Pixel Team Channel

انقر / امسح الرمز للانتقال
الى قناة الفريق.

Saade files Channel

انقر / امسح الرمز للانتقال
الى قناة الملفات.

Pixel_Team_SAB

Pixel - بِكسل

PIXEL

القائمة

اضغط على الأزرار للانتقال إلى المطلوب

- النموذج A
- حل النموذج A
- النموذج B
- حل النموذج B
- النموذج C
- حل النموذج C
- النموذج D
- حل النموذج D

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

المذاكرة الأولى لمادة الرياضيات — الاسم :.........

للصف الثالث الثانوي العلمي (شتاء 2025) — النموذج : A — الدرجة: 600

فيما يأتي 40 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 15 درجة .

التحليل 1:

1) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{x+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$. و C_f يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=2$ عند $+\infty$ و $-\infty$ ومقارب شاقولي معادلته $x=-1$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. عندئذٍ $b+c+d$ تساوي

A	3	B	$\frac{5}{2}$	C	$\frac{3}{2}$	D	1

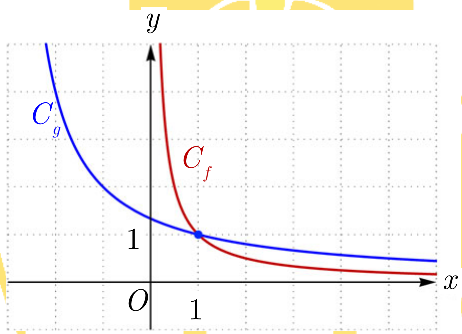
2) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ جدول تغيراته هو الآتي :

x	$-\infty$		-2	-2		1		$+\infty$
$f(x)$	5	$\searrow$	$-\infty$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2

A	$y=-2$ مستقيم مقارب أفقي للخط C_f في جوار $-\infty$	B	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{f(x)-5}=+\infty$	C	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=-\infty$	D	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

3) نجد جانباً الخطين البيانيين C_f و C_g للتابعين f و g المعرّفين على المجالين $D_f=]0,+\infty[$ و $D_g=]-3,+\infty[$ والمحور $x'x$ مقارب للخطين C_f و C_g . و المحور $y'y$ مقارب للخط C_f .

وليكن h تابع معرّف على $]5,+\infty[$ يحقّق: $f(x)\le h(x)\le g(x)$



A	$\lim\limits_{x\to1} f(x)<\lim\limits_{x\to1} g(x)$	B	$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$	C	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$	D	$\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$

4) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x)=\sqrt{(-x+2)^2+3}$

معادلة المقارب المائل Δ للخط C في جوار $-\infty$ هي

A	$y=-x+2$	B	$y=x-2$	C	$y=-x-2$	D	ليس للخط C مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$

5) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة: $f(x)=x+1+a\,x\sin\dfrac{1}{x}$ حيث a عددٌ حقيقي .

إنّ قيمة a التي تجعل للخط C مستقيم مقارب مائل Δ معادلته : $y=x-3$ هي

A	-4	B	-3	C	3	D	4

6) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف والمستمر على $\mathbb{R}$ ويقبل C مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$ معادلته: $y=-2x+1$

A	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$	B	$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=-1$	C	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	D	للخط C مقارب أفقي في جوار $-\infty$

7) ليكن f التابع المعرّف على $]0+\infty[$ وفق العلاقة: $f(x)=\frac{1}{x}+\cos x$

إنّ نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي

A	0	B	1	C	$+\infty$	D	غير موجودة

8) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x+\sqrt{\left|8-x^2\right|}$

وليكن المستقيمان Δ و Δ' اللذان معادلتاهما: $y=2x$ و $y=0$ على الترتيب. **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو**:

A	المستقيم Δ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$	B	المستقيم Δ' مقارب أفقي للخط C_f في جوار $-\infty$	C	C_f يقع فوق Δ على المجال $]-\infty,2[$	D	C_f يشترك مع Δ' في النقطة التي فاصلتها 2

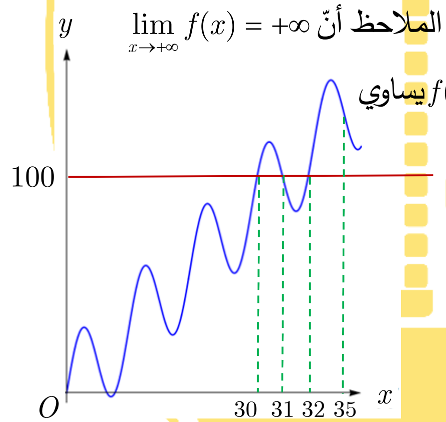
9) ليكن $x\mapsto E(x)$ تابع الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x. ولنعرّف التابع g على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $g(x)=E(x)+E(1-x)$. **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو**:

A	g تابعٌ ثابت أياً تكن $x\in\mathbb{Z}$	B	g تابعٌ ثابت أياً تكن $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$	C	لنعرّف التابع $h(x)=g(x)$ حيث $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ عندئذٍ $\lim\limits_{x\to1}h(x)=1$.	D	g ليس مستمراً على $\mathbb{R}$

10) f تابع معرّف على $[0,+\infty[$ خطّه البياني C_f مرسوم في الشكل المجاور: من الملاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

عندئذٍ: أصغر عدد حقيقي A يحقّق الشرط: إذا كان $x>A$ كان $f(x)>100$ يساوي

A	30	B	31
C	32	D	35



التحليل 2:

11) بفرض $x=\ln 2$ و $y=\ln 3$ و $z=\ln 5$. عندئذٍ $\ln\frac{18}{20}$ تساوي

A	$2y-x-z$	B	$2y+x+z$	C	$2x+2y$	D	$2z-x-y$

12) ليكن f التابع المعيّن بالعلاقة: $f(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{+\infty}{-\infty}$

لإزالتها يمكن أنْ نكتب $f(x)$ بإحدى الصيغ الآتية:

A	$f(x)=2\frac{\ln x}{x}$	B	$f(x)=x\cdot\frac{\ln x^2}{x^2}$	C	$f(x)=-2\frac{\ln x}{x}$	D	$f(x)=-2\frac{\ln(-x)}{-x}$

13) لتكن المعادلة (E) الآتية: $\ln(4x)=\ln(x-1)$

A	$\frac{-1}{3}$ حل للمعادلة (E)	B	المعادلة (E) تكافئ المعادلة $\ln(\frac{4x}{x-1})=0$	C	ليس للمعادلة (E) أية حلول	D	المعادلة (E) تكافئ المعادلة $4x=x-1$

14) ليكن f التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\sin(\ln x)$

A	$\lim\limits_{x\to e^{\frac{\pi}{2}}} f(x)=0$	B	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$	C	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$	D	$x\in[1,e^{\pi}]$ يكون $f(x)<0$

15) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=5x\ln x-5x$

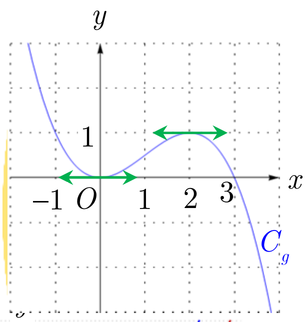
و $\mathcal{T}$ المماس للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x=1$.

A	$f'(x)=\dfrac{5}{x}-5$ و C_f يقع فوق المماس $\mathcal{T}$ دوماً	B	$f'(x)=\dfrac{5}{x}-5$ و C_f يقع تحت المماس $\mathcal{T}$ على المجال $]0,1[$	C	$f'(x)=5\ln x$ و C_f يقع فوق المماس $\mathcal{T}$ دوماً	D	$f'(x)=5\ln x$ و C_f يقع تحت المماس $\mathcal{T}$ على المجال $]0,1[$

16) الحل المشترك لجملة المعادلتين : $\begin{cases} x\cdot y=e^{-3} \\ \ln x+\ln y^2=-1\end{cases}$ هو

A	$\{(e^{2},e^{-5})\}$	B	$\{(e^{-4},e)\}$	C	$\{(e^{-1},1)\}$	D	$\{(e^{-5},e^{2})\}$

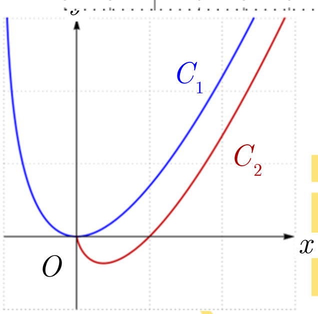
17) ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرّف على $\mathbb{R}$ والمرسوم في الشكل المجاور :



ولنعرّف التابع f على D_f وفق العلاقة : $f(x)=\ln(g(x))$ خطّه البياني C_f

A	$D_f=]0,3[$	B	فواصل نقط تقاطع C_f مع محور الفواصل 0 و 3
C	$f'(x)=0$ عندما $x=2$	D	f متناقص تماماً على $]0,2[$

18) ليكن C_1 و C_2 الخطين البيانيين للتابعين f_1 و f_2 . المرسومين في الشكل المجاور :



حيث f_1 معرّف على $]-1,+\infty[$ وفق العلاقة : $f_1(x)=x\ln(x+1)$.

و f_2 معرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f_2(x)=x\ln x$.

A	C_1 و C_2 يشتركان بنقطة	B	f_2 يقبل قيمة صغرى محلياً عند $x=e^{-2}$
C	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f_1(x)-f_2(x))=1$	D	$\lim\limits_{x\to-1} f_1(x)=-\infty$

19) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-1,1[$ وفق العلاقة : $f(x)=\ln(\dfrac{1-x}{x+1})$

و C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x)=\ln(x+1)-\ln(1-x)$. <u>**واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ**</u>

A	f تابعٌ فردي	B	C_1 نظير C بالنسبة إلى المحور xx'
C	C_1 نظير C بالنسبة إلى المحور yy'	D	C_1 نظير C بالنسبة إلى $O(0,0)$

20) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]2,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=x+1+\ln(\dfrac{ex+1}{x-2})$

A	المستقيم $y=x+1$ مقاربٌ للخط C .	B	المستقيم $y=x+2$ مقاربٌ للخط C .
C	المستقيم $y=x+e$ مقاربٌ للخط C .	D	المستقيم $x=e$ مقارب شاقولي للخط C .

