-1 = 2^3\,2^{3n}-1$

$=8\,2^{3n}-1$

$=(7+1)2^{3n}-1$

$=7\,2^{3n}+2^{3n}-1$

من مضاعفات العدد 7 ... من مضاعفات العدد 7

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي علاقة صحيحة

③ 3 مضاعف للعدد n^3+2n

من أجل $n=0$

$0+0=0$ وهو مضاعف لـ 3

والعلاقة محققة من أجل $n=0$

الفرض: n^3+2n من مضاعفات 3

الطلب: $(n+1)^3+2(n+1)$ من مضاعفات 3

الإثبات: $(n+1)^3+2(n+1)$

$=n^3+3n^2+3n+1+2n+2$

$=\underbrace{n^3+2n}_{\text{من مضاعفات 3 فرضاً}}+\underbrace{3(n^2+n+1)}_{\text{من مضاعفات 3}}$

و العلاقة محققة من أجل $n+1$

فهي علاقة صحيحة

④ « $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف لـ 7 »

من أجل $n=0$

$3+4=7$ هو مضاعف لـ 7

و العلاقة محققة من أجل $n=0$،

الفرض: $3^{2n+1}+2^{n+2}$ من مضاعفات 7

الطلب: $3^{2n+3}+2^{n+3}$ " " 7

الإثبات: $3^{2n+3}+2^{n+3}=3^2\,3^{2n+1}+2\,2^{n+2}$

$=9.3^{2n+1}+2.2^{n+2}$

$=(7+2)\,3^{2n+1}+2\,2^{n+2}$

$=7\,3^{2n+1}+2.3^{2n+1}+2\,2^{n+2}$

$=\underbrace{7\,3^{2n+1}}_{\text{من مضاعفات العدد 7}}+\underbrace{2(3^{2n+1}+2^{n+2})}_{\text{من مضاعفات العدد 7 فرضاً}}$

و العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي علاقة صحيحة

14 خذ الخاصية المعرفة « قسم العدد 9 العدد 10^n+1 » بالرمز $E(n)$، في حالة $n\in\mathbb{N}$.

① نثبت أنه إذا كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد n فإنها تكون عندئذ $E(n+1)$ صحيحة.

② هل تكون الخاصية $E(n)$ صحيحة على $\mathbb{N}$؟ علل.

الحل:

1) 10^n+1 من مضاعفات العدد 9 : $E(n)$

الفرض: 10^n+1 من مضاعفات 9

الطلب: $10^{n+1}+1$ من مضاعفات 9

الإثبات: $10^{n+1}+1=10.10^n+1$

$=(9+1)10^n+1$

$=\underbrace{9.10^n}_{\text{من مضاعفات العدد 9}}+\underbrace{10^n+1}_{\text{من مضاعفات العدد 9 فرضاً}}$

و العلاقة محققة من أجل $n+1$

2) العدد يقبل القسمة على 9 (يكون من مضاعفات 9) إن كان مجموع أرقامه من مضاعفات 9

$10^n+1=1000\ldots00+1$

مجموع أرقامه $=2$

ليس من مضاعفات العدد 9 فهي غير صحيحة !!

15) $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $U_0=1$

$U_{n+1}=\frac{3U_n+2}{2U_n+6}$ عند كل $n\geq 0$

① أثبت أن $0\leq U_n\leq 2$ أيا كانت n

② " " المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما.

الحل:

من أجل $n=0$

$0\leq U_0=1\leq 2$

العلاقة محققة من أجل $n=0$.

الفرض: $0\leq U_n\leq 2$

الطلب: $0\leq U_{n+1}\leq 2$

البرهان: $0\leq U_n\leq 2$

$2\leq U_n+2\leq 4$

$0\leq 2+U_n\leq 4$

$0\leq \sqrt{2+U_n}\leq 2$

$0\leq U_{n+1}\leq 2$

العلاقة محققة من أجل

فهي علاقة صحيحة.

② $U_1=\sqrt{2+U_0}=\sqrt{3}$

$U_1-U_0=\sqrt{3}-1$ فهي متزايدة

الفرض: $U_{n+1}-U_n>0$

الطلب: $U_{n+2}-U_{n+1}>0$

$U_{n+1}-U_n>0$

$U_{n+1}>U_n$

$2+U_{n+1}>2+U_n$

$U_{n+2}>U_{n+1}$

$U_{n+2}-U_{n+1}>0$

العلاقة محققة من أجل $n+1$

فهي علاقة صحيحة

16) $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $U_0=1$

$U_{n+1}=\frac{3U_n+2}{2U_n+6}$ عند كل $n\geq 0$

① أثبت أن التابع $x\mapsto \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماما

واستنتج أن $\frac{1}{2}\leq U_n\leq 1$ أيا كان العدد n

② أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماما

الحل:

