« تمارين داعمة لوغرتمي »

تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,+\infty[$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-\ln x} & : x>0\\[2mm] 0 & : x=0\end{cases}$$

1. أثبت أن f مستمر عند الصفر
2. ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر وفسر النتيجة التي حصلت عليها هندسياً
3. بين أن الخط البياني للتابع f يقبل مقارباً أفقياً عند $+\infty$ وجد معادلته
4. اكتب معادلة المماس للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x=1$ واستعمل التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

الحل:

① $\lim_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty \Longrightarrow$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0 \quad , \quad f(0)=0$

بالتالي $\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ فالتابع f مستمر عند الصفر.

② $g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\frac{x}{x-\ln x}}{x}$

$=\dfrac{1}{x-\ln x} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} g(x)=$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x-\ln x}=0$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند الصفر و $f'(0)=0$ وبالتالي للخط التابع مماس أفقي عند الصفر

③ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-\ln x}$

$=\lim \dfrac{1}{1-\frac{\ln x}{x}} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

وبالتالي $y=1$ مقارب أفقي للخط C عند $+\infty$

④ في حالة $x>0$ يكون

$$f'(x)=\frac{x-\ln x-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

$x=1 \Rightarrow f(1)=\frac{1}{1-0}=1$

$, f'(1)=1$

معادلة المماس:

$y=f(1)+f'(1)(x-1) \Rightarrow y=x$

$f(a+h)\approx f'(a).h+f(a)$

$a+h=1.1 \Rightarrow a=1 , h=0.1$

$f(1)=1 , f'(1)=1 \Rightarrow$

$f(1.1)\approx f'(1).(0.1)+f(1)\approx$

$1(0.1)+1 \Rightarrow f(1.1)\approx 1.1$

طريقة ثانية:

لحساب القيمة التقريبية نعوض في معادلة المماس للخط في النقطة التي فاصلتها $x=1$ فنجد $f(1.1)\approx 1.1$

دورة 2022 ثانية:

تمرين: ليكن التابع g المعرف على R وفق:

$g(x)=\ln(2+\sin x)$

المطلوب:

1- احسب $g'(x)$ و $g'(0)$

2- استنتج

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\sin x)-\ln(2)}{x}$

الحل:

① التابع g اشتقاقي على R

$g'(x)=\frac{\cos(x)}{2+\sin(x)}$

$g'(0)=\frac{\cos(0)}{2+\sin(0)}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}$

② g اشتقاقي عند الصفر و

$g(0)=\ln(2+\sin(0))=\ln 2$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\sin x)-\ln 2}{x}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=$

$g'(0)=\frac{1}{2}$

تمرين:

جد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases}\ln(x)+\ln(y)=\ln 6\\ \ln(x+y)=\ln 5\end{cases}$$

الحل : شرط الحل $x>0$ $y>0$

$$\begin{cases} \ln(x)+\ln(y)=\ln 6 \\ \ln(x+y)=\ln 5 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \ln(x.y)=\ln 6 \\ \ln(x+y)=\ln 5 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x.y=6 \\ x+y=5 \end{cases}$$

نبحث عن عددين مجموعهما 5 وجداؤهما 6 وبالتالي :

$x=3$, $y=2$

أو

$x=2$ $y=3$

دورة 2020 ثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$$

١- احسب نهايات التابع f المعرف على I عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي

٢- ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

٣- أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في المجال $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$

٤- في معلم متجانس ارسم الخط C

٥- استنتج C_1 الخط البياني للتابع

$$g(x)=\frac{1-x+\ln x}{x}$$

الحل : (1)

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$$

$x=0$ مقارب شاقولي

$y=0$ مقارب أفقي

(2)
$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(3) التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$

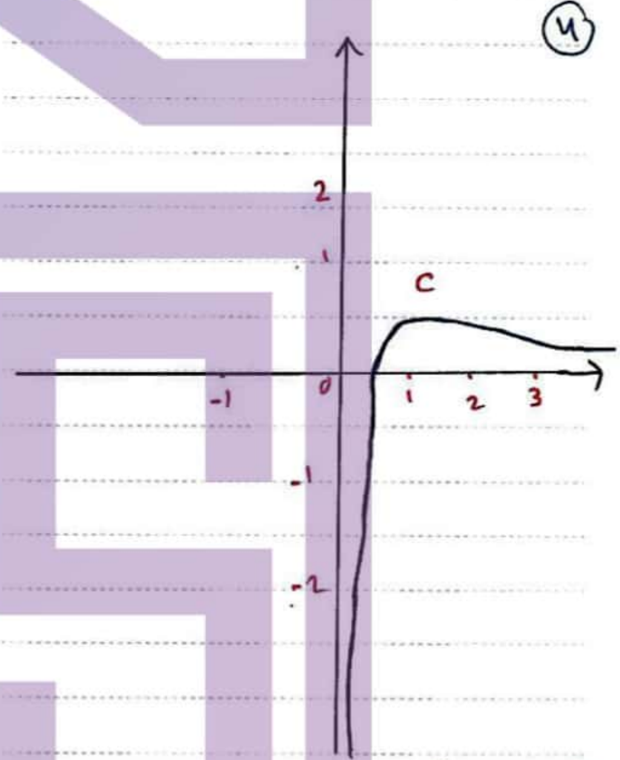
$f(\frac{1}{2})=2-2\ln 2>0$

$f(\frac{1}{3})=3-3\ln 3<0$

$f(\frac{1}{2}) . f(\frac{1}{3}) < 0$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في مجال $]\frac{1}{3} , \frac{1}{2}[$

(4)



(5) $g(x) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} = f(x) + 1$

C_1 هو انسحاب للخط C بمقدار واحد للأسفل

مسألة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-2,2[$ وفق

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$$

(1) أثبت أن f تابع فردي

(2) ادرس تغيرات f على المجال $[0,2[$

(3) اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0.1$

(4) في معلم متجانس ارسم الخط البياني C

(5) استنتج رسم الخط البياني C' للتابع

$$g(x) = \ln(2-x) - \ln(x+2)$$

على المجال $]-2,2[$

الحل:

(1) أياً كانت x من المجال $]-2,2[$ كانت $-x$ من المجال $]-2,2[$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+2}{2+x}\right)$$

$$-\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right) = -f(x)$$

أي التابع f فردي

(2) التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]-2,2[$ و $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$ و $f(0)=0$

أي $x=2$ مقارب شاقولي للخط البياني C

$$f'(x) = \frac{\frac{(1)(2-x)-(-1)(x+2)}{(2-x)^2}}{\left(\frac{x+2}{2-x}\right)}$$

$f(0)=0 \quad , \quad f'(0)=1$

$T: y = f'(0)(x-0) + f(0) \Longrightarrow$

$y = 1(x-0) + (0) \Longrightarrow y = x$

$f(a+h) \approx f(a) + h f'(a)$

$a = 0 \quad , \quad h = 0.1$

$f(0+0.1) \approx f(0) + (0.1) f'(0) \Longrightarrow$

$f(0.1) \approx 0.1$

④ الرسم

$g(x) = \ln(2-x) - \ln(x+2)$ ⑤

$= \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right) = -\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$

$\Longrightarrow g(x) = -f(x)$

C' نظير C بالنسبة لمحور الفواصل

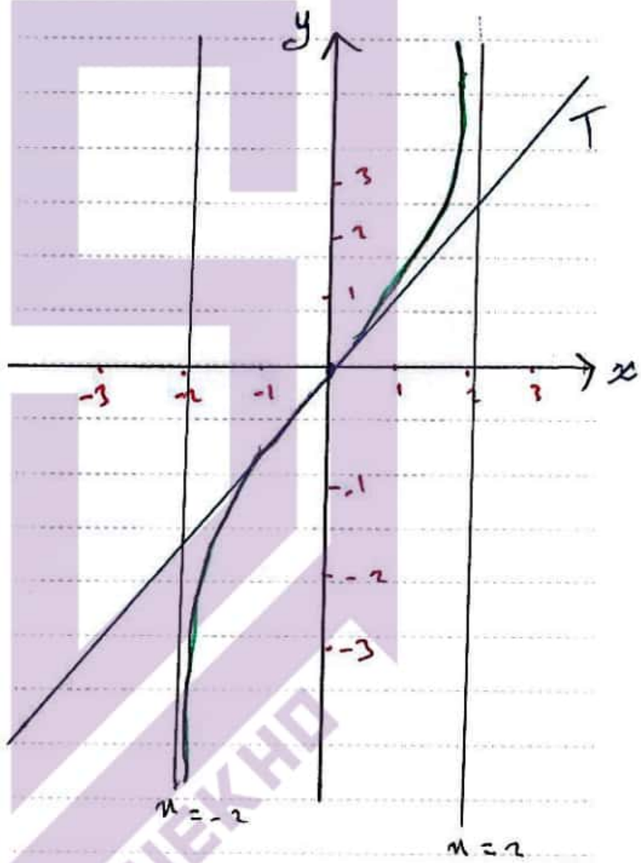
أو $g(x) = f(-x)$

و C' نظير C بالنسبة لمحور التراتيب

$= \frac{2-x+x+2}{(2-x)^2} \times \frac{2-x}{x+2} =$

$\frac{4}{(2-x)(2+x)} > 0$

x	0		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



③ معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها $X=0$

تمرين :

أثبت ما يلي :

$\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ أياً كان $x > -1$

الحل :

$\ln(x+1) < \sqrt{x+1} \Longrightarrow$

$\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$

ليكن التابع f المعرف والمستمر والاشتقاق على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق العلاقة التالية

$$f(x) = \ln(x+1) - \sqrt{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{x+1}}{2(x+1)}$$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2 - \sqrt{x+1} = 0$

$\Longrightarrow \sqrt{x+1} = 2$

$x = 3 \Longrightarrow f(3) = \ln(4) - 2 < 0$

x	-1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\ln(4)-2$	$\searrow$	

ومن جدول الاطراد نلاحظ أن $f(x) < 0$ وذلك مهما تكن $x \in I$ أي

$\ln(x+1) - \sqrt{x+1} < 0$

$\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$ محققة أياً كان $x > -1$

دورة ثانية 2018 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق

$$f(x) = x^2 - \ln x$$

1- جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

2- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

3- اكتب معادلة المماس Δ للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x = 1$

4- في معلم متجانس ارسم المماس Δ والخط البياني C

5- احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ ، $x = e$

6- نعرف المتتالية $V_n = n^2 - \ln(n)$ حيث $(V_n)_{n \geq 1}$

أثبت أن المتتالية $(V_n)_n$ متزايدة.

الحل :

(1) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \Longrightarrow$

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب شاقولي لـ C

لدينا حالة عدم تعيين $+\infty - \infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$f(x) = x^2 - \ln x = x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right)$$

$$= x^2\left(1 - \frac{1}{x}\,\frac{\ln x}{x}\right) \Longrightarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

حيث

$$\left(\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \,,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \,,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\right)$$

(2) التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ مشتقة

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

مرفوض $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \notin\ ]0,+\infty[$ لأن!

أو

$$x = +\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - (\ln 1 - \ln\sqrt{2}) = \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(3)

$$f(x) = x^2 - \ln x \Longrightarrow f(1) = 1^2 - \ln 1 = 1$$

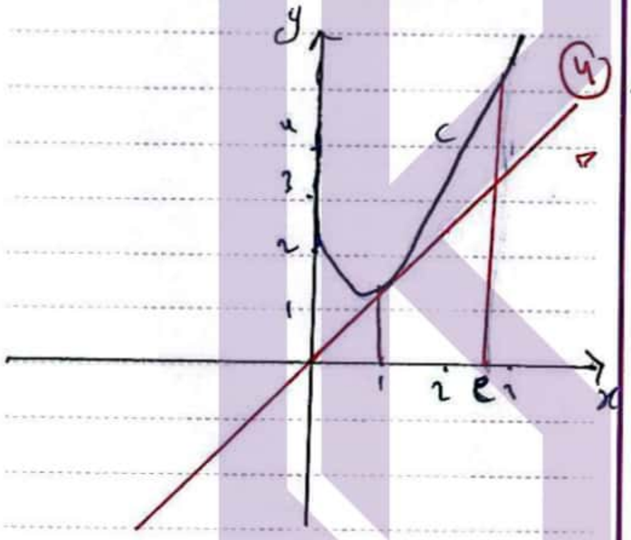
$$f'(x) = \frac{2x^2-1}{x} \Longrightarrow$$

$$f'(1) = \frac{2(1)^2-1}{1} \Longrightarrow$$

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Longrightarrow$$

$$y = 1(x-1)+1 \Longrightarrow y = x$$

(4)



$$S = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e (x^2 - \ln x)\,dx$$

(5)

$$S = \int_1^e x^2\,dx - \int_1^e \ln x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e - \int_1^e \ln x\,dx$$

