أتمتة منهاج رياضيات البكالوريا السورية

الجزء الثاني: الوحدة الثانية

الجداء السلمي في الفراغ

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

مهند حريقة　عماد كزو　أمين الحايك

تنسيق و اخراج: أمين الحايك

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبو نبوت	هيثم ديوب
خالد الحداد	محمد السيد علي	حسام قاسم	زينب يوسف
يوسف منصور	فادي طنوس	نادر أبوراس	زكي طحاوي
بشار كنعان	محمد زين جعرور	صفوح الأفندي	عامر سيو
فادي المحمد	علي جمول	مصطفى الرزوق	مهند حريقة
محمد العيسى	صلاح سالم	عبد السلام حسن	آلدار كلابدون

1	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. نعرف $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + 5\vec{j}$ إن قيمة الجداء $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ تساوي :								
A	-14	**B**	-13	**C**	$\frac{17}{2}$	**D**	$-\frac{7}{2}$	**E**	$-\frac{11}{2}$
الحل	$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 2\left(\frac{1}{2}\right) + (-3)(5) = -14$								
إعداد : م آلدار كلابدون				الجواب : A				كتابة وتنسيق : م مهند حريقة	

2	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. إن معادلة المستقيم Δ المار بالنقطة $A(5,3)$ والعمود على المستقيم $d: 2x + 5y - 5 = 0$ تعطى بالشكل:				
A	$5x + 2y = 19$	**B**	$2x + 5y = 25$	**C**	$5x - 2y = 40$
D	$5x - 2y = 19$	**E**	$x - 5y + 5 = 0$		
الحل	بما أن المستقيمين متعامدان فيكون الناظمان متعامدين $\vec{n}_d(2,5) \Rightarrow \vec{n_\Delta}(5,-2)$ نعوض النقطة A في المعادلة $a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$ $5(x-5) - 2(y-3) = 0 \Rightarrow 5x - 2y - 19 = 0$				
إعداد : م مصطفى قجة		الجواب : D		كتابة وتنسيق : م مهند حريقة	

3	في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط A و B و C و D تُحقق $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = \alpha\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ فإن قيمة α التي تحقق العلاقة السابقة هي:								
A	2	**B**	1	**C**	$\frac{1}{2}$	**D**	$\frac{1}{3}$	**E**	-2
الحل	$l_1 = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$ $= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA})$ $= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA})$ $= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$ $= \overrightarrow{AC} \cdot [\,\overrightarrow{DB} - (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})\,]$ $= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BD}) = 2\,\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{DB}$								
إعداد : م براءة السماعيل				الجواب : A				كتابة وتنسيق : م عماد كزو	

4

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. لتكن النقطة $A(-2,4)$.

إن بعد النقطة A عن المستقيم $d: 2x + y - 5 = 0$ هو:

A	B	C	D	E
$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}$	5	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$

نحو الحل

$$dist(A,d) = \frac{|2(-2) + 1(4) - 5|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$$

إعداد : م شذى مقداد | الجواب : B | كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

5

إذا علمت أن نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأن $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -4$.

فإن قيمة المقدار $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})$ تساوي :

A	B	C	D	E
4	8	6	-2	-4

نحو الحل

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\,\vec{v} - 3\|\vec{v}\|^2$$
$$= 25 + 8 - 3(9) = 6$$

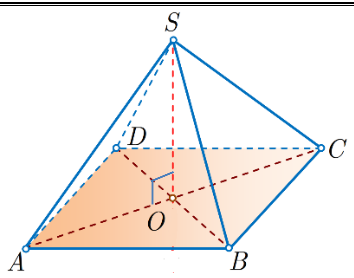
إعداد : م محسن الحسين | الجواب : C | كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

6

$S - ABCD$ هرم قاعدته مربع، ورأسه S وطول كل حرف

من حروفه وأضلاع قاعدته هو (a) .