$f'(x)=\frac{3(2x+6)-2(3x+2)}{(2x+6)^2}$

$=\frac{6x+18-6x-4}{(2x+6)^2}=\frac{14}{(2x+6)^2}>0$

فهو متزايد تماما

من أجل $n=0$

$\frac{1}{2}\leq U_0=1\leq 1$

العلاقة محققة من أجل $n=0$

الفرض: $\frac{1}{2}\leq U_n\leq 1$

$$U_m = U_p \, q^{m-p}$$

$$U_{30} = \frac{25}{2197} \times \left(\frac{30}{13}\right)^{20}$$

(3) $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 3 فيها $U_1 = -2$ احسب U_n بدلالة n، استنتج قيمة المجموعين، $U_{30} + U_{31} + U_{32}$

$U_1 + U_2 + \dots + U_{20}$

$$U_n = U_0 + nr$$

$$U_1 = U_0 + r$$

$$r = -5$$

$$\boxed{U_n = -5 + 3n}$$

$$U_{30} + 3U_{31} + U_{32}$$

$$U_{30} = -5 + 90 = +85$$

$$U_{31} = -5 + 93 = 88$$

$$U_{32} = -5 + 96 = 91$$

$$S_1 = 264$$

$$S_2 = U_1 + U_2 + \dots + U_{20}$$

$$S_n = n \, \frac{a + l}{2}$$

$$n = j - i + 1 = 20$$

$$a = U_1 = -2$$

$$l = U_{20} = 55$$

$$S_n = 20 \, \frac{55 - 2}{2} = 530$$

(4) $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 3، فيها $U_1 = -2$ احسب U_n بدلالة n، استنتج قيمة المجموعين $U_1 + U_2 + \dots + U_7$

$U_2 + U_4 + \dots + U_{2n}$

الحل:

$$U_n = U_0 \, q^n$$

$$-2 = U_0 \, 3$$

$$U_0 = \frac{-2}{3}$$

$$\boxed{U_n = \frac{-2}{3} (3)^n}$$

$$S_1 = U_1 + U_2 + \dots + U_7$$

$$S = a \, \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$= \cancel{-2} \, \frac{1 - 3^n}{\cancel{1 - 3}}$$

$$= 1 - 3^7$$

$$S_2 = U_2 + U_4 + \dots + U_{2n}$$

نفرض: $U_2 = V_1$ (V_0)، $U_4 = V_2$

$U_6 = V_3$ ، $U_{2n} = V_n$

$$S_1 = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Date : / / Subject:

$$q = \frac{U_?}{U_?} = \frac{U_4}{U_2}$$

$$= \frac{-\frac{2}{3}(3)^4}{-\frac{2}{3}(3)^2}$$

$$q = 3^2 = 9$$

$$S = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= -6\,\frac{1-9^n}{1-9}$$

$$= \frac{3}{4}(1-9^n)$$

5 $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها -2
وفيها $U_0=-3$ احسب $U_{25}+U_{26}+\dots+U_{125}$

الحل:

$$U_n = U_0 + nr$$

$$U_n = -3 - 2n$$

$$U_{25} = -3 - 50 = -53$$

$$U_{125} = -253$$

$$S = n\,\frac{a+\ell}{2}$$

$$n = 125 - 25 + 1 = 101$$

$$S = 101\,\frac{-53-253}{2}$$

6 $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2
وفيها $U_0=1$ واحسب $U_3+U_4+\dots+U_{10}$

$$U_n = 2^4$$

$$S = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$n = 10 - 3 + 1 = 8$$

$$a = U_3 = 8$$

$$S = 8\,\frac{1-2^8}{1-2}$$

$$= -8(1-2^8)$$

7 احسب المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 10$

نلاحظ أن هذه المتتالية متتالية حسابية

لأن الفرق بين أي حدين متلاحقين يساوي $\frac{1}{2}$

$$S = n\,\frac{a+\ell}{2} \qquad a = \frac{1}{2} \quad \ell = 10$$

$$n = 10 - \frac{1}{2} + 1 \quad X$$

$$U_m = U_p + (m-p)r$$

$n-1+1=n$ $\quad m = n$

$$p = 1$$

ليكون عدد الحدود n

$$U_n = U_1 + (n-1)\frac{1}{2}$$

$$10 = \cancel{\tfrac{1}{2}} + \frac{1}{2}n - \cancel{\tfrac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 20 = n$$

الطلب: $\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$

الإثبات: $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$

$f(\frac{1}{2}) < f(u_n) \leq f(1)$

$\frac{\frac{3}{2}+2}{1+6} < f(u_n) \leq \frac{5}{8}$

$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8}$

$\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$

العلاقة محققة من أجل $n+1$

فهي علاقة صحيحة

$u_1 = \frac{3u_0+2}{2u_0+6} = \frac{5}{8}$

$u_1 - u_0 = \frac{5}{8} - 1 < 0$

فهي متناقصة.