$I=\int_a^b (u.v') = [u.v']_a^b - \int_a^b (u'.v)$

$u=\ln x \Longrightarrow u'=\frac{1}{x}$

$v'=1 \Longrightarrow v=x$

$I=[x\ln x]_1^e - \int_1^e 1\,dx$

$=[x\ln x]_1^e - [x]_1^e$

$=[x\ln x - x]_1^e$

$I=(e\ln e - e)-(1\ln 1 - 1)=1$

$S=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e - 1 = \left(\frac{e^3}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)-1$

$=\frac{e^3-1-3}{3}=\frac{e^3-4}{3}$

6 - نلاحظ أن: $f(x)=x^2-\ln x$ حيث $V_n=f(n)$

ومن جدول التغيرات نلاحظ أن التابع f متزايد على $[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty[$

فهو متزايد على $[1,+\infty[$ وبالتالي فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

دورة الثانية 2017:

لتكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)=x+x(\ln x)^2$

وليكن: $g(x)=(\ln(x)+1)^2$

1) أوجد نهاية التابع f المعرف عند الصفر وعند $+\infty$

2) أثبت أن: $f'(x)=g(x)$

3) حل المعادلة $g(x)=0$

4) نظم جدول تغيرات f

5) اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x=\frac{1}{e}$

6) ادرس وضع المماس Δ و C

الحل:

$f(x)=x+(\sqrt{x})^2(\ln(\sqrt{x})^2)^2$

$=x+(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$

علماً أن

$\lim_{x\to 0}(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})=\lim_{u\to 0}(u\ln u)=0$

فإن $\lim_{x\to 0} f(x)=0+0=0$

و $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

2) التابع f المعرف واشتقاقي على $I=]0,+\infty[$

$f'(x)=1+(\ln x)^2+2(\ln x)\times\frac{1}{x}\times x$

$=(\ln x)^2+2(\ln x)+1$

$f'(x)=(\ln(x)+1)^2=g(x)$

③ $g(x)=0$ ومنه $\ln x=-1$

وبالتالي $x=\frac{1}{e}$

④ $f'(x)=0$ يقتضي $g(x)=0$ ومنه

$x=\frac{1}{e}$ وبالتالي $f(\frac{1}{e})=(\frac{2}{e})$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

⑤ من الجدول $f'(\frac{1}{e})=0$

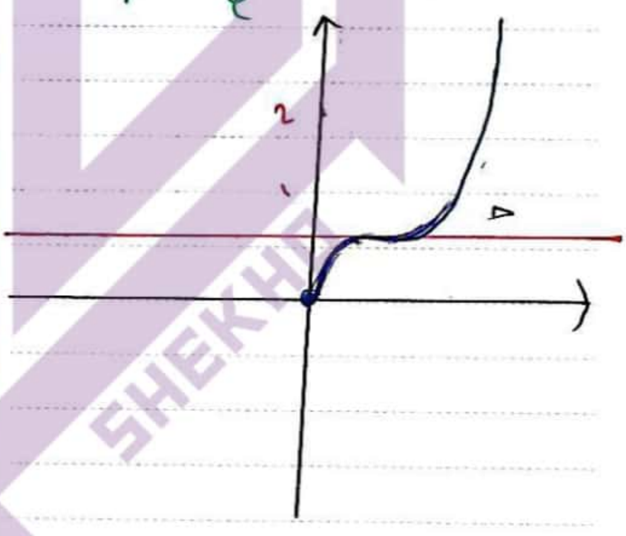
و $f(\frac{1}{e})=(\frac{2}{e})$

نقطة $(0,0)$ مقاربة

معادلة المماس

$y=f(\frac{1}{e})+f'(\frac{1}{e})(x-\frac{1}{e})$

ومنه $y=\frac{2}{e}$



دورة 2017 أولى :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$$

① احسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

واستنتج معادلة المقارب الأفقي والشاقولي

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها، ودل على القيمة الحدية كلياً

③ جد معادلة المماس d من النقطة من الخط C التي فاصلتها $x=1$

④ ارسم كل مقارب وجدته وارسم المماس ثم ارسم C

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور $x'x$ والمستقيم الذي معادلته $x=e$

الحل :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} + \ln x\right) = -\infty$$

المستقيم الذي معادلته $X=0$ مقارب أفقي للخط C

② التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ولدينا

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2) - 2x(\ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

المقام موجب تماماً على مجموعة تعريفه فإشارة المشتق تعطى بإشارة البسط

ينعدم المشتق عندما

$1 - 2\ln x = 0$ معناه

$\ln x = \frac{1}{2}$ وبالتالي

$x = \sqrt{e}$

$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

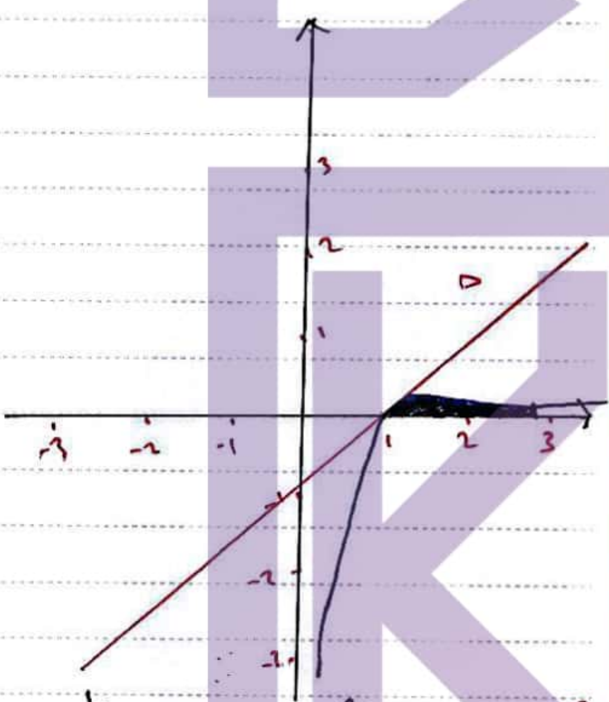
③ لدينا $f(1) = 0$ و $f'(1) = 1$

صيغة معادلة المماس

$Y = f(1) + f'(1)(x-1)$

إذن معادلة المماس Δ هي $Y = x-1$

④ الرسم $(1,0)$ نقطة مساعدة لرسم المماس



⑤ $S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

$u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v(x) = \frac{-1}{x}$

$S = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx$

$= \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$

$= \left[-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^e = \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (0-1) = 1 - \frac{2}{e}$

النموذج الوزاري : 2020

التمرين : ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-2,2[$ وفق

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)$$

① أثبت أن التابع f فردي ثم ادرس تغيرات التابع على مجال $[0,2[$

② اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x=0$

③ ادرس الوضع النسبي بين C_f و T

الحل :

① $\forall x\in]-2,2[\Rightarrow -x\in]-2,2[$

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-x+2}{2+x}\right)=-\ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$$

$$=-f(x)$$

بالتالي f تابع فردي

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $[0,2[$

$f(0)=0$ و $\lim_{x\to 2} f(x)=+\infty$

على المجال $[0,2[$ يمكن أن نكتب f باستخدام خواص اللوغاريتم بالشكل

$$f(x)=\ln(x+2)-\ln(-x+2)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2-x}=\frac{4}{(2-x)(2+x)}>0$$

التابع f متزايد تماماً على مجال $[0,2[$

x	0		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

② معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها $x=0$

$f(0)=0$ و $f'(0)=1 \Rightarrow$

$y=f'(0)(x-0)+f(0) \Rightarrow$

$y=1(x-0)+(0) \Rightarrow y=x$

③ $h(x)=f(x)-(x)=\ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)-x$

$$h(x)=\ln(x+2)-\ln(-x+2)-x$$

$$h'(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2-x}-1$$

$$=\frac{4-(4-x^2)}{(2-x)(2+x)}$$

$$h'(x)=\frac{x^2}{(2-x)(2+x)}\geq 0$$

x	-2		0		2
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول اطراد نستنتج

x	-2		0		2
$h(x)$		$-$	0	$+$	

مسألة:

ليكن f التابع المعرف على المجال

$I =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

لتكن $(V_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $V_n = g(n)$ حيث

$g(x)$ هو مقصور التابع f على $]0,+\infty[$

① ادرس تغيرات f على $]0,+\infty[$ ونظم جدولاً بها واكتب معادلة مقارب

② ارسم الخط C على $]0,+\infty[$

③ أثبت أن النقطة $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ هي مركز تناظر للخط ثم استنتج الخط البياني للتابع f

④ نضع $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ أثبت أن $S_n = -\ln(n+1)$

⑤ جد نهاية هذه متتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ وما نهاية $S_n = -\ln(n+1)$

الحل:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

المستقيم $x = 0$ محور التراتيب مقارب شاقولي لـ C

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

المستقيم $y = 0$ محور الفواصل مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

في حالة $x \in]0, +\infty[$ فإن

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = \ln x - \ln(1+x)$$

وبالتالي

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(1+x)} > 0$$

$$f(-1-x)+f(x)=\ln\left(\frac{-1-x}{-x}\right)+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$=-\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)=0$$

وبالتالي تحقق الشرط

$$f(2x_0-x)-f(x)=2y_0$$

وبتحقيق f لهذين الشرطين تكون $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ مركز تناظر للخط C

$$V_n=f(n)=\ln\left(\frac{n}{1+n}\right)$$

$$S_n=U_1+V_2+\dots+U_n$$

$$=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\dots+\ln\left(\frac{n}{1+n}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\dots\times\frac{n}{1+n}\right)$$

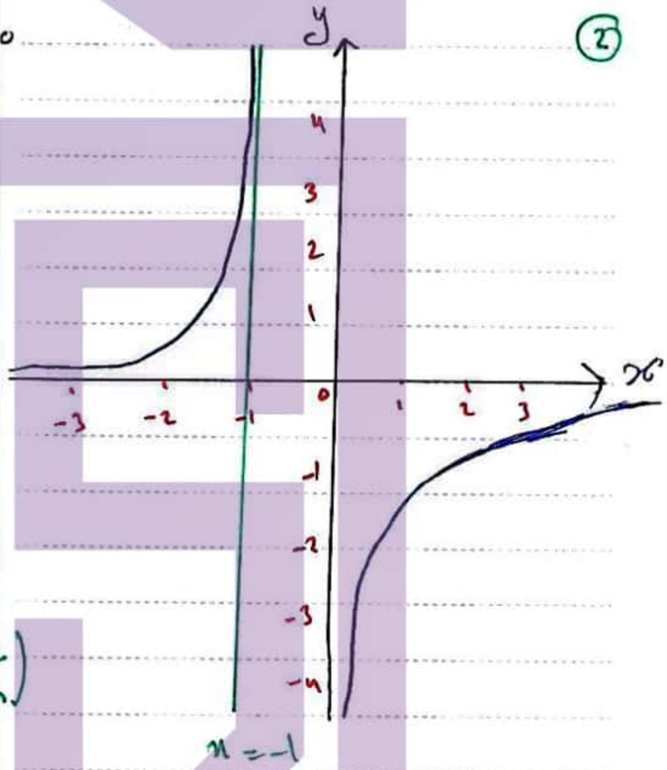
$$S_n=\ln\frac{1}{n+1}=-\ln(n+1)$$

$$\lim_{n\to+\infty}V_n=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n}{1+n}\right)=\ln(1)=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}-\ln(n+1)=-\infty$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

(2)



(3)

$$2x_0-x=-1-x$$

$$x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[\,\Rightarrow$$

$$-x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[\,\Rightarrow$$

$$-1-x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$$

وبالتالي تحقق الشرط

$$x\in D_f\Longrightarrow 2x_0-x\in D_f$$

مسألة:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = 2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

① أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x-1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ وفي جوار $-\infty$، وادرس الوضع النسبي للخط C_f بالنسبة للمقارب

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واكتب معادلات المقاربات الشاقولية للخط C_f

③ أثبت أن $f(x) + f(-x) = -2$

④ استنتج أن C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$

⑤ ارسم مقارباته ثم ارسم C_f

⑥ استنتج رسم C_g للتابع g المعرف وفق

$$g(x) = -2x + 1 - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

الحل:

$$g(x) = f(x) - y_d = -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$$

إذاً d مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$$

إذاً d مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

في حالة $x > 1$: $x+1 > x-1 \Longrightarrow \frac{x+1}{x-1} > 1$

$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$$

$$\Longrightarrow -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 0$$

وبالتالي $g(x) < 0$ ونستنتج أن C يقع تحت d على المجال $]1,+\infty[$

في حالة $x < -1$ فإن

$$x+1 > x-1 \Longrightarrow \frac{x+1}{x-1} < 1 \Longrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 0 \Longrightarrow -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$$

وبالتالي $g(x)>0$ ونستنتج أن C تقع فوق d على المجال $]-\infty,-1[$

② $f(x) = 2x-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$

$= \lim\limits_{x\to-1^-} 2x-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty$

$x=-1$ مقارب شاقولي للخط C

$\lim\limits_{x\to1^+} -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} 2x-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$= -\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) = 2x-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$f'(x) = 2 - \dfrac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}$

$= 2 + \dfrac{2}{(x-1)(x+1)} =$

$2 + \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \notin D$

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

③ $f(x)+f(-x) = 2x-1-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$-2x-1-\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) \Rightarrow$

