أفكار الوحدة الثانية أشعة ..

الفقرة الأولى: مبرهنات الجداء السلمي.

يسمى سلمياً لأنه ناتجه عدد.

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta$

هام $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

4) $\vec{u}\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

5) ثانياً مربع شعاع = مربع طوله
$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = u^2$

6) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \perp (\vec{v}-\vec{w})$

7) علاقة الكاشي

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C$

أو $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

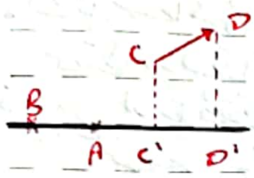
8) مبرهنة المتوسط

$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$

أو $a^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{b^2}{2}$

9) متوازي الأضلاع: مجموع مربعات أطوال الأضلاع يساوي مجموع مربعي طولي القطرين.

10) إذا كان $\vec{C'D'}$ هو المسقط القائم لـ $\vec{CD}$ على المستقيم (AB) كان



$\vec{CD}\cdot\vec{AB} = \vec{C'D'}\cdot\vec{AB}$

الفقرة الثانية: المعادلات الديكارتية لمستوٍ.

* مجموعة النقاط M.

$\vec{AM}\cdot\vec{n} = 0$ تمثل معادلة مستوٍ مار بالنقطة A ويقبل $\vec{n}$ شعاعاً ناظماً له.

* بعد نقطة عن مستوٍ:

$P: ax+by+cz+d=0$

$A(\alpha, \beta, \gamma)$

$dist(A,P) = \dfrac{|\alpha a + \beta b + \gamma c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

* إيجاد معادلة مستوٍ.

لإيجاد معادلة مستوٍ يلزمنا نقطة (x_0, y_0, z_0) وناظم $\vec{n}(a, b, c)$ ثم نعوض
$ax+by+cz+d=0$
ونعوض بإحداثيات النقطة.

الحالة الأولى:

المعطيات: نقطة وشعاعا توجيه $\vec{u}, \vec{v}$ غير مرتبطين خطياً
يلزمنا الناظم فقط
نحصل على معادلة

$\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$
$\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$

نحصل على معادلتين بثلاث مجاهيل نعطي لأحد المجاهيل (a, b, c) قيمة ما مفروضة ثم نحل المعادلتين بالمجهولين فنحصل على الناظم فيصبح لدينا نقطة وناظم فنعود للحالة الأولى

الحالة الثانية :

المعطيات : ثلاث نقط A , B , C ليست على استقامة واحدة

• نشكل شعاعين $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ (مثلاً) غير مرتبطين خطياً.

فيصبح لدينا نقطة (A أو B أو C) وشعاعي توجيه غير مرتبطين خطياً فنعود للحالة السابقة.

* حالات خاصة ...

[1] معادلة مستوٍ مار بالنقاط $A(a,0,0)$ و $B(0,b,0)$ و $C(0,0,c)$

النقاط A , B , C هي نقاط محورية لمعادلة المستوي ABC

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

[2] معادلة المستوي المار بالمبدأ :

$$ax+by+cz=0$$

[3] معادلة المستوي الموازي لـ ox

$$by+cz+d=0$$

[4] معادلة المستوي الموازي لـ oy

$$ax+cz+d=0$$

[5] معادلة المستوي الموازي لـ oz

$$ax+by+d=0$$

[6] معادلة المستوي الموازي لـ xoy

$$cz+d=0$$

[7] معادلة المستوي الموازي xoz

$$by+d=0$$

[8] معادلة المستوي الموازي yoz

$$ax+d=0$$

* رباعي الوجوه المنتظم : هو مجسم ثلاثي أوجهه الأربعة مثلثات متساوية الأضلاع

مركز رباعي الوجوه المنتظم $ABCD$ النقطة (o) مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوس رباعي الوجوه ويحقق

$$\vec{oA}+\vec{oB}+\vec{oC}+\vec{oD}=\vec{0}$$

الوضع النسبي لمستويين :

$P_1 : ax+by+cz+d=0$

$P_2 : a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\vec{n_1}(a,b,c)$ $\vec{n_2}(a',b',c')$

$\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مرتبطان خطياً

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

متوازيان

مع الانطباق

$$\frac{a}{a'}=\frac{d}{d'}$$

دون الانطباق

$$\frac{a}{a'}\neq\frac{d}{d'}$$

$\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير مرتبطان خطياً

$$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

متقاطعان

مع تعامد

$$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$$

دون تعامد

$$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\neq0$$

الوضع النسبي لمستقيم مع مستوٍ

[1] مستقيم يوازي مستوٍ ...

