2024 / 2 / 28

قانون هوك : $F'_s = k\cdot x$

بحث النواسات

النواس المرن

التعريف: جسم صلب معلق بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة يهتز حركة اهتزازية حول مركز الاهتزاز.

تعريف: الحركة الاهتزازية

حركة جسم يهتز إلى جانبي نقطة ثابتة تسمى مركز الاهتزاز

نبرهن أن محصلة القوى المؤثرة في مركز عطالة الجسم الصلب في النواس المرن هي قوة إرجاع تعطى بالعلاقة: $\vec F = -k\cdot \vec x$

• في حالة السكون:

القوى الخارجية المؤثرة

ثقل الجسم $\vec w$

قوة توتر النابض $\vec F_{s0}$

بما أن الجسم ساكن:

$$\sum \vec F = \vec 0$$

$$\vec w + \vec F_{s0} = 0$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$w - F_{s0} = 0$$

$$w = F_{s0}$$

لكن: $w = m\cdot g$

نابض تخضع لقوة شد:

$$F'_{s0} = F_{s0} = k x_0$$

نعوض: $w = k x_0$

$$m\cdot g = k x_0$$

• في حالة الحركة:

القوى الخارجية المؤثرة:

$\vec w$ ثقل الجسم

$\vec F_s$ قوة شد النابض للجسم

نطبق قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec F = m\cdot \vec a$$

$$\vec w + \vec F_s = m\cdot \vec a$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$w - F_s = m\cdot a \quad \text{---} \bigstar$$

نابض تخضع لقوة شد:

$$F'_s = F_s = k(x_0 + x)$$

لكن: من حالة السكون وجدنا:

$$w = k x_0$$

نعوض في ★:

$$k x_0 - k(x_0 + x) = m\cdot a$$

$$\cancel{k x_0} - \cancel{k x_0} - kx = m\cdot a$$

$$\bar F = -k\cdot \bar x$$

ملاحظة:

- قوة الإرجاع تتناسب طرداً مع المطال وتعاكسه بالإشارة
- بالطالما لك إذا طلب شدة قوة الإرجاع نضع نفس القانون

بالقيمة المطلقة: $F = |-k\cdot x|$

• قانون الإستطالة السكونية :

$$x_0 = \frac{m.g}{k}$$

• استنتج عبارة الطاقة الميكانيكية للنواس المرن غير المتخامد وبيّن متى تكون E_k و E_p عظمى و معدومة.

$$E_{tot} = E_p + E_k$$

• $E_p = \frac{1}{2} k . x^2$

$x = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$E_p = \frac{1}{2} k . \left[X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)\right]^2$

$$E_p = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \text{ —— •}$$

★ $E_k = \frac{1}{2} m . v^2$

$v = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$E_k = \frac{1}{2} m \left[-\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)\right]^2$

$$E_k = \frac{1}{2} \underbrace{m . \omega_0^2}_{k} X_{max}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \text{ —— ★}$$

نعوض • و ★ في ♡ :

$E_{tot} = \underbrace{\frac{1}{2} k X_{max}^2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \underbrace{\frac{1}{2} k X_{max}^2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \underbrace{\left(\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\right)}_{1}$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 = \overset{\text{ثابت}}{const}$$

E_k

- عظمى ← عند وضع التوازن $x = 0$
- معدومة ← في المطالين الأعظميين $X = \pm X_{max}$

• سؤال دورة 2020

ما شكل الطاقة عند وضع التوازن ؟

طاقة حركية E_k

E_p

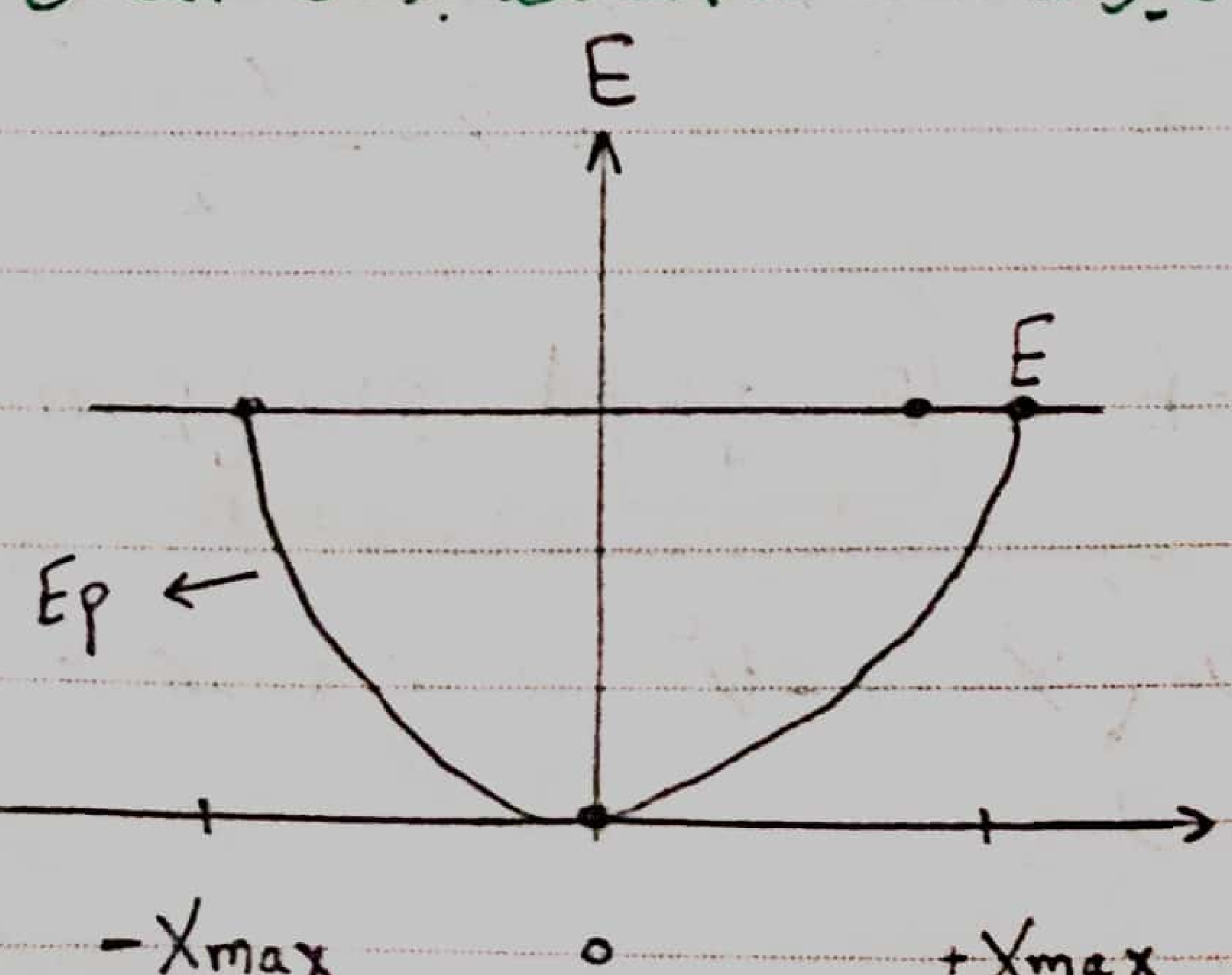
- عظمى ← في المطالين الأعظميين $x = \mp X_{max}$
- معدومة ← في وضع التوازن $x = 0$