$f(x)+f(-x) = -2-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$\Rightarrow$

$f(x) + f(-x) = -2 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) +$

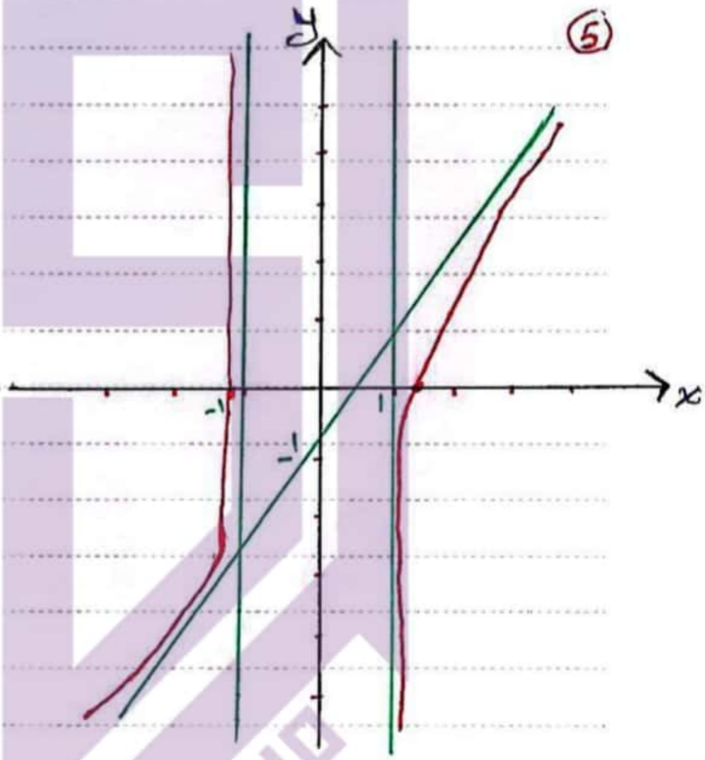
$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -2$

(4) $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$\Rightarrow -x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$f(x) + f(-x) = -2$ وبالتالي C_f متناظر $I(0, -1)$

(5)



(6) $g(x) = -2x + 1 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$\Rightarrow g(x) = -\left(2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$

$= -f(x)$

وبالتالي C_g هو نظير C بالنسبة لمحور الفواصل

النموذج الوزاري الثاني 202. :

التمرين الأول :

ليكن التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ ومعطى بالعلاقة $f(x) = \sqrt{x}\ln(1+x)$

(1) أثبت أن f اشتقاقي عند 0 ثم استنتج مجموعة تعريف f'

(2) جد $f'(x)$ على $[0, +\infty[$

(3) استنتج مشتق التابع g المعرف على المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$ وفق

$$g(x) = \sqrt{\cos(x)}\,\ln(1 + \cos(x))$$

الحل :

$t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$= \frac{\sqrt{x}\ln(1+x)}{x} \Rightarrow$

$\lim_{x \to 0^+} t(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(\sqrt{x}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\right)$

$= 0 \times 1 = 0$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند الصفر و $f'(0) = 0$ وبالتالي مجموعة تعريف f' هي $[0, +\infty[$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{1+x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+x)(\ln(1+x)) + 2x}{2\sqrt{x}\,(1+x)} & : x>0 \\ = 0 & : x=0 \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{\cos(x)}\,\ln(1+\cos(x)) = f(\cos(x))$$

$$g'(x) = f'(\cos(x)) \times (-\sin(x))$$

$$= \frac{(-\sin(x))\left[(1+\cos(x))(\ln(1+\cos(x)) + 2\cos(x)\right]}{2\sqrt{\cos(x)}\,(1+\cos(x))}$$

النموذج الوزاري الثالث:

السؤال الثاني:

حل في R المعادلة الآتية

$$\ln(x-1) = \ln x - \ln(x+1)$$

الحل:

شرط وجود الحل هو

$x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow x\in]1,+\infty[$

$\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln x \Rightarrow$

$\ln(x^2-1) = \ln x \Rightarrow$

$x^2-1 = x$

$x^2-x-1=0$

$\Delta = 1+4 = 5 \Rightarrow$

$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ مقبول

$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$ مرفوض

تمرين:

ليكن f التابع المعرف على $I =]-1,+\infty[$ وفق العلاقة

$$g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$$

احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$ واستنتج

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln\sqrt{2}}{x-1}$$

$g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$, $g(1) = \ln\sqrt{2}$

$g'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+1}$, $g'(1) = \frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln\sqrt{2}}{x-1} = \frac{1}{4}$$

مسألة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, e[\,\cup\,]e, +\infty[$ وفق

$$f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$$

① ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واستنتج ما للخط من مقاربات موازية للمحورين الاحداثيين وعين القيمة الحدية تبعاً لنوعها

② ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم ارسم (C)

③ احسب مساحة السطح المحصور بين (C) ومحور الفواصل والمستقيمين $x = \frac{1}{e^2}$ و $x = \frac{1}{e}$

الحل:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x - x\ln x} = \frac{1}{0^+ - 0^-} = +\infty$$

$x = 0$ مقارب منطبق على yy' عند $+\infty$

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} \frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = e$ مقارب يوازي yy' عند $+\infty$

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} \frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$x = e$ مقارب يوازي yy' عند $-\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$y = 0$ مقارب منطبق على xx' في جوار $+\infty$

$$f'(x) = \frac{0 - (1-\ln x) + 1}{x^2(1-\ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

إشارة f' من إشارة $\ln x$ الذي ينعدم عند $x = 1$

$f(1) = 1$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	0

تمرين :

أثبت أنه أياً كانت x من $]-1,+\infty[$ كان $\frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1)$

الحل : نضع التابع

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$$

يؤول حل المتراجحة إلى $f(x) \leq 0$ لذلك ندرس اطراد التابع f

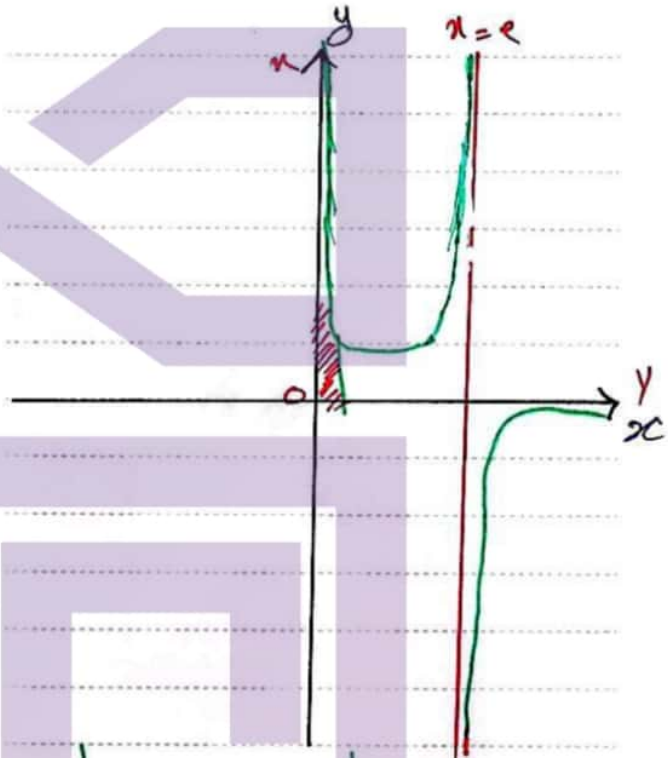
$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

إشارة f' من إشارة $-x$ الذي ينعدم عند $x=0$ ويكون $f(0)=0$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

ومن جدول الاطراد نلاحظ أن $f(x) \leq 0$ وذلك أياً كان $x \in]-1,+\infty[$

أي أنه أياً كان $x \in]-1,+\infty[$ فإن $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$



$$S = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx$$

$$= -\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx =$$

$$= -\left[\ln(1-\ln x)\right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$= -(\ln 2 - \ln 3) = \ln\frac{3}{2}$$

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R_+^* وفق:

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

① احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ما مقاربات الخط C؟

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم الخط C

③ أثبت أن المعادلة $f(x)-1=0$ حلاً وحيداً على R_+^*

④ استنتج C_1 الخط البياني للتابع $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{x+1}$

الحل:

①
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)$$

$= +\infty - 1 = +\infty$

$x=0$ محور التراتيب مقارب شاقولي

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)$$

$= 0 - 0 = 0 \Longrightarrow +\infty$

$y=0$ محور الفواصل مقارب للخط في جوار $+\infty$

② التابع معرف ومستمر واشتقاقي على مجموعة تعريفه المعزولة $]0,+\infty[$ و لبيان أن $x-1$ و $-x+3$ موجبة تماماً على $]1,3[$ حسب خواص اللوغاريتم

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0

③ التابع مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]0,+\infty[$

$f]0,+\infty[=]0,+\infty[$ ، $1 \in]0,+\infty[$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=1$ حلاً وحيداً في المجال $]0,+\infty[$

④
$$g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x+1-1}{x+1}$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} + 1 = f(x)+1$$

بالتالي ينتج C_1 عن C بانسحاب مقداره 1 باتجاه محور التراتيب

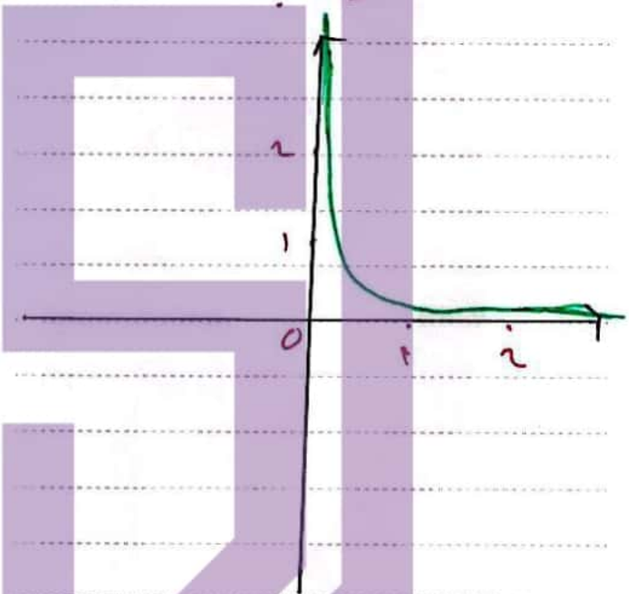
ط2 :

$g(x) - f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{x+1}$

$- \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}$

$= \frac{x+1}{x+1} = 1 \Longrightarrow g(x) = f(x)+1$

وبالتالي C' ينتج من C بانسحاب مقداره 1 على محور التراتيب



مسألة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

① احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ومقاربات الخط C

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

③ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$

④ اكتب معادلة المماس T المار بالمبدأ للخط البياني C ثم ارسم C والمماس T

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$ ، $x=e$

⑥ استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع

$$g(x) = \frac{1-x+\ln x}{x}$$

الحل:

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{1+\ln x}{x} = -\infty$

$x=0$ مستقيم مقارب منطبق على yy'

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right) = 0+0=0$

$y=0$ مستقيم مقارب منطبق على xx' في جوار $+\infty$

② $f'(x) = \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$

إشارة f' من إشارة $-\ln x$ الذي ينعدم عندما $x=1$ ويكون $f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	1	$\searrow$	0

③ التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$

$f(\frac{1}{2}) = 2-2\ln 2 > 0$ و $f(\frac{1}{3}) = 3-3\ln 3 < 0$

$\Rightarrow f(\frac{1}{2}) \times f(\frac{1}{3}) < 0$

بالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في المجال $]\frac{1}{3},\frac{1}{2}[$

④ نفرض $A(a,b)$ وبالتالي

$A(a, \frac{1+\ln a}{a})$

تكون المعادلة المماس

$y = \frac{-\ln a}{a^2}(x-a) + \frac{1+\ln a}{a}$

وبما أن المماس يمر من المبدأ فإن:

$0 = \frac{\ln a}{a} + \frac{1+\ln a}{a} = \frac{1+2\ln a}{a}$

$1+2\ln a = 0 \Rightarrow$

$\ln a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\Rightarrow b = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{\sqrt{e}}{2}$