إن قيمة الجداء السلمي $\overrightarrow{SA}\,.\,\overrightarrow{AC}$ تساوي :



A	B	C	D	E
$\frac{a^2}{2}$	$-\frac{a^2}{2}$	a^2	$-a^2$	0

نحو الحل

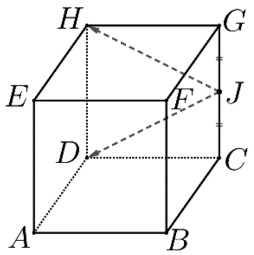
$$\overrightarrow{SA}\,.\,\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}\right)^2 = -\frac{1}{2}(a^2+a^2) = -a^2$$

إعداد : م صفاء قزق | الجواب : D | كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

7

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a والنقطة J هي منتصف $[CG]$

إن الجداء $\overrightarrow{JH}\,.\overrightarrow{JD}$ يساوي:



A		B		C		D		E	
A	a^2	B	$\frac{3}{4}a^2$	C	$-\frac{a^2}{4}$	D	0	E	$\frac{5}{4}a^2$

نحو الحل

$$\overrightarrow{JH}.\overrightarrow{JD} = \left(\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GH}\right)\cdot\left(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CD}\right)$$

$$= \overrightarrow{JG}.\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JG}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{GH}.\overrightarrow{CD}$$

$$= -\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} + 0 + 0 + a.a = \frac{3}{4}a^2$$

إعداد : م خضر سيفو	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

8

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. لدينا الشعاعان $\vec{u}\left(\alpha, 2\alpha, \frac{1}{2}\right)$, $\vec{v}\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 2\right)$.

إن قيمة α التي تجعل الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ متعامدان هي:

A		B		C		D		E	
A	$\frac{3}{3\sqrt{3}+2}$	B	$\frac{3\sqrt{3}+2}{3}$	C	$\frac{3}{3\sqrt{3}-2}$	D	$\frac{-3}{3\sqrt{3}+2}$	E	$\frac{2-3\sqrt{3}}{3}$

نحو الحل

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\,\alpha + \frac{2}{3}\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha\left(\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right) = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{-3}{3\sqrt{3}+2}$$

إعداد : م خالد الحداد	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

9

إذا علمت أن أطوال الاشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}$ هي بالترتيب 6 و 8 و 10 .

فإن قيمة الجداء $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ هي:

A		B		C		D		E	
A	-1	B	-5	C	1	D	0	E	4

نحو الحل

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(100 - 36 - 64) = 0$$

إعداد : م محمد جمال الخطيب	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

10	نتأمل الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ولنفترض أن $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان . عندها يكون:

A		B		C		D		E	
A	$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|^2$	B	$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|$	C	$\|\vec{u}\| = 2\|\vec{v}\|$	D	$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$	E	$\|\vec{v}\| = 2\|\vec{u}\|$

الحل:

$$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$$

$$\vec{u}^2 = \vec{v}^2 \Rightarrow \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 \Rightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$$

إعداد : م طالب أسعد	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

11	في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعرف المستويين: $P:\quad x-y+z=0$ $Q:\quad x-y+z-3=0$ إن المستويين P و Q هما مستويان :

A		B		C		D		E	
A	متوازيان وغير منطبقين	B	منطبقان	C	متقاطعان بمستقيم وغير متعامدين	D	متقاطعان في نقطة فقط	E	متقاطعان بمستقيم ومتعامدان

الحل:

بما أن:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

إذاً المستويين P و Q متوازيان وغير منطبقين.

إعداد : م نور الدين صندقي	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م عماد كزو

12	نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(5 , -3 , 4)$ والمستوي P الذي معادلته: $P:\ 2x-y+3z=5$ عندئذٍ فإن بعد النقطة A عن المستوي P يساوي:

A		B		C		D		E	
A	$\frac{16\sqrt{14}}{7}$	B	$\frac{3\sqrt{14}}{14}$	C	$\frac{10\sqrt{14}}{7}$	D	$\frac{25}{\sqrt{14}}$	E	$\frac{14\sqrt{10}}{7}$

الحل:

$$dist(A,P) = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2(5)-1(-3)+3(4)-5|}{\sqrt{4+1+9}}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{14}} = \frac{20\sqrt{14}}{14}$$