الفرض: $u_{n+1} - u_n < 0$

الطلب: $u_{n+2} - u_{n+1} < 0$

الإثبات: $u_{n+1} - u_n < 0$

$u_{n+1} < u_n$

$f(u_{n+1}) < f(u_n)$

$u_{n+2} < u_{n+1}$

$u_{n+2} - u_{n+1} < 0$

فهي متناقصة تماماً

أي: نها محققة من أجل $n+1$

فهي علاقة صحيحة

$\boxed{17}$ ليكن α عدداً حقيقياً من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$ ثم نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق: $n \in \mathbb{N}$

$u_0 = 2\cos\alpha$ $\quad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

① احسب u_1 , u_2

② اثبت بالتدريج أن $u_n = 2\cos(\frac{\alpha}{2^n})$

الحل:

$u_1 = \sqrt{2+u_0}$

$u_1 = \sqrt{2+2\cos\alpha}$

$= \sqrt{2(1+\cos\alpha)}$

$= \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$= 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = 2\cos\frac{\alpha}{2}$

$u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\alpha}{2}}$

$= \sqrt{2(1+\cos\frac{\alpha}{2})}$

$= \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\frac{\alpha}{2}}{2}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{4}}$

$= 2\cos\frac{\alpha}{4}$

Date : / / Subject:

من أجل $n=0$

$\ell_1 = U_0 = 2\cos\alpha$

$\ell_2 = 2\cos\frac{\alpha}{2^0} = 2\cos\alpha$ ⇒ $\ell_1 = \ell_2$

والعلاقة محققة من أجل $n=0$

الفرض: $U_n = 2\cos\frac{\alpha}{2^n}$

الطلب: $U_{n+1} = 2\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$

الإثبات: $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$

$=\sqrt{2+2\cos\frac{\alpha}{2^n}}$

$=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2^n}\right)}$

$=\sqrt{2.2\cos^2\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{2}}$

$=\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{22^n}}$

$=\sqrt{4+\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}}$

$=2\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$

فهي علاقة صحيحة

$\boxed{I}$ بين أي المتتاليات $(U_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطّردة.

① $U_n = -3n+1$

$U_{n+1} - U_n = -3(n+1)+1+3n-1$

$= -3n-3+1+3n-1$

$= -3 < 0$ فهي متناقصة

② $U_n = \frac{n+1}{n+2}$

$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

$f'(x) = \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$ → متزايدة تماماً

③ $U_n = 2^n$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{2} = 2 > 1$

فهي متزايدة

④ $U_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

$U_n = \frac{(-1)^n}{4^n}$

$\frac{1}{4^2}$ n زوجي

$\frac{-1}{4^4}$ n فردي

غير مطّردة

$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2^{n+1}}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

فهي متزايدة تماما

(8) $U_0 = 8$

$U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + 2$

$U_1 = \frac{3}{4} U_0 + 2 = \frac{3}{4} 8 + 2 = 8$

$U_2 = \frac{3}{4} U_1 + 2 = \frac{3}{4} 8 + 2 = 8$

$U_3 = \frac{3}{4} U_2 + 2 = 8$

الفرض: $U_{n+1} - U_n = 0$

الطلب: $U_{n+2} - U_{n+1} = 0$

البرهان: $U_{n+1} - U_n = 0$

$U_{n+1} = U_n$

$\frac{3}{4} U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n$

$\frac{3}{4} U_{n+1} + 2 = \frac{3}{4} U_n + 2$

$U_{n+2} = U_{n+1}$

$U_{n+2} - U_{n+1} = 0$ فهي ثابتة

(5) $U_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

$U_{n+1} - U_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - \frac{1}{n^2}$

$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$

$= \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2 (n+1)^2}$

$= \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2} < 0$

متناقصة من أجل $n \geq 1$

(6) $U_n = \frac{n^2}{n!}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2}$

$= \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}} \times \frac{\cancel{n!}}{n^2}$

$= \frac{n+1}{n^2}$ $\quad n \neq 0$

متزايدة تماما $n = 1$

متناقصة تماما $n > 1$

(7) $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$

تخمين الحد العام

- $2, 4, 6, 8, 10, \dots$

$U_n = 2n \qquad n > 0$

$U_n = 2n + 2 \qquad n$ [illegible]

- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

$U_n = \frac{1}{n} \qquad n \geq 1$

- $2, -2, 2, -2$

$U_n = (-1)^n \, 2$

- $-2, 2, -2, 2$

$U_n = (-1)^{n+1} (2)$

$\boxed{2}$ المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق:

$U_{n+1} = 2U_n - 3 \qquad U_0 = 2$

في حالة أي عدد طبيعي n

① احسب U_1, U_2, U_3, U_4, U_5

لم تكن عبارة U_n بدلالة n

② احسب عبارة $U_n - 3$ عند كل $n \geq 0$

عبر عن U_n بدلالة 3

①
$U_1 = 2U_0 - 3 = 1$

$U_2 = 2U_1 - 3 = -1$

$U_3 = 2U_2 - 3 = -5$

$U_4 = 2U_3 - 3 = -13$

$U_5 = 2U_4 - 3 = -29$

⑨ $V_0 = 2$

$U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + 2$

$U_1 = \frac{3}{4}(2) + 2 = \frac{3}{2} + 2$
$= \frac{7}{2}$

$U_2 = \frac{3}{4} U_1 + 2 = \frac{3}{4}\left(\frac{7}{2}\right) + 2$
$= \frac{2}{8} + 2 = \frac{37}{8}$