$y = \frac{e}{2}(x - \frac{1}{\sqrt{e}}) + \frac{\sqrt{e}}{2}$

$= \frac{e}{2}x - \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{e}{2}x$

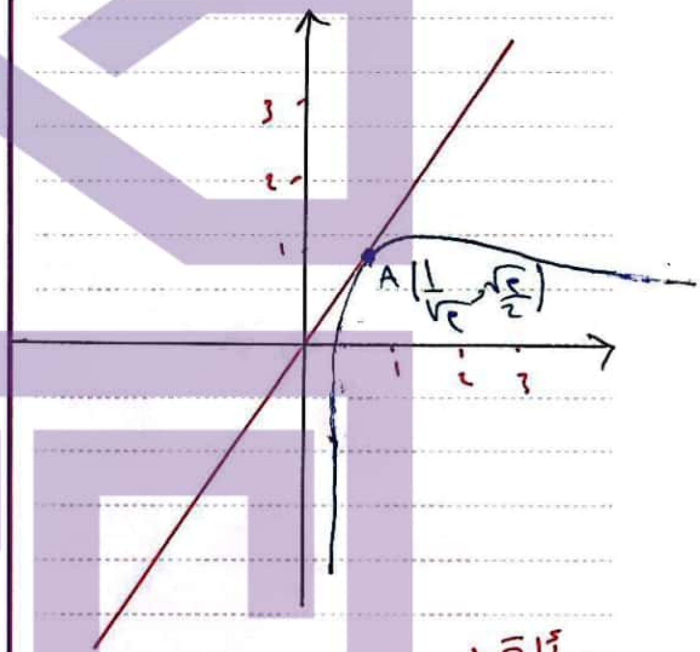
وتكون معادلة المماس المطلوبة

⑤ $S = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln x\right)dx$

$= \left[\ln x + \frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^e = (1+\frac{1}{2}) - 0 = \frac{3}{2}$

⑥ $g(x) = \frac{1+\ln x}{x} - 1 = f(x) - 1$

بالتالي C' ينتج عن C بإنسحاب مقداره 1- على محور التراتيب



مسألة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

① أثبت أن التابع f اشتقاقي على المجال I ثم أثبت أنه متزايد تماماً

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

③ أثبت أن المستقيم $y = x - \ln 2$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

④ ادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه

⑤ أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1, 2[$

⑥ ارسم في معلم واحد المستقيم والخط البياني C

الحل:

① $x \to 1 + \frac{1}{x}$ موجب تماماً واشتقاقي على I وبالتالي $x \to \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ اشتقاقي على I

التابع f اشتقاقي على I لأنه مجموع تابعين اشتقاقيين على I

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

$$\Longrightarrow f(x) = x - \ln(2x+1) + \ln x$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2x^2 + x + 1}{x(2x+1)} > 0 \Longrightarrow$$ التابع f متزايد تماماً

$$f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)\right) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب يوازي $y'y$ للمنحني

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)\right) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x(2x+1)} > 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

② $f(x)-(x-\ln 2) = x-\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$

$-x+\ln 2 = \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-\ln 2)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$

$= 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-\ln 2)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$

$= 0$

المستقيم d مقارب مائل للخط البياني جوار $+\infty$

③ $f(x)-(x-\ln 2) = \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$

لدراسة الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d ندرس إشارة الفرق

$2x<2x+1 \Longrightarrow \frac{2x}{2x+1}<1 \Longrightarrow$

$\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)<0 \Longrightarrow$

$f(x)-(x-\ln 2)<0$ فالخط C يقع دوماً تحت المقارب d

④ بما أن التابع مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$ و

$f(x)=0 \in\,]-\infty,+\infty[$

$= f(]0,+\infty[)$

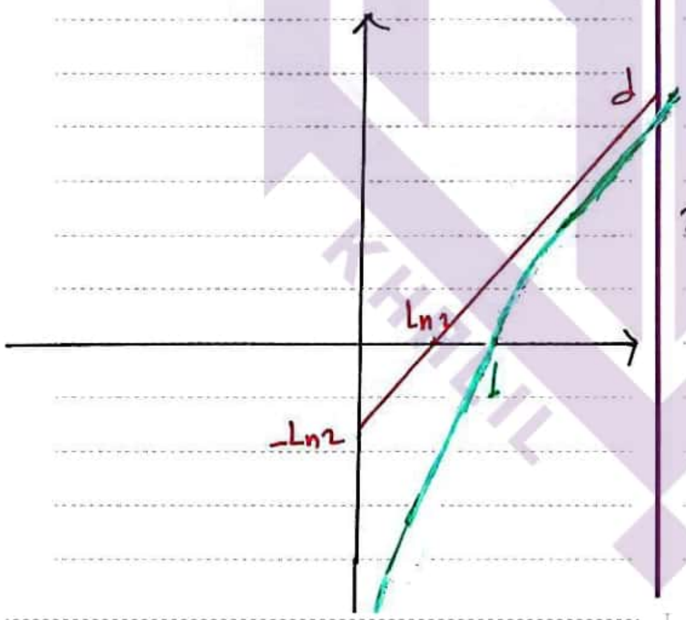
فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α

$f(1) = 1-\ln 3 = \ln e-\ln 3<0$

$f(2) = 2-\ln\left(\frac{5}{2}\right) > 2-\ln e>0$

$f(1)\times f(2)<0$

فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$



مسألة: أولاً:

ليكن التابع $g(x) = -2x^2 + 2 - \ln(x)$ المعرف على $]0,+\infty[$

1) ادرس تغيرات g وانظم جدولاً بها

2) احسب $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$

ثانياً:

1) ليكن C الخط البياني للتابع

$$f(x) = \frac{\ln x - 1}{x} - 2x$$

1) احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

واستنتج معادلة المقارب الشاقولي للخط

2) أثبت أن $\Delta : y = -2x$ مقارب مائل للخط البياني عند $+\infty$ وادرس الوضع النسبي مع C.

3) أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ واستنتج جدول تغيرات التابع f

4) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

5) احسب مساحة السطح المحصور بين Δ و C والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$

الحل: أولاً: $g(x) = -2x^2 + 2 - \ln(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 + 2 - \ln(0) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty - \infty = -\infty$$

g اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$g'(x) = -4x - \frac{1}{x} = \frac{-4x^2 - 1}{x} < 0$$

$g'(x) = 0$

$-4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow -4x^2 = 1$

$x^2 \neq -\frac{1}{4}$ مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$

$g'(x) < 0$

والتابع g متناقص تماماً على $]0,+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘ 0 ↘	$-\infty$

$g(1) = -2(1)^2 + 2 - \ln(1) = 0$

أي أن $x = 1$ جذر للمعادلة $g(x) = 0$

رسم جدول

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

ثانياً :

$$f(x) = \frac{\ln x - 1}{x} - 2x$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{-\infty - 1}{0^+} - 2(0) = -\infty$$

$X = 0$ مقارب شاقولي لـ C منطبق على yy'

② $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty} - \infty$$

حالة عدم تعيين

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - 2x$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 - 0 - \infty = -\infty$$

④ $$h(x) = f(x) - (-2x) = \frac{\ln x - 1}{x} - 2x + 2x$$

$$= \frac{\ln x - 1}{x}$$

$$h(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0 - 0 = 0$$

$\Delta : y = -2x$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي :

$$h(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$$

ندرس إشارته

$$h(x) = 0$$

$$\ln(x) - 1 = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$x = e$$

x	0		e		$+\infty$
$\ln x - 1$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C يقع تحت Δ	$(e, -2e)$	C يقع فوق Δ	

③ f اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - (1)(\ln(x) - 1)}{x^2} - 2$$

$$= \frac{1 - \ln(x) + 1}{x^2} - 2$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2} - 2$$

$$= \frac{2 - \ln x - 2x^2}{x^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2 - \ln x}{x^2}$$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0$

$\Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow$

$x = 1 \quad f(1) = -3$

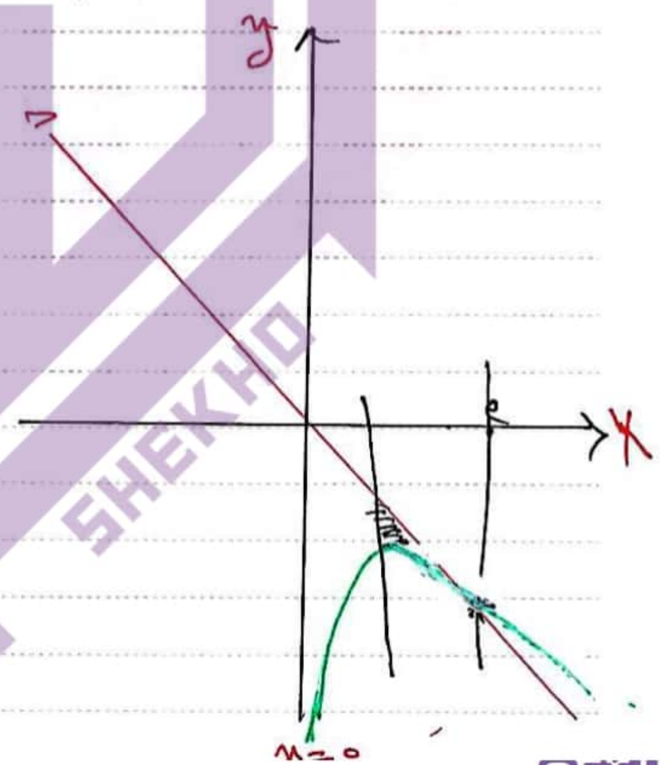
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

قيمة عظمى محلية $f(1) = -3$

(n)

$\Delta : y = -2x$

x	0	1
y	0	-2



تمرين :

حل المتراجحة الآتية

$(\ln x + 3)(1 - \ln x) > 0$

شرط الحل $x > 0$

$(\ln x + 3)(1 - \ln x) = 0$

إما $\ln x + 3 = 0$ ومنه

$\ln x = -3$

$x_1 = e^{-3}$

أو $1 - \ln x = 0$ ومنه

$\ln x = 1$

$x_2 = e$

x	0		e^{-3}		e		$+\infty$
$(\ln x+3)(1-\ln x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
المتراجحة	‖	//		محققة		//	

$S =]e^{-3}, e[$

حل المعادلة :

$\ln(x-2) = 0$

المعادلة معرفة بحيث $x - 2 > 0$

$x > 2$

$\ln(x-2) = \ln 1$

$x - 2 = 1$

$x = 3$ مقبول

حل المعادلة :

$(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$

المعادلة المعرفة بحيث : $x > 0$

نفرض $X = \ln x$

$\Rightarrow X^2 - 5X + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1$

$x = \frac{+5+1}{2} = 3 \Rightarrow$

$\ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$

$X_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \Rightarrow \ln x = 2$

$\Rightarrow x = e^2$

$S = \{e^2, e^3\}$

حل المعادلة :

$\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$

المعادلة المعرفة بحيث $3x-4>0$

$x^2-4>0$

$3x-4>0 \Rightarrow 3x>4 \Rightarrow x>\frac{4}{3}$

نضع : $3x-4 = x^2-4$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$: $x=0$ مرفوض ، $x=3$ مقبول

تمرين : $f(x) = \ln x + 1 - x$

(1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

(2) استنتج في حالة $x>0$ صحة المتراجحة $\ln x \le x-1$

الحل :

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - \infty$ حالة عدم تعيين

$f(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} - 1\right)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ لأن

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$f'(x) = 0$ أي $x = 1$

$f(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

لما $x>0$ فإن $f(x) \le 0$

أي $\ln x + 1 - x \le 0$

ومنه $\ln x \le x - 1$

مسألة:

ليكن التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = (x+1)\ln x$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

② هل يقبل C_f الخط البياني للتابع مماسات أفقية؟ فسر

③ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

④ جد جذراً I حل المعادلة $f(x)=0$

⑤ ارسم C_f واستنتج C_g الخط البياني للتابع

$$g(x) = (x+1)\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

الحل:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}(x+1)$$

$$= \ln x + \frac{x+1}{x}$$

لندرس إشارة التابع f' المعرف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة السابقة

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{x-x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x-1}{x^2}$$

المقام موجب تماماً: فالإشارة من إشارة البسط

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 1 \Rightarrow f'(1) = 2$$

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

نلاحظ أن $f'(x) \geq 2$

أياً كانت $x \in]0,+\infty[$

فإن $f'(x) > 0$

وبالتالي:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

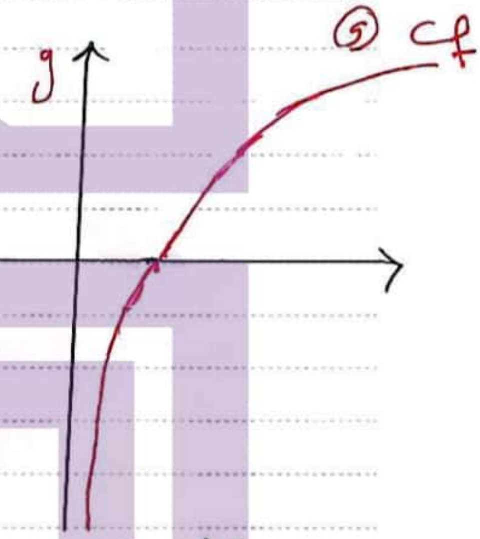
② لا يقبل C_f مماسات أفقية لأن $f'(x)$ لا ينعدم أياً كان $x \in]0,+\infty[$

③ حل وحيد

④ $f(x)=0 \Longrightarrow (x+1)\ln x=0$

إما $x=-1 \notin D_f$ مرفوض

أو $\ln x=0 \Longrightarrow x=1$ مقبول

⑤ 

$g(x)=(x+1)\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$=-(x+1)\ln x$

$=-f(x)$

و C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل

المسألة:

ليكن الخط البياني C للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$

$$f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$$

① احسب نهايات التابع f عند الصفر و $+\infty$ واستنتج معادلات مقاربات توازي المحورين الاحداثيين ثم ادرس وضع C مع مقاربه أفقي Δ