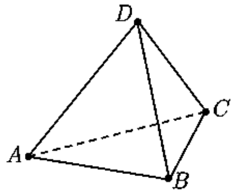
$$dist(A,P) = \frac{10\sqrt{14}}{7}$$

إعداد : م مازن الزعبي	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م عماد كزو

13

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه a

عندئذٍ $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD}$ يساوي :



A		B		C		D		E	
	a^2		0		$\frac{a^2}{2}$		$-\frac{a^2}{2}$		$-a^2$

نحو الحل

إن $[AD]$و $[BC]$ حرفان متقابلان في رباعي الوجوه المنتظم فهما متعامدان وبالتالي $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} = 0$

إعداد : م رزان البديوي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م عماد كزو

14

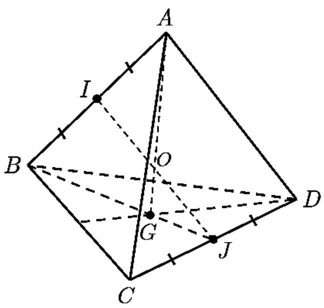
في رباعي الوجوه المنتظم $ABCD$

إذا كانت G مركز ثقل المثلث BCD

وكانت I نقطة منتصف الحرف [AB]

وكانت J نقطة منتصف الحرف [CD]،

فإن النقطة O نقطة تقاطع [IJ] مع المتوسط [AG]، تقسم [AG] بنسبة $\frac{AO}{AG}$ تساوي:



A		B		C		D		E	
	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{5}$

نحو الحل

النقطة O هي نقطة تقاطع المتوسط AG مع المستقيم (IJ) الواصل بين منتصفي حرفين متقابلين في رباعي وجوه فهي مركز ثقل رباعي الوجوه
وبالتالي حسب خواص رباعي الوجوه يكون:

$$\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{AO}{AG} = \frac{3}{4}$$

إعداد : م طه عامر	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م عماد كزو

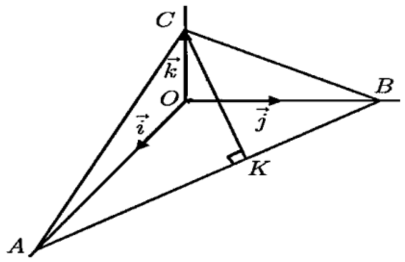
15

نتأمل رباعي الوجوه $OABC$ ثلاثي الزوايا القائمة عند رأسه O

اذا كان $OA = 3\ ,\ OB = 2\ ,\ OC = 1$

ولتكن النقطة K المسقط القائم للنقطة C على المستقيم AB

و تحقق : $\overrightarrow{AK} = t\,.\overrightarrow{AB}$ عندئذ فان قيمة t تساوي



A		B		C		D		E	
	$\frac{5}{9}$		$\frac{4}{9}$		$\frac{12}{13}$		$\frac{9}{13}$		$\frac{5}{13}$

نحو الحل

النقطة K المسقط القائم للنقطة C على المستقيم AB عندئذ

$$\overrightarrow{CK}.\overrightarrow{AB} = 0$$

نأخذ المعلم المتجانس $\left(O\,;\frac{1}{3}\overrightarrow{OA},\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ عندئذ احداثيات النقاط تكون :

$$A(3,0,0)\,,B(0,2,0)\,,C(0,0,1),K(-3t+3,2t,0)$$

$\overrightarrow{AK} = t\,.\overrightarrow{AB}$

$(x-3,y,z) = t.(-3,2,0)$

$K(-3t+3,2t,0)$

$$\overrightarrow{CK} = (-3t+3\,,2t\,,-1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-3,2,0)$$

$$\overrightarrow{CK}.\overrightarrow{AB} = -3(-3t+3)+4t+0 = 0$$

$$9t - 9 + 4t = 0$$

$$13\,t = 9 \quad \to t = \frac{9}{13}$$

إعداد : م نادر أبو راس	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م عماد كزو

16

ليكن لدينا 'ABCDA'B'C'D مكعباً طول حرفه a ، ولتكن النقطة H هي المسقط القائم للرأس B على المستقيم ('AC)،