أ) ارتباط خطي لثلاث أشعة شعاع المستقيم مع شعاعين غير مرتبطين في المستوي

ب) $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$

[2] مستقيم يعامد مستوٍ ...

أ) تعامد شعاعين غير مرتبطين في المستوي

ب) ارتباط خطياً مع $\vec{n}$

[3] مستقيم يقطع مستوٍ

$\vec{n}\cdot\vec{u}\neq0$ ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي.

ولدراسة وضع مستقيم مع مستوٍ:

1) نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم
2) نكتب معادلة المستوي
3) نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي فنحصل على المعادلة $a\,t = b$

- $a \in \mathbb{R}^*$ ، $b \in \mathbb{R}$: للمعادلة حل وحيد فالمستقيم يقطع المستوي بنقطة
- $a = b = 0$: للمعادلة عدد لانهائي من الحلول، المستقيم يشترك مع المستوي بعدد غير منته من النقاط فهو محتوى فيه
- $a = 0$ ، $b \neq 0$: المعادلة مستحيلة الحل، المستقيم لا يشترك مع المستوي بأية نقطة فهو يوازيه

الجداء الخارجي "الشعاعي"

رمزه: $\vec{u} \wedge \vec{v}$

ناتجه: شعاع يعامد الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$

طويلته: $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\theta$

حسابه:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

$$= (bc' - b'c)\vec{i} - (ac' - c'a)\vec{j} + (ab' - a'b)\vec{k}$$

طرق سريعة في إيجاد معادلة مستوٍ

1] معادلة مستوٍ يمر بالنقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ ويقبل شعاعين غير مرتبطين خطياً:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

$$(bc' - b'c)(x - x_0) - (ac' - a'c)(y - y_0) + (ab' - a'b)(z - z_0) = 0$$

2] معادلة مستوٍ مار بثلاث نقط A ، B ، C

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

بفك المحدد نحصل على معادلة المستوي

3] معادلة المستوي P المار بالنقطتين A ، B والعمودي على المستوي Q ، $\vec{n}_Q(a, b, c)$

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

4] إثبات أربع نقط تقع في مستوٍ واحد:

$A(-1, 2, -1)$ $\quad B(0, -1, 1)$

$C(1, 0, -1)$ $\quad D(1, 2, -3)$

$\overrightarrow{AB}(1, -3, 2)$

$\overrightarrow{AC}(2, -2, 0)$

$\overrightarrow{AD}(2, 0, -2)$

ط1: الارتباط الخطي للأشعة الثلاث.

ط2:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{n}(4, 4, 4)$ يعامد $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 8 + 0 - 8 = 0$

منه $\vec{n}$ يعامد $\overrightarrow{AD}$

ومنه $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AC}$ أي النقاط الأربعة تقع في مستوٍ واحد.

مذاكرة أشعة وحدة ثانية مؤتمتة.

١) اذا كان نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وناتج $\vec{v}\cdot\vec{u} = -6$ فإن $(2\vec{u})(\vec{v}-3\vec{u}) =$

A) 158 B) -158 C) 150 D) -150 E) -156

٢) اذا كان $\vec{u}(5, -\frac{1}{2}, 2)$ و $\vec{v}(\alpha, 3, -\frac{2}{5})$ فإن قيمة α التي تجعل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان

A) $\frac{23}{10}$ B) $\frac{23}{50}$ C) $\frac{23}{5}$ D) $-\frac{23}{10}$ E) 23

٣) اذا كان $(\vec{v}+\vec{u})$ و $(\vec{v}-\vec{u})$ متعامدان فإن

A) $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان B) $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متطابقان مطلقاً C) $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما الطول نفسه D) $\vec{u}+\vec{v} = \alpha(\vec{u}-\vec{v})$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$ E) $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$

٤) معادلة المستوي Q المار بالنقطة $A(0,3,0)$ والموازي للمستوي $P: x+y=5$ هي

A) $x+y=3$ B) $x+y+3=0$ C) $x+z=3$ D) $y+z=3$ E) $y+z+3=0$

٥) معادلة المستوي المار بالنقاط $A(\frac{1}{3},0,0)$ و $B(0,\frac{1}{2},0)$ و $C(0,0,-\frac{1}{3})$

A) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z=1$ B) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z=6$ C) $3x+2y-3z=6$ D) $3x+2y-3z=1$

٦) تأمل النقطتين $A(2,5,3)$ و $B(-1,0,-1)$ ومستوياً P يقبل $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}$ شعاعي توجيه ولكي (AB) توازي P فإن الشعاع $\vec{v}$ هو

$\vec{v}(-3,-1,1)$ B) $\vec{v}(-3,1,1)$ C) $\vec{v}(3,-1,1)$ D) $\vec{v}(3,1,-1)$ E) $\vec{v}(3,-1,-1)$

٧) لتكن معادلة المستوي $13x-5y+3z=3$ ولتكن $D(-11,9,-4)$ فإن احداثيات D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي ABC هي

A) $D'(2,-4,-1)$ B) $D'(-2,4,1)$ C) $D'(2,-4,1)$ D) $D'(2,4,-1)$ E) $D'(2,4,1)$

٨) لدينا النقطة $A(2,1,2)$ والمستويين $P: x+y-2z-1=0$ و $Q: x+y+z=0$ فإن البعد بين A والفصل المشترك للمستويين P، Q يساوي.

A) 9 B) 3 C) 6 D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

٩) مجموعة النقاط $x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$ تمثل
A) كرة مركزها $\Omega(1,0,1)$ و $R=2$ B) كرة مركزها $\Omega(-5,0,-1)$ و $R=6$ C) كرة مركزها $\Omega(-5,0,1)$ و $R=\sqrt{26}$ D) نقطة هي $\Omega(5,0,-1)$
E) مجموعة خالية

١٠) معادلة الكرة التي مركزها النقطة $A(2,-2,2)$ وتمس المستوي $P: x+2y+3z=5$
A) $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$ B) $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=14$ C) $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{14}$
D) $(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=\frac{1}{14}$ E) $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{\sqrt{14}}$

١١) اذا كانت $A(1,1,1)$ و $B(0,-1,-1)$ و مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$ هي كل مما يلي
A) كرة مركزها $\Omega(1,0,0)$ و $R=1$ B) كرة مركزها $\Omega(\frac{1}{2},0,0)$ و $R=\frac{3}{2}$ C) مستوي محوري للقطعة $[AB]$ D) كرة $\Omega(1,0,0)$ و $R=3$
E) كرة مركزها $\Omega(1,0,0)$ و $R=\sqrt{3}$

١٢) مجموعة النقاط $x^2+y^2+z^2-4x+5=0$ تمثل
A) كرة مركزها $(2,0,0)$ و $R=2$ B) كرة مركزها $(2,0,0)$ و $R=1$ C) نقطة وحيدة D) مجموعة خالية E) كرة مركزها $\Omega(-4,0,0)$ و $R=2$

١٣) الشعاعان $\vec{u}(1,-2,-5)$ و $\vec{v}(2,\frac{-3}{2},1)$
A) متوازيان B) $\vec{v}=-\frac{1}{2}\vec{u}$ C) $\vec{u}=2\vec{v}$ D) مرتبطان خطياً E) متعامدان

١٤) معادلة المستوي Q العمودي على $P: x-y+3z-4=0$ والمار بالنقطتين $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ هي بالشكل
A) $-5x+y+2z+2=0$ B) $-5x+y+2z=2$ C) $5x-y-2z+2=0$
D) $-5x-y-2z+1=0$ E) $-5x-y-2z=0$

١٥) نقطة تقاطع المستقيم (AB) بحيث $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$ مع المستوي $P: 2x-3y+z-5=0$ هي
A) $C(20,-5,10)$ B) $C(10,5,-5)$ C) $C(\frac{20}{13},\frac{-5}{13},\frac{10}{13})$ D) $C(1,1,1)$ E) $C(0,1,5)$

١٦) معادلة المستوي R العمودي على $P: x-2y+3z-5=0$ و $Q: x+y+z+1=0$ والمار بالنقطة $A(2,5,-2)$ هي
A) $5x-2y-3z-6=0$ B) $5x-2y+3z=6$ C) $5x+2y+3z=0$
$x+2y+3z+6=0$ E) $-5x-2y+3z-2=0$