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

③ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في مجال $]\frac{1}{2},1[$

④ باستخدام التقريب التآلفي المحلي احسب قيمة تقريبية لـ $f(1.1)$

⑤ ارسم Δ ثم ارسم C

⑥ احسب مساحة السطح المحصور بين C و Δ والمستقيمين $x=e$, $x=1$

الحل:

$$f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=1+0=1$$

$X=0$ مقارب شاقولي لـ C

$\Delta: y=1$ مقارب أفقي لـ C بجوار $+\infty$

$f(x)-(1)=\frac{2\ln x}{x}$: $x>0$

دراسة وضع C مع مقاربه أفقي Δ

ندرس إشارة الفرق:

عندما $0<x<1$ يكون $\ln x<0$

وبالتالي C تحت Δ

عندما $x=1$ يكون $\ln x = 0$ وبالتالي C يتقاطع مع Δ

عندما $x>1$ يكون $\ln x > 0$ وبالتالي C فوق Δ

② دراسة تغيرات f على المجال $I =]0,+\infty[$

التابع f اشتقاقي على I ومشتقه

$$f'(x) = 2\,\frac{(\ln x)'(x) - (x)'(\ln x)}{x^2}$$

$$= 2\,\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2}$$

$$= 2\,\frac{1-\ln x}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-\ln x)$

ينعدم المشتق عندما

$1-\ln x = 0$

$\ln x = 1 \Longrightarrow x = e$

$$f(e) = 1 + \frac{2}{e} = \frac{e+2}{e}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e+2}{e} \simeq 1.7$	$\searrow$	1

③ التابع f مستمر ومتزايد تماماً على $]\frac{1}{2},1[$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 + 2\,\frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + 2\,\frac{-\ln 2}{\frac{1}{2}} = 1 - 4\ln 2 < 0$$

$$f(1) = 1 + 2\,\frac{\ln 1}{1} = 1 + 2(0) = 1 > 0$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد

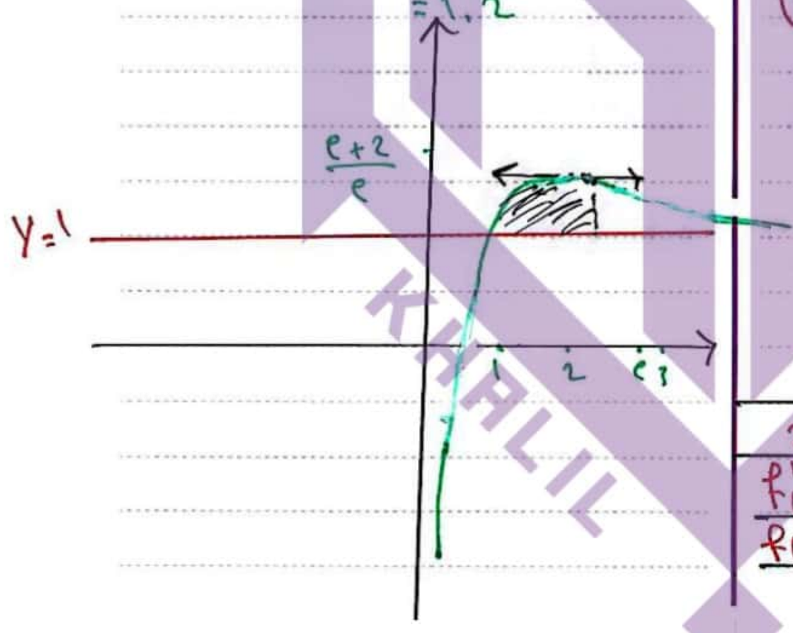
$x \in]\frac{1}{2}, 1[$

④ $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a) \times h$

$f(1.1) = f(1+0.1) \simeq f(1) + f'(1) \times 0.1$

$f(1.1) = f(1+0.1) \simeq 1 + 2 \times 0.1$

$= 1.2$



⑥

$$S = \int_1^e (f(x) - y_\Delta)\,dx$$

$$S = \int_1^e \left(1 + 2\frac{\ln x}{x} - 1\right) dx$$

$$= 2\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right) dx$$

$$= 2\int_1^e \left(\frac{1}{x}\right) \ln x \, dx$$

$$S = 2\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e$$

$$= 2\left(\left(\frac{1}{2}(\ln e)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

- ليكن f التابع المعرف على $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

وليكن c الخط البياني للتابع f في معلم متجانس والمطلوب:

1) اثبت أن مجموعة تعريف التابع السابق هي $D =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

2) اثبت أن النقطة $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للخط c.

3) أوجد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة التعريف D ونظم جدولاً لتغيراته

4) أثبت أن المستقيم $y=-\frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$ و $-\infty$

5) ارسم كل مقارب وجدته وارسم c

الحل (1)

$\frac{x-1}{x} > 0$ ندرس إشارته

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x}$	$+$	$\Vert$	$-$ 0	$+$
المتراجحة	محققة	$\Vert$		محققة

$D_1 :]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$\boxed{\begin{matrix} 2x_0 - x \\ 1-x \end{matrix}}$

2) $A\left(\underset{x_0}{\frac{1}{2}},\underset{y_0}{-\frac{1}{4}}\right)$

$\forall\ x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$-x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$1-x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ محققة

- $f(x) + f(1-x)$

$= -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + -\frac{1-x}{2} + \ln\left(\frac{1-x-1}{1-x}\right)$

$= -\cancel{\frac{x}{2}} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{x}{2}} + \ln\left(\frac{-x}{-(x-1)}\right)$

$$f(x)+f(1-x)=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)-\frac{1}{2}$$

$$=\ln\left(\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x}}\times\frac{\cancel{x}}{\cancel{x-1}}\right)-\frac{1}{2}$$

$$=\ln(1)-\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}=2y_0$$

إذاً النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للخط C

3)

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=0+\ln\left(\frac{-1}{0^-}\right)=+\infty$$

$x=0$ شاقولي منطبق على yy'

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=-\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{0}{1}\right)=-\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي لـ C يوازي yy'

f معرف واشتقاقي على D

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{\frac{x-1}{x}}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{(1)(x)-(1)(x-1)}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}(x-1)}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{-x(x-1)+2}{2x(x-1)}$$

$$=\frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$$

4) $d: y = -\frac{1}{2}x$

$$f(x) - y_d = \frac{-x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{x}{2}$$

$$= \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - y_d\right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - y_d\right) = 0$$

إذاً:

$d: y = -\frac{x}{2}$ مقارب مائل

لـ C_f في جوار

$-\infty$ و $+\infty$

• الوضع النسبي:

$$f(x) - y_d = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$f'(x) = 0$

$-x^2 + x + 2 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

إما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f(2) = -1 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

• $f(2) = -1 - \ln 2$

• $f(-1) = +\frac{1}{2} + \ln\left|\frac{-2}{-1}\right|$

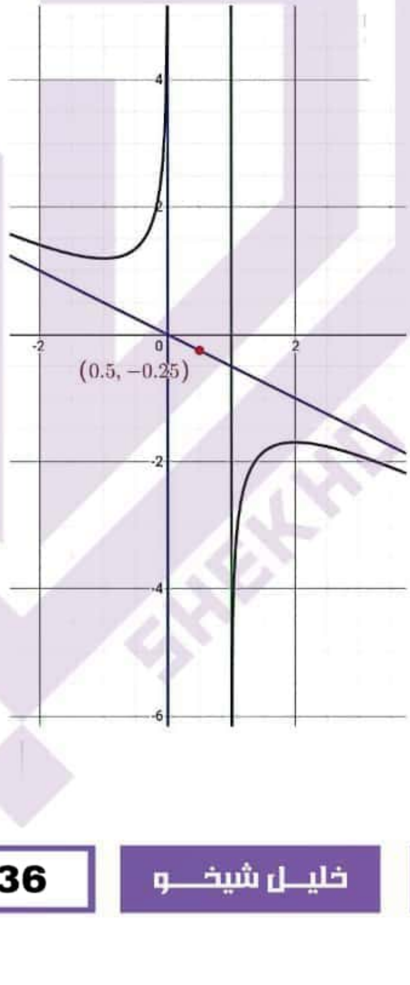
$= \frac{1}{2} + \ln|2|$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||		||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$ ||		|| $-\infty$	$\nearrow$	$-1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

$f(-1) = \frac{1}{2} + \ln 2$ قيمة حدية صغرى

$f(2) = -1 - \ln 2$ قيمة حدية كبرى

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f(x)-y_d$	$+$	$\|\|$	//	$\|\|$	$-$
الوضع النسبي	يقع فوق d	$\|\|$	//	$\|\|$	يقع تحت d



5

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln(x))}$$

والمطلوب:

1) أوجد مجموعة تعريف التابع f

2) ادرس نهاية f عند أطراف مجموعة التعريف، اكتب معادلة كل مقارب شاقولي وأفقي للخط C.

3) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها. دل على القيمة الحدية وبين نوعها.

4) هل يوجد مقارب مائل في جوار $+\infty$ ((علل إجابتك))

5) أثبت أن للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد.

6) ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C.

7) استنتج رسم الخط البياني للتابع $f_1(x)=\frac{1}{x\ln x-x}$

8) ناقش تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $mx(1-\ln x)=1$

9) احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=2$.

10) نعرّف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية $U_{n+1}=f(U_n)$ و $U_0=2$

والمطلوب:

a) اثبت بالتدريج صحة العلاقة $1\leq U_{n+1}<U_n$ وذلك أياً كان العدد الطبيعي n

b) استنتج أن المتتالية U_n متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

1) f معرف بشرطين:

الأول $x(1-\ln x) \neq 0$

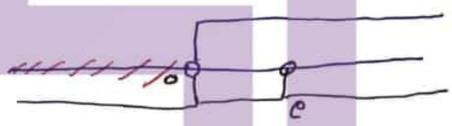
عندما $\boxed{x \neq 0}$

$x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0, e\}$ $\quad 1-\ln x \neq 0$

$\boxed{x \neq e}$

الثاني: $x > 0$

$x_2 \in]0, +\infty[$



$D_f :]0, e[\cup]e, +\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x - x\ln x} = \frac{1}{0-0} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي لـ C_f منطبق على yy'

$$\lim_{x \to e^-} f(x) = \frac{1}{e(1-\ln e)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to e^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	

$x=e$ مقارب شاقولي لـ C_f يوازي المحور yy'

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$y=0$ مقارب أفقي لـ C_f منطبق على المحور xx'

3) f معرف واشتقاقي على D_f

$$f'(x) = \frac{(0)(x(1-\ln x)) - \left((1)(1-\ln x) + (-\frac{1}{x})x\right)(1)}{\left(x(1-\ln x)\right)^2}$$

$$= \frac{-\cancel{1} + \ln x + \cancel{1}}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

$f'(x) = 0$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = e^0$

$\boxed{x=1} \in D_f$

$f(1) = 1$

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$ ‖	$+$
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$ ‖ $-\infty$	↗ 0

قيمة حدية صغرى $f(1) = 1$

4) لا يوجد مقارب مائل في جوار $+\infty$

لوجود مقارب أفقي

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \neq \pm\infty$

5) • f مستمر ومتزايد تماماً على

$]e, +\infty[$

$f(]e,+\infty[) =]-\infty, 0[$

$-1 \in]-\infty, 0[$

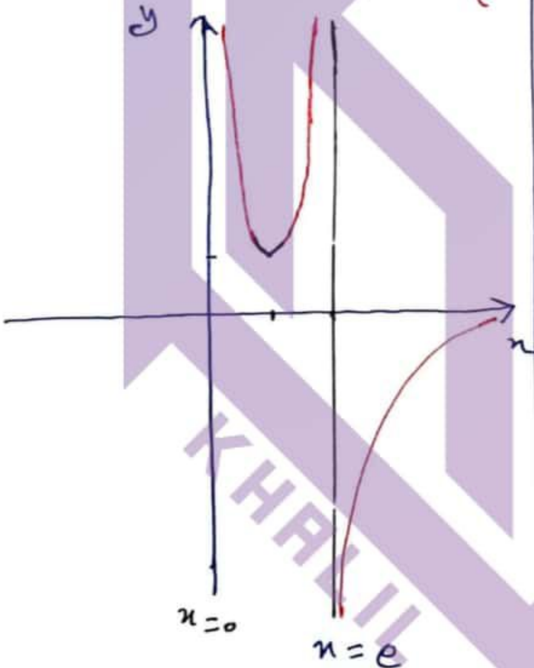
• إذاً للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد على المجال $]e, +\infty[$

• $f(]0,e[) =]1, +\infty[$

$-1 \notin]1, +\infty[$

⇐ لا توجد حلول للمعادلة $f(x) = -1$ في المجال $]0, e[$

6)