• سؤال دورة 2016

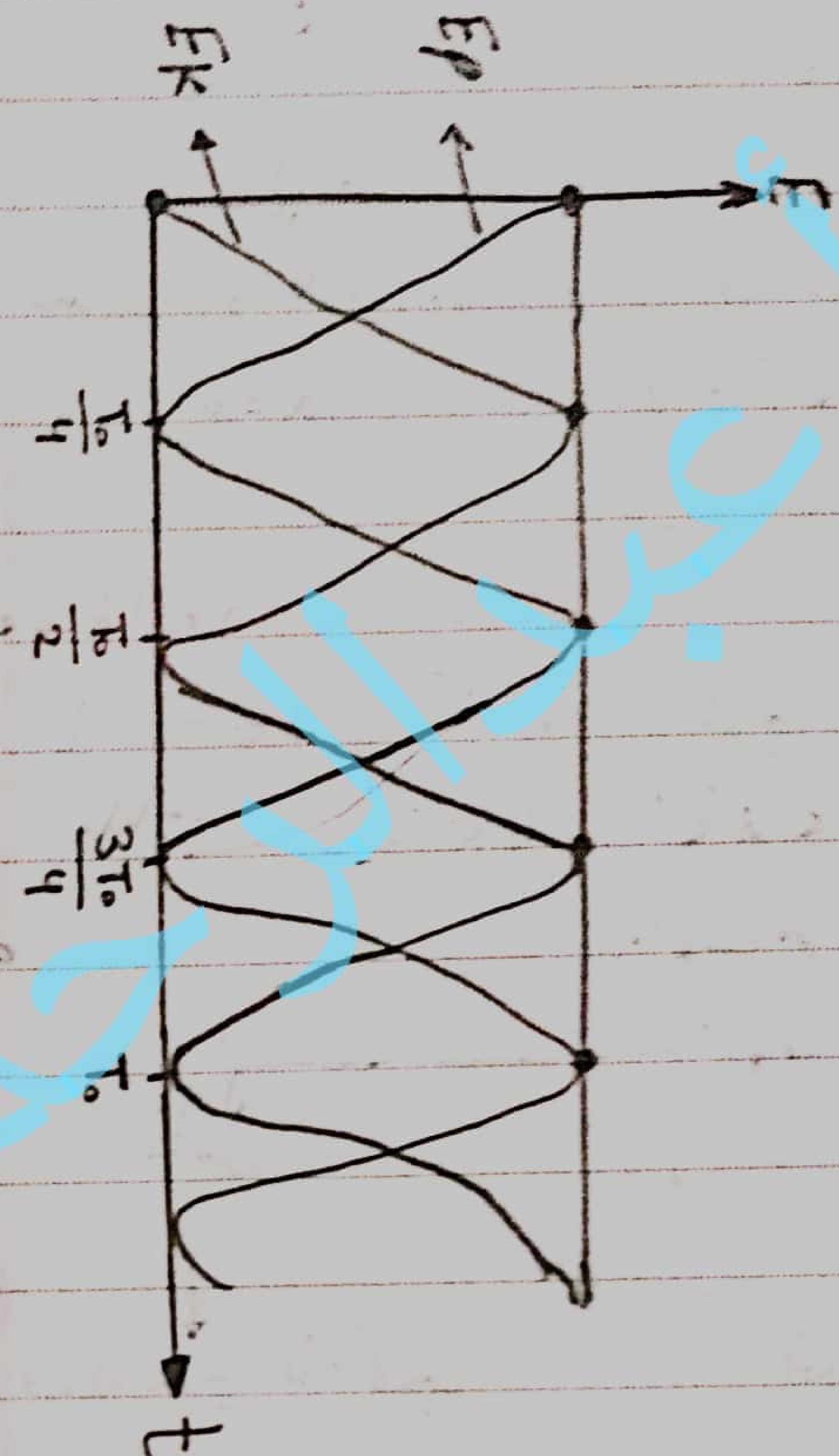
ما شكل الطاقة عند الوضعين الطرفيين ؟

طاقة كامنة E_p

• ارسم تغيرات الطاقة الكامنة بدلالة المطال



• ارسم تغيرات الطاقة خلال دور...



مثال: تتساوى الطاقة الكامنة و الطاقة الحركية في النواس المرن عندما:

a. $\bar{x} = \mp X_{max}$. b. $\boxed{\bar{x} = \mp \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}}$. c. $\bar{x}$

مثال: تكون الطاقة الحركية للجسم عند المطال $\bar{x} = -\frac{X_{max}}{2}$:

a. $E_k = \frac{1}{4}E$. b. $\boxed{E_k = \frac{3}{4}E}$. c. $E_k = E$

• برهن أن $v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

$$E_k = E - E_p$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k X_{max}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$m v^2 \qquad k X_{max}^2 \qquad k x^2$$

$$\times(2) \Rightarrow m v^2 = k\left[X_{max}^2 - x^2\right]$$

$$\div m \Rightarrow v^2 = \frac{k}{m}\left[X_{max}^2 - x^2\right]$$

بالجذر $\Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

$$v = \omega_0 \sqrt{X_{max}^2 - x^2}$$

فسر: إن محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في كل لحظة هي قوة إرجاع؟

لأنها تعيد الجسم إلى مركز الاهتزاز دوماً وهي تتناسب طرداً مع المطال x وتعاكسه بالإشارة

• انطلاقاً من العلاقة

$$(\bar{x})''_t = -\frac{k}{m} \cdot \bar{x} \quad \text{(1)}$$

برهن أن حركة النواس المرن جيبية انسحابية توافقية بسيطة

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$x = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

نشتق التابع مرتين بالنسبة للزمن:

$$(x)'_t = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(x)''_t = -\omega_0^2 \underbrace{X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)}_{x}$$

$$\Rightarrow (x)''_t = -\omega_0^2 \cdot x \quad \text{(2)}$$

بالمقارنة بين ① و ② نجد :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

لأن k و m موجبان

حركة النواس المرن جيبية انسحابية توافقية بسيطة

ثم استنتج الدور الخاص للنواس المرن

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

الدور الخاص للنواس المرن : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

طرداً مع $\sqrt{m}$ ، عكساً مع $\sqrt{k}$ ، ليس له علاقة بـ X_{max}

- $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$
- $T_0 = \frac{\text{زمن الهزات}}{\text{عدد الهزات}}$

الشكل العام لتابع المطال

$$X = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- X : مطال (m)
- X_{max} : السعة (المطال الأعظمي) (m)
- ω_0 : النبض الخاص $(rad.s^{-1})$
- φ : الطور الابتدائي في لحظة بدء (rad)
- $(\omega_0 t + \varphi)$: طور الحركة في لحظة (rad)

مثال: نواس مرن تابعه

$$x = 0.1\cos(\pi t + \pi)$$

1. حدد ثوابت الحركة.

بالمقارنة مع الشكل العام لتابع المطال:

$$X = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$X_{max} = 0.1\ m$

$\omega_0 = \pi\ rad.s^{-1}$

$\varphi = \pi\ rad$

2. دور الحركة.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\ s$$

3. حدد موضع الجسم لحظة البدء ($x = ?$ ، $t = 0$)

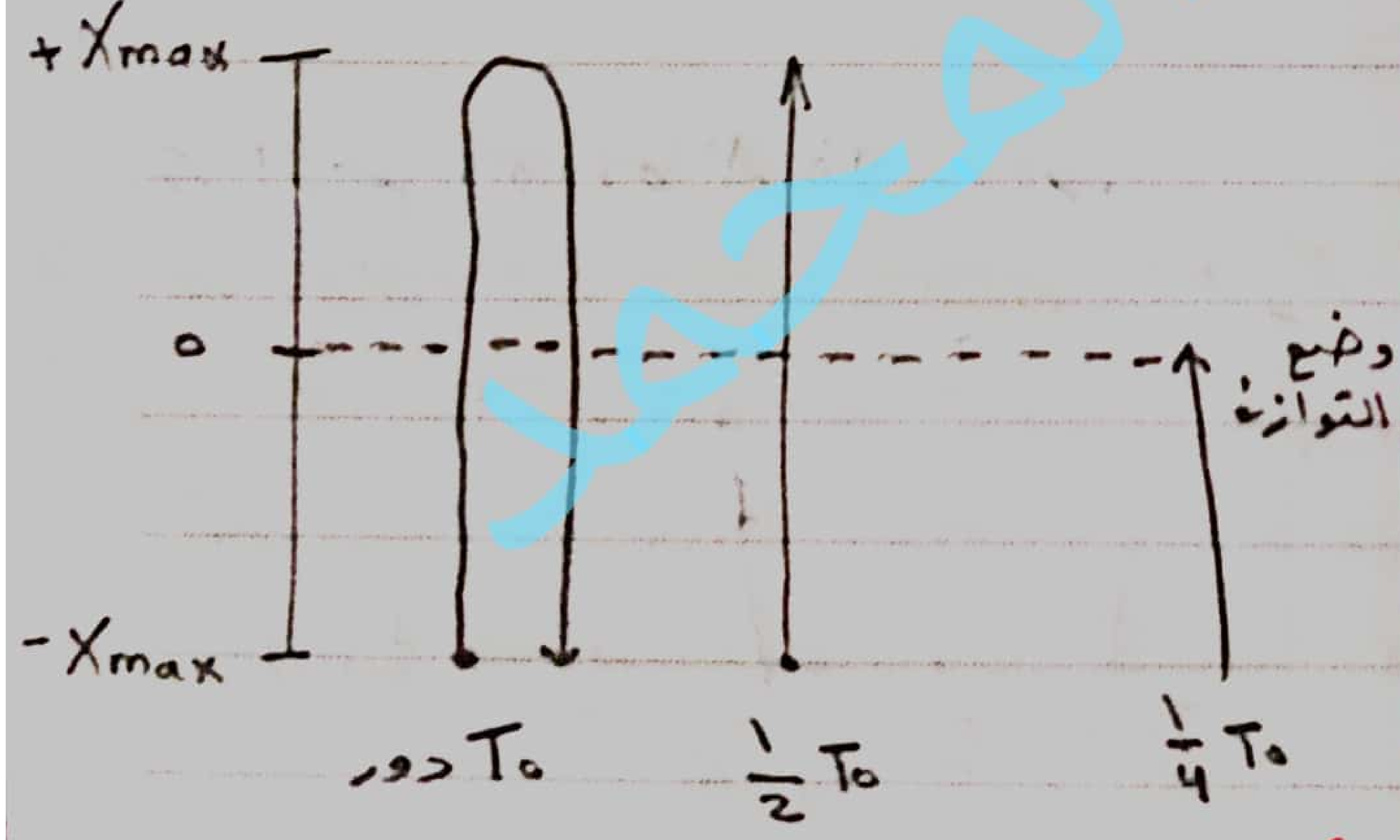
$t = 0 \Rightarrow x = 0.1\cos(\pi(0) + \pi)$

$x = 0.1\cos(\pi)$

$x = 0.1(-1)$

$x = -0.1\ m$

الدور : هو زمن هزة واحدة



مثال 2020: نواس مرن يبدأ الحركة من المطال الأعظمي الموجب فيستغرق زمناً قدره 1 s حتى يصل إلى المطال الأعظمي السالب فإن ....