الفرض: $U_{n+1} - U_n =$

الطلب: $U_{n+2} - U_{n+1} \geq 0$

البرهان: لدينا فرضية

$U_{n+1} > U_n$

$\frac{3}{4} U_{n+1} > \frac{3}{4} U_n$

$\frac{3}{4} U_{n+1} + 2 > \frac{3}{4} U_n + 2$

$U_{n+2} > U_{n+1}$

$U_{n+2} - U_{n+1} > 0$

من علاقة نحو مراحل

Date : / / Subject:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(2n+2)(2n+1)} > 0$$

يعني متزايدة.

19 $S_n = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos((2n-1)x)$

$\sin a . \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$ ①

$\sin 2a = \sin a . \cos a$

الحل

$\sin(a+b) = \sin a . \cos b + \cos a . \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a . \cos b - \cos a . \sin b$ +

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a . \cos b$

$\sin a . \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$\sin(2a) = \sin(a+a).$

$= \sin a \cos a + \cos a . \sin a$

$= 2 \sin a . \cos a$

$\sin 2a = 2 \sin a . \cos a$

$\sin x . \cos((2n+1)x)$

$= \frac{1}{2}[\sin(x + 2nx + x) + \sin(x - 2nx - x)]$

$= \frac{1}{2}[\sin(2x + 2nx) + \sin(-2nx)]$

$= \frac{1}{2} \sin(2(n+1)x - \sin 2nx)$

2

$U_1 - U_0 = 1 - 2 = -1 \quad = -2^0$

$U_2 - U_1 = -1 - 1 = -2 \quad = -2^1$

$U_3 - U_2 = -5 + 1 = -4 \quad = -2^2$

$U_4 - U_3 = -13 + 5 = -8 = -2^3$

$U_5 - U_4 = -29 + 13 = -16 = -2^4$

3

$U_{n+1} - U_n = -2^n$

$2U_n - 3 - U_n = -2^n$

$U_n = 3 - 2^n$

5 في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ نعرّف

$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$V_n = U_{2n} - U_n$

أثبت أن المتتالية (V_n) متزايدة تماماً.

الحل

$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$U_{2n} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}_{U_n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

$\Rightarrow U_{2n} - U_n = V_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

$V_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2}$

$V_{n+1} - V_n = \cancel{\frac{1}{n+2}} + \frac{1}{n+3} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} -$

$\frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}} - \cancel{\dots} - \cancel{\frac{1}{2n}}$

Date : / / Subject:

$\sin nx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\sin 2nx$

$S_n = \cos(nx) \times \frac{\sin nx}{\sin x}$

من أجل $n=1$

$\ell_1 = S_1 = \cos x$

$\ell_2 = \cos x \cdot \times \frac{\sin x}{\sin x} = \cos x$

والعلاقة محققة من أجل $n=1$

الفرض: $S_n = \cos(nx) \cdot \times \frac{\sin nx}{\sin x}$

الطلب: $S_{n+1} = \cos(n+1) \times \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$

الإثبات:

$\ell_1 = S_{n+1} = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos(2n-1)x + \cos(2n+1)x$

$S_{n+1} = S_n + \cos(2n+1)x$

$= \cos nx \times \frac{\sin nx}{\sin x} + \cos((2n+1)x)$

$= \frac{\cos nx \times \sin nx + \sin x \cos((2n+1)x)}{\sin x}$

$= \frac{\frac{1}{2}\sin 2nx + \frac{1}{2}(\sin(2(n+1)x - \sin 2nx)}{\sin x}$

$= \frac{\frac{1}{2}(\sin 2nx + \sin(2(n+1)x) - \sin 2nx)}{\sin x}$

$= \frac{\frac{1}{2} 2\cos(n+1)x \cdot \sin((n+1)x)}{\sin x}$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$

فهي علاقة صحيحة.

Date :   /   /

Subject:

Sabbagh

Date : / /

Subject:

Sabbagh

- نهاية متتالية -

• المعنى: $n \to +\infty$

$U_n = n^2 \qquad U_n = n \qquad U_n = \sqrt{n}$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

$U_n = \frac{1}{n^2} \qquad U_n = \frac{1}{n} \qquad U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

١) نهاية متتالية هندسية:

$$U_n = U_0 q^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < +1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{ليس لها نهاية} & q < -1 \\ \text{ثابتة} & q = 1 \end{cases}$$

مثال:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{10}{10{,}1}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right) = +\infty$$

$$U_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 5$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 5$$

٢) نهاية متتالية حسابية:

$$U_n = U_0 + nr$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \begin{cases} +\infty & r > 0 \\ -\infty & r < 0 \end{cases}$$

$$U_n = -2 + 3n$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$$

مثال محلول: ١٧

$$U_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{2^n}$$

احسب نهايتها.

$$U_n = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

وهو مجموع المتتالية الهندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأول $\frac{1}{2}$ وعدد الحدود $n - 1 + 1 = n$

$$U_n = 1 - a\,\frac{1 - q^{\overset{\text{عدد الحدود}}{n}}}{1 - q}$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\cancel{1 - \frac{1}{2}}}$$

$$= 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= 1 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

تدريب 119:

① $U_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ n_0 ; $n > n_0$

$U_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$

$$-10^{-3} < U_n < 10^{-3}$$

$$\cancel{-10^{-3}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-3}$$

موجبة: نحذف السالب.