7)

$$f_1(x) = \frac{1}{x\ln x - x}$$

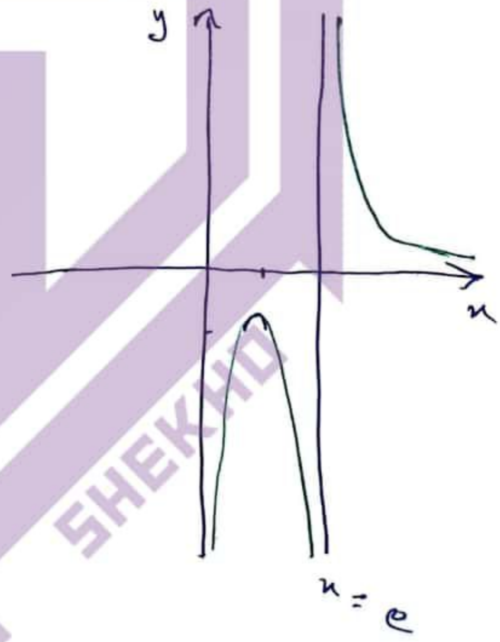
$$= \frac{1}{x(\ln x - 1)}$$

$$= \frac{1}{-x(1-\ln x)}$$

$$= -f(x)$$

$(x, y) \longrightarrow (x, -y)$

وبالتالي C_{f_1} نظير C_f بالنسبة إلى محور الفواصل



8)

$$m\, x\,(1-\ln x) = 1$$

$$m = \frac{1}{x(1-\ln x)}$$

$$f(x) = m$$

عندما $m \in]-\infty, 0[$ للمعادلة حل وحيد

$m \in]0, 1[$ ليس للمعادلة حل

عندما $m = 1$ للمعادلة حل وحيد

عندما $m \in]1, +\infty[$ للمعادلة حلين مختلفين

٢) المساحة بين C و $x'x$

و $x=1$ و $x=2$

: اتضح من الرسم

C يقع فوق $x'x$

على $[1,2]$

$$S = \int_1^2 + f(x)\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx$$

$$= \int_1^2 -\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)}{1-\ln x}\,dx$$

$$= \Big[-\ln|1-\ln x|\Big]_1^2$$

$$S = \left(-\ln(1-\ln 2)\right) - \left(-\ln(1-\ln(1))\right)$$

$$S = -\ln(1-\ln 2)$$

١٠)

$$U_{n+1} = f(U_n) = \frac{1}{U_n(1-\ln U_n)}$$

$$U_0 = 2$$

أ) $1 \leq U_{n+1} < U_n$

نرمز للقضية بالرمز $E(n)$

نبرهن صحة العلاقة من أجل

$E(0):\ 1 \leq U_1 = \frac{1}{2(1-\ln 2)} < U_0 = 2$

محققة

نفرض صحة العلاقة من أجل

$E(n)$

لنبرهن على صحتها من أجل

$E(n+1):\ 1 \leq U_{n+2} < U_{n+1}$

من الفرض

$1 \leq U_{n+1} < U_n$

وبما أن f تابع متزايد تماماً

$[1, +\infty[$

تمرين:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-5,3[$ وفق:

$$f(x)=\ln\left(\frac{-x+3}{x+5}\right)$$

1- جد نهاية التابع عند طرفي مجموعة التعريف واستنتج المقاربات الشاقولية

2- ادرس تغيرات التابع ونظم جدولاً بها

3- اكتب معادلة المماس T في النقطة التي فاصلتها -1.

4- ادرس الوضع النسبي للمماس T مع الخط البياني C_f

5- ارسم المقاربات والمماس T والخط البياني C_f في معلم متجانس

6- استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g المعرف على $]-5,3[$ وفق:

$$g(x)=\ln\left(\frac{-ex+3e}{x+5}\right)$$

1- $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = +\infty$

لأن:

$\lim\limits_{x\to -5} \left|\frac{-x+3}{x+5}\right| = \frac{8}{0} = +\infty$

$x=-5$ مقارب شاقولي

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$

لأن:

$\lim\limits_{x\to 3^-} \left(\frac{-x+3}{x+5}\right) = \frac{0}{8} = -\infty$

2- $f'(x) = \dfrac{\frac{-8}{(x+5)^2}}{\frac{-x+3}{x+5}}$

$= \dfrac{-8}{(x+5)(-x+3)} < 0$

x	-5		3
$f'(x)$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3- $f(-1) = \ln(1) = 0$

$A(-1, 0)$

$m = f'(-1) = \dfrac{-8}{(-1+5)(1+3)}$

$= \dfrac{-1}{2}$

$T: y = -\frac{1}{2}(x+1)$

-4

$f(x) - y_T = \ln\left|\frac{-x+3}{x+5}\right| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$h(x) = \ln\left|\frac{-x+3}{x+5}\right| + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$h'(x) = \dfrac{-8}{(x+5)(-x+3)} + \dfrac{1}{2}$

$h'(x) = \dfrac{-16 + (x+5)(-x+3)}{2(x+5)(-x+3)}$

$= \dfrac{-x^2 - 2x - 1}{2(x+5)(-x+3)}$

$= \dfrac{-(x+1)^2}{2(x+5)(-x+3)} \leq 0$

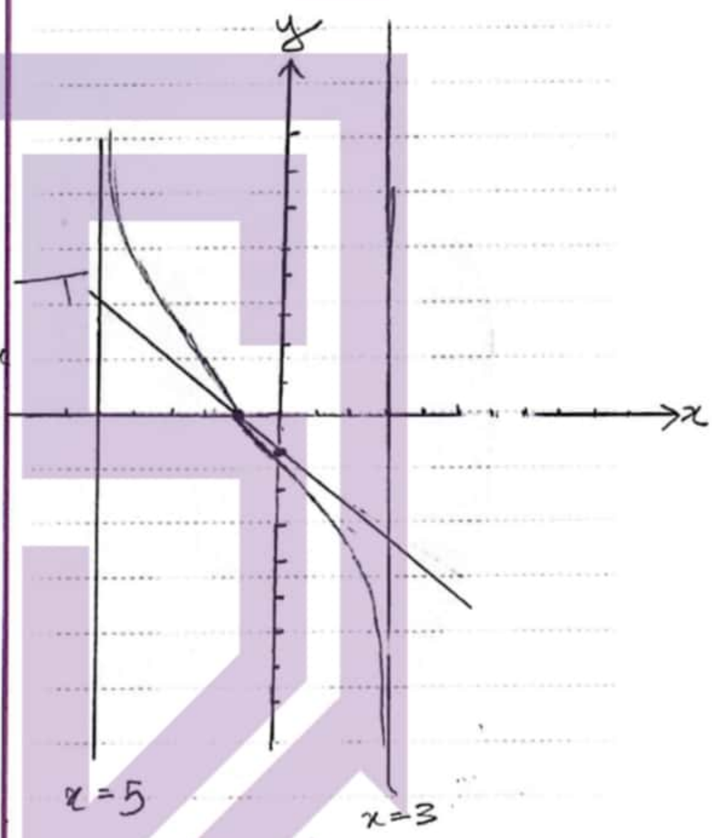
$h(-1) = 0$

x	-5		-1		$+3$
$h'(x)$		$-$	0	$-$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

الوضع النسبي

C_f يقع فوق T في المجال $]-5,-1[$

C_f يقع تحت T في المجال $]-1,3[$



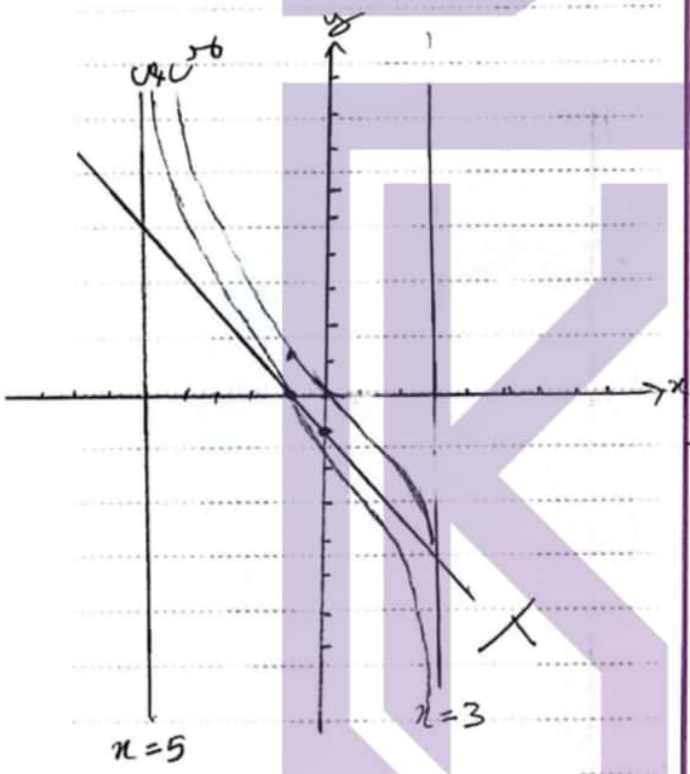
6- $y(x) = \ln\left(\dfrac{-ex+3e}{x+5}\right)$

$= \ln\left(e \times \dfrac{-x+3}{x+5}\right)$

$= \ln e + \ln\left(\dfrac{-ex+3e}{x+5}\right)$

$y(x) = 1 + \ln(f(x))$

C_y ينتج عن C_f بإسحاب وفق الشعاع $\vec{u}(0,1)$



تمرين:

$$f(x)=x+3+\frac{\ln(2+\cos x)}{x^2}$$

أثبت أنّ:

1- $\Delta: y=x+3$ مقارب مائل لـ C_f في جوار $+\infty$

2- ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

1- $h(x)=f(x)-(x+3)$

$$=\cancel{x}+\cancel{3}+\frac{\ln(2+\cos(x))}{x^2}-\cancel{x}-\cancel{3}$$

$$h(x)=\frac{\ln(2+\cos(x))}{x^2}$$

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$

$+2$

$1 \leq 2+\cos(x) \leq 3$

$\ln(1) \leq \ln(2+\cos(x)) \leq \ln(3)$

نقسم $x^2>0$

$0 \leq \frac{\ln(2+\cos(x))}{x^2} \leq \frac{\ln(3)}{x^2}$

$0 \leq h(x) \leq \frac{\ln(3)}{x^2}$

$\lim_{x\to+\infty}(0)=0$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(3)}{x^2}\right)=0$

حسب مبرهنة الإحاطة

$\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$

إذاً

مقارب مائل $\Delta: y=x+3$

لـ C_f في جوار $+\infty$

-2 $0 \leq h(x)$

إذاً C تقع فوق Δ دوماً

$h(x)=0$

$\ln(2+\cos(x))=0$

$2+\cos(x)=1$

$\cos(x)=-1$

$x=\pi+2\pi k$

نقطة مشتركة بين C و Δ

$(\pi+2\pi k, f(\pi+2\pi k)= \pi+3)$

$k\in\mathbb{Z}$

تدريب الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع

$$f(x) = 2e^{x-1} - 2$$

و C_2 الخط البياني للتابع

$$g(x) = \ln(2x-1)$$

C_1 و C_2

1- أثبت أن C_1 و C_2 متماسان في النقطة $A(1,0)$.

2- اكتب معادلة المماس المشترك للمنحنيين C_1 و C_2 في النقطة $A(1,0)$

$$f(1) = 2e^{1-1} - 2 = 0$$

$$g(1) = \ln(2-1) = 0$$

$$\Rightarrow f(1) = g(1) = 0$$

و منه C_1 و C_2 متماسان في النقطة $A(1,0)$

$$f'(x) = 2e^{x-1}$$

$$f'(1) = 2e^{0} = 2$$

$$g'(x) = \frac{2}{2x-1}$$

$$g'(1) = \frac{2}{1} = 2$$

$$f'(1) = g'(1) = 2 = m$$

-2 $\quad m = 2 \quad (1,0)$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = 2(x-1)$$

$$\boxed{y = 2x - 2}$$

تدريب 2:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]2,4[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{4-x}\right)$$

1- أثبت أن النقطة $A(3,0)$ مركز تناظر للخط C.

2- جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب وجدته

3- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

4- اكتب معادلة المماس d للخط c عند النقطة التي فاصلتها $x=3$

5- في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم المماس d والخط c

6- استنتج رسم الخط البياني c' للتابع

$g(x) = Ln(4-x) - Ln(x-2)$

1- $A(3,0)$

$\forall x \in D$ فإن $2a - x \in D$

$x \in]2,4[$ فإن $6-x \in]2,4[$

البرهان:

$x \in]2,4[$

$-x \in]-4,-2[$

$6-x \in]2,4[$ محققة

$f(2a-x) + f(x) = 2b$

$f(6-x) + f(x) = 0$

$$Ln\left|\frac{6-x-2}{4-6+x}\right| + Ln\left|\frac{x-2}{4-x}\right|$$

$$Ln\left|\frac{4-x}{-2+x}\right| + Ln\left|\frac{x-2}{4-x}\right|$$

$$Ln\left[\frac{4-x}{x-2} \times \frac{x-2}{4-x}\right] = Ln(1) = 0$$

محققة إذاً $A(3,0)$ مركز تناظر

(2)+(3):

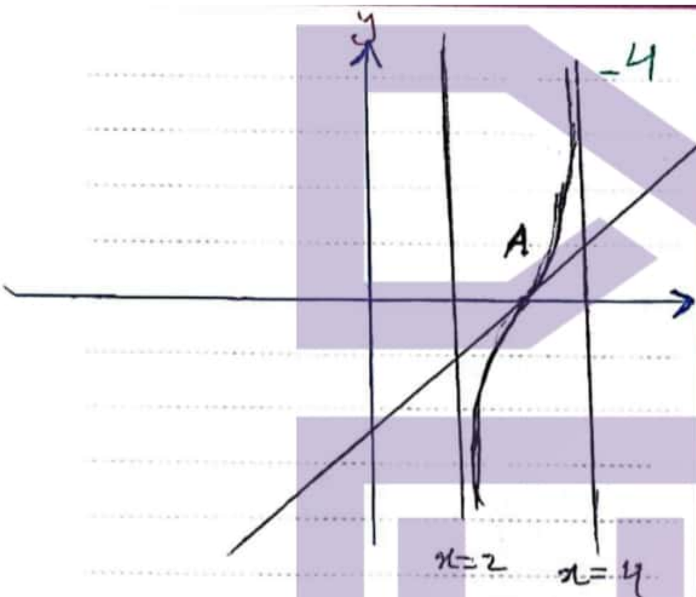
التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على $]2,4[$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = Ln\left|\frac{0}{2}\right| = Ln(0) = -\infty$$

$x=2$ مقارب شاقولي لـ c و c يقع يمين المقارب yy'

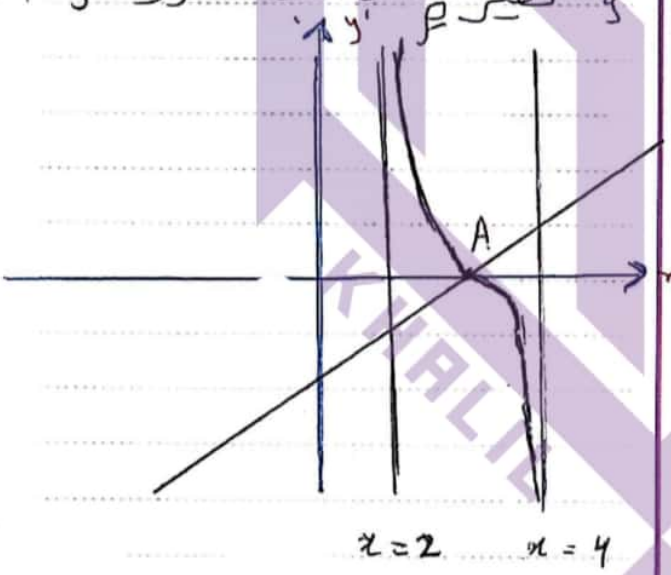
$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = Ln\left|\frac{2}{0}\right| = Ln(+\infty) = +\infty$$

$x=4$ مقارب شاقولي لـ c و c يقع يسار المقارب yy'.



$$g(x) = \ln(4-x) - \ln(x-2)$$
$$= -\left[-\ln(4-x) + \ln(x-2)\right]$$
$$= -\left[\ln\left(\frac{x-2}{4-x}\right)\right] = -f(x)$$

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل



$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x-2}{4-x}\right)'}{\frac{x-2}{4-x}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{(4-x)-(-1)(x-2)}{(4-x)^2}}{\frac{(4-x)}{(x-2)}}$$

$$f'(x) = \frac{4-x+x-2}{(4-x)(x-2)} = \frac{2}{(4-x)(x-2)}$$

x	2		4
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

$$x=3 \Rightarrow y = \ln\left(\frac{3-2}{4-3}\right) \quad -3$$

$$= \ln\left(\frac{1}{1}\right) = \qquad \ln(1) = 0$$

$$m = f'(3) = \frac{2}{(4-3)(3-2)} = \frac{2}{(1)(1)} = 2$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 0 = 2(x-3)$$

$$y = 2x - 6$$

مسألة دراسة حزمة توابع: يمكن إعطائها

ليكن n عدداً طبيعياً غير معدوم، وليكن f_n التابع المعرف على المجال $I=[0,+\infty[$

وفق: $\begin{cases} f_n(x)=x^n\ln x & x>0 \\ f_n(0)=0 & : x=0 \end{cases}$.

نرمز إلى الخط البياني للتابع f_n، في معلم متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، بالرمز $\mathscr{C}_n$.

أولاً : ① أثبت أنَّ f_n اشتقاقي في $x=0$ عند كل $n\geq 2$. ادرس حالة $n=1$.

② احسب f'_n على المجال $]0,+\infty[$، ثم ادرس تغيرات f_n ونظم جدولاً بها.

ثانياً : ① أثبت أنَّ الخطوط $\mathscr{C}_n$ تمر جميعاً بنقطة ثابتة A بالإضافة إلى المبدأ O.

② أثبت أنَّ الخطوط $\mathscr{C}_n$ تقبل جميعاً مماساً مشتركاً في النقطة A.

ثالثاً: ① لتكن x_n فاصلة النقطة M_n من الخط $\mathscr{C}_n$ والتي تحقق $f'_n(x_n)=0$.

أثبت أنَّ النقاط M_n واقعة على الخط Γ الذي معادلته $y=\frac{1}{e}\ln x$.

② ارسم Γ والمماس المشترك للخطين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ في النقطة A، ثم ارسم الخطين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$.

رابعاً: في حالة $n=2$ نضع $:x>0$ $g(x)=x^2\ln x$ خطه البياني $\mathscr{C}_2$

① جِدْ $g'(x)$ ، $g''(x)$ و $g'''(x)$.

واستنتج أن المشتق من المرتبة n حيث $n\geq 3$. يعطى بالعلاقة $g^{(n)}(x)=\dfrac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$

خامساً: احسب مساحة السطح المحصور بين الخط $\mathscr{C}_2$ ومحور الفواصل والمستقيمين

$x=1,\ x=\frac{1}{e}$

ندوة : 2024/4/15 – ميكائيل الحمود – نهلة مشرفي – هيثم خلل.

$I=[0,+\infty[$

$$f_n(x)=\begin{cases} x^n\ln x & x>0 \\ f_n(0)=0 & x=0 \end{cases}$$

أولاً: 1) أثبت أن f_n اشتقاقي في $x=0$ عند كل $n\geq 2$. ادرس حالة $n=1$.

لنشكل التابع

$$t(x)=\frac{f_n(x)-f(0)}{x-0} \quad ; x\in]0,+\infty[$$

$$=\frac{x^n\ln x-0}{x^n}$$

$$t(x)=x^{n-1}\cdot\ln x \quad ; n\geq 2$$

$$=x^{n-2}\,x\ln x$$

$$\lim_{x\to 0}t(x)=0\cdot 0=0\in R$$

وفيه f_n حيث $n\geq 2$ اشتقاقي عند الصفر من اليمين

$f'(0)=0$

والخط C_n حيث $n\geq 2$ يقبل نصف مماس أفقي من اليمين معادلته:

$y=0$

في حالة $n=1$

$x\in]0,+\infty[$

$$t(x)=\frac{f_1(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x\ln x-0}{x}$$

$$=\ln x$$

$$\lim_{x\to 0^+}t(x)=-\infty\notin R$$

إذاً f_1 غير اشتقاقي عند الصفر من اليمين.

التفسير الهندسي: والخط البياني C_{f_1} يقبل نصف مماس شاقولي في $O(0,0)$ معادلته

$x=0$

أ.خليل شيخو
0991736954

2) احسب f'_n على المجال $]0,+\infty[$، ثم ادرس تغيرات f_n ونظم جدولاً بها.

$$f'_n(x)=\begin{cases} n x^{n-1}\times\ln x+\frac{1}{x}\cdot x^n & ; x>0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

$$f'_n(x)=\begin{cases} n x^{n-1}\cdot\ln x+x^{n-1} & ; x>0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

$$f'_n(x)=\begin{cases} x^{n-1}(n\ln x+1) & ; x>0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

في حالة $n=1$

$f_1'(x) = \ln x + 1 \quad : \quad x \in]0,+\infty[$

* لندرس تغيرات التابع $f_n(x)$ حيث $n \geq 2$

$f_n(x) = x^n \ln x \quad ; \quad x > 0$

$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

$f_n'(x) = x^{n-1}(n \ln x + 1)$

$f_n'(x) = 0$

$x^{n-1}(n \ln x + 1) = 0$

$n \ln x + 1 = 0$

$n \ln x = -1$

$\ln x = -\frac{1}{n}$

$e^{\ln x} = e^{-\frac{1}{n}}$

$x = e^{-\frac{1}{n}}$

$f_n\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \ln\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)$

$= e^{-1} \times \left(-\frac{1}{n}\right) \ln e$

$= \frac{1}{e} \times \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{ne}$

$n \geq 2$

x	0		$e^{-\frac{1}{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{ne}$	$\nearrow$	$+\infty$

من أجل $n=1$

$\begin{cases} f_1(x) = x \ln x \quad ; \quad x > 0 \\ f_1(0) = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f_1(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

$f_1'(x) = (1) \ln x + \frac{1}{x}(x)$

$= \ln x + 1$

$f_1'(x) = 0$

$\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1$

$x = e^{-1} \qquad x = \frac{1}{e}$

$f_1\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}(-1) = -\frac{1}{e}$

أ.خليل شيخو
0991736954

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f_1'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

ثانياً:

1) أثبت أن الخطوط ℓ_n تمر جميعاً بنقطة ثابتة A بالإضافة إلى المبدأ O.

$\forall\ n \geq 1 \qquad f_n(0) = 0$

$(0,0) \in \ell_n$

من النص

$f_n(x) = x^n \ln x$

$n=1$

$f_1(x) = x \ln x$

$n=2$

$f_2(x) = x^2 \ln x$

$f_1(x) = f_2(x)$

$x \ln x = x^2 \ln x$

$x^2 \ln x - x \ln x = 0$

$(x^2 - x)\ln x = 0$

$x(x-1)\ln x = 0$

و $x \neq 0$

$(x-1)\ln x = 0$

إما $x-1=0$ $\boxed{x=1}$

$\ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$f_n(1) = 0$

نلاحظ أن $\begin{cases} f_n(1) = 1^n \ln 1 = 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

فالنقطة المشتركة

$A(1,0) \in \ell_n$

2) أثبت أن الخطوط ℓ_n تقبل جميعها مماساً مشتركاً في النقطة A.

$f_n'(x) = x^{n-1}(n \ln x + 1) \quad ; x>0$

بما أن ميل المماس لجميع الخطوط في النقطة المشتركة $A(1,0) \in \ell_n$ $\forall\ n \geq 1$ يساوي

$m = f_n'(1) = (1)^{n-1}(1 \ln x + 1) = 0$

وفيه جميع الخطوط ℓ_n حيث $n \geq 1$ تقبل مماساً مشتركاً في $A(1,0)$ ميله $m=1$

معادلته $T: y = x-1$

ثالثاً:

1) لتكن x_n فاصلة النقطة M_n من الخط f_n والتي تحقق $f'_n(x_n)=0$

أثبت أن النقاط M_n واقعة على الخط Γ الذي معادلته $y=\frac{1}{e}\ln x$

نعلم أن $f'_n(x)=0$

عند $x=e^{-\frac{1}{n}}$

النقطة التي ينعدم عندها المشتق هي

$f\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)=-\frac{1}{ne}=y_n$

أي $A\left(e^{-\frac{1}{n}},-\frac{1}{ne}\right)\in\Gamma$

$\Gamma: y=\frac{1}{e}\ln x$

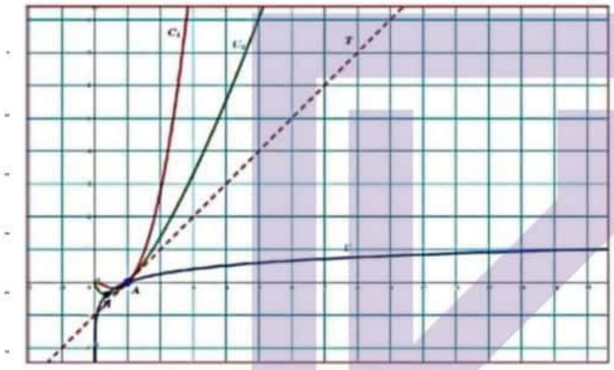
$-\frac{1}{ne}=\frac{1}{e}\ln\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)$

$-\frac{1}{ne}=-\frac{1}{ne}$

محققة

$\forall n\geq 1$

2) ارسم Γ والمماس المشترك للخطين f_1 و f_2 في النقطة A ثم ارسم الخطين f_1 و f_2



أ.خليل شيخو
0991736954

رابعاً:

في حالة $n=2$ نضع

$g(x) = x^2 \ln x \quad ; x>0$

خطه البياني C_2

④ جد $g'(x)$ و $g''(x)$ و $g'''(x)$.