1 . $\frac{1}{2}$. $\boxed{2}$. 4

$$1\,s = \frac{1}{2}T_0$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\,s$$

مثال :

نواس مرن يبدأ حركته من المطال الأعظمي الموجب فيستغرق زمناً مقداره 2s حتى يصل إلى المطال الأعظمي السالب فإن دوره :

1 . 2 . $\boxed{4}$. 5

$\frac{1}{2}T_0 = 2\,s$

$\Rightarrow T_0 = 4\,s$

توابع النواس المرن :

تابع المطال

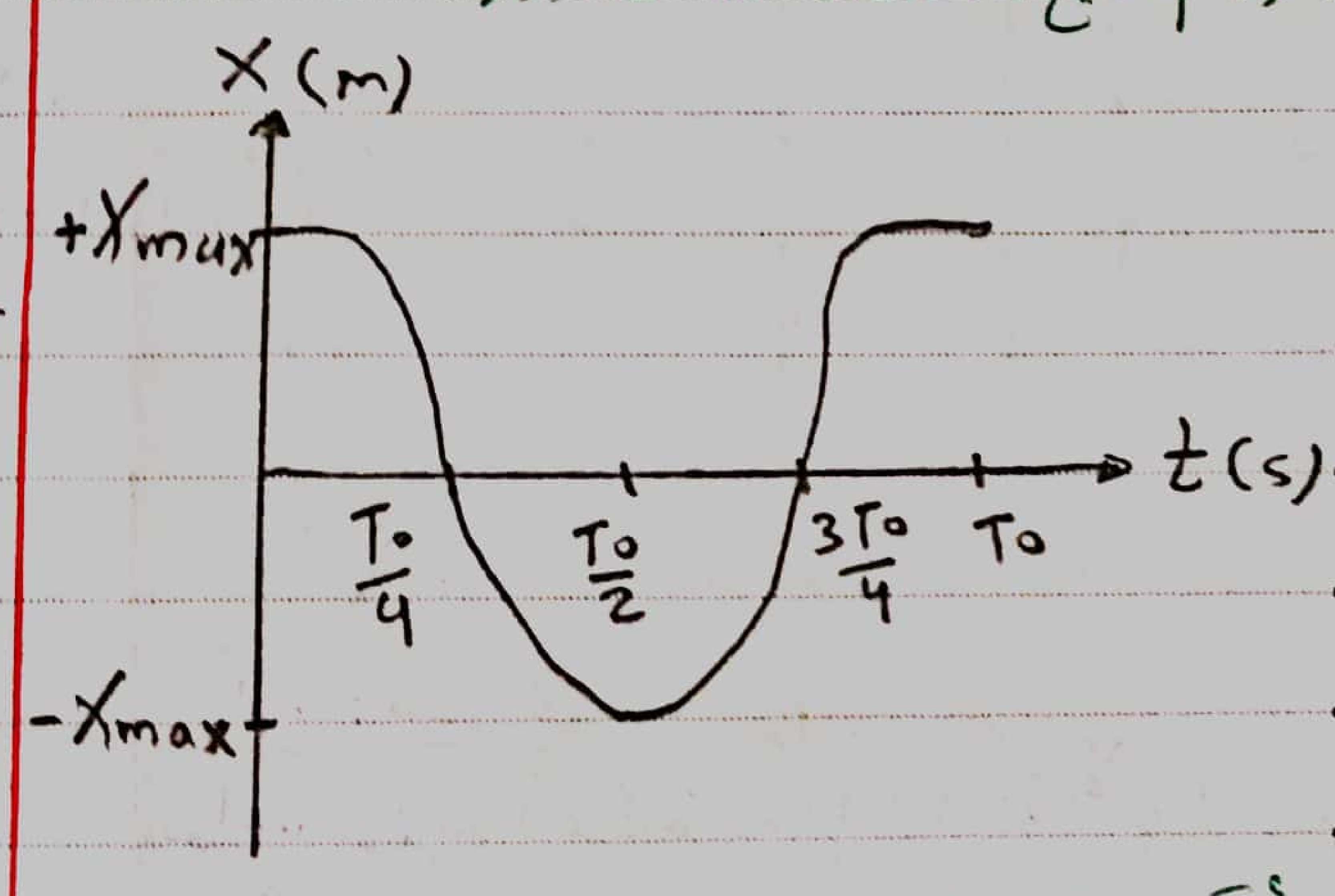
1. انطلاقاً من العلاقة

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

حدد متى يكون :

- أعظمي : في المطالين الأعظميين $x = \pm X_{max}$
- معدوم : في وضع التوازن $x = 0$

2. ارسم تابع المطال خلال دور.



3. أكمل الجدول

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$

نعوّض في التابع : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$x = X_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$t = \frac{T_0}{4} \Rightarrow x = X_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\times\frac{T_0}{4}\right)$$

2

$$x = X_{max}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

حدد قيمة المطال في اللحظة ... $t = \frac{3T_0}{2}$

الحل : نعوّض في التابع :

$$x = X_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$x = X_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\times\frac{3T_0}{2}\right)$$

$$x = X_{max}\cos(3\pi)$$

$$x = X_{max}(-1) = -X_{max}$$

تابع السرعة

انطلاقاً من العلاقة

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t)$$

استنتج تابع السرعة

تابع السرعة: المشتق الأول لتابع المطال بالنسبة للزمن $v = (x)'_t$

$$v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t)$$

• السرعة

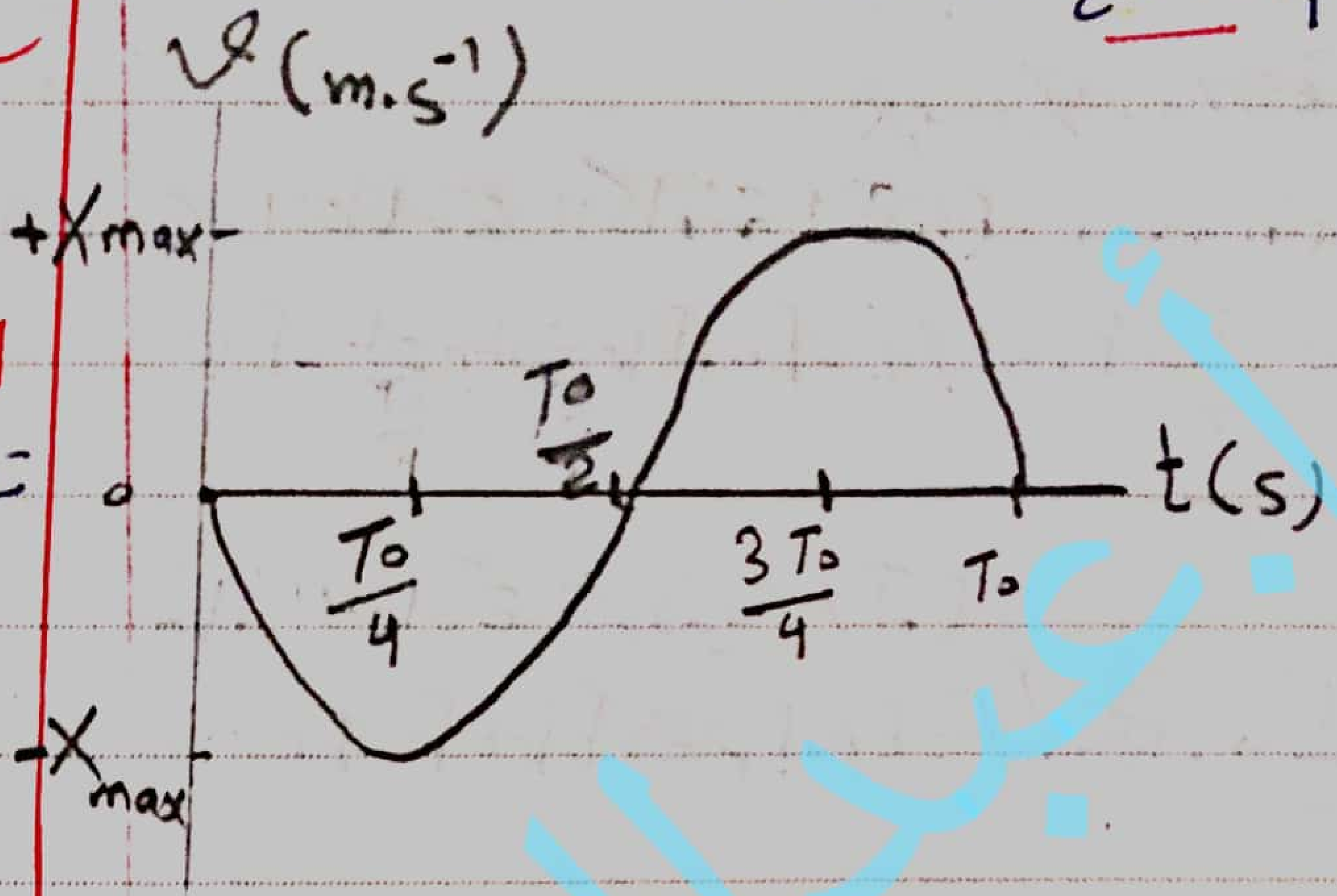
عظمى : في وضع التوازن $x = 0$

معدومة : في المطالين الأعظميين $x = \mp X_{max}$

السرعة عظمى طويلة $v_{max} = |\pm\omega_0 X_{max}|$

تابع الحركة

• ارسم التابع خلال دور



• أكمل الجدول :