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-3}$$

$$n\sqrt{n} > 10^{3}$$

$$n^3 > 10^{6}$$

$$n > 10^{2}$$

$$n > n_0$$

$\Rightarrow n_0 = 10^{2}$ المجال يحوي جميع حدود المتتالية ما عدا 100 الحد الأول (أول 100 حد برا المجال والباقي جوا)

② $U_n = \dfrac{3n+1}{n-1}$

$U_n \in]2{,}98 , 3{,}02[$

الحل:

$$2{,}98 < U_n < 3{,}02$$

$$2{,}98 < \frac{3n+1}{n-1} < 3{,}02$$

$$\begin{array}{r|l} n-1 & 3n+1 \\ & \underline{\pm 3n \mp 3} \quad 3 \\ & 4 \end{array}$$

$$2{,}98 < 3 + \frac{4}{n-1} < 3{,}02$$

$$-0{,}02 < \frac{4}{n-1} < +0{,}02$$

$$\left|\frac{4}{n-1}\right| < 0{,}02$$

موجب ← $\dfrac{4}{n-1} < 0{,}02$ ← موجب

$$\frac{n-1}{4} > 50$$

$$n-1 > 200$$

$$n > 201$$

$n > n_0 \Rightarrow n_0 = 201$

③ $U_n = n\sqrt{n}$

$U_n > 10^{6}$ $n > n_0$

$$n\sqrt{n} > 10^{6}$$

ملاحظة: لتبسيط الكسر نميز حالتين:

1- إذا كان قوة البسط أكبر أو تساوي قوة المقام فإننا نستخدم القسمة الإقليدية.

2- إذا كانت قوة المقام أكبر من قوة البسط فإننا نستخدم تفريق الكسر.

Date : / / Subject:

(6)

$y_n = x_n + 3$

$x_0 = 3$

$x_{n+1} = \frac{1}{3} x_n - 2$

1) a) $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية

b) y_n بدلالة n ثم x_n

2) $S_n = y_0 + \dots + y_n$

$S'_n = x_0 + \dots + x_n$

a) احسب S_n ، S'_n بدلالة n.

b) $(S_n)_{n\geq 0}$ $\quad (S'_n)_{n\geq 0}$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}+3}{x_n+3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x_n - 2 + 3}{x_n + 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x_n + 1}{x_n + 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(x_n+3)}{(x_n+3)} = \frac{1}{3}$$

فهي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$y_n = y_0 \cdot q^n$

حل

$y_0 = x_0 + 3 = 6$

$y_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$n^3 > 10^{12}$

$n > 10^4$

$n_0 = 4$

(4) $y_n = \frac{10^n}{(10,1)^n} \qquad x_n = \frac{3^n}{2^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{10}{10,1}\right)^n = 0$$

(5) $U_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

$\lim_{n\to+\infty} U_n \qquad -1 < q < 1$

$U_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها q

وحدها الأول 1 وعدد الحدود $n+1$

$$U_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= 1 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q\cdot q^n}{1-q}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{1-q}$$

Date : / / Subject:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 9(1-0) = 9$$

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = 9-\infty = -\infty$$

$U_0 = 7 \quad U_{n+1} = aU_n + b$ 7

$U_n \to S, b, n \qquad a = 1$ 1

$x = ax + b \;\; \ell \qquad a \neq 1$ 2

$U_n - U_n - \ell$ هندسية

الحل

$U_{n+1} = U_n + b$

$U_{n+1} - U_n = b$

هي متتالية حسابية أساسها $r = b$

$U_n = U_0 + nr \Rightarrow U_n = S + nb$

$U_{n+1} = aU_n + b$

$x = ax + b \Rightarrow x - ax = b$

$(1-a)x = b \Rightarrow x = \dfrac{b}{1-a}$

$$\ell = \frac{b}{1-a}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_{n+1} - \ell}{U_n - \ell}$$

$$= \frac{aU_n + b - \frac{b}{1-a}}{U_n - \ell}$$

$$= \frac{aU_n + \frac{\cancel{b} - ab - \cancel{b}}{1-a}}{U_n - \ell}$$

$y_n = x_n + 3$

$x_n = y_n - 3$

$x_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$

$S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$

مجموع متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و

حدها الأول $y_0 = 6$ وعدد حدود $n+1$

$$S_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= 6\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$= 6\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$$

$$= 6 \times \frac{3}{2} \times 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$= 9\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