الجبر:

21) أحد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي $w=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$ هو

A	$\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$	B	$\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$	C	$\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$	D	$\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

22) لتكن المعادلة : $z^2+bz+c=0$ حيث b و c عددان حقيقيان وليكن العدد $1+5i$ أحد حلولها عندئذٍ $b+c$ يساوي

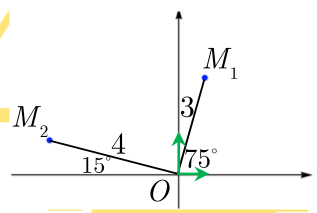
A	-24	B	23	C	24	D	26

23) ليكن العدد العقدي $z=a+bi$ حيث $a<0$ و $z^2+\left|z\right|=12$ عندئذٍ $\operatorname{Re}(z)$ تساوي

A	-4	B	-3	C	-2	D	-1

24) لتكن النقطتان : $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ الممثلتان للعددين العقديين

z_1 و z_2 بالترتيب : في الشكل المجاور : عندئذٍ : $\left|z_1+z_2\right|$ تساوي



A	7	B	5
C	$\frac{5}{2}$	D	$3\sqrt{2}$

25) ليكن العددان العقديان: z و z' غير المعدومين وليكن w عددٌ عقدي يحقّق $w=\frac{z}{z'}$ وبافتراض أنّ $\operatorname{Re}(\overline{z}\cdot z')=0$

A	w تخيلي بحت	B	w حقيقي	C	$\left|w\right|=1$	D	w ليس حقيقياً وليس تخيّلياً بحتاً

26) في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$:

مجموعة النقاط $M(z)$ حيث z عدد عقدي غير معدوم التي تجعل العدد $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ تمثّل

A	محور الأعداد الحقيقية محذوف منه $z=0$.	B	دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي الواحد	C	اجتماع مجموعتي النقاط الموجودتين في الخيارين A و B	D	اجتماع محوري الإحداثيات محذوف منه النقطة O

27) ليكن θ عددٌ حقيقي حيث $\theta\in]\frac{\pi}{2},\pi[$ فالشكل الأسي للعدد $z=e^{i3\theta}+e^{i\theta}$ هو

A	$z=2\cos(\pi+\theta)e^{i(\pi+2\theta)}$	B	$z=2\cos(\pi+\theta)e^{i(\pi+\theta)}$	C	$z=e^{i4\theta}$	D	$z=2\cos\theta\, e^{i(\pi+2\theta)}$

28) ليكن z عدداً عقدياً يقع في الربع الثالث و $\arg(z^2)=\frac{\pi}{6}$ عندئذٍ $\arg(z)$ تساوي

A	$\frac{\pi}{12}$	B	$\frac{\pi}{3}$	C	$\frac{4\pi}{3}$	D	$\frac{13\pi}{12}$

29) لتكن المعادلة : $z^3 - 5z^2 + 9z - 5 = 0$ ولنرمز لمجموعة حلولها في $\mathbb{C}$ بالرمز S

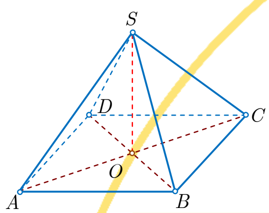
ولتكن النقاط A و B و C التي تمثّل حلولها في المستوي العقدي عندئذٍ

A	$S = \{1, 2+i, -2-i\}$	B	$S = \{i, 2+i, 2-i\}$	C	$S = \{1, 1+i, 1-i\}$	D	المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

30) ليكن z عدداً عقدياً يحقّق : $z = \dfrac{\sin x - i\cos x}{\cos x - i\sin x}$. عندئذٍ الشكل الأسي للعدد z هو

A	$e^{i(\frac{3\pi}{2}+2x)}$	B	$e^{i(\frac{3\pi}{2}+x)}$	C	$e^{i(\frac{3\pi}{2})}$	D	$e^{i(2x)}$

الأشعة :



31) $S-ABCD$ هرم منتظم قاعدته مربّع طول ضلعه يساوي $2\sqrt{2}$ ومركزه O

ورأس الهرم S حيث $SO = 3$. ولنختر معلماً متجانساً $(O; \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}, \frac{1}{3}\overrightarrow{OS})$ عندئذٍ :

A	$B(1,0,0)$	B	$A(0,-2,0)$	C	$D(0,-1,0)$	D	$S(0,0,2)$

32) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(1,1,-7)$ و $B(-2,0,0)$ و $C(7,3,-21)$ و $D(0,0,-4)$

واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو :

A	النقاط : A و B و C تقع على استقامةٍ واحدة	B	النقاط : A وB وD تعيّن مستوٍ وحيد .	C	النقاط : A و B و C و D لا تقع في مستوٍ واحد .	D	بفرض I نظيرة D بالنسبة إلى B فتكون النقطة A مركز ثقل المثلث CDI .

33) مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقّق إحداثياتها العلاقات: $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ و $0 \le y \le 3$ تمثّل

A	مخروط رأسه O ومحوره $(O;\vec{j})$ ونصف قطر قاعدته يساوي 1 وارتفاعه 1	B	مخروط رأسه O ومحوره $(O;\vec{j})$ ونصف قطر قاعدته يساوي 3 وارتفاعه 3	C	أسطوانة محورها $(O;\vec{j})$ ونصف قطر قاعدتها يساوي 3 وارتفاعها 3 .	D	أسطوانة محورها $(O;\vec{j})$ ونصف قطر قاعدتها يساوي 1 وارتفاعها 3 .

34) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(1,2,3)$ و $B(3,-2,-1)$ و $C(m, \sqrt{m+1}, 1)$ حيث $m \in [-1, +\infty[$

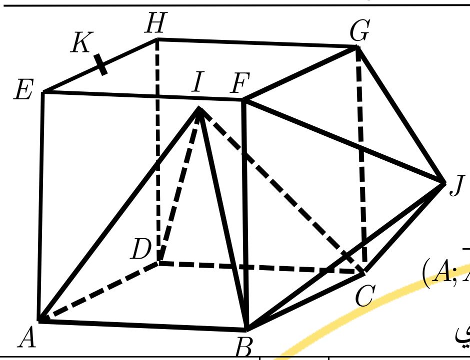
إنّ قيم m التي تجعل النقطة C تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هي :

A	$m \in \{0,8\}$	B	$m \in \{0\}$	C	$m \in \{8\}$	D	$m \in \{1\}$

35) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

معادلة الكرة التي تمر بالنقطتين $A(2,-1,3)$ و $B(0,5,-1)$ ومركزها يقع على محور الفواصل هي :

A	$(x+3)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{35}$	B	$(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 35$
C	$(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 35$	D	$(x-3)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{35}$



36) $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 1

يوجد هرم منتظم $I-ABCD$ يقع داخله حيث ارتفاعه a

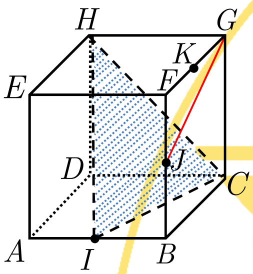
و هرم منتظم $J-BCGF$ يقع خارجه طبوق مع الهرم السابق

ولكن خارجه وجوههما مثلثات متساوية الساقين و رأسيهما I و J .

ولتكن النقطة K منتصف $[EH]$. وإذا اخترنا معلماً متجانساً : $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

إنّ قيمة a التي تجعل النقاط K و I و J تقع على استقامةٍ واحدة تساوي

A	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	B	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	C	$\frac{2}{3}$	D	$\frac{3}{4}$



37) $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 1 .

I و J و K هي منتصفات الأحرف : $[AB]$ و $[BF]$ و $[GF]$

A	المستقيم (GJ) يوازي المستوي (HIC)	B	المستقيم (GJ) يقطع المستوي (HIC) .
C	النقاط H و A و I و K تقع في مستوٍ واحد	D	المستقيم (EA) يوازي المستوي (HIC) .

38) في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط A و B و C التي لا تقع على استقامةٍ واحدة .

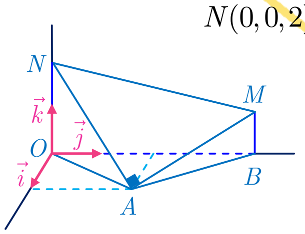
<u>واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو:</u>

A	نعرّف المستقيم (AB) بأنّه مجموعة نقط الفراغ M التي تحقّق $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.	B	نعرّف المستوي (ABC) بأنّه مجموعة نقط الفراغ M التي تحقّق : $\overrightarrow{AM}=a\,\overrightarrow{AB}+b\,\overrightarrow{AC}$ حيث $a,b\in\mathbb{R}$	C	بفرض النقطة K تحقق $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$ والنقطة L تحقّق $\overrightarrow{BL}=-3\overrightarrow{BC}$ فالنقاط A و B و C و K و L تقع في مستوٍ واحد.	D	مهما كانت النقطة D من الفراغ كانت الأشعة $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطة خطياً .

39) $ABCD$ رباعي وجوه . النقطة I المعرّفة بالعلاقة $2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ تقع :

A	منتصف الحرف $[BC]$	B	منتصف الحرف $[BD]$	C	منتصف الحرف $[CD]$	D	خارج رباعي الوجوه

40) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(\sqrt{2},2,0)$ و $B(0,4,0)$ و $M(0,4,1)$ و $N(0,0,2)$



A	مساحة $OBMN$ تساوي 12	B	مساحة AMN تساوي $\sqrt{35}$
C	ارتفاع الهرم $A-OBMN$ يساوي $\sqrt{2}$	D	حجم الهرم $A-OBMN$ يساوي $4\sqrt{2}$

....انتهت الأسئلة ....

فيما يأتي 40 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 15 درجة .

التحليل 1:

1) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{x+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$. و C_f يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=2$ عند $+\infty$ و $-\infty$ ومقارب شاقولي معادلته $x=-1$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. عندئذٍ $b+c+d$ تساوي

A	3	B	$\dfrac{5}{2}$	C	$\dfrac{3}{2}$	D	1

التبرير

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{c}$ أي المستقيم $y=\dfrac{1}{c}$ مستقيم مقارب أفقي للخط C_f في جوار $+\infty$

ولكن لدينا فرضاً $y=2$ مستقيم مقارب أفقي للخط C_f في جوار $+\infty$ ومنه $\dfrac{1}{c}=2$ وبالتالي $\boxed{c=\dfrac{1}{2}}$

لدينا فرضاً $x=-1$ مستقيم مقارب شاقولي ونحن نعلم أنّ المقارب الشاقولي نحصل عليه من إيجاد نهاية التابع f عند النقط المحذوفة من مجموعة التعريف حيث f معرّف عندما $cx+d\neq 0$

أي $x\neq -\dfrac{d}{c}$ فالتابع f معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-\dfrac{d}{c}\}$ أي إذا كان للخط C_f مستقيم مقارب فهو $x=\dfrac{-d}{c}$

بالمقارنة مع الفرض نجد أنّ $-\dfrac{d}{c}=-1$ أي $\dfrac{d}{c}=1$ ومنه $\dfrac{d}{\frac{1}{2}}=1$ وبالتالي $2d=1$ أي $\boxed{d=\dfrac{1}{2}}$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ ولدينا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{b}{d}$ ومنه $\dfrac{b}{d}=1$ أي $\dfrac{b}{\frac{1}{2}}=1$ وبالتالي $2b=1$ أي $\boxed{b=\dfrac{1}{2}}$

ومنه $b+c+d=\dfrac{3}{2}$ فالخيار الصحيح هو C .