فإن إحداثيات النقطة H في المعلم المتجانس $(D',\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ هي:

A	B	C	D	E
$(\frac{1}{3}a,\frac{1}{3}a,\frac{1}{3}a)$	$(\frac{2}{3}a,a,\frac{1}{3}a)$	$(\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a)$	$(a,\frac{1}{4}a,\frac{3}{4}a)$	$(\frac{1}{3}a,\frac{1}{2}a,\frac{1}{4}a)$

نحو الحل

$A(a\,,0\,,a)$ $\quad B(a\,,a\,,a)$ $\quad C'(0\,,a,0)$ ولتكن $H(x\,,y,z)$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC'}=0$

$(x-a\,,y-a,z-a).(-a\,,a\,,-a)=0$

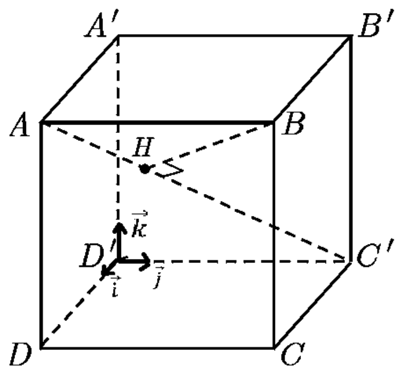
$-a(x-a)+a(y-a)-a(z-a)=0$

$x-y+z-a=0 \quad \dots \ (1)$

$\overrightarrow{AH}=\lambda\ \overrightarrow{AC'}$

$(x-a\,,y\,,z-a)=\lambda\,(-a\,,a\,,-a)$

$$\begin{cases} x=-a\lambda+a \\ y=a\lambda \\ z=-a\lambda+a \end{cases}$$



نعوض في (1) نجد : $\lambda=\frac{1}{3}$ إذاً : $H(\frac{2}{3}a\,,\frac{1}{3}a\,,\frac{2}{3}a)$

إعداد : م ريم فطامة	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م عماد كزو

17

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(2,-1,0)$, $B(-1,3,5)$

والمستوي P الذي يقبل المعادلة: $2x-3y+z-5=0$

عندئذ فإن المستقيم (AB) يقطع المستوي P بالنقطة:

A	B	C	D	E
$\left(\frac{32}{13},\frac{-21}{13},\frac{10}{13}\right)$	$\left(\frac{-20}{13},\frac{5}{13},\frac{-10}{13}\right)$	$\left(\frac{20}{13},\frac{5}{13},\frac{-10}{13}\right)$	$\left(\frac{20}{13},\frac{-5}{13},\frac{10}{13}\right)$	$\left(\frac{-20}{13},\frac{5}{13},\frac{10}{13}\right)$

نحو الحل

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$ ، نفرض $C(a,b,c)$ نقطة التقاطع عندئذ تقع النقاط A و B و C على استقامة واحدة

أي يوجد $t\in R$ بحيث يكون $\overrightarrow{AC}=t\cdot\overrightarrow{AB}$ ومنه:

$$\begin{pmatrix} a-2 \\ b+1 \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3t \\ 4t \\ 5t \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a-2=-3t \\ b+1=4t \\ c=5t \end{cases}$$

ومنه بالتعويض في معادلة P نجد: $-6t+4-12t+3+5t-5=0$

$\Leftarrow$ $t=\frac{2}{13}$ وبالتالي $C\left(\frac{20}{13},\frac{-5}{13},\frac{10}{13}\right)$

إعداد : م موسى حجيج / أبو نزار	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م أمين الحايك

18

في المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(1\,,-1\,,2\,)$ و $B(2\,,0\,,4)$ والمستوي : $P: x-y+3z-4=0$

معادلة المستوي Q العمودي على P والمار من النقطتين A و B هي :

A	$Q:\quad 3x+y-2z+2=0$	**B**	$Q:\quad 4x+y-z-1=0$
C	$Q:\quad 5x+2y-z-6=0$	**D**	$Q:\quad -5x+y+2z+2=0$
E	$Q:\quad -4x+2y+z+4=0$		