$x_n = y_n - 3$ لدينا

$S'_n = y_0 - 3 + y_1 - 3 + \dots + y_n - 3$

$= y_0 + y_1 + \dots + y_n - 3 - 3 - 3$

$= S_n - 3(n+1)$

$$= \frac{aU_n + \frac{-ab}{1-a}}{U_n - \ell}$$

$$= \frac{a(U_n + \frac{-b}{1-a})}{U_n - \ell}$$

$$= \frac{a(U_n - \ell)}{(U_n - \ell)} = a$$

$q = a$ فهي متتالية هندسية

$$V_n = V_0 . q^n$$

لكن $V_0 = U_0 - \ell = 5 - \frac{b}{1-a}$

$V_n = (5 - \frac{b}{1-a})(a)^n$ $\quad -1 < a < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = (5 - \frac{b}{1-a})(0) = 0$$

تمرين 123

① $U_n = \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$

$$\frac{-1}{\sqrt{n}} \le U_n \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$-1 \le \cos 2n \le 1$$

نقسم على $0 < \sqrt{n}$

$$\frac{-1}{\sqrt{n}} \le \frac{\cos 2n}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{n}} \le U_n \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ حسب المبرهنات الثلاث

② $U_n = n + 1 - \cos n$

$$n \le U_n \le n+2$$

$$-1 \le \cos n \le 1$$

نضرب بـ (-1)

$$1 \ge -\cos n \ge -1$$

نضيف $(n+1)$

$$n+1+1 \ge n+1-\cos n \ge n+1-1$$

$$n+2 \ge n+1-\cos n \ge n$$

$$n+2 \ge U_n \ge n$$

$\lim_{n\to+\infty} n+2 = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ حسب المبرهنات الثلاث

③ أوجد نهاية المتتالية $(U_n)_{n\ge0}$

① $U_n = \frac{2n+3}{3n-1}$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{2}{3}$$

لأن قوة البسط = قوة المقام

Date : / / Subject:

$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2n}{3}\right| = +\infty$

(9) $U_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+1}}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{\frac{4}{1}} = \sqrt{4} = 2$

(10) $U_n = \sqrt{\frac{3n^2-1}{3n+1}}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2n^2}{3n}}$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{3}n} = +\infty$

(11) $U_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3n+1}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

(12) $U_n = \sin\left(\frac{n\pi+1}{2n+1}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

(13) $U_n = \sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \infty - \infty$ عدم تعيين

(2) $U_n = \frac{5n-3}{3n-5}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{5}{3}$

(3) $U_n = n - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty - 0 = +\infty$

(4) $U_n = \frac{5n^2-3n+7}{n^2+n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 5$

(5) $U_n = \frac{-3n^2+2n+4}{+2n^2+4n+2}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = -\frac{3}{2}$

(6) $U_n = \frac{n}{4} + \frac{2n}{n^2+1}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty + \infty = +\infty$

(7) $U_n = \frac{10n-3}{n^2+1}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

(8) $U_n = \frac{2n^2-1}{3n+5}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2}{5n}\right) = $ [illegible]

Sabbagh

$$= \frac{-5}{\sqrt{2n^2-5} + n\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

17) $$U_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{\infty}{\infty} - \frac{\infty}{\infty}$$

عدم تعيين

$$U_n = \frac{n\sqrt{n+2} - n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}}$$

$$= \frac{n\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$$

$$= \frac{n(n+2-n-1)}{\sqrt{n^2+3n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}$$

$$\infty - \infty$$

متماثلان	غير متماثلان
ضرب بالمرافق	إخراج عامل مشترك
$\sqrt{4n+1} - 2n$	$\sqrt{4n+1} - 3n$

$$\Rightarrow U_n = \sqrt{n^2+n} - \left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{n^2+n - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{n^2+n-n^2-n-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n} + \left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{-\frac{1}{4}}{\infty} = 0$$

16) $$U_n = \sqrt{2n^2-5} - n\sqrt{2}$$

عدم تعيين

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \infty - \infty$$

$$U_n = \frac{2n^2-5 - n^2(2)}{\sqrt{2n^2-5} + n\sqrt{2}}$$

Date : / / Subject:

20) $U_n = \dfrac{3n - \sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{\infty - \infty}{\infty}$

عدم تعيين

$U_n = \dfrac{\cancel{9n^2} - \cancel{9n^2} - 1}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}$

$= \dfrac{-1}{\sqrt{n^2+5}\left(3n+\sqrt{9n^2+1}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

21) $U_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

15) $U_n = \dfrac{n! - 2}{n!}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

23) $U_n = \dfrac{(n+1)! - 1}{n! + 2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{1}{\infty} = 0$

18) $U_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$

$U_n = \dfrac{n(\sqrt{n}+1)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}$

$= \dfrac{\sqrt{n}+1}{1+\frac{2}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{\infty+1}{1+0} = +\infty$

19) $U_n = n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty(\sqrt{2}-\sqrt{2}) = +\infty(0)$

عدم تعيين

$U_n = n^2\left(\dfrac{2+\frac{1}{n}-2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}\right)$

$= \dfrac{n^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{n}}}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}} = \dfrac{n}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

محدودية متتالية:

$-\infty < U_n \le a$

محدودة من الأعلى وغير محدودة من الأدنى و
هي غير محدودة

$b \le U_n < +\infty$

محدودة من الأدنى وغير محدودة من الأعلى فهي
غير محدودة

$-\infty < U_n < +\infty$

غير محدودة.