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
v	0	$-w_0 X_{max}$	0	$+w_0 X_{max}$	0

$$w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

نعوض في تابع السرعة :

$$v = -w_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$t = \frac{T_0}{2} \Rightarrow v = -w_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{T_0}{2}\right)$$

$$v = -w_0 X_{max} \sin(\pi) = 0$$

$$t = \frac{T_0}{4} \Rightarrow v = -w_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot \frac{T_0}{4}\right)$$

$$v = -w_0 X_{max} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$v = -w_0 X_{max}$$

• حدد قيمة السرعة وجهة الحركة في اللحظة $t = \frac{5T_0}{4}$

$$v = -w_0 X_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{5T_0}{4}\right)$$

$$v = -w_0 X_{max} \underbrace{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}_{+1}$$

$$v = -w_0 X_{max}$$

مع جهة الحركة في الاتجاه السالب

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

تابع التسارع

انطلاقاً من العلاقة :

$$x = X_{max} \cos(w_0 t)$$

1. استنتج تابع التسارع.

تابع التسارع هو المشتق الثاني لتابع المطال بالنسبة للزمن

$$a = (x)''_t$$

$$(x)'_t = -w_0 X_{max} \sin(w_0 t)$$

$$(x)''_t = -w_0^2 X_{max} \cos(w_0 t)$$

$$\Downarrow$$

$$a = -w_0^2 X_{max} \cos(w_0 t)$$

التابع الزمني للتسارع

x

تابع التسارع $a = -w_0^2 \cdot x$

التسارع

أعظمي "طويلة"	معدوم
عندما $x = \mp X_{max}$	عندما $x = 0$
في المطالين الأعظميين	في وضع التوازن $a = 0$

• التسارع أعظمي طويلة

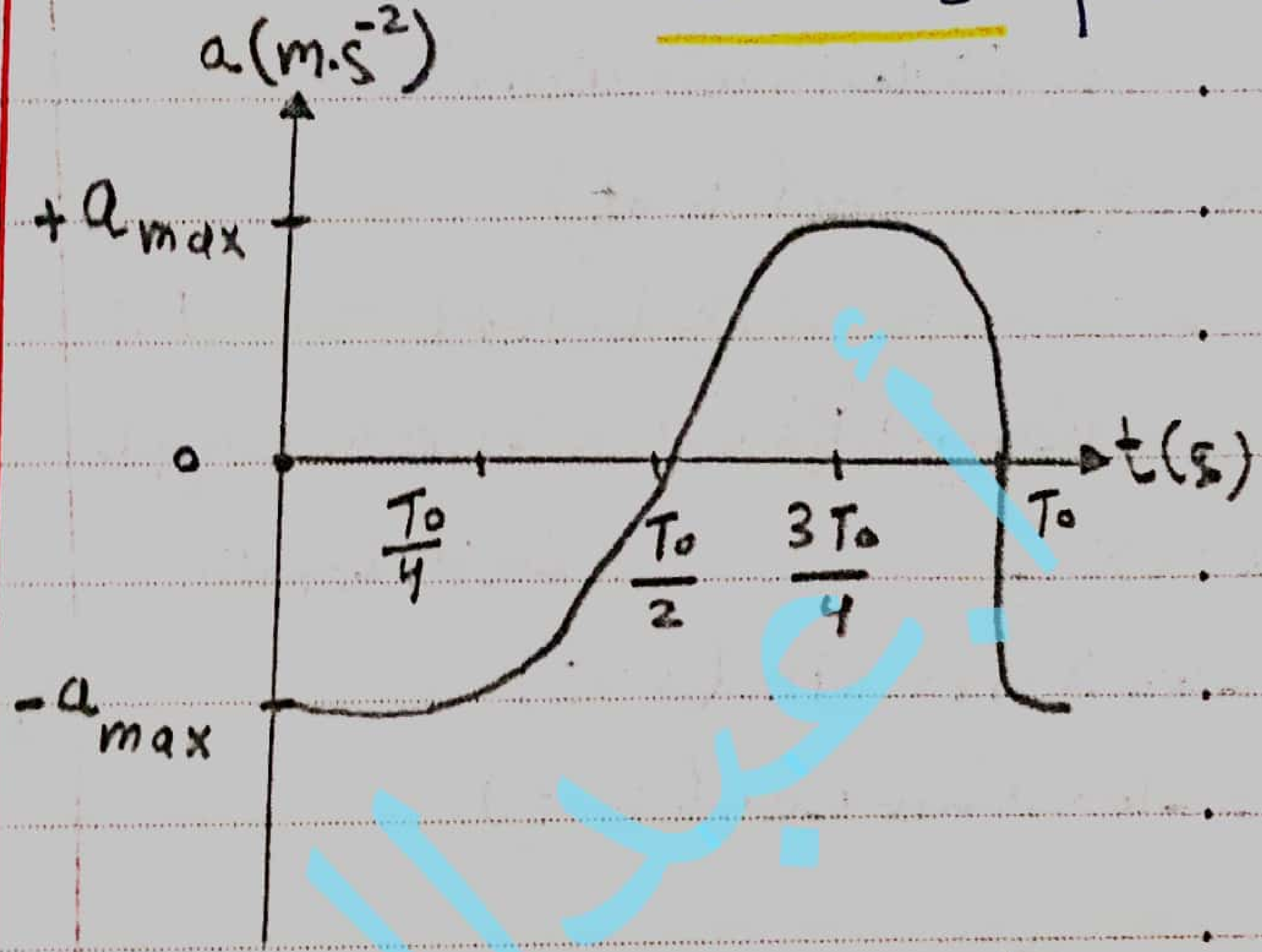
$$a_{max} = \left|\mp w_0^2 \cdot X_{max}\right|$$

• هل التسارع ثابت أم متغير ؟

$$a = -w_0^2 \cdot x$$

التسارع متغير يتغير بتغير المطال .

• ارسم تابع التسارع خلال دور واحد



• أكمل الجدول.

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
	$-w_0^2 X_{max}$	0	$+w_0^2 X_{max}$	0	$-w_0^2 X_{max}$

قوانين النواس المرن.