---

2) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ جدول تغيراته هو الآتي :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ -3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2

A	$y=-2$ مستقيم مقارب أفقي للخط C_f في جوار $-\infty$	B	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{f(x)-5}=+\infty$	C	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=-\infty$	D	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$

التبرير

لندقّق في الخيار A : نلاحظ أنّ $y=-2$ مستقيم مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$ وليس $-\infty$ فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : من الواضح أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-5)=0^-$ (كون السهم يقع تحت العدد 5 في جوار $-\infty$)

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{f(x)-5}=-\infty$. فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : لحساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$

❒ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(-2)^+$

❒ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim\limits_{t\to(-2)^+} f(t)=-3$ فالخيار C خاطئ .

أمّا الخيار D : $\lim\limits_{x\to1} f(x)=0^-$ (كون السهم يقع تحت الصفر في جوار 1)

ومنه $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ فالخيار الصحيح هو D.

---

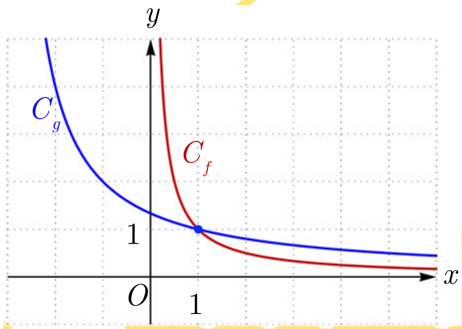
3) نجد جانباً الخطين البيانيين C_f و C_g للتابعين f و g

المعرّفين على المجالين $D_f=]0,+\infty[$ و $D_g=]-3,+\infty[$

والمحور $x'x$ مقارب للخطين C_f و C_g .

و المحور $y'y$ مقارب للخط C_f .

وليكن h تابع معرّف على $]5,+\infty[$ يحقّق: $f(x)\le h(x)\le g(x)$



$\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$	D	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$	C	$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$	B	$\lim\limits_{x\to1} f(x)<\lim\limits_{x\to1} g(x)$	A

التبرير

لندقّق في الخيار A : من الملاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1} g(x)=1$ فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : لمّا كان $f(x)\le h(x)\le g(x)$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$ فالخيار B هو الخيار الصحيح .

أمّا الخيار C : من الواضح أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ فالخيار C خاطئ .

أمّا الخيار D : من الواضح أنّ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$ فالخيار D خاطئ .

---

4) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x)=\sqrt{(-x+2)^2+3}$

معادلة المقارب المائل Δ للخط C في جوار $-\infty$ هي

ليس للخط C مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$	D	$y=-x-2$	C	$y=x-2$	B	$y=-x+2$	A

التبرير

$f(x)=\sqrt{(-x+2)^2+3}$ في جوار $-\infty$ يكون $f(x)\approx\sqrt{(-x+2)^2}=\left|-x+2\right|=-x+2$

فالخط C يملك مستقيم مقارب مائل Δ في جوار $-\infty$ معادلته : $y=-x+2$ فالخيار الصحيح هو A .

حيث نلاحظ أنّ $f(x)-y_\Delta=\sqrt{(-x+2)^2+3}-(-x+2))=\dfrac{3}{\sqrt{(-x+2)^2+3}+(-x+2)}$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$.

---

5) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة: $f(x)=x+1+a\,x\sin\dfrac{1}{x}$ حيث a عددٌ حقيقي .

إنّ قيمة a التي تجعل للخط C مستقيم مقارب مائل Δ معادلته : $y=x-3$ هي

A	-4	B	-3	C	3	D	4

التبرير

$$f(x)-y_{\Delta}=x+1+a\,x\sin\frac{1}{x}-(x-3)=ax\sin\frac{1}{x}+4=a\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+4$$

ولمّا كان $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_{\Delta})=a+4$

وبما أنّه لدينا فرضاً Δ مستقيم مقارب مائل فإنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_{\Delta})=0$

وبالتالي $a+4=0$ ومنه $a=-4$ فالخيار الصحيح هو A .

<u>وبأسلوب آخر:</u> بفرض $f(x)=ax+b+g(x)$

وكان $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lambda\in\mathbb{R}$ كان المستقيم $y=ax+b+\lambda$ هو المستقيم المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$

في مثالنا $\lim\limits_{x\to\infty}ax\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}a\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}a\dfrac{\sin t}{t}=a\times 1=a$

وبالتالي $y=x+1+a$ هو المقارب المائل ولدينا فرضاً $y=x-3$ هو المقارب المائل ومنه $a=-4$.

---

6) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف والمستمر على $\mathbb{R}$ ويقبل C مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$ معادلته: $y=-2x+1$

A	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$	B	$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=-1$	C	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$	D	للخط C مقارب أفقي في جوار $-\infty$

التبرير

لندقّق في الخيار A : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$ (ميل المقارب المائل للخط C في جوار $-\infty$ وهو أمثال x في معادلته التي من الشكل $y=-2x+1$) فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b=1$ فالخيار B خاطئ أيضاً .

لندقّق في الخيار C : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+1)=+\infty$ (لأنّ الخط C يسلك سلوك مقاربه في جوار $-\infty$)

فالخيار C هو الخيار الصحيح .

أمّا الخيار D : هو خيار خاطئ . لأنّ الخط C يملك مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ فرضاً فلا يمكن أن يملك مقارب أفقي في نفس الجوار .

---

7) ليكن f التابع المعرّف على $]0+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{1}{x}+\cos x$

إنّ نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي

A	0	B	1	C	$+\infty$	D	غير موجودة

التبرير

نفرض جدلاً أنّ للتابع f نهاية عند $+\infty$ ولتكن ℓ

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x=\ell$ وهذا يناقض معرفتنا أنّه ليس للتابع $x\mapsto\cos x$ نهاية عند $+\infty$

فليس للتابع f نهاية عند $+\infty$. فالخيار الصحيح هو D .

---

8) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=x+\sqrt{\left|8-x^2\right|}$

وليكن المستقيمان Δ و Δ' اللذان معادلتاهما : $y=2x$ و $y=0$ على الترتيب. **<u>واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو</u>** :

A	المستقيم Δ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$	B	المستقيم Δ' مقارب أفقي للخط C_f في جوار $-\infty$	C	C_f يقع فوق Δ على المجال $]-\infty,2[$	D	C_f يشترك مع Δ' في النقطة التي فاصلتها 2

التبرير

لندقّق في الخيار A : $f(x)-y_\Delta=\sqrt{\left|8-x^2\right|}-x$ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty-\infty$

لإزالتها نتخلّص أولاً من القيمة المطلقة : في جوار $+\infty$ يكون $\left|8-x^2\right|=x^2-8$

$$f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2-8}-x=\frac{-8}{\sqrt{x^2-8}+x}$$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$ ومنه $\Delta: y=2x$ مستقيم مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$. فالخيار A صحيح .

ومن أجل الأتمتة : من الواضح أنّ $f(x)=x+\sqrt{\left|8-x^2\right|}\approx x+x=2x$ في جوار $+\infty$. فالخيار A صحيح .

لندقّق في الخيار B : نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty+$.

لإزالتها نتخلّص أولاً من القيمة المطلقة : في جوار $-\infty$ يكون $\left|8-x^2\right|=x^2-8$ ومنه $f(x)=x+\sqrt{x^2-8}$

ومنه $f(x)=x+\sqrt{x^2-8}=\dfrac{-8}{x-\sqrt{x^2-8}}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8}{x-\sqrt{x^2-8}}=0$$

ومنه $\Delta': y=0$ مستقيم مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$. فالخيار B صحيح .

ومن أجل الأتمتة : من الواضح أنّ $f(x)=x+\sqrt{\left|8-x^2\right|}\approx x+\sqrt{x^2}=x+|x|=x-x=0$ في جوار $-\infty$.

فالخيار B صحيح .

لندقّق في الخيار C : لدراسة وضع C بالنسبة إلى Δ ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y_{\Delta}=\sqrt{|8-x^2|}-x$

$f(x)-y_{\Delta}=0$ عندما $\sqrt{|8-x^2|}-x=0$

$\sqrt{|8-x^2|}=x$

شرط الحل : $x\geq 0$ نربّع الطرفين :

$|8-x^2|=x^2$

❒ إمّا $8-x^2=x^2$

ومنه $8=2x^2$ وبالتالي $x^2=4$

إمّا $x=2$ مقبول أو $x=-2$ مرفوض .

❒ إمّا $8-x^2=-x^2$

ومنه $8=0$ معادلة متناقضة .

x	$-\infty$ $\qquad$ 2 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y_{\Delta}$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$
الوضع النسبي	C_f يقع فوق Δ $\quad$ | $\quad$ C_f يقع تحت Δ

$(2,4)$ نقطة مشتركة
بين C_f و Δ .

فنلاحظ أنّ C_f يقع فوق Δ على المجال $]-\infty,2[$. فالخيار C صحيح .

أمّا الخيار D منطقياً هو الخيار الوحيد الخاطئ .

والتفسير : ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y_{\Delta'}=x+\sqrt{|8-x^2|}$

ومنه $f(x)-y_{\Delta'}=0$

وبالتالي $x+\sqrt{|8-x^2|}=0$

$\sqrt{|8-x^2|}=-x$

شرط الحل : $x\leq 0$ نربّع الطرفين

$|8-x^2|=x^2$

❒ إمّا $8-x^2=x^2$

ومنه $8=2x^2$ وبالتالي $x^2=4$

إمّا $x=2$ مرفوض أو $x=-2$ مقبول .

❒ إمّا $8-x^2=-x^2$

ومنه $8=0$ معادلة متناقضة

فالخط C_f يشترك مع Δ' في نقطة فاصلتها -2 . فالخيار D خاطئ . وهو الخيار الذي يجب أنْ نختاره .

وإذا أردنا أنْ نكمل دراسة الوضع النسبي للخط C_f و Δ' :

x	$-\infty$ $\qquad$ -2 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y_{\Delta'}$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$
الوضع النسبي	C_f يقع تحت Δ' $\quad$ | $\quad$ C_f يقع فوق Δ'

نقطة مشتركة $(-2,0)$

بين C_f و Δ' .

---

9) ليكن $x \mapsto E(x)$ تابع الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . ولنعرّف التابع g على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة :

$g(x)=E(x)+E(1-x)$. **<u>واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو:</u>**

A	g تابعٌ ثابت أياً تكن $x\in\mathbb{Z}$	B	g تابعٌ ثابت أياً تكن $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$	C	لنعرّف التابع $h(x)=g(x)$ حيث $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ عندئذٍ $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=1$.	D	g ليس مستمراً على $\mathbb{R}$

التبرير

لندقّق في الخيار A : $g(x)=E(x)+E(1-x)$

عندما $x\in\mathbb{Z}$ يكون : $E(x)=x$ و $E(1-x)=1-x$.