نحو الحل

$\overrightarrow{AB}(1\,,1,2\,) \qquad \overrightarrow{n_P}(1\,,-1\,,3) \qquad \overrightarrow{n_Q}(a\,,b\,,c)$

$$\overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{n_p}=0 \quad\Longrightarrow\quad a-b+3c=0\ \ldots(1)$$

$$\overrightarrow{n_Q}\,.\,\overrightarrow{AB}=0 \quad\Longrightarrow\quad a+b+2c=0\ \ldots(2)$$

نجمع (1) مع (2) نجد: $a=-\frac{5}{2}c$ و $b=\frac{c}{2}$

$$\overrightarrow{n_Q}\left(-\frac{5}{2}c\,,\frac{c}{2}\,,c\right)$$

نضع $c=2$: $\overrightarrow{n_Q}(-5\,,1\,,2)$

$$Q:\quad -5(x-1)+1(y+1)+2(z-2)=0$$

$$Q:\quad -5x+y+2z+2=0$$

إعداد : م رياض الحسين	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م عماد كزو

19

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتين $A(\,x\,,5\,,3\,)$ و $B(-1\,,y\,,-1)$ والمستوي P الذي يقبل الشعاعين $\vec{u}(1\,,1\,,-2\,)$, $\vec{v}(3\,,-1\,,-1\,)$ شعاعين موجهين .

يكون المستقيم (AB) عمودي على المستوي P عندما تكون قيم x و y:

A	$x=2$ $y=1$	**B**	$x=1$ $y=2$	**C**	$x=2$ $y=0$	**D**	$x=2$ $y=-1$	**E**	$x=-1$ $y=0$

نحو الحل

$$\overrightarrow{AB}(-1-x\,,\ y-5\,,-4\,)$$

يكون (AB) عمودي على المستوي P عندما يتحقق :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\vec{u}=0 \quad\Longrightarrow\quad -1-x+y-5+8=0$$

$$-x+y=-2 \quad \ldots\ (1)$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\vec{v}=0 \quad\Longrightarrow\quad -3-3x-y+5+4=0$$

$$-3x-y=-6 \quad \ldots\ (2)$$

بجمع (1) و (2) :

$$-4x=-8 \quad\Longrightarrow\quad x=2\ ,\quad y=0$$

إعداد : م أحمد الكلش	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م عماد كزو

20

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $A(1,2,0)$ ، $B(0,0,1)$ ، $C(1,5,5)$

عندئذ فإن إحداثيات النقطة D' المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC) هي:

A		B		C		D		E	
	$(-2,-4,1)$	**B**	$(2,4,-1)$	**C**	$(4,2,1)$	**D**	$(1,-4,2)$	**E**	$(-4,1,-2)$

نحو الحل

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً للمستوي (ABC) إذاً:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow (a,b,c)(-1,-2,1)=0 \Rightarrow -a-2b+c=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow (a,b,c)(0,3,5)=0 \Rightarrow 3b+5c=0$$

نضع $c=3 \Leftarrow b=-5$ ، $a=13$ إذاً $\vec{n}(13,-5,3)$

وبالتالي معادلة المستوي (ABC): $13x-5y+3z-3=0$

ولأن النقطة D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC)

فالشعاعان $\overrightarrow{DD'}(x+11,y-9,z+4)$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x+11 \\ y-9 \\ z+4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=13k-11 \\ y=-5k+9 \; : k\in R \\ z=3k-4 \end{cases}$$

نعوض في معادلة المستوي (ABC) نجد أن $k=1$ وبالتالي $D'(2,4,-1)$

إعداد : م صفوح الأفندي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م أمين الحايك

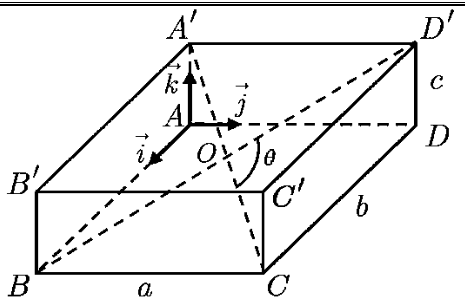
21

لدينا المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

في متوازي المستطيلات $ABCDA'B'C'D'$ الذي يتقاطع قطراه $[BD']$ و $[CA']$ في النقطة O،