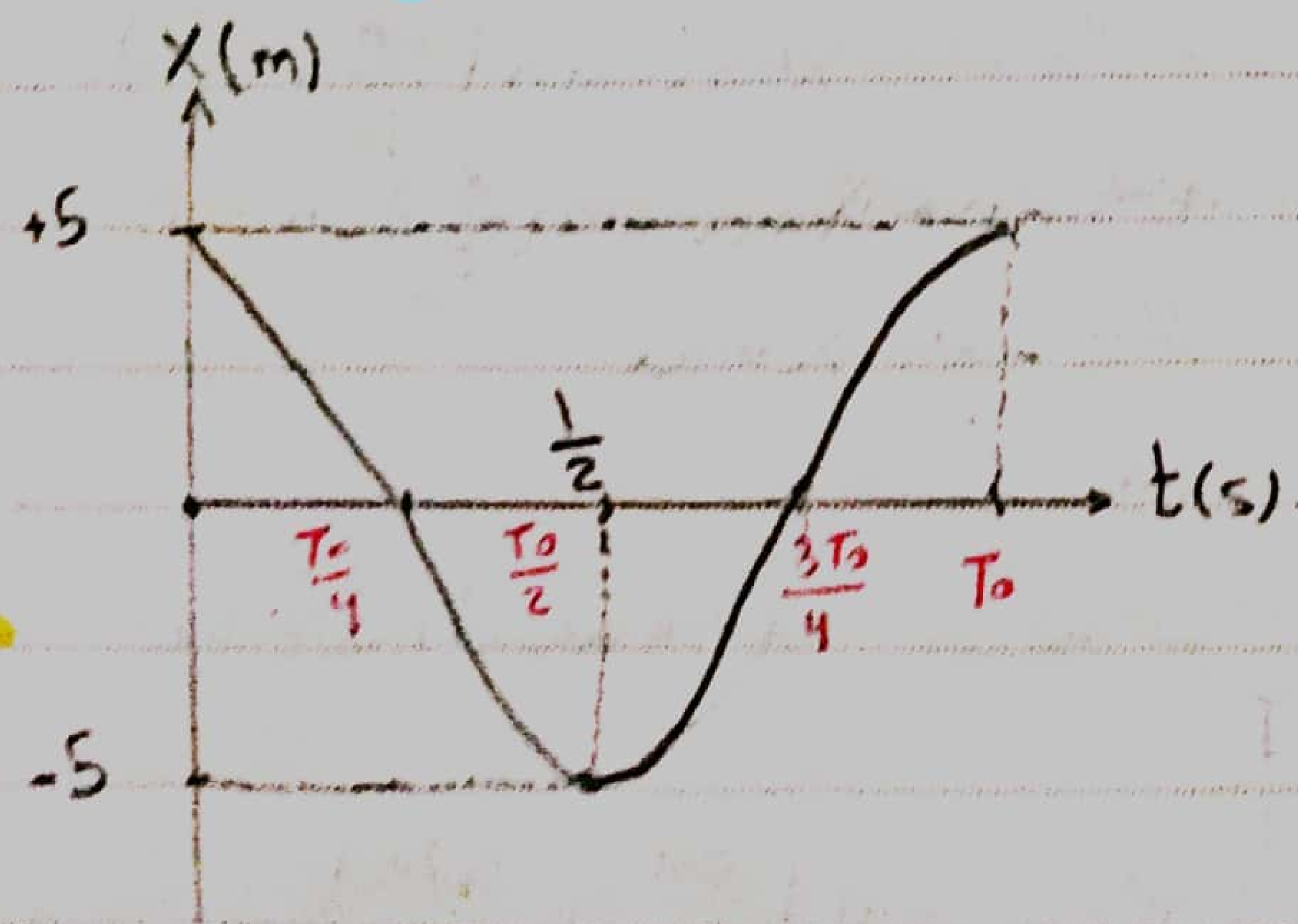
1. قوة الإرجاع (N) $F = -K.x$
2. شدة الإرجاع (N) $F = |-K.x|$
3. النبض الخاص $(rad.s^{-1})$ $w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ / $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
4. الدور الخاص (s) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$
5. تابع المطال (m) $x = X_{max}\cos(w_0 t + \varphi)$
6. تابع السرعة $(m.s^{-1})$ $v = -w_0 X_{max}\sin(w_0 t + \varphi)$
7. تابع التسارع $(m.s^{-2})$ $a = -w_0^2 . x$
8. السرعة العظمى "طويلة" $(m.s^{-1})$ $v_{max} = w_0 . X_{max}$
9. الطاقة الكامنة (J) $E_p = \frac{1}{2}K.x^2$ / $E = E_p + E_k \Rightarrow E_p = E - E_k$
10. الطاقة الحركية (J) $E_k = \frac{1}{2}m.v^2$ / $E = E_p + E_k \Rightarrow E_k = E - E_p$
11. الطاقة الكلية (الميكانيكية) (J) $E_{tot} = E_p + E_k$ / $E_{tot} = \frac{1}{2}K X_{max}^2$

قراءة الخطوط البيانية في النواس المرن

لقراءة الخط البياني لتابع في النواس المرن نحتاج

- اسم المحور
- السعة العظمى
- الدور
- لحظة البدء

أمثلة عن قراءة الخط البياني



الحل بالتفصيل :

• اسم المحور : x

• السعة العظمى : $X_{max} = +5\ m$

• الدور الخاص :

$$\frac{T_0}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2T_0 = 2 \Rightarrow T_0 = 1\ s$$

• النبض الخاص : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$

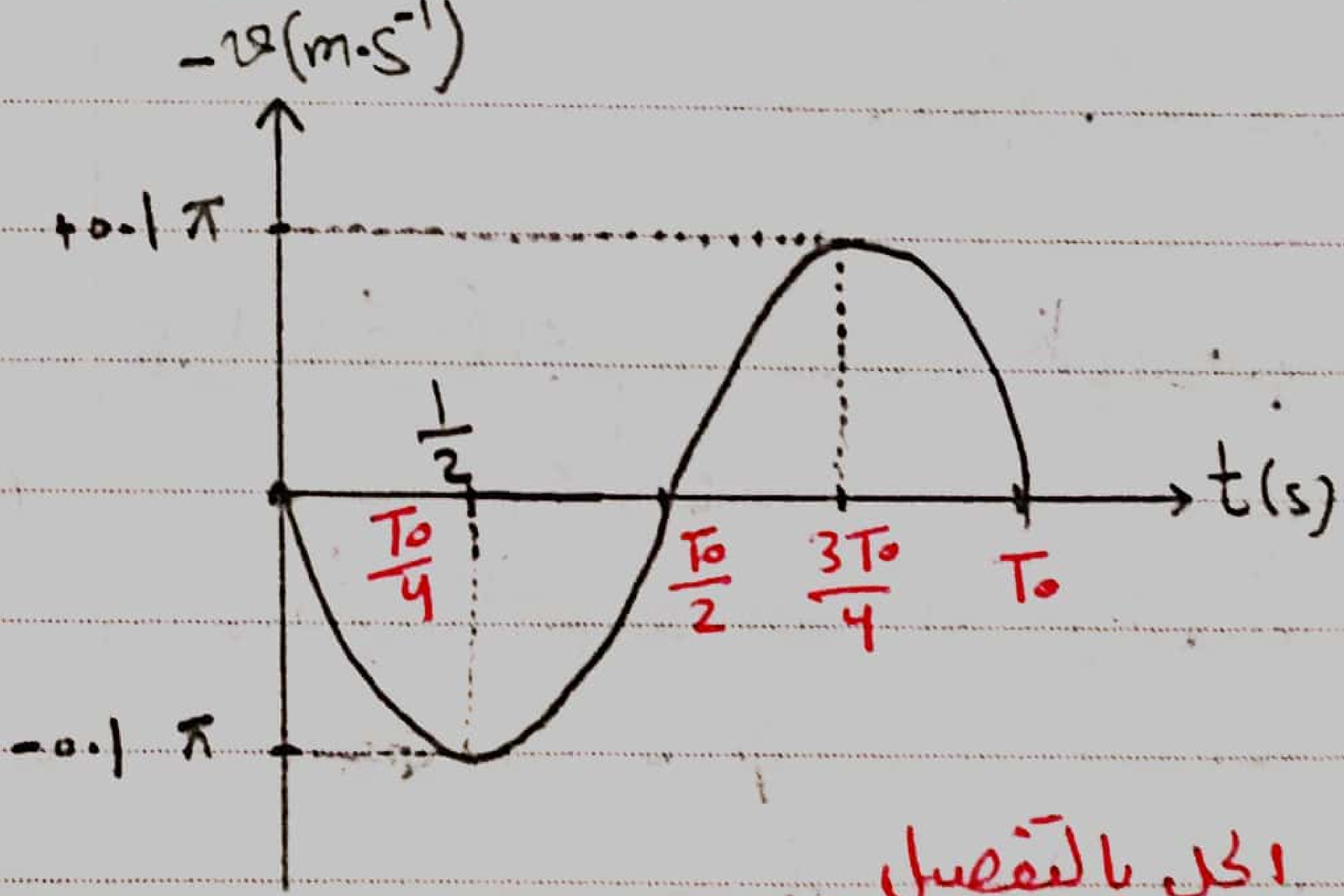
• الـ ϕ تابع المطال (x)