ومنه $g(x)=x+1-x=1$ و بالتالي g تابعٌ ثابت أياً تكن $x\in\mathbb{Z}$. فالخيار A صحيح .

لندقّق في الخيار B : $g(x)=E(x)+E(1-x)$

عندما $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ يكون $E(x)=n$ حيث $n<x<n+1$.

$-n>-x>-n-1$ ومنه $1-n>1-x>-n$ وبالتالي $E(1-x)=-n$

ومنه $g(x)=n-n=0$ و منه g تابعٌ ثابت أياً تكن $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. فالخيار B صحيح .

لندقّق في الخيار C : $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=\lim\limits_{x\to 1}(0)=0$. فالخيار C خاطئ .

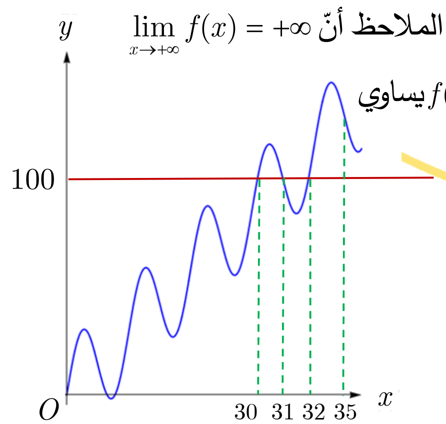
أمّا الخيار D : فهو صحيح منطقياً .

والتفسير : لمّا كان $g(x)=\begin{cases}1 & : x\in\mathbb{Z}\\ 0 & : x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ فالخط البياني للتابع g يعاني انقطاعات عند كل $x\in\mathbb{Z}$.

---

10) f تابع معرّف على $[0,+\infty[$ خطّه البياني C_f مرسوم في الشكل المجاور : من الملاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

عندئذٍ : أصغر عدد حقيقي A يحقّق الشرط : إذا كان $x>A$ كان $f(x)>100$ يساوي



A	30	B	31
C	32	D	35

التبرير

من الشكل نلاحظ أنّ أصغر عدد حقيقي يحقّق الشرط هو $A=32$

فالخيار الصحيح هو C .

التحليل 2:

11) بفرض $x=\ln 2$ و $y=\ln 3$ و $z=\ln 5$. عندئذٍ $\ln\frac{18}{20}$ تساوي

A	$2y-x-z$	B	$2y+x+z$	C	$2x+2y$	D	$2z-x-y$

التبرير

$\ln\frac{18}{20}=\ln 18-\ln 20=\ln(3^2\times 2)-\ln(5\times 2^2)$ ومنه

$$\ln\frac{18}{20}=\ln 3^2+\ln 2-(\ln 5+\ln 2^2)=2\ln 3+\ln 2-\ln 5-2\ln 2$$

ومنه $\ln\frac{18}{20}=2\ln 3-\ln 2-\ln 5=2y-x-z$. فالخيار الصحيح هو A .

---

12) ليكن f التابع المعيّن بالعلاقة : $f(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{+\infty}{-\infty}$

لإزالتها يمكن أنْ نكتب $f(x)$ بإحدى الصيغ الآتية :

A	$f(x)=2\frac{\ln x}{x}$	B	$f(x)=x\cdot\frac{\ln x^2}{x^2}$	C	$f(x)=-2\frac{\ln x}{x}$	D	$f(x)=-2\frac{\ln(-x)}{-x}$

التبرير

$$f(x)=\frac{\ln x^2}{x}=\frac{2\ln|x|}{x}$$

وبما أنّ x في جوار $-\infty$ فإنّ $|x|=-x$ وبالتالي

$f(x)=\frac{2\ln|x|}{x}=\frac{2\ln(-x)}{x}=-2\frac{\ln(-x)}{-x}$ فالخيار الصحيح هو D .

وإذا أردنا أنْ نكمل الحل : نفرض $t=-x$

عندما $x\to-\infty$ ستكون $t\to+\infty$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{t\to+\infty}(-2\frac{\ln t}{t})=-2\times 0=0$$

---

13) لتكن المعادلة (E) الآتية : $\ln(4x)=\ln(x-1)$

A	$\frac{-1}{3}$ حل للمعادلة (E)	B	المعادلة (E) تكافئ المعادلة $\ln(\frac{4x}{x-1})=0$	C	ليس للمعادلة (E) أية حلول	D	المعادلة (E) تكافئ المعادلة $4x=x-1$

التبرير

$\ln(4x)=\ln(x-1)$

❒ شرط الحل : $4x>0$ أي $x>0$

ومنه $D_1=]0,+\infty[\ni x$.

❒ $4x=x-1$

ومنه $3x=-1$ وبالتالي $x=\frac{-1}{3}$ مرفوض لأنّه لا ينتمي إلى المجال $]0,+\infty[=D_1$.

فالمعادلة مستحيلة الحل . أي $S=\varnothing$, فالخيار الصحيح هو C . والخيار A خاطئ وضوحاً .

أمّا الخيار B : معادلة تكافئ معادلة أي لها نفس مجموعة الحلول .

فالمعادلة $\ln(\frac{4x}{x-1}) = 0$ نتجت عن تطبيق خواص اللوغاريتم للمعادلة المفروضة :

حيث $\ln(4x) - \ln(x-1) = 0$

ومنه $\ln(\frac{4x}{x-1}) = 0$

فيصبح شرط الحل هنا $x \in \mathbb{R}$ أي $x = \frac{-1}{3}$ يصبح حلاً مقبولاً وطبعاً هذا خطأ لأننا لا نستطيع تطبيق خواص قبل إيجاد مجموعة التعريف . فالخيار B خاطئ .

أمّا الخيار D : خاطئ لأنّ المعادلة المفروضة تكافئ $x > 0$ و $4x = x-1$

أو تكافئ $x > 1$ و $4x = x-1$ وليس فقط $4x = x-1$.

---

14) ليكن f التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \sin(\ln x)$

A	$\lim\limits_{x \to e^{\frac{\pi}{2}}} f(x) = 0$	B	$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$	C	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$	D	$x \in [1, e^{\pi}]$ يكون $f(x) < 0$

التبرير

لندقق في الخيار A : $\lim\limits_{x \to e^{\frac{\pi}{2}}} f(x) = \sin(\ln e^{\frac{\pi}{2}}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \sin(\ln 1) = \sin 0 = 0$. فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : $\frac{f(x)}{x-1} = \frac{\sin(\ln x)}{x-1} = \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{\sin(\ln x)}{\ln x}$

ولمّا كان $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin(\ln x)}{\ln x} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

و $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ (نتيجة موجودة في الكتاب ص 164)

ومنه $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$. فالخيار الصحيح هو C .

أمّا الخيار D : عندما $x \in [1, e^{\pi}]$ أي $1 \le x \le e^{\pi}$ يكون $\ln 1 \le \ln x \le \ln e^{\pi}$ أي $0 \le \ln x \le \pi$

أي $\ln x$ تقع في الربعين الأول والثاني ومنه $\sin(\ln x) \ge 0$ أي $f(x) \ge 0$ فالخيار D خاطئ .

---

15) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = 5x\ln x - 5x$

و $\mathcal{T}$ المماس للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x = 1$.

A	$f'(x) = \frac{5}{x} - 5$ و C_f يقع فوق المماس $\mathcal{T}$ دوماً	B	$f'(x) = \frac{5}{x} - 5$ و C_f يقع تحت المماس $\mathcal{T}$ على المجال $]0,1[$	C	$f'(x) = 5\ln x$ و C_f يقع فوق المماس $\mathcal{T}$ دوماً	D	$f'(x) = 5\ln x$ و C_f يقع تحت المماس $\mathcal{T}$ على المجال $]0,1[$

التبرير $f(x) = 5x\ln x - 5x$

$$f'(x) = 5(1\ln x + \frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}) - 5 = 5(\ln x + 1) - 5 = 5\ln x$$

فالخياران A و B خاطئان .

من الواضح أنّ $f'(1) = 0$ فالمماس $\mathcal{T}$ معادلته $y = f(1) = -5$

إذا وضعنا جدول اطراد التابع f نجد

x	0 1 $+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$ 0 $+$
$f(x)$	‖ $\searrow$ -5 $\nearrow$

نلاحظ من جدول اطراد f أنّ $f(x) \geq -5$ أياً تكن $x \in]0,+\infty[$ ومنه C_f يقع فوق $\mathcal{T}$ دوماً .

فالخيار الصحيح هو C .

---

16) الحل المشترك لجملة المعادلتين : $\begin{cases} x \cdot y = e^{-3} \\ \ln x + \ln y^2 = -1 \end{cases}$ هو

A	$\{(e^{2}, e^{-5})\}$	B	$\{(e^{-4}, e)\}$	C	$\{(e^{-1}, 1)\}$	D	$\{(e^{-5}, e^{2})\}$

التبرير

$$\begin{cases} x \cdot y = e^{-3} \\ \ln x + \ln y^2 = -1 \end{cases}$$

جملة المعادلتين معرّفتين عندما $x > 0$ و $y^2 > 0$ أي $x > 0$ و $y \in \mathbb{R}^*$.

$\begin{cases} x \cdot y = e^{-3} \\ \ln(x.y^2) = \ln e^{-1} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x \cdot y = e^{-3} & (1) \\ x.y^2 = e^{-1} & (2) \end{cases}$

من (2) نجد $(x.y).y = e^{-1}$ وبالاستفادة من (1) نجد $e^{-3}.y = e^{-1}$ ومنه $y = e^{2}$

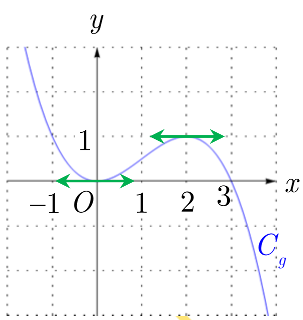
نعوّض في (1) فنجد $x = \dfrac{e^{-3}}{e^{2}} = e^{-5}$

ومنه فالحل : $(x,y) = (e^{-5}, e^{2})$. فالخيار الصحيح هو D .