نضع $\theta=\widehat{COD'}$ و $BC=a$ و $CD=b$ و $DD'=C$

فإن $cos\theta$ يساوي:



A		B		C		D		E	
	$\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$	**B**	$\frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$	**C**	$\frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$	**D**	$\frac{-a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$	**E**	$\frac{-a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$

نحو الحل

$A'(0,0,c)$ و $C(b,a,0)$ و $D'(0,a,c)$ ولدينا O منتصف $[A'C]$ إذاً $O\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$

$$\overrightarrow{OC}\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{-c}{2}\right) \quad , \quad \overrightarrow{OD'}\left(\frac{-b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$$

$$cos\theta=\frac{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD'}}{\|\overrightarrow{OC}\|.\|\overrightarrow{OD'}\|}=\frac{-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{c^2}{4}}{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{4}}=\frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

الخيار الصحيح هو B

إعداد : م أمجد شاليش	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م أمين الحايك

22

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه:

$AB = 2$ و $BC = CG = 1$

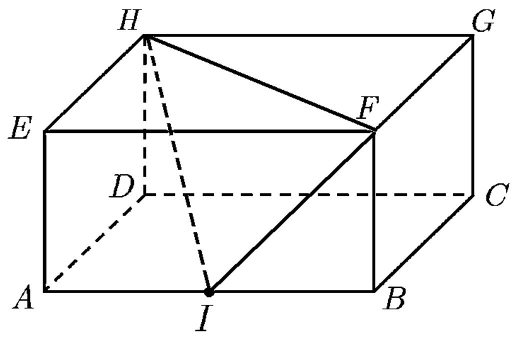
والنقطة I منتصف $[AB]$

فإذا علمت أن معادلة المستوي (IFH) في المعلم $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

هي: $x + 2y - z - 1 = 0$

وأن a تمثل بعد النقطة G عن (IFH)

وأن b تمثل بعد النقطة G عن المستقيم (IH) ..... عندئذ يكون:



A		B		C		D		E	
A	$b = a$	B	$b = 2a$	C	$b = \frac{a}{2}$	D	$b = \sqrt{6}a$	E	$b = \frac{a}{\sqrt{6}}$

نحو الحل

لدينا: $G(2,1,1)$, $H(0,1,1)$, $I(1,0,0)$

وبفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (IH) تحقق $\overrightarrow{IM} = t \cdot \overrightarrow{IH}$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(1-t,t,t)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GM}(-1-t,t-1,t-1)$$

$$GM = \sqrt{(-1-t)^2 + (t-1)^2 + (t-1)^2}$$

$$\Rightarrow GM = \sqrt{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}}$$

ويكون GM أقصر ما يمكن عندما: $t = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow b = GM = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$a = dist\big(G,(IFH)\big) = \frac{|2+2-1-1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow b = 2a$$

الخيار الصحيح هو B

إعداد : م أحمد ذياب الرفاعي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م أمين الحايك

23

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقطة $A(2,2,-1)$ والمستويين P و Q

$$Q: 3x+z-1=0 \quad , \quad P: x-y+z=0$$

عندئذ بُعد النقطة A عن المستقيم (d) الذي يمثل الفصل المشترك للمستويين P و Q يساوي:

A		B		C		D		E	
A	$\frac{3}{7}$	B	$\frac{45}{7}$	C	$\sqrt{\frac{5}{7}}$	D	$3\sqrt{\frac{5}{7}}$	E	14

نحو الحل

لتكن $A'(a,b,c)$ المسقط القائم للنقطة A على الفصل المشترك فهي تحقق معادلتي المستويين P و Q

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ 3a+c-1=0 \end{cases}$$

بالحل المشترك نجد أن: $b=1-2a \quad , \quad c=1-3a$

وبالتالي $A'(a,1-2a,1-3a)$

عندئذ يكون: $AA'^2=(a-2)^2+(-2a-1)^2+(-3a+2)^2$

$$=14a^2-12a+9=14\left(a-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{45}{7}$$