الرحم من فوق : $\phi = 0$

الرحم من تحت : $\phi = \pi$

في هذه الحالة الرحم من فوق $\Leftarrow \phi = 0$

$$X = 5\cos(2\pi t + 0)\quad m$$



الحل بالتفصيل

يجب أن نعلم أن تابع السرعة مرتبط بـ $-\sin$

• اسم المحور : $-v$

• السعة العظمى : -0.1π

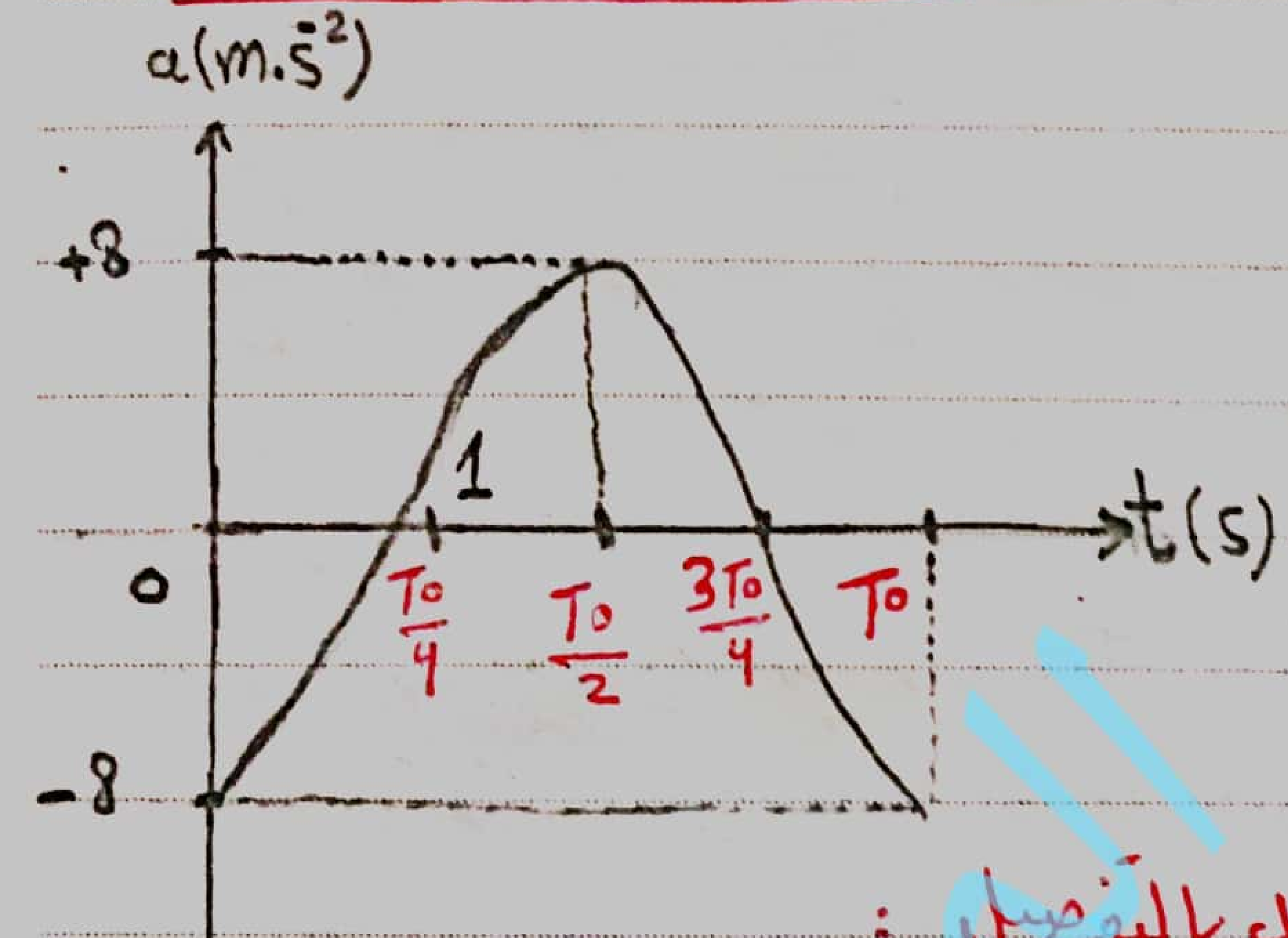
• الدور الخاص : $\frac{T_0}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_0 = 2\ s$

• النبض الخاص : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad.s^{-1}$

• الـ ϕ تابع السرعة $(-v)$

دائماً صفر

$$v = -0.1\pi\sin(\pi t)$$



الحل بالتفصيل :

• اسم المحور : a

• السعة العظمى : -8

• الدور الخاص : $\frac{T_0}{4} = 1 \Rightarrow T_0 = 4\ s$

• النبض الخاص : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ rad.s^{-1}$

• الـ ϕ تابع التسارع (a)

الرحم من فوق : $\phi = \pi$

الرحم من تحت : $\phi = 0$

• في هذه الحالة الرحم من تحت

$\Leftarrow \phi = 0$

$$a = -8\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

• مثال هام :

يتألف نواس مرن من جسم صلب كتلته m معلق بنابض مرن مهمل الكتلة ثابت صلابته k، النبض الخاص لحركته ω_0 نستبدل بالجسم جسماً آخر كتلته $m' = 2m$ وبالنابض نابضاً آخر صلابته $k' = \frac{1}{2}k$

فيصبح النبض الخاص الجديد ω_0' :

النبض القديم $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

النبض الجديد $\omega_0' = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}k}{2 \times 2m}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}k}{m}}$

$\omega_0' = \frac{1}{2}\omega_0 \Rightarrow \omega_0' = \frac{\omega_0}{2}$

• مثال :

نواس مرن دوره الخاص $T_0 = 2\,s$، إذا ضاعفنا سعة الاهتزاز يصبح دوره الخاص الجديد T_0'

لا علاقة للدور بسعة الاهتزاز X_{max}

$\Rightarrow T_0' = 2\,s$

ملاحظات هامة للمسائل

1. إذا رسم النواس المرن في أثناء حركته قطعة مستقيمة طولها d فإن $X_{max} = \frac{d}{2}$

2. الزمن من المطال الأعظمي إلى المطال المناظر له يساوي $\frac{T_0}{2}$

3. المسافة من المطال الأعظمي إلى المطال المناظر له $2X_{max}$

4. إذا عوضنا $t=0$ لحساب لحظة المرور الأول للجسم في مركز الاهتزاز ونتج زمن سالب فإننا نرفضه ونعين

لحظة المرور الأول بتعويض $K=1$

5. عندما يُترك الجسم من أحد المطالين الأعظميين $\mp X_{max}$ ويُطلب تعيين لحظة المرور فإننا نطابق أزمنة المرور مباشرة

$t_1 = \frac{T_0}{4}$

$t_2 = \frac{3T_0}{4}$

$t_3 = \frac{5T_0}{4}$

6. عندما لا يُترك الجسم من المطالين الأعظميين $\mp X_{max}$

نعدم x ثم نعدم $\cos$

ونعوّض قيم K

المرور الأول : $K=0$

" الثاني : $K=1$

" الثالث : $K=2$

7. قانون حساب شدة محصلة القوى العظمى

دورة 2021

$F_{max} = m \cdot a_{max}$

$a_{max} = \omega_0^2 \cdot X_{max}$

8. إذا تُرك الجسم من المطال الأعظمي السالب

$\Leftarrow \varphi = \pi$

إذا تُرك الجسم من المطال الأعظمي الموجب

$\Leftarrow \varphi = 0$

انتهى بتاريخ 2024/3/1

3:17 PM

عبد الرحمن المحمد

Dr. Rawan Shareef

- العلاقة بين الحركة الدائرية المنتظمة و الحركة التوافقية البسيطة.

عندما تتحرك نقطة p بحركة دائرية منتظمة فإن مسقطها يتحرك بحركة توافقية بسيطة

- استنتج تابع المطال انطلاقاً من الحركة الدائرية المنتظمة.

نصف قطر الدائرة $r = X_{max}$

$$\cos\theta = \frac{x}{X_{max}}$$

$$x = X_{max}\cos(\theta)$$

لكن: $\theta = \omega_0 t + \varphi$

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

تابع المطال $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

النَّواس الفَتل

التعريف:

جسم معلق من مركزه o إلى سلك فتل شاقولي

ادرس تحريكياً النواس الفتل ثم برهن أنّ حركة النواس جيبية دورانية. 2020

القوى الخارجية المؤثرة:

$\vec{w}$ ثقل الجسم

$\vec{T}$ توتر السلك

عندما نُدير الساق بزاوية θ تنشأ في السلك مزدوجة فتل $\vec{\gamma}$

مجموع العزوم — عزم العطالة — التسارع الزاوي

$$\sum \Gamma = I_\Delta \cdot \alpha$$

$$\Gamma_{\vec{w}} + \Gamma_{\vec{T}} + \Gamma_{\vec{\gamma}} = I_\Delta \cdot \alpha$$

$\Gamma_{\vec{w}} = 0$
$\Gamma_{\vec{T}} = 0$
لأن حامل كل منهما منطبقان على محور الدوران

$$\Gamma_{\vec{\gamma}} = -k\cdot\theta$$

$$0 + 0 - k\cdot\theta = I_\Delta \cdot \alpha$$

$$\alpha = -\frac{k}{I_\Delta}\cdot\theta$$

$$\Downarrow$$

$$(\theta)''_t = -\frac{k}{I_\Delta}\cdot\theta \quad \text{---} (1)$$

نشتق مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\theta)'_t = -\omega_0\,\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \cdot \underbrace{\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{\theta}$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \cdot \theta \quad \text{---} (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2):

$$\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} > 0$$

لأن k و I_Δ موجبان

حركة نواس الفتل جيبية دورانية.