---

17) ليكن C_g الخط البياني للتابع g المعرّف على $\mathbb{R}$ والمرسوم في الشكل المجاور :

ولنعرّف التابع f على D_f وفق العلاقة: $f(x) = \ln(g(x))$ خطّه البياني C_f



A	$D_f =]0,3[$	B	فواصل نقط تقاطع C_f مع محور الفواصل 0 و 3
C	$f'(x) = 0$ عندما $x = 2$	D	f متناقص تماماً على $]0,2[$

التبرير

لندقّق في الخيار A: f معرّف عندما $g(x) > 0$ وهذا محقّق عندما $D_f =]-\infty, 0[\cup]0,3[$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : لإيجاد فواصل نقط تقاطع C_f مع محور الفواصل. نضع $f(x) = 0$

ومنه $\ln(g(x)) = 0$ وهذا يكافئ $\ln(g(x)) = \ln 1$ أي $g(x) = 1$

وهي فواصل نقط تقاطع C_g مع المستقيم $y = 1$ هي $x = -1$ و $x = 2$. فالخيار B خاطئ .

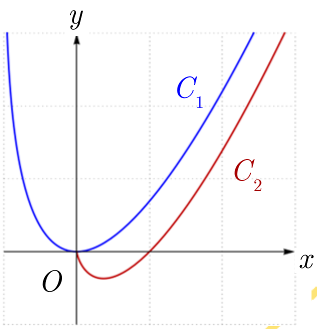
لندقّق في الخيار C : $f(x) = \ln(g(x))$

$f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ ومنه $f'(x) = 0$ عندما $g'(x) = 0$ وهذا محقّق عندما $x = 0$ مرفوض لأنّه لا ينتمي إلى D_f

وعندما $x = 2$ مقبول . فالخيار الصحيح هو C .

أمّا الخيار D : فإشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$ ومن الواضح أنّ g متزايد تماماً على المجال $]0,2[$ لأنّ خطّه البياني صاعد من اليسار إلى اليمين,أي $g'(x)>0$ على هذا المجال ومنه $f'(x)>0$ على هذا المجال وبالتالي f متزايد تماماً على $]0,2[$. فالخيار D خاطئ .

18) ليكن C_1 و C_2 الخطين البيانيين للتابعين f_1 و f_2 . المرسومين في الشكل المجاور :



حيث f_1 معرّف على $]-1,+\infty[$ وفق العلاقة : $f_1(x)=x\ln(x+1)$.

و f_2 معرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f_2(x)=x\ln x$.

A	C_1 و C_2 يشتركان بنقطة	B	f_2 يقبل قيمة صغرى محلياً عند $x=e^{-2}$
C	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f_1(x)-f_2(x))=1$	D	$\lim\limits_{x\to-1} f_1(x)=-\infty$

التبرير

لندقّق في الخيار A : من الواضح أنّ C_1 و C_2 لا يشتركان بأي نقطة حيث النقطة التي يعتقد الطالب أنهما يشتركان بها هي $O(0,0)$ ولكن $O(0,0)$ تنتمي إلى C_1 ولا تنتمي إلى C_2 حيث f_2 غير معرّف عند $x=0$. فالخيار A خاطئ .

وإذا حللنا جبرياً المعادلة $f_1(x)=f_2(x)$ نجد

$x\ln(x+1)=x\ln x$ المعادلة معرّفة عندما $x\in]-1,+\infty[\cap]0,+\infty[$

ومنه المعادلة معرّفة عندما $x\in]0,+\infty[$

$$x\ln(x+1)-x\ln x=0$$
$$x(\ln(x+1)-\ln x)=0$$

إمّا $x=0$ مرفوض

أو $\ln(x+1)-\ln x=0$

ومنه $\ln(x+1)=\ln x$

$x+1=x$ ومنه $1=0$ (معادلة متناقضة) فالمعادلة $f_1(x)=f_2(x)$ مستحيلة الحل

أي لا يوجد نقط مشتركة بين C_1 و C_2 . فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $f_2(x)=x\ln x$

f_2 اشتقاقي على $]0,+\infty[$.

$$f_2'(x)=1\ln x+\frac{1}{x}x=\ln x+1$$

ومنه $f_2'(x)=0$ عندما $\ln x+1=0$ ومنه

$\ln x=-1$ ومنه $x=e^{-1}$ فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : حيث من الممكن أن يكون هو الخيار الصحيح حيث المسافة بين C_1 و C_2 في جوار $+\infty$ تقريباً 1 .

لنتحقّق من ذلك جبرياً : $f_1(x)-f_2(x)=x\ln(x+1)-x\ln x$

ومنه $f_1(x)-f_2(x)=x(\ln(x+1)-\ln x)$

وبالتالي $f_1(x)-f_2(x)=x(\ln(\frac{x+1}{x}))$

ومنه $f_1(x)-f_2(x)=x(\ln(1+\frac{1}{x}))$

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

بفرض $t=\frac{1}{x}$ عندما $x\to+\infty$ يكون $t\to 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f_1(x)-f_2(x))=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$. فالخيار الصحيح هو C .

أمّا الخيار D : $f_1(x)=x\ln(x+1)$ حيث من الواضح من الرسم أنّ $\lim\limits_{x\to -1}f_1(x)=+\infty$ فالخيار D خاطئ .

أمّا إذا أردنا أن نتحقّق من ذلك جبرياً : $\lim\limits_{x\to -1}x=-1$ و $\lim\limits_{x\to -1}\ln(x+1)=-\infty$.

ومنه $\lim\limits_{x\to -1}f_1(x)=+\infty$. فالخيار D خاطئ .

---

19) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-1,1[$ وفق العلاقة : $f(x)=\ln(\frac{1-x}{x+1})$

و C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x)=\ln(x+1)-\ln(1-x)$. **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ**

A	f تابعٌ فردي	B	C_1 نظير C بالنسبة إلى المحور xx'
C	C_1 نظير C بالنسبة إلى المحور yy'	D	C_1 نظير C بالنسبة إلى $O(0,0)$

التبرير

لندقّق في الخيار A : التحقّق أنّ f تابعٌ فردي

الشرط الأول: أياً تكن $x\in]-1,1[$ كان $-x\in]-1,1[$ محقّق وضوحاً .

الشرط الثاني: $f(-x)=\ln(\frac{1+x}{-x+1})=\ln(\frac{-x+1}{1+x})^{-1}=-\ln(\frac{-x+1}{1+x})=-f(x)$

فالشرط الثاني محقّق ومنه f تابعٌ فردي . (أي خطّه البياني متناظر بالنسبة إلى $O(0,0)$) فالخيار A صحيح .

لندقّق في الخيارين A و B معاً : لو كان C_1 نظير C بالنسبة إلى المحور xx' كان $f_1(x)=-f(x)$

ولمّا كان f تابعٌ فردي كان $f_1(x)=-f(x)=f(-x)$ ومنه C_1 نظير C بالنسبة إلى المحور yy' أيضاً

عندئذٍ الخياران A و B إمّا صحيحين معاً أو خاطئين معاً والحالة الأخيرة مستحيلة حيث واحدٌ من الخيارات خاطئ

فالخياران B و C صحيحان .

وإذا أردنا حلاً تفصيلياً : $f_1(x)=\ln(x+1)-\ln(1-x)$

f_1 معرّف على $]-1,1[$

$$f_1(x)=-(\ln(1-x)-\ln(x+1))=-\ln(\frac{1-x}{x+1})=-f(x)$$

$$f_1(x)=-f(x)$$

ومنه C_1 نظير C بالنسبة إلى المحور xx' فالخيار A صحيح .

ولمّا كان f تابعٌ فردي كان $f_1(x)=-f(x)=f(-x)$.

ومنه C_1 نظير C بالنسبة إلى المحور yy' . فالخيار C أيضاً صحيح .

وبالتالي الخيار الوحيد الخاطئ هو الخيار D وهو الخيار الذي يجب أنْ نختاره .

---

20) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]2,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=x+1+\ln(\frac{ex+1}{x-2})$

A	المستقيم $y=x+1$ مقاربٌ للخط C .	B	المستقيم $y=x+2$ مقاربٌ للخط C .
C	المستقيم $y=x+e$ مقاربٌ للخط C .	D	المستقيم $x=e$ مقارب شاقولي للخط C .

التبرير $f(x)=x+1+\ln(\frac{ex+1}{x-2})$

إذا كان $f(x)=ax+b+g(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lambda$.

كان المستقيم الذي معادلته $y=ax+b+\lambda$ مستقيم مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\frac{ex+1}{x-2})=\ln e=1$ ومنه المستقيم $y=x+1+1=x+2$

هو المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$. فالخيار الصحيح هو B .

الجبر:

21) أحد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي $w=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$ هو

A	$\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$	B	$\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$	C	$\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$	D	$\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

التبرير $w=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

طريقة (1) : بفرض $z=x+yi$ أحد الجذرين التربيعيين للعدد $w=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

فيكون $z^2=w=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

أي $(x+yi)^2=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

ومنه $x^2-y^2+2xyi=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

ومنه $\boxed{x^2-y^2=-2\sqrt{2}}$

و $2xy=-2\sqrt{2}$ ومنه $\boxed{x\cdot y=-\sqrt{2}}$

$\left|(x+yi)^2\right|=\left|-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i\right|$

وبالتالي $|x+yi|^2=\left|-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i\right|$

ومنه $x^2+y^2=\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=4$ ومنه $\boxed{x^2+y^2=4}$

أصبح لدينا المعادلات الثلاث الآتية :

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 & (1)\\ x^2-y^2=-2\sqrt{2} & (2)\\ x\cdot y=-\sqrt{2} & (3)\end{cases}$$

❑ بجمع (1) و (2) نجد $2x^2=4-2\sqrt{2}$ ومنه $x^2=2-\sqrt{2}$

ومنه إمّا $x=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ أو $x=-\sqrt{2-\sqrt{2}}$

❑ بطرح (2) من (1) نجد $2y^2=4+2\sqrt{2}$ ومنه $y^2=2+\sqrt{2}$

ومنه إمّا $y=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ أو $y=-\sqrt{2+\sqrt{2}}$

❐ من (3) نجد $x \cdot y = -\sqrt{2} < 0$ ومنه x و y من إشارتين مختلفتين

وبالتالي $z_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ أو $z_2 = -\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ فالخيار الصحيح هو B .

طريقة (2) : بفرض z أحد الجذرين التربيعين للعدد $w = a + bi$ فيكون

$$z^2 = w = a + bi$$

في حالة $b > 0$ يكون $z = \pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} + i\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)$

في حالة $b < 0$ يكون $z = \pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} - i\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)$

التفسير: بفرض $z = x + yi$ فتتحقّق المعادلات الثلاث الآتية :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |w| & (1) \\ x^2 - y^2 = a & (2) \\ x \cdot y = \dfrac{b}{2} & (3) \end{cases}$$

❐ بجمع (1) و (2) نجد $2x^2 = |w| + a$ ومنه $x^2 = \frac{|w|+a}{2}$

ومنه $x = \sqrt{\frac{|w|+a}{2}}$ أو $x = -\sqrt{\frac{|w|+a}{2}}$

❐ بطرح (2) من (1) نجد $2y^2 = |w| - a$ ومنه $y^2 = \frac{|w|-a}{2}$

ومنه $y = \sqrt{\frac{|w|-a}{2}}$ أو $y = -\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}$

❐ من (3) نجد : $x \cdot y = \frac{b}{2}$

في حالة $b > 0$ يكون $z = \pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} + i\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)$

في حالة $b < 0$ يكون $z = \pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} - i\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)$

في مثالنا $b < 0$ ومنه $z = \pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}} - i\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)$ لدينا $|w| = 4$ و $a = -2\sqrt{2}$

$z = \pm\left(\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$ فالخيار الصحيح هو B .