وعليه يكون AA'^2 أصغر ما يمكن ويساوي $\frac{45}{7}$ عندما $a=\frac{3}{7}$ ويكون: $AA'^2=\frac{45}{7}$

إذاً بُعد النقطة A عن المستقيم (d) يساوي: $AA'=\sqrt{\frac{45}{7}}=3\sqrt{\frac{5}{7}}$

إعداد : م عبد السلام غازي حسن	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م أمين الحايك

24

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نتأمل النقطة $A(2,1,2)$

والمستويين المتعامدين: $P: x+y-2z-1=0$ و $Q: x+y+z=0$

عندئذ بُعد A عن المستقيم Δ الفصل المشترك للمستويين P و Q هو:

A		B		C		D		E	
A	3	B	9	C	$2\sqrt{3}$	D	$\sqrt{3}$	E	$\sqrt{6}$

نحو الحل

$$d_1=dist(A,P)=\frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$d_2=dist(A,Q)=\frac{|2+1+2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

بفرض A' المسقط القائم لـ A على Δ عندئذ:

$$AA'=\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2}=\sqrt{\frac{4}{6}+\frac{25}{3}}=\sqrt{\frac{54}{6}}=3$$

إعداد : م فادي المحمد	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م أمين الحايك

25	في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعرف المستويين P و Q : $P:\ x-2y+3z-5=0$ $Q:\ x+y+z+1=0$ وليكن المستقيم (d) فصلهما المشترك تمثله مجموعة النقاط M وفق:

A	$M(3z\,,2z-2\,,z)$	B	$M(-\frac{5}{3}z+1\,,\frac{2}{5}z-2\,,z)$	C	$M(-\frac{5}{3}z+1\,,\frac{2}{3}z-2\,,z)$
D	$M(z-1\,,3z-2\,,z)$	E	$M(-5z\,,2z-6\,,z)$		

الحل:

بالحل المشترك لمعادلتي P و Q (بالطرح) :

$$3y-2z+6=0$$

$$y=\frac{2}{3}z-2$$

نعوض في معادلة Q : $x+\frac{2}{3}z-2+z+1=0$

$$x=-\frac{5}{3}z+1$$

إعداد : م محمد ملاذ الفقير	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م عماد كزو

26	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ إن معادلة الكرة التي مركزها $(0,5,-1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{3}$

A	$x^2+(y+1)^2+(z-5)^2=3$	B	$x^2+(y+5)^2+(z-1)^2=3$
C	$x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=3$	D	$x^2+(y+5)^2+(z+1)^2=\sqrt{3}$
E	$x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=\sqrt{3}$		

الحل:

مركز الكرة $(0,5,-1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{3}$

إذاً معادلة الكرة: $x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=3$

إعداد : م ورود حسينو	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م أمين الحايك

27

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة:
$x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$ تمثل:

A	كرة مركزها $(5,0,-1)$	**B**	مجموعة خالية	**C**	نقطة وحيدة $(-5,0,1)$
D	نقطة وحيدة $(5,0,-1)$	**E**	كرة مركزها $(-5,0,1)$		

نحو الحل

$$x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$$

$$x^2-10x+25-25+y^2+z^2+2z+1-1+26=0$$

$$(x-5)^2+y^2+(z+1)^2=0$$

مجموعة النقاط M تمثل نقطة وحيدة $(5,0,-1)$

إعداد : م أحمد صالح	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م أمين الحايك

28

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نتأمل النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$
إن المجموعة $\mathcal{E}$ المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ تعطى بالعلاقة:

A	$x^2+y^2+z^2-y-4z=0$	**B**	$x^2+y^2+z^2+y+4z=0$
C	$x^2+y^2+z^2+2y-z=0$	**D**	$x^2+y^2+z^2-y+2z=0$
E	$x^2+y^2+z^2+y+2z=0$		