$b \le U_n \le a$

محدودة

$U_n \le M$

M: عنصر راجح
وكل عنصر (عدد) أكبر من الراجح هو راجح.

$U_n \ge m$

m: العنصر القاصر
أي عنصر (عدد) أصغر من القاصر هو قاصر.

• 2, 4, 5, 5,5, 5,75...
متتالية متقاربة نحو (6).

• 2, 4, 6, 8, 10, ...
متتالية متباعدة نحو $(+\infty)$

تقارب متتالية:

U_n متتالية متقاربة إذا وفقط إذا تحقق إحدى الشروط:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n =$ عدد
2) هندسية + أساسها $-1<q<1$
3) متزايدة ومحدودة من الأعلى.
4) متناقصة " " " الأسفل.

تباعد متتالية:

U_n متباعدة إذا وفقط إذا تحقق إحدى الشروط:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \mp\infty$
2) هندسية + أساسها $q>1$
3) حسابية.
4) متزايدة وغير محدودة من الأعلى.
5) متناقصة وغير " الأسفل.

تدريب 128:

6) $U_n = \frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\dots+\frac{n}{3^n}$

أ) $n \le 2^n$ $\quad n \ge 1$
ب) استنتج عنصراً راجحاً.

الحل:

1) من أجل $n=1$

$1 \le 2$

والعلاقة محققة من أجل $n=1$

الفرض: $n \le 2^n$

الطلب: $n+1 \le 2^{n+1}$

الإثبات : لنبرهن

$n \leq 2^n$

$n+1 \leq 2^n+1$

لكن $1+2^n < 2.2^n$

$\Rightarrow n+1 \leq 2.2^n$

$n+1 \leq 2^{n+1}$

فالعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي صحيحة

أو:

$n \leq 2^n$

$2n \leq 2.2^n$

$n+n \leq 2^{n+1}$

$n+1 \leq 2^{n+1}$

2 لدينا

$$U_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n}$$

$$U_n \leq \frac{2^1}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$$

$$U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

وهي مجموع حدود متتالية هندسية أساسها

وحدها الأول $\left(\frac{2}{3}\right)$ $q = \frac{2}{3}$

وعدد الحدود $n-1+1=n$

$$U_n \leq q\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$U_n \leq \frac{2}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}$$

$$U_n \leq \frac{2}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}$$

$$U_n \leq 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

ومنه $M=2$

$U_n \leq 2$

$M=2$

الحاصر الأعلى.

5 أدرس اطراد المتتالية (محدودية)

1 $U_n = \sin n$

$-1 \leq \sin n \leq 1$

$-1 \leq U_n \leq 1$

محدودة

2 $U_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

$U_1 = 1+1=2$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1+0=1$

$1 < U_n \leq 2$

فهي محدودة

Date : / / Subject:

6) $U_n = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}}$

$U_1 = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

$\Rightarrow \quad 0 \leq U_n < 1$ محدودة

7) $U_n = \dfrac{-2}{\sqrt{2n+3}}$

$U_1 = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

$\dfrac{-2}{\sqrt{5}} \leq U_n < 0$ محدودة

8) $U_n = n\sqrt{3} - 2$

$U_1 = \sqrt{3} - 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

$\sqrt{3} - 2 \leq U_n < +\infty$

محدودة من الأدنى وغير محدودة من الأعلى

فهي غير محدودة.

9) $U_n = n^2 + n - 1$

$U_1 = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ $\quad 1 \leq U_n < +\infty$

غير محدودة

3) $U_n = \dfrac{1}{n+2}$

$U_1 = \dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

$0 < U_n \leq \dfrac{1}{3}$

محدودة

4) $U_n = \dfrac{1}{n^2+1}$

$U_1 = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ $\Rightarrow \quad 0 < U_n \leq \dfrac{1}{2}$

محدودة

5) $U_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$U_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq U_n < 1$ محدودة

Sabbagh

Date : / /

متراجحة
الكتابة مع الوضع

Subject:

3) $U_n = \dfrac{2n-3}{(n-1)(n+2)}$

$$\frac{2n-2}{(n-1)(n+2)} \leq \frac{2n-3}{(n-1)(n+2)} \leq \frac{2n-4}{(n-1)(n+2)}$$