طريقة (3) : بما أنّ $b<0$ فإنّ قسمي الحقيقي والتخيلي في الجذرين التربيعين من إشارتين مختلفتين فإنّ الخيارين A و C خاطئان .

ولمّا كان $a<0$ كان القسم التخيلي بالقيمة المطلقة أكبر من القسم الحقيقي بالقيمة المطلقة لأنّ $x^2-y^2=a<0$ ومنه $x^2-y^2<0$ وبالتالي $x^2<y^2$ ومنه $|x|<|y|$

فالخيار الصحيح هو B .

طريقة (4) : أنْ نربّع الجواب في الخيار B أو D الذي يكون ناتجه هو w هو الخيار الصحيح .

---

22) لتكن المعادلة : $z^2+bz+c=0$ حيث b و c عددان حقيقيان وليكن العدد $1+5i$ أحد حلولها عندئذٍ $b+c$ يساوي

A	-24	B	23	C	24	D	26

التبرير $z^2+bz+c=0$

بما أنّ المعادلة بأمثال حقيقية و $z_1=1+5i$ جذر للمعادلة كان $z_2=\overline{z}_1=1-\sqrt{5}i$ أيضاً جذراً لها

$$z_1+z_2=z_1+\overline{z}_1=2\operatorname{Re}(z_1)=2=\frac{-b}{1}$$

ومنه $b=-2$

$$z_1\times z_2=z_1\times\overline{z}_1=|z_1|^2=1+25=26=\frac{c}{1}=c$$

ومنه $c=26$

وبالتالي $b+c=-2+26=24$ فالخيار الصحيح هو C .

---

23) ليكن العدد العقدي $z=a+bi$ حيث $a<0$ و $z^2+|z|=12$ عندئذٍ $\operatorname{Re}(z)$ تساوي

A	-4	B	-3	C	-2	D	-1

التبرير $z^2+|z|=12$

نعوّض $z=a+bi$ فنجد $(a+bi)^2+\sqrt{a^2+b^2}=12$ ومنه

$a^2-b^2+2abi+\sqrt{a^2+b^2}=12$ وبالتالي

$$a^2-b^2+\sqrt{a^2+b^2}+2abi=12$$

$2ab=0$. إمّا $a=0$ مرفوض أو $\boxed{b=0}$ مقبول

$a^2-b^2+\sqrt{a^2+b^2}=12$ ولمّا كان $b=0$

$a^2+\sqrt{a^2}=12$ ومنه $a^2+|a|=12$

ولمّا كان $a<0$ كان $|a|=-a$ ومنه

$a^2-a=12$ أي $a^2-a-12=0$ ومنه $(a-4)(a+3)=0$

إمّا $a-4=0$ وبالتالي $a=4$ مرفوض (كون $a<0$)

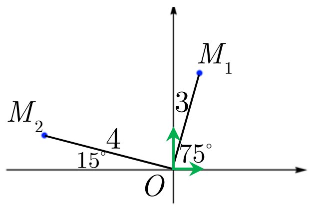
أو $a+3=0$ ومنه $\boxed{a=-3}$ مقبول . ومنه $z=-3=\operatorname{Re}(z)$. فالخيار الصحيح هو B .

ملاحظة : من البداية نلاحظ أنّ الطرف الثاني عددٌ حقيقي وبالتالي z إمّا حقيقي أو تخيلي بحت ولمّا كان $a<0$ فمستحيل أن يكون تخيلياً بحتاً (لأنّه عندما يكون تخيلياً بحتاً سيكون $a=0$) وهذا مرفوض .

وبالتالي z من الشكل $z=a$ ثمّ نتابع .

---

24) لتكن النقطتان : $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ الممثلتان للعددين العقديين z_1 و z_2 بالترتيب : في الشكل المجاور : عندئذٍ : $|z_1+z_2|$ تساوي



A	7	B	5
C	$\frac{5}{2}$	D	$3\sqrt{2}$

التبرير من الواضح أنّ المثلّث OM_1M_2 قائم في O

ومنه $|z_1+z_2|$ تمثّل طويلة مجموع الشعاعين $\left|\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}\right|$

أي تمثّل قطر المستطيل المنشأ على المثلث OM_1M_2 القائم في O . وهو يساوي $M_1M_2=5$ فالخيار الصحيح هو B .

---

25) ليكن العددان العقديان: z و z' غير المعدومين وليكن w عددٌ عقدي يحقق $w=\frac{z}{z'}$ وبافتراض أنّ $\mathrm{Re}(\overline{z}\cdot z')=0$

A	w تخيلي بحت	B	w حقيقي	C	$\lvert w\rvert=1$	D	w ليس حقيقياً وليس تخيّلياً بحتاً

التبرير لنتحقّق أولاً من الخيارين A أو B $w=\frac{z}{z'}$

لمّا كان $\mathrm{Re}(\overline{z}\cdot z')=0$ كان $\overline{z}\cdot z'=\mathrm{Im}(z'\cdot\overline{z})i$

من جهة أخرى :

$$w=\frac{z}{z'}=\frac{z\cdot\overline{z}}{z'\cdot\overline{z}}=\frac{|z|^2}{\mathrm{Im}(z'\cdot\overline{z})i}=-i\frac{\boxed{|z|^2}\in\mathbb{R}}{\boxed{\mathrm{Im}(z'\cdot\overline{z})}\in\mathbb{R}}$$

ومنه w تخيلي بحت . فالخيار الصحيح هو A .

---

26) في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$:

مجموعة النقاط $M(z)$ حيث z عدد عقدي غير معدوم التي تجعل العدد $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ تمثّل

A	محور الأعداد الحقيقية محذوف منه $z=0$.	B	دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي الواحد	C	اجتماع مجموعتي النقاط الموجودتين في الخيارين A و B	D	اجتماع محوري الإحداثيات محذوف منه النقطة O

التبرير بفرض $w=z+\frac{1}{z}$

لدينا فرضاً w حقيقي ومنه $\overline{w}=w$

ومنه $\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}=z+\frac{1}{z}$

وبالتالي $z-\overline{z}+\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}=0$

ومنه $z-\overline{z}+\frac{\overline{z}-z}{z\cdot\overline{z}}=0$

$$z\cdot\overline{z}(z-\overline{z})-(z-\overline{z})=0$$

$$(z-\overline{z})(z\cdot\overline{z}-1)=0$$

إمّا $z-\overline{z}=0$ ومنه $z=\overline{z}$ أي $M(z)$ تمثّل محور الأعداد الحقيقية محذوف منه $z=0$.

أو $z\cdot\overline{z}-1=0$ وبالتالي $z\cdot\overline{z}=1$ ومنه $|z|^2=1$

أي $|z|=1$ ومنه $M(z)$ تمثّل دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي الواحد .

فالخيار الصحيح هو C .

طريقة ثانية : من الواضح أنّه عندما يكون z عدداً حقيقياً مغايراً للصفر فناتج جمع العدد إلى مقلوبه هو حقيقي

أي $M(z)$ تمثّل محور الأعداد الحقيقية محذوف منه $z=0$ .... (1)

وكذلك إذا كان $\frac{1}{z}=\overline{z}$ يصبح $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$ أي حقيقي ولكن $\frac{1}{z}=\overline{z}$ يكافئ $|z|=1$

أي $M(z)$ تمثّل دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي الواحد .... (2)

من (1) و (2) نجد أنّ الخيار الصحيح هو C .

---

27) ليكن θ عددٌ حقيقي حيث $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ فالشكل الأسي للعدد $z=e^{i3\theta}+e^{i\theta}$ هو

A	$z=2\cos(\pi+\theta)e^{i(\pi+2\theta)}$	B	$z=2\cos(\pi+\theta)e^{i(\pi+\theta)}$	C	$z=e^{i4\theta}$	D	$z=2\cos\theta\, e^{i(\pi+2\theta)}$

التبرير

$z=e^{i3\theta}+e^{i\theta}$

ومنه $z=e^{i\theta}(e^{i2\theta}+1)$

وبالتالي $z=e^{i\theta}e^{i\theta}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$

$z=e^{2i\theta}(2\cos\theta)$ (ونستطيع مباشرة إخراج $e^{2i\theta}$ منذ البداية عامل مشترك فنحصل على النتيجة الأخيرة)

بما أنّ $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ فإنّ $\cos\theta<0$ على هذا المجال فالشكل الأخير ليس شكلاً أسياً .

ومنه $z=e^{2i\theta}(-2\cos\theta)e^{i\pi}$

$z=e^{i(2\theta+\pi)}(-2\cos\theta)$

$z=2\cos(\pi+\theta)e^{i(2\theta+\pi)}$ (لأنّ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$) . فالخيار الصحيح هو A .

---

28) ليكن z عدداً عقدياً يقع في الربع الثالث و $\arg(z^2)=\frac{\pi}{6}$ عندئذٍ $\arg(z)$ تساوي

A	$\frac{\pi}{12}$	B	$\frac{\pi}{3}$	C	$\frac{4\pi}{3}$	D	$\frac{13\pi}{12}$

التبرير

$\arg(z^2)=\frac{\pi}{6}$ ومنه

$2\arg(z)=\frac{\pi}{6}+2\pi k$

$\arg(z)=\frac{\pi}{12}+\pi k \;:\; k\in\{0,1\}$

عندما $k=0$: يكون $\arg(z)=\frac{\pi}{12}$ مرفوض لأنّ z يقع في الربع الثالث .

عندما $k=1$: يكون $\arg(z)=\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{13\pi}{12}$ مقبول . فالخيار الصحيح هو D .

---

29) لتكن المعادلة : $z^3 - 5z^2 + 9z - 5 = 0$ ولنرمز لمجموعة حلولها في $\mathbb{C}$ بالرمز S

ولتكن النقاط A و B و C التي تمثّل حلولها في المستوي العقدي عندئذٍ

A	$S = \{1, 2+i, -2-i\}$	B	$S = \{i, 2+i, 2-i\}$	C	$S = \{1, 1+i, 1-i\}$	D	المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

التبرير نحن نعلم كل كثير حدود بأمثال حقيقية إنْ وُجِدَ لها جذراً عقدياً فمرافقه جذراً أيضاً له .

فالخياران A و B خاطئان .