واستنتج أن المشتق من المرتبة n حيث $n \geq 3$. يعطى بالعلاقة

$$g^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1} \cdot (n-3)!}{x^{n-2}}$$

الحل: $g(x) = x^2 \ln x \quad ; x>0$

$g'(x) = (2x) \ln x + \frac{1}{x} x^2$

$= 2x \ln x + x$

$g''(x) = (2) \ln x + \frac{1}{x}(2x) + 1$

$= 2 \ln x + 2 + 1$

$g''(x) = 2 \ln x + 3$

$g'''(x) = \frac{2}{x}$

$$g^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1} \cdot (n-3)!}{x^{n-2}}$$

$\boxed{n \geq 3}$

نرمز للقضية بالرمز

$E(n): \quad g^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1} \cdot (n-3)!}{x^{n-2}}$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $E(3)$

$L_1: \ g^{(3)}(x) = g'''(x) = \frac{2}{x}$

$L_2: \ \frac{2(-1)^{3-1} (3-3)!}{x} = \frac{2}{x}$

$L_1 = L_2$ محققة

نفرض صحة العلاقة من أجل $E(n)$

ولنبرهن على صحتها من أجل

$E(n+1): \quad g^{(n+1)}(x) = \frac{2(-1)^{n} (n-2)!}{x^{n-1}}$

أ.خليل شيخو
0991736954

$I_1:\quad g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}(x)\right)'$

$= \left(\dfrac{2(-1)^{n-1}\cdot(n-3)!}{x^{n-2}}\right)'$

$= \left(2(-1)^{n-1}(n-3)!\cdot x^{-n+2}\right)'$

$= (-n+2)(1)\,x^{-n+1} \times 2(-1)^{n-1}(n-3)!$

$= -(n-2)(1)(-1)^{n-1} \times 2(n-3)!\,x^{-n+1}$

$= 2(-1)^{n}(n-2)!\cdot x^{-n+1}$

$= \dfrac{2(-1)^{n}(n-2)!}{x^{+n-1}} \quad : I_2$

وبالتالي

$E(n+1)$ صحيحة

فـ $E(n)$ صحيحة

$\forall\ n \geq 3$

خامساً:

احسب مساحة السطح المحصور بين الخط f_2 ومحور الفواصل والمستقيمين $x=\frac{1}{e}$, $x=1$

$f_2(x) = x^2 \ln x$

يقع تحت محور الفواصل على $[\frac{1}{e}, 1]$

$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1} -x^2 \ln x \, dx$

بفرض

$u(x) = \ln x \longrightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = -x^2 \longrightarrow v(x) = -\frac{x^3}{3}$

$S = \left[-\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} -\frac{x^2}{3}\, dx$

$= \left[-\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{e}}^{1} x^2\, dx$

$= \left[-\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$

$$S' = \left(-\frac{1}{3}\ln(1)\right) - \left(-\frac{1}{3e^3}\ln\frac{1}{e}\right)$$

$$+\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3e^3}\right)\right)$$

$$S' = -\frac{1}{3e^3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9e^3}$$

$$= \frac{-4}{9e^3} + \frac{1}{9}$$

$$S' = \frac{e^3-4}{9e^3}$$

حل المعادلة الآتية:

$$\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln(\sqrt{x+1})$$

الحل:

$x+1>0$	$3-x>0$	$2x>0$
$x>-1$	$-x>-3$	$x>0$
$D_3:]-1,+\infty[$	$x<3$	$D_1:]0,+\infty[$
	$D_2:]-\infty,3[$	

$D: D_1 \cap D_2 \cap D_3$

شروط الحل: $D:]0,3[$

$\ln(2x) = 2\ln(3-x) - 2\ln(x+1)^{\frac{1}{2}}$

$\ln(2x) = \ln(3-x)^2 - \ln(x+1)$

$\ln(2x) + \ln(x+1) = \ln(3-x)^2$

$\ln(2x(x+1)) = \ln(3-x)^2$

$2x(x+1) = (3-x)^2$

$2x^2 + 2x = 9 - 6x + x^2$

$x^2 + 8x - 9 = 0$

$(x+9)(x-1) = 0$

$x = -9$ مرفوض

$x = 1$ مقبول

$S: \{1\}$

تمرين:

ارسم في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط الآتي:

$\ln x + \ln y = 0$

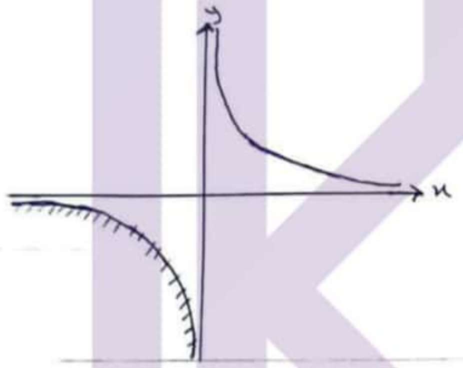
الحل:

$x>0$, $y>0$

$\ln(x.y) = 0$

$x.y = 1$

$y = \frac{1}{x}$



مجموعة النقاط $M(x,y)$ تمثل جزء من قطع الزائد المرسوم في الشكل المجاور.

تمرين:

حل جملة المعادلتين:

$x^2 + y^2 = 10$

$\ln x + \ln y = \ln 3$

الحل:

$x>0$, $y>0$

$x^2 + y^2 = 10$

$\ln(x.y) = \ln 3$

$x^2 + y^2 = 10 \ldots\ldots (1)$

$x.y = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{y}$

(1)

$(\frac{3}{y})^2 + y^2 = 10$

$\frac{9}{y^2} + y^2 = 10$

$9 + y^4 = 10y^2$

$y^4 - 10y^2 + 9 = 0$

$(y^2-9)(y^2-1)=0$

$y^2 = 9$

مقبول $y=+3$ ، مرفوض $y=-3$

$y^2=1$

مقبول $y=+1$ ، مرفوض $y=-1$

$y=3 \Rightarrow x.3 = 3 \Rightarrow x=1$

$y=1 \Rightarrow x.1=3 \Rightarrow x=3$

$S:\{(3,1);(1,3)\}$

دورة 2010

مسألة:

$f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$

1- أوجد مجموعة تعريف التابع f وادرس تغيرات تابع f ونظم جدولاً لها وارسم الخط C

2- أثبت أن التابع: $F(x)=\ln(\ln x)$ اشتقاقي على المجال $]1,+\infty[$

ثم أثبت أنه تابع أصلي لـ f على المجال

3- جد مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين: $x=e^3$; $x=e^2$

4- استنتج رسم الخط البياني للتابع: $g(x)=\frac{1}{x\ln(\frac{1}{x})}$

الحل: $x\ln x = 0$

$x=0$

$\ln x = 0$

$x=1$

$D_1: R\setminus\{0,1\}$

$x = 0$

$D_2:]0,+\infty[$

$D_f: D_1 \cap D_2$

$D_f:]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي لـ cf

منطبق على yy'

x	0		1		$-\infty$
$x\ln x$	‖	$-$	‖	$+$	

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي لـ cf

يوازي yy'

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

$y=0$ مقارب أفقي لـ cf

منطبق على xx'

$f'(x) = \frac{0 - [(1)\ln x + \frac{1}{x}x](1)}{(x\ln x)^2}$

$$f'(x) = \frac{-[\ln x + 1]}{(x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\ln x - 1}{(x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

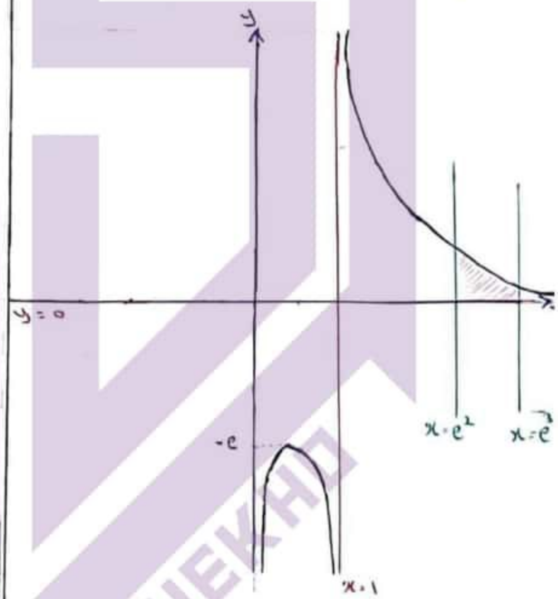
$$-\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e} \in I$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{e}(-1)} = -e$$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	0	↗	$-e$	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	0

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -e$ قيمة حدية كبرى.



.2 $F(x) = \ln(\ln x)$

$I =]0, +\infty[$

لأن التابع:

$x \longmapsto \ln x$

اشتقاقي على I وموجب تماماً

فإن:

$x \longmapsto \ln(\ln x)$

اشتقاقي على I لأن تركيب تابعين اشتقاقيين هو تابع اشتقاقي.

إذاً F اشتقاقي على I.

$$F'(x) \overset{?}{=} f(x)$$

$$F'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$F'(x) = \frac{1}{x\ln x} = f(x)$$

إذاً F تابع أصلي لـ f على I

.3 C يقع فوق xx' على $[e^2, e^3]$

$$S = \int_{e^2}^{e^3} +f(x)\, dx$$

$$= [F(x)]_{e^2}^{e^3}$$

$$= [\ln(\ln x)]_{e^2}^{e^3}$$

$$= (\ln(\ln e^3)) - (\ln(\ln e^2))$$

$$= \ln(3) - \ln(2)$$

$$S = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

4. $g(x) = \dfrac{1}{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

$= \dfrac{1}{-x\ln x}$

$g(x) = -f(x)$

$(x,y) \longrightarrow (x,-y)$

C_g نظير C_f بالنسبة إلى محور الفواصل.

مسألة:

$f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)$

1. تحقق أن مجموعة تعريف f هو: $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

2. a) أثبت أنه أياً كان: $x\in D$: $4-x\in D$

b) احسب عندما $x\in D$ المقدار: $f(4-x)+f(x)$

c) استنتج أن النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط C_f

3. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها وارسم الخط C_f

الحل:

$\dfrac{x-1}{x-3} > 0$

ندرس إشارة

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x-1}{x-3}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$D_f:]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

2) a.

$x\in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

$-x\in]-\infty,-3[\cup]-1,+\infty[$

$4-x\in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

b.

$f(4-x)+f(x)$

$=\ln\left(\dfrac{4-x-1}{4-x-3}\right)+\ln\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)$

$=\ln\left(\dfrac{3-x}{1-x}\right)+\ln\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)$

$=\ln\left(\dfrac{\cancel{3-x}}{\cancel{1-x}}\times\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-3}}\right)$

$=\ln(1) = 0$

$f(4-x)+f(x)=0$

c. $A(\underset{x_0}{2},\underset{y_0}{0})$

$\forall x\in D_f$

$4-x\in D_f$

مما سبق

$f(x) + f(4-x) = 2y_0$

$f(x) + f(4-x) = 0 = 2y_0$

إذاً النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط C.

f معرف واشتقاقي على:

$]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي لـ C_f منطبق على $x'x$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي لـ C_f يوازي $y'y$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

$x = 3$ مقارب شاقولي لـ C_f يوازي $y'y$

$\forall x \in D_f$

$f(x) = \ln(x-1) - \ln(x-3)$

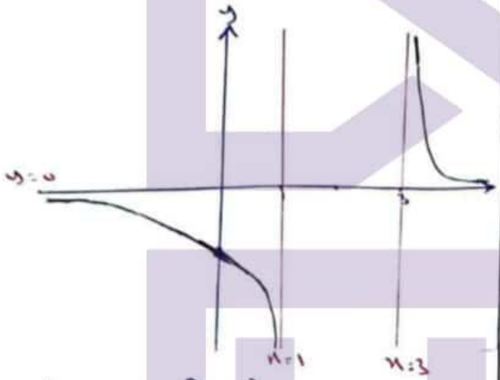
$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$

$= \frac{x-3-x+1}{(x-1)(x-3)}$

$= \frac{-2}{(x-1)(x-3)} < 0$

f تابع متناقص تماماً على I

x	$-\infty$		1	3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$-$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$		$+\infty$	↘ 0	



$(x=0, -\ln 3)$

ندوة :

$$f(x) = \ln(x^2+1) - x$$

1. ادرس تغيرات f.

الحل:

f معرف ومستمر واشتقاقي على: $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

عند $+\infty$:

$$f(x) = \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) - x$$

$$f(x) = \ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - x$$

$$= 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - x$$

$$= \underset{\downarrow +\infty}{x}\left(2\underset{\downarrow 0}{\frac{\ln x}{x}} + \underset{\downarrow 0}{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}} - 1\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 1$$

$$f'(x) = \frac{-(x^2-2x+1)}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{-(x-1)^2}{(x^2+1)} \leq 0$$

حيث: $f'(x) = 0$

عندما $x = 1$

$$f(1) = \ln 2 - 1$$

$$= -1 + \ln 2$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

2- احسب $f(0)$ واستنتج مجموعة حلول المتراجحة

$$\ln(x^2+1) \leq x$$

الحل:

$$f(0)=0$$

المتراجحة تكافئ

$$f(x) \leq 0$$

وحلول المتراجحة هي:

$$x \in [0, +\infty[$$