ثم استنتج الدور الخاص.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

يتناسب طرداً مع $\sqrt{I_\Delta}$ وعكساً مع $\sqrt{k}$

ولا يتعلق بسعة الاهتزاز X_{max}

• انطلاقاً من مصونية الطاقة الميكانيكية برهن أنّ حركة النواس الفتل حركة جيبية دورانية.

$$E = E_p + E_k$$

$$E = \frac{1}{2}k.\theta^2 + \frac{1}{2}I_\Delta.\omega^2$$

بالاشتقاق:

$$0 = \frac{1}{2}k\,2\theta.(\theta)'_t + \frac{1}{2}I_\Delta 2\omega.(\omega)'_t$$

$$0 = \frac{1}{2}k\,2\theta.(\omega) + \frac{1}{2}I_\Delta 2\omega(\alpha)$$

$$0 = k\theta\omega + I_\Delta\omega\alpha$$

$$0 = k\theta + I_\Delta.\alpha \quad \Leftarrow \div\omega$$

$$-k\theta = I_\Delta.\alpha$$

$$\alpha = -\frac{k}{I_\Delta}.\theta$$

$$\Downarrow$$

$$(\theta)''_t = \frac{-k}{I_\Delta}.\theta \quad ...(1)$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً.

الحل:

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

نشتق مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\theta)'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2.\underbrace{\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{\theta}$$

$$\Rightarrow (\theta)''_t = -\omega_0^2.\theta \quad ...(2)$$

بالمطابقة بين (1) و(2):

$$\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} > 0$$

لأن k و I_Δ موجبان

حركة نواس الفتل جيبية دورانية.

قوانين نواس الفتل

النواس المرن: x v a F m

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

النواس الفتل: θ ω α Γ I_Δ

1. عزم الإرجاع: $\Gamma = -k.\theta$
2. النبض الخاص: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ / $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}$
3. الدور الخاص: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$
4. تابع المطال الزاوي: $\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$
5. تابع السرعة الزاوية: $\omega = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$
6. السرعة العظمى طويلة: $\omega_{max} = \omega_0\theta_{max}$
7. تابع التسارع الزاوي: $\alpha = -\omega_0^2.\theta$
8. الطاقة الكامنة المرونية: $E_p = \frac{1}{2}k.\theta^2$
9. الطاقة الحركية: $E_k = \frac{1}{2}I_\Delta.\omega^2$
10. الطاقة الكلية: $E = E_p + E_k$ / $E = \frac{1}{2}k.\theta_{max}^2$

انتهى بتاريخ 2024/3/2

12:29 AM

عبد الرحمن الحمد

Dr.Rawan Shareef

النواس الثقلي

النواس الثقلي البسيط

1. عرِّف النواس البسيط نظرياً وعملياً ثم انطلاقاً من علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي المركب استنتج الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط.

- نظرياً: نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها على بعد ثابت l من محور أفقي ثابت.
- عملياً: كرة صغيرة كتلتها m كثافتها النسبية كبيرة معلقة بخيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله l كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

$$d = l$$

$$I_\Delta = m \cdot r^2 = m \cdot l^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{m} \cdot l^{\cancel{2}}}{\cancel{m} \cdot g \cdot \cancel{l}}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط

2. انطلاقاً من العلاقة:

$$(\theta)''_t = \frac{-g}{l} \cdot \theta$$

برهن أن حركة النواس الثقلي البسيط جيبية دورانية.

$$(\theta)''_t = \frac{-g}{l} \cdot \theta \;\ldots\; (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

نشتق مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\theta)'_t = -\omega_0\,\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2 \cdot \underbrace{\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)}_{\theta}$$

$$\Rightarrow (\theta)''_t = -\omega_0^2 \cdot \theta \;\ldots\; (2)$$

بالمطابقة بين (1) و (2):

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \xrightarrow{\text{بالجذر}} \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$$

طبيعة حركة النواس الثقلي البسيط جيبية دورانية بشرط أن g و l موجبان.

- ثم استنتج الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

يتناسب الدور الخاص طرداً مع الجذر التربيعي لـ l وعكساً مع الجذر التربيعي لـ g ...

3. استنتج علاقة سرعة كرة النواس الثقلي البسيط عندما يصنع الخيط مع الشاقول زاوية θ ($\theta_2 = 0$) علماً أنه تُترك دون سرعة ابتدائية ($E_{K_1} = 0$) بعد إزاحة بزاوية θ_{max}؟

القوى الخارجية المؤثرة: $\vec{w}$ ثقل الجسم، $\vec{T}$ توتر الخيط

- نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$

الثاني: $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec F_{(1\to 2)}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec T} + W_{\vec w}$$

0 لأنه تحرك دون سرعة ابتدائية

0 لأن T تعامد الانتقال في كل لحظة

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h$$

نضرب بـ (2):

$$v^2 = 2gh \xrightarrow{\text{نجذر}} v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl[\cos\theta_2 - \cos\theta_1]}$$

$$h = l[\cos\theta_2 - \cos\theta_1]$$

لكن: عند المرور بالشاقول:

$\theta_2 = 0$ ، $\theta_1 = \theta_{max}$

$$\theta_2 = 0 \Rightarrow \cos\theta_2 = 1$$

$$v = \sqrt{2gl[1 - \cos\theta_{max}]}$$

4- استنتاج علاقة توتر الخيط في النواس الثقلي البسيط عندما يصنع الخيط مع الشاقول بزاوية θ.

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي:

القوى الخارجية المؤثرة:
- $\vec w$ ثقل الجسم
- $\vec T$ توتر الخيط

$$\sum \vec F = m\vec a$$

$$\vec w + \vec T = m\vec a$$

بالإسقاط على الناظم:

$$T - w\cos\theta = m a_c$$

تسارع ناظمي $a_c = \frac{v^2}{l}$

$$T = w\cos\theta + m\frac{v^2}{l}$$

$$T = m g\cos\theta + \frac{m}{l}\left(2gl[\cos\theta - \cos\theta_{max}]\right)$$

$$T = mg\cos\theta + 2mg(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$T = 1mg\cos\theta + 2mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max}$$

$$T = 3mg\cos - 2mg\cos\theta_{max}$$

$$T = 1mg[3\cos\theta - 2\cos\theta_{max}]$$

عند المرور بالشاقول: $\theta = 0$

$$T = mg[3 - 2\cos\theta_{max}]$$

ملاحظات وقوانين النواس البسيط

1 نزيح بزاوية θ_{max} لستنتج السرعة الخطية v عند المرور بالشاقول.

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$

الثاني: $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec F_{(1\to 2)}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec T} + W_{\vec w}$$

0 لأنه تحرك دون سرعة ابتدائية

0 لأن T تعامد الانتقال في كل لحظة

نضرب بـ (2)

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h \Longrightarrow$$

$$h = l[1 - \cos\theta_{max}]$$

$$v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gl[1 - \cos\theta_{max}]}$$

قوة

2 استنتج بالرموز علاقة توتر الخيط $\vec T$ عند المرور بالشاقول

جملة المقارنة خارجية

الجملة المدروسة: كرة النواس

القوى الخارجية المؤثرة: $\vec{W}$ ثقل الجسم

$\vec{T}$ توتر الخيط

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي:

$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$

$\vec{T}+\vec{W} = m.\vec{a}$

بالإسقاط على الناظم:

$T - W = m.a_c$

$T = W + m.a_c$

$T = m.g + m.\frac{v^2}{r}$; $r = l$

$T = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right)$ ⇐ بالنيوتن

3 استنتج التسارع المماسي عندما θ:

$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$

$\vec{T}+\vec{W} = m.\vec{a}$

اسم مماسي / يعني ⇐ بالإسقاط على المماس:

$0 + W\sin\theta = m.a_t$

$m.g\sin\theta = m.a_t$

$m.s^{-2} \Leftarrow a_t = g.\sin\theta$

القوانين:

1 الدور الخاص: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (s)

2 قانون h:

$h = l(1-\cos\theta_{max})$

يستخدم لحساب θ عند المرور بالشاقول

وهي نفسها θ_{max}

3 التسارع الزاوي:

$\alpha = \frac{a_t}{l}$ $rad.s^{-2}$

4 أحسب طول النواس الثقلي البسيط الموافق:

T_0 مركب $= 2$; T_0 بسيط $= T_0$ مركب

$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2$

$\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{l}{\cancel{10}}} = \cancel{2} \Rightarrow \sqrt{l} = 1 \Rightarrow l = 1$

النواس الثقلي المركب

1 انطلاقاً من العلاقة $(\theta)''_t = \frac{-m.g.d}{I_\Delta}.\theta$ بيّن أن حركة النواس الثقلي المركب حركة جيبية دورانية.

$(\theta)''_t = \frac{-mgd}{I_\Delta}.\theta$ ---(1)

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل: $\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$

نشتق مرتين بالنسبة للزمن:

$(\theta)'_t = -\omega_0\,\theta_{max}\sin(\omega_0 t+\varphi)$

$(\theta)''_t = -\omega_0^2\,\underbrace{\theta_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)}_{\theta}$

$\Rightarrow (\theta)''_t = -\omega_0^2.\theta$ ---(2)

بالمطابقة بين (1) و(2):

$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta} \xrightarrow{\text{نجذر}} \omega_0 = \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}} > 0$

طبيعة حركة النواس الثقلي جيبية دورانية.

2 استنتج الدور الخاص.