نلاحظ أنّ $z = 1$ جذرٌ للمعادلة .لإيجاد الجذرين الآخرين نقسّم على $z - 1$

$$\begin{array}{r|l} & z^2 - 4z + 5 \\ z-1 & z^3 - 5z^2 + 9z - 5 \\ & \mp z^3 \pm z^2 \\ \hline & -4z^2 + 9z - 5 \\ & \pm 4z^2 \mp 4z \\ \hline & 5z - 5 \\ & \mp 5z \pm 5 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$z^2 - 4z + 5 = 0$

$a = 1$ و $b = -4$ و $c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(5) = -4 < 0$

للمعادلة حلّان في $\mathbb{C}$:

$z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{4 + 2i}{2} = 2 + i$ (حيث الجذر الأول هو $z_1 = 1$)

$z_3 = \overline{z_2} = 2 - i$ فالخيار C خاطئ . فأصبح الخيار الصحيح هو D .

وإذا أردنا أنْ نكمل الحل : $S = \{1, 2+i, 2-i\}$

$z_1 = 1 \to A(1,0)$

$z_2 = 2 + i \to B(2,1)$

$z_3 = 2 - i \to C(2,-1)$

$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$

فالمثلث ABC متساوي الساقين .

ملاحظة : كل معادلة كثير حدود من الدرجة الثالثة بأمثال حقيقية إنّ كانت النقاط التي تمثّل الجذور تشكّل مثلث فالمثلث متساوي الساقين لأنّ أحد الجذور سيكون حقيقياً فهو يقع على xx' والجذرين الآخرين سيكونا عقديين ومترافقين أي عبارة عن نقطتين متناظرتين بالنسبة إلى المحور xx') فالمثلث متساوي الساقين هو أمرٌ بديهي .

$BC = \sqrt{(2-2)^2 + (1+1)^2} = 2$

نلاحظ أنّ : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

لأنّ $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2^2$

$4 = 2 + 2$ ومنه $4 = 4$ وبالتالي حسب عكس فيثاغورس نجد المثلث ABC قائم في A

وبالتالي أصبح المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين .

30) ليكن z عدداً عقدياً يحقّق : $z=\dfrac{\sin x-i\cos x}{\cos x-i\sin x}$. عندئذٍ الشكل الأسي للعدد z هو

A	$e^{i(\frac{3\pi}{2}+2x)}$	B	$e^{i(\frac{3\pi}{2}+x)}$	C	$e^{i(\frac{3\pi}{2})}$	D	$e^{i(2x)}$

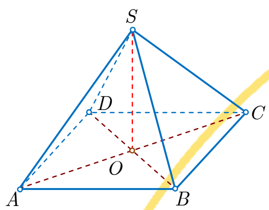
التبرير

$z=\dfrac{\sin x-i\cos x}{\cos x-i\sin x}$

ومنه $z=\dfrac{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)+i\sin(\frac{3\pi}{2}+x)}{\cos(-x)+i\sin(-x)}=\dfrac{e^{i(\frac{3\pi}{2}+x)}}{e^{-ix}}=e^{i(\frac{3\pi}{2}+2x)}$

فالخيار الصحيح هو A .

الأشعة :



31) $S-ABCD$ هرم منتظم قاعدته مربّع طول ضلعه يساوي $2\sqrt{2}$ ومركزه O

ورأس الهرم S حيث $SO=3$. ولنختر معلماً متجانساً $(O;\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\frac{1}{2}\overrightarrow{OC},\frac{1}{3}\overrightarrow{OS})$ عندئذٍ :

A	$B(1,0,0)$	B	$A(0,-2,0)$	C	$D(0,-1,0)$	D	$S(0,0,2)$

التبرير

لندقّق في الخيار A : $B(2,0,0)$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $A(0,-2,0)$. فالخيار B صحيح .

لندقّق في الخيار C : $D(-2,0,0)$. فالخيار C خاطئ .

لندقّق في الخيار D : $S(0,0,3)$. فالخيار D خاطئ .

---

32) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(1,1,-7)$ و $B(-2,0,0)$ و $C(7,3,-21)$ و $D(0,0,-4)$

واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو :

A	النقاط : A و B و C تقع على استقامةٍ واحدة	B	النقاط : Aو Bو D تعيّن مستوٍ وحيد .	C	النقاط : A و B و C و D لا تقع في مستوٍ واحد .	D	بفرض I نظيرة D بالنسبة إلى B فتكون النقطة Aمركز ثقل المثلث CDI .

التبرير

لندقّق في الخيار A : $\overrightarrow{AB}(-3,-1,7)$ و $\overrightarrow{AC}(6,2,-14)$

نلاحظ أنّ : $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$ فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً فالنقاط A و B و C تقع على استقامةٍ واحدة .

فالخيار A صحيح .

لندقّق في الخيار B : من الواضح أنّه خيار صحيح لأنّه إذا كان خيار خاطئ أي النقاط تقع على استقامةٍ واحدة أيضاً كان الخياران C و D أيضاً خاطئين وهذا يناقض أنّه يوجد خيارٌ واحد خاطئ .

وإذا أردنا الحل بشكل مفصّل: $\overrightarrow{AB}(-3,-1,7)$ و $\overrightarrow{AD}(-1,-1,3)$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة $(\frac{-1}{-1}\neq\frac{-1}{-3})$.

فالنقاط A و B و D تعيّن مستوٍ وحيد . فالخيار B صحيح كما توقّعنا .

لندقّق في الخيار C : لمّا كانت النقاط A و B و C تقع على استقامةٍ واحدة و D نقطة خارجه(مستقيم ونقطة خارجه تشكّل مستوٍ وحيد) فالنقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد .

فالخيار C خاطئ وهو الخيار الوحيد الذي يجب أنْ نختاره .

أمّا الخيار D : $I(2x_B - x_D, 2y_B - y_D, 2z_B - z_D)$ ومنه $I(-4,0,4)$.

إحداثيات مركز ثقل المثلث CDI من الشكل : $\left(\dfrac{x_C + x_D + x_I}{3}, \dfrac{y_C + y_D + y_I}{3}, \dfrac{z_C + z_D + z_I}{3}\right)$

$\left(\dfrac{7+0-4}{3}, \dfrac{3+0+0}{3}, \dfrac{-4-21+4}{3}\right)$

ومنه $A = (1,1,-7)$. فالخيار D صحيح .

---

33) مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقّق إحداثياتها العلاقات: $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ و $0 \le y \le 3$ تمثّل

A	مخروط رأسه O ومحوره $(O;\vec{j})$ ونصف قطر قاعدته يساوي 1 وارتفاعه 1	B	مخروط رأسه O ومحوره $(O;\vec{j})$ ونصف قطر قاعدته يساوي 3 وارتفاعه 3	C	أسطوانة محورها $(O;\vec{j})$ ونصف قطر قاعدتها يساوي 3 وارتفاعها 3 .	D	أسطوانة محورها $(O;\vec{j})$ ونصف قطر قاعدتها يساوي 1 وارتفاعها 3 .

التبرير $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ و $0 \le y \le 3$

معادلة المخروط الذي محوره $(O;\vec{j})$ من الشكل : $x^2 + z^2 - \dfrac{r^2}{h^2} y^2 = 0$ و $0 \le y \le h$ أو $-h \le y \le 0$

بالمطابقة نجد $\dfrac{r^2}{h^2} = 1$ ومنه $r^2 = h^2$ أي $r = h$ ولمّا كان $0 \le y \le 3$ كان $h = 3$ ومنه $r = h = 3$

فمجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقّق إحداثياتها العلاقات: $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ و $0 \le y \le 3$ تمثّل مخروط رأسه O ومحوره $(O;\vec{j})$ ونصف قطر قاعدته يساوي 3 وارتفاعه 3 . فالخيار الصحيح هو B .

---

34) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(1,2,3)$ و $B(3,-2,-1)$ و $C(m,\sqrt{m+1},1)$ حيث $m \in [-1,+\infty[$

إنّ قيم m التي تجعل النقطة C تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هي :

A	$m \in \{0,8\}$	B	$m \in \{0\}$	C	$m \in \{8\}$	D	$m \in \{1\}$

التبرير النقطة C تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ إذا وفقط إذا كان

$CA = CB$ ومنه $CA^2 = CB^2$

$$(m-1)^2 + (\sqrt{m+1} - 2)^2 + (3-1)^2 = (m-3)^2 + (\sqrt{m+1} + 2)^2 + (1+1)^2$$

$$\cancel{m^2} - 2m + 1 + \cancel{m} + \cancel{1} - 4\sqrt{m+1} + \cancel{4} + \cancel{4} = \cancel{m^2} - 6m + 9 + \cancel{m} + \cancel{1} + 4\sqrt{m+1} + \cancel{4} + \cancel{4}$$

$$8\sqrt{m+1} = 4m - 8$$

ومنه $2\sqrt{m+1} = m - 2$

شرط الحل : $m \ge 2$ أي $m \in [2,+\infty[$.

نربع الطرفين : $4(m+1) = (m-2)^2$ ومنه

$$4m + 4 = m^2 - 4m + 4$$

ومنه $m^2 - 8m = 0$

أي $m(m-8)=0$

إمّا $m=0 \notin [2,+\infty[$ مرفوض

أو $m=8 \in [2,+\infty[$ مقبول فالخيار الصحيح هو C .

---

35) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

معادلة الكرة التي تمر بالنقطتين $A(2,-1,3)$ و $B(0,5,-1)$ ومركزها يقع على محور الفواصل هي :

A	$(x+3)^2+y^2+z^2=\sqrt{35}$	B	$(x+3)^2+y^2+z^2=35$
C	$(x-3)^2+y^2+z^2=35$	D	$(x-3)^2+y^2+z^2=\sqrt{35}$

التبرير مركز الكرة يقع على محو الفواصل فإحداثياته من الشكل : $\Omega(x,0,0)$.

ويتحقّق $\Omega A=\Omega B=R$ ومنه $\Omega A^2=\Omega B^2$ وبالتالي :

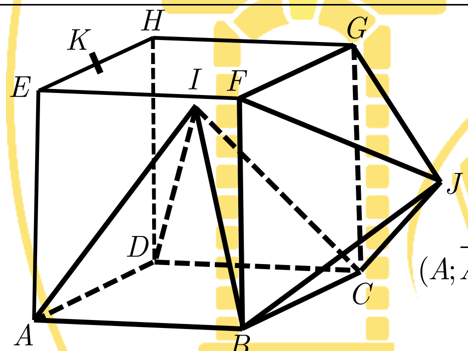
$$(x-2)^2+(-1-0)^2+(3-0)^2=(x-0)^2+(5-0)^2+(-1-0)^2$$

$$x^2-4x+4+1+9=x^2+25+1$$

ومنه $-4x=12$ وبالتالي $x=-3$ فمركز الكرة $\Omega(-3,0,0)$

$$R=\Omega A=\sqrt{(2+3)^2+(-1-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{35}$$

فمعادلة الكرة هي : $(x+3)^2+y^2+z^2=35$ فالخيار الصحيح هو B .