4) $\dfrac{n^2-4n+7}{n-1}$

$$\frac{n^2-4n+7}{n} \leq \frac{n^2-4n+7}{n-1} \leq \frac{n^2-4n+7}{n+1}$$

5) $U_n = \sqrt{2+n}$

$$\sqrt{1+n} \leq \sqrt{2+n} \leq \sqrt{3+n}$$

6) $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

10) $U_n = \dfrac{1}{n+1} + n^2$

$U_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

$$\frac{3}{2} \leq U_n < +\infty$$

غير محدودة

11) $U_n = n + \cos n$

$U_1 = 1 + \cos(1)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ إحاطة

غير محدودة

متناوبة

12) $U_n = (-1)^n \times n^2$

غير محدودة

4 نوجد متتاليتان تحققان $t_n \leq U_n \leq S_n$

1) $U_n = \dfrac{n+2}{n+1}$

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{n+2}{n}$$

2) $t_n \leq U_n \leq S_n$

3) $U_n = \dfrac{5n+1}{n+1}$

$$\frac{5n}{n+1} \leq \frac{5n+1}{n+1} \leq \frac{5n+1}{n}$$

[3] $U_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

اثبت ان: $1 \le U_n \le 3$

$U_n - 3 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 3$

$= \frac{-2n^2+4n-2}{n^2-n+1}$

$= \frac{-2(n-1)^2}{n^2-n+1} \le 0$

$U_n - 3 \le 0$

$\boxed{U_n \le 3}$ ①

$U_n - 1 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 1$

$= \frac{2n}{n^2-n+1} \ge 0$

$U_n - 1 \ge 0$

$\boxed{U_n \ge 1}$ ②

من ① و ② نجد أنه

$1 \le U_n \le 3$

[2] $U_n = 5 - \frac{10}{n^2}$

أي الحدود المحيطة: 4,999 ,0,6,5

$U_1 = 5 - 10 = -5$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 5 - 0 = 5$

$-5 \le U_n \le 5$

$M = 5$

أي منه 6 حد راجحة

[1] لا) $U_0 = 2$

$U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n - 3$

$U_1 = \frac{1}{2} U_0 - 3 = -2$

$U_2 = \frac{1}{2} U_1 - 3 = -4$

$U_3 = \frac{1}{2} U_2 - 3 = -5$

$U_4 = \frac{1}{2} U_3 - 3 = -5.5$

$U_5 = \frac{1}{2} U_4 - 3 =$

فهي متناقصة

$\lim_{n\to+\infty} U_n = -6$. حد أصغر

المتتاليتان المتجاورتان

نقول عن المتتاليتان U_n و V_n أنهما متجاورتان إذا، وفقط إذا تحقق الشرطان،

1) إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة

2) • $\lim_{n\to+\infty} = \lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$

• $\lim_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0$

Date : / / Subject:

تدريب ٢٣٢ص:

$\boxed{4}$

$S_n = \frac{1}{n+1}$

$t_n = \frac{-1}{2n+4}$

اثبت ان هما متجاورتان.

$U_n = f(n)$

$S'_n = \frac{-1}{(n+1)^2} < 0$ متناقصة تماماً

$t_n = f(n)$

$t'_n = \frac{-2(-1)}{(2n+4)^2}$

$= \frac{2}{(2n+4)^2} > 0$ متزايدة تماماً

والشرط الأول محقق

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$

الشرط الثاني محقق

إذن t_n, S_n متجاورتان.

$\boxed{2}$

$t_n = \frac{n-1}{n}$ $S_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

$U_n = f(n)$ فلكن انّ

$t'_n = \frac{n-(n-1)}{n^2}$

$= \frac{n-n+1}{n^2} = \frac{1}{n^2} > 0$

فهي متزايدة تماماً

$S_n = \frac{-2n}{n^4} = \frac{-2}{n^3} < 0$

فهي متناقصة تماماً

والشرط الأول محقق.

$\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$

الشرط الثاني محقق

t_n, S_n متجاورتان

$\boxed{3}$

① $y_n = x_n + \frac{1}{4n}$

$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

$x_{n+1} = \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cancel{\frac{1}{n+3}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

$x_n = \frac{1}{n+1} + \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cancel{\frac{1}{n+3}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{2n}}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{-1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

$$\bullet\; x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{-1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{-\cancel{2n} - 1 + \cancel{2n}}{2n(2n+1)} =$$

$$= \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$$

فهي متناقصة تماماً

$$\bullet\; y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

فهي متزايدة تماماً

والشرط الأول محقق ،

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$x_n = \frac{1}{n} + y_n - \frac{1}{2n}$$

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = 0$$

والشرط الثاني محقق ،

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

فهي متزايدة تماماً

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{4n+4} - x_n - \frac{1}{4n}$$

$$= x_{n+1} - x_n + \frac{1}{4n+4} - \frac{1}{4n}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} - \frac{4}{16n(n+1)}$$

$8n \qquad 2n+1$

$$= \frac{8n - 8n - 4}{16n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-4}{16n(n+1)(2n+1)} < 0$$

متناقصة تماماً

والشرط الأول محقق

$$y_n - x_n = \frac{1}{4n}$$

لدينا

$$\lim_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$$

الشرط الثاني محقق

② $$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

الحل

$$x_{n+1} = \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots + \frac{1}{2n+1}$$

$$x_n = \frac{1}{n} + \cancel{\frac{1}{n+1}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n-1}}$$

Date : / /   Subject: ______

Sabbagh