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}}$

$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}$

ملاحظات وقوانين النواس المركب

- السعات الصغيرة :

$\theta \leqslant 14°$ أو $\theta \leqslant 0.24 rad$

- السعات الكبيرة :

$\theta > 14°$ أو $\theta > 0.24 rad$

زوايا شهيرة سعات كبيرة: $\theta = 30, 45, 60 - 90$.

- الدور في حال السعات الصغيرة :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

- الدور في حال السعات الكبيرة :

$$T'_0 = T_0 \left[1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right]$$

سعة كبيرة

سعة صغيرة

- التابع الزمني للمطال الزاوي :

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- تابع السرعة الزاوية :

$$\overline{\omega} = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

- السرعة العظمى طويلة :

$$\omega_{max} = \omega_0 . \theta_{max}$$

- ساق مهملة الكتلة :

$I_{\Delta/c} = 0$ ساق $\quad m_{ساق} = 0$

- قرص تهمل الكتلة :

$I_{\Delta/c} = 0$ قرص $\quad m_{قرص} = 0$

- حساب d

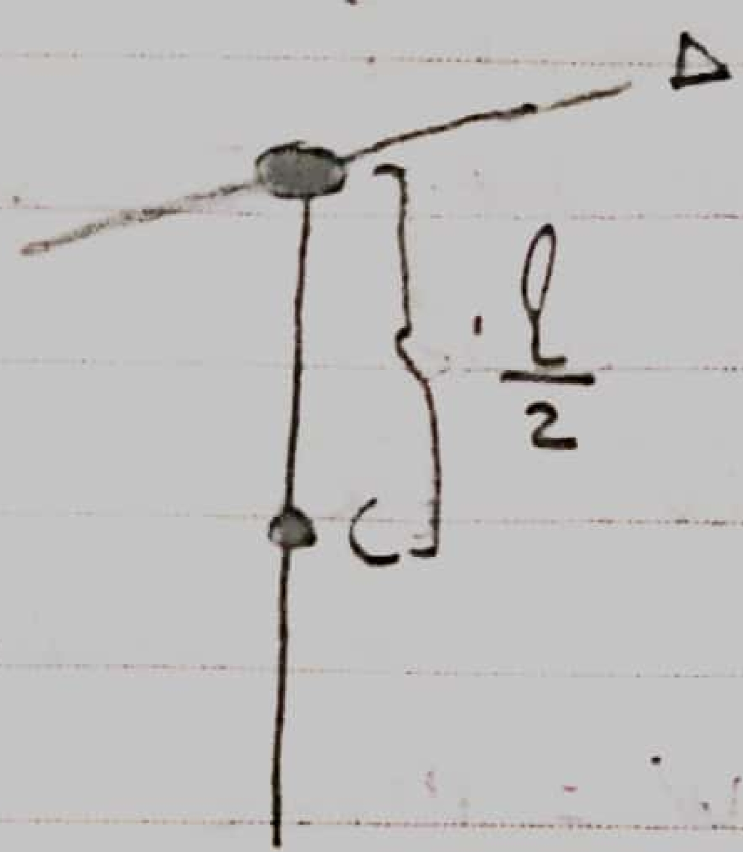
$d = \overline{OC}$

بُعد

مركز عطالة الجملة

النقطة التي تمر منها محور الدوران

1 من الرسم مباشرة :



$$d = \frac{l}{2}$$

$$d = r$$

2 بوجود كتل نقطية :

قانون : $d = \frac{\sum m_i . r_i}{\sum m_i}$

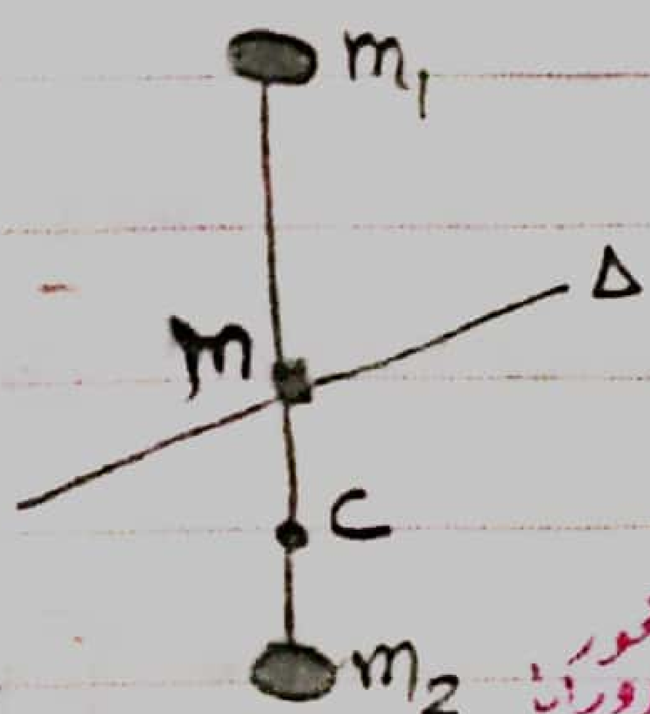
بُعد m عن O

مجموع m الكتلة المكونة للنواس

عدد الكتل النقطية

- $(+)$ إذا كانت الكتلة تحت محور الدوران

- $(-)$ إذا كانت الكتلة فوق محور الدوران



فوق محور الدوران

$$d = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{m_{ساق} . r - m_1 . r_1 + m_2 . r_2}{m_{ساق} + m_1 + m_2}$$

تحت محور الدوران

حساب I_Δ

1. عندما محور Δ لا تمر من c

نطبق هايغنز

هايغنز $I_\Delta = I_{\Delta/c} + m.d^2$ جسم

جسم

قرص $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} m r^2$

ساق $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} m l^2$

2. تمر من c بوجود كتل نقطية

$I_\Delta = I_{\Delta\,جسم} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$

جملة — جسم — نقطية — نقطية

I_Δ جسم

هايغنز

$I_\Delta =$ معطى ساق/قرص

مهملة $I_\Delta = 0$

نزيح (نحرف) النواس (الجملة) عن وضع توازنها الشاقولي θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائية.

1. استنتج السرعة الزاوية/الخطية لحظة المرور بالشاقول θ_{max}.

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين الوضعين:

الأول: $\theta_1 = \theta_{max}$

$\theta_2 = 0$

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec F (1\to 2)}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = W_{\vec w} + W_{\vec R}$$

E_{k1}: 0 تترك دون سرعة ابتدائية

$W_{\vec R}$: 0 لأن نقطة تأثير R لا تنتقل

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = m.g.h$$

$\theta_{max} =$ معطى ، $\omega = ؟$

$$\omega^2 = \frac{m.g.h}{\frac{1}{2} I_\Delta} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2m.g.d[1-\cos\theta]}{I_\Delta}}$$

I_Δ و d و m من طلب الدور

2. استنتج قيمة θ_{max}

$\omega =$ معطى ، $v =$ معطى ، $\theta_{max} = ؟$

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec F (1\to 2)}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = W_{\vec R} + W_{\vec w}$$

E_{k1}: 0 ترك دون سرعة ابتدائية

$W_{\vec R}$: 0 لأن نقطة تأثير R لا تنتقل

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = m.g.h$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = m.g.d[1-\cos\theta_{max}]$$

$$1-\cos\theta_{max} = \frac{\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2}{m.g.d}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2}{m.g.d}$$

1. نواس ثقلي مركب

• يطلب سرعة خطية

للكتلة النقطية $v = w \cdot r$

لمركز عطالة الساق $v = w \cdot d$

بعد الكتلة عن المحور

2. نواس ثقلي بسيط

طاقة حركية | سرعة خطية | سعة زاوية θ_{max}

نطبق نظرية الطاقة الحركية

3. الاسقاط على الناظم

$T \rightarrow T$

$W \rightarrow -m \cdot g \cos\theta$

$a \rightarrow a_c = \frac{v^2}{l}$

4. الاسقاط على المماس:

$T \rightarrow$ صفر 0

$W \rightarrow -m \cdot g \sin\theta$

$a \rightarrow a_t = \alpha \cdot l$

5.

سعات زاوية صغيرة ← حركة جيبية دورانية

سعات زاوية كبيرة ← حركة اهتزازية غير توافقية

6. الميقاتية

جبل (مكان مرتفع)

بحر (منخفض)

ارتفاع

انخفاض

(ميقاتية تؤخر)

$g' < g \Rightarrow T_0' > T_0$

قديم جديد قديم جديد

(ميقاتية تقدم)

$g' > g \Rightarrow T_0' < T_0$

7. النواس الثقلي

بسيط	مركب
• خيط / سلك	• ساق / قرص
• يطلب سرعة خطية v	• يطلب سرعة زاوية w
• القوى المؤثرة $\vec{W}$ و $\vec{T}$	• القوى المؤثرة $\vec{W}$ و $\vec{R}$

#مرتق_معجزة_التعليمي

Dr_Rawan Shareef

أ. عبدالرحمن محمد المحمد

انتهى بتاريخ

2024 / 5 / 22