نحو الحل

$$\overrightarrow{MA}(2-x,1-y,2-z)\ ,\qquad \overrightarrow{MB}(-2-x,-y,2-z)$$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

$$(2-x)\cdot(-2-x)+(1-y)\cdot(-y)+(2-z)\cdot(2-z)=0$$

$$x^2+y^2+z^2-y-4z=0$$

إعداد : م زكي محمود طحاوي	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م أمين الحايك

29	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطة $A(2,-2,2)$ والمستوي: $P: x+2y+3z=5$ عندئذ تكون معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P
A	$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=14$
B	$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=\sqrt{14}$
C	$(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=\frac{1}{14}$
D	$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{\sqrt{14}}$
E	$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$
الحل	مركز الكرة $A(2,-2,2)$ ونصف قطرها $r=dist(A,P)=\frac{\lvert 2-4+6-5\rvert}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$ إذاً معادلة الكرة: $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$

إعداد : م حيدرة زعيبة	الجواب : E	كتابة وتنسيق : م أمين الحايك

30	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(0,-1,-1)$ إن طبيعة المجموعة $\mathcal{E}$ المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $MA=2MB$ تمثل:
A	كرة مركزها $(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3})$ ونصف قطرها $r=2$
B	كرة مركزها $(\frac{-1}{3},\frac{-5}{3},\frac{-5}{3})$ ونصف قطرها $r=4$
C	كرة مركزها $(\frac{-1}{3},\frac{-5}{3},\frac{-5}{3})$ ونصف قطرها $r=2$
D	مجموعة خالية
E	نقطة وحيدة $(\frac{-1}{3},\frac{-5}{3},\frac{-5}{3})$

الحل

$$MA=2MB \quad\Rightarrow\quad MA^2=4MB^2$$

$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=4[(0-x)^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2]$$

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1 = 4[x^2+y^2+2y+1+z^2+2z+1]$$

$$3x^2+2x+3y^2+10y+3z^2+10z+5=0$$

$$x^2+\frac{2}{3}x+y^2+\frac{10}{3}y+z^2+\frac{10}{3}z+\frac{5}{3}=0$$

$$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+y^2+\frac{10}{3}y+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+z^2+\frac{10}{3}z+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+\frac{5}{3}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2+\left(z+\frac{5}{3}\right)^2=4$$

وبالتالي مجموعة النقاط $\mathcal{E}$ تمثل كرة مركزها $(\frac{-1}{3},\frac{-5}{3},\frac{-5}{3})$ ونصف قطرها $r=2$

إعداد : م هاني الحسن	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م أمين الحايك

31

نتأمل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ، وعدداً حقيقياً $k \in]0, +\infty[\setminus\{1\}$

نعرف $\mathcal{E}_k$ مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق الشرط: $AM = k \cdot BM$

ولتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1)$, (B, k) و J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1)$, $(B, -k)$

عندئذ المجموعة $\mathcal{E}_k$ تمثل:

A	كرة قطرها $[IJ]$	**B**	المستقيم (IJ)	**C**	القطعة المستقيمة $[IJ]$
D	المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$	**E**	النقطتان I و J		

الحل

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1)$, (B, k) إذاً: $\overrightarrow{MA} + k \cdot \overrightarrow{MB} = (1 + k) \cdot \overrightarrow{MI}$

J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1)$, $(B, -k)$ إذاً: $\overrightarrow{MA} - k \cdot \overrightarrow{MB} = (1 - k) \cdot \overrightarrow{MJ}$

بالجداء السلمي طرفاً إلى طرف نجد:

$$(1 - k^2)\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = \left(\overrightarrow{MA} - k \cdot \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + k \cdot \overrightarrow{MB}\right)$$

$$(1 - k^2)\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = AM^2 - k^2 \cdot BM^2$$

ولكن حسب الفرض: $AM = k \cdot BM$

$$\xRightarrow{\text{بالتعويض}} (1 - k^2)\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = AM^2 - AM^2$$

$$(1 - k^2)\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

$$(1 - k^2 \neq 0) \ \Rightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

وبالتالي $\mathcal{E}_k$ مجموعة نقاط الفراغ M تمثل كرة قطرها $[IJ]$

إعداد : م عبد الرحمن الحصني	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م أمين الحايك