36) $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 1

يوجد هرم منتظم $I-ABCD$ يقع داخله حيث ارتفاعه a

و هرم منتظم $J-BCGF$ يقع خارجه طبوق مع الهرم السابق

ولكن خارجه وجوههما مثلثات متساوية الساقين و رأسيهما I و J .

ولتكن النقطة K منتصف $[EH]$. وإذا اخترنا معلماً متجانساً : $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

إنّ قيمة a التي تجعل النقاط K و I و J تقع على استقامةٍ واحدة تساوي

A	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	B	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	C	$\frac{2}{3}$	D	$\frac{3}{4}$

التبرير سيكون $I(\frac{1}{2},\frac{1}{2},a)$ و $K(0,\frac{1}{2},1)$ و $J(1+a,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{KI}(\frac{1}{2},0,a-1)$ و $\overrightarrow{KJ}(1+a,0,\frac{-1}{2})$

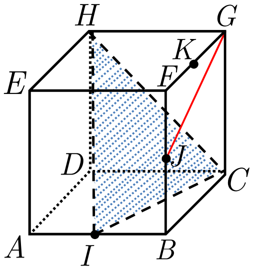
تقع النقاط K و I و J تقع على استقامةٍ واحدة إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{KI}$ و $\overrightarrow{KJ}$ مرتبطين خطياً .

وهذا يكافئ : $\dfrac{a+1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{-1}{2}}{a-1}$

ومنه $a^2-1=-\frac{1}{4}$ وبالتالي $a^2=\frac{3}{4}$ ومنه $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (كون $a>0$ ارتفاع هرم) . فالخيار الصحيح هو B .

37) $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 1 .

I و J و K هي منتصفات الأحرف : $[AB]$ و $[BF]$ و $[GF]$



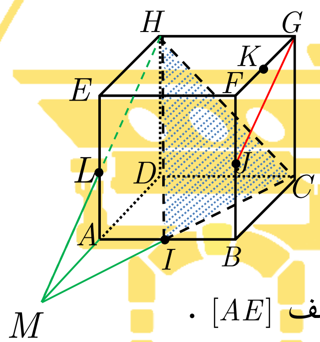
A	المستقيم (GJ) يوازي المستوي (HIC)	B	المستقيم (GJ) يقطع المستوي (HIC) .
C	النقاط H و A و I و K تقع في مستوٍ واحد	D	المستقيم (EA) يوازي المستوي (HIC) .

التبرير من الواضح أنّ الخيار C خاطئ : لأنّ النقاط H و A و I تقع في المستوي $(ABGH)$ و النقطة $K \notin (ABGH)$. فالنقاط H و A و I و K لا تقع في مستوٍ واحد . فالخيار C خاطئ .

أمّا الخيار D : أيضاً خاطئ وضوحاً . حيث المستقيم (GC) يقطع المستوي (HIC) فموازيه (EA) يقطعه أيضاً .

بقي الخياران A و B : حيث نلاحظ من الشكل أنّ الخيار A هو الخيار الصحيح .

وإذا أردنا الحل التفصيلي :



طريقة (1) هندسياً :

إن المستقيمين (CI) و (DA) متقاطعان في M فالمستوي (HIC) هو نفسه المستوي (HCM) حيث الأخير يقطع (EA) في L .

إنّ $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ ومنه I منتصف $[MC]$ و A منتصف $[MD]$.

في المثلث MDH : A منتصف $[MD]$ و (AL) يوازي (DH) ومنه L منتصف $[AE]$.

$$\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EL} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{GJ}$$

ومنه $\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{GJ}$ أي المستقيم (GJ) يوازي المستقيم (HL) المحتوى في المستوي (HIC)

فالمستقيم (GJ) يوازي المستوي (HIC) . فالخيار A هو الخيار الصحيح .

طريقة ثانية (جبرياً): لنتّخذ معلماً : $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

$I(\frac{1}{2},0,0)$ و $C(1,1,0)$ و $H(0,1,1)$ و $G(1,1,1)$ و $J(1,0,\frac{1}{2})$.

$\overrightarrow{HI}(\frac{1}{2},-1,-1)$ و $\overrightarrow{HC}(1,0,-1)$ (هما شعاعا توجيه المستوي)

$\overrightarrow{GJ}(0,-1,-\frac{1}{2})$ (شعاع توجيه المستقيم (GJ))

من الملاحظ أنّ : $\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HI}$ فالأشعة $\overrightarrow{GJ}$ و $\overrightarrow{HC}$ و $\overrightarrow{HI}$ مرتبطة خطياً .

فالمستقيم (GJ) يوازي المستوي (HIC) . فالخيار A هو الخيار الصحيح .

38) في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط A و B و C التي لا تقع على استقامةٍ واحدة .

واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو:

A	نعرّف المستقيم (AB) بأنّه مجموعة نقط الفراغ M التي تحقّق $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.	B	نعرّف المستوي (ABC) بأنّه مجموعة نقط الفراغ M التي تحقّق : $\overrightarrow{AM}=a\,\overrightarrow{AB}+b\,\overrightarrow{AC}$ حيث $a,b\in\mathbb{R}$	C	بفرض النقطة K تحقق $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$ و النقطة L تحقّق $\overrightarrow{BL}=-3\overrightarrow{BC}$ فالنقاط A و B و C و K و L تقع في مستوٍ واحد.	D	مهما كانت النقطة D من الفراغ كانت الأشعة $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطة خطياً .

التبرير

لندقّق في الخيار A : هو خيارٌ صحيح هو تعريف المستقيم في الفراغ شعاعياً .

لندقّق في الخيار B : هو خيارٌ صحيح هو تعريف المستوي في الفراغ شعاعياً .

لندقّق في الخيار C : لمّا كان $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$ كان الشعاعان $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطياً فالنقاط A و B و K تقع على مستقيم واحد وليكن d_1 .

لمّا كان $\overrightarrow{BL}=-3\overrightarrow{BC}$ كان الشعاعان $\overrightarrow{BL}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطياً .

فالنقاط C و B و L تقع على مستقيم واحد وليكن d_2 .

وبما أنّ المستقيمين d_1 و d_2 يشتركان بالنقطة B و النقاط A و B و C لا تقع على استقامةٍ واحدة فرضاً كان المستقيمان d_1 و d_2 متقاطعين . فهما يشكّلان مستوٍ وحيد فالنقاط المفروضة التي تقع عليهما تقع في مستوٍ واحد .

فالخيار الصحيح هو C .

أمّا الخيار D : فهو الخيار الخاطئ . حيث إذا تأملنا رباعي وجوه $DABC$. كانت الأشعة $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ ليست مرتبطة خطياً . وهو الخيار الوحيد الخاطئ الذي يجب أن نختاره .

---

39) $ABCD$ رباعي وجوه . النقطة I المعرّفة بالعلاقة $2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ تقع :

A	منتصف الحرف $[BC]$	B	منتصف الحرف $[BD]$	C	منتصف الحرف $[CD]$	D	خارج رباعي الوجوه

التبرير

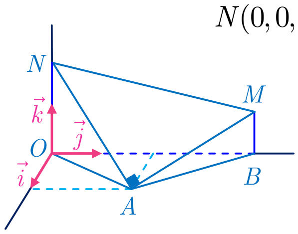
$2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

وبالتالي $2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}$

ومنه $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$ I منتصف الحرف $[BD]$ (خاصة المتوسّط) . فالخيار B هو الخيار الصحيح .

---

40) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(\sqrt{2},2,0)$ و $B(0,4,0)$ و $M(0,4,1)$ و $N(0,0,2)$



A	مساحة $OBMN$ تساوي 12	B	مساحة AMN تساوي $\sqrt{35}$
C	ارتفاع الهرم $A-OBMN$ يساوي $\sqrt{2}$	D	حجم الهرم $A-OBMN$ يساوي $4\sqrt{2}$

التبرير لندقّق في الخيار A : الشكل $OBMN$ شبه منحرف قائم .

$S(OBMN)=\dfrac{ON+MB}{2}\times OB=\dfrac{2+1}{2}\times 4=6$ فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : المثلث AMN قائم في A.

حيث $AM=\sqrt{2+4+1}=\sqrt{7}$ و $AN=\sqrt{2+4+4}=\sqrt{10}$

ومنه $S(AMN)=\dfrac{\sqrt{70}}{2}=\sqrt{\dfrac{70}{4}}=\sqrt{\dfrac{35}{2}}$. فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : من الواضح انّ ارتفاع الهرم $h=x_A=\sqrt{2}$. فالخيار الصحيح هو C .

أمّا الخيار D : $\mathcal{V}=\dfrac{1}{3}S\times h=\dfrac{1}{3}\times 6\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$. فالخيار D خاطئ .

....انتهت الأجوبة..

فيما يأتي 40 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 15 درجة .

التحليل 1:

1) f و g تابعان معرّفان على $\mathbb{R}$ ويحققّان : $f(x) \le g(x)$ أياً تكن $x \in \mathbb{R}$ عندئذٍ

A	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	B	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
C	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	D	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(\cos\sqrt{x} - 1)}{x}$ تساوي

A	1	B	$-\dfrac{1}{2}$	C	$\dfrac{1}{2}$	D	0

3) f تابع معرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق العلاقة : $f(x) = 5 + \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ خطّه البياني C_f يقبل مستقيم مقارب معادلته :

A	$x = 0$	B	$x = -1$	C	$y = 0$	D	$y = 5x$

4) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ ويقبل مستقيماً مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ معادلته : $y = 3x - 5$:

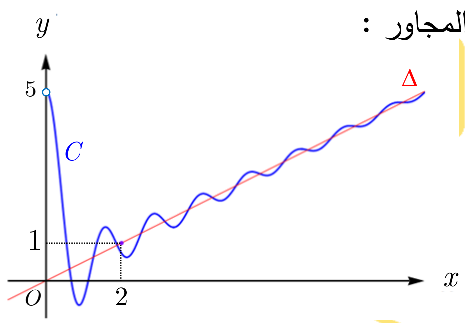
عندئذٍ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-x + f(x)}{x}\right)$ تساوي

A	-3	B	-2	C	2	D	3

5) f تابعٌ معرّف على المجال $[1,+\infty[$ ويحقّق المتراجحة : $\dfrac{1}{x} \le f(x) \le 1$.

A	$f(1) \ne 1$	B	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	C	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$	D	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

6) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$: المرسوم في الشكل المجاور :



A	الخط C يقبل مستقيم مقارب مائل Δ معادلته $y = \dfrac{1}{2}x$.	B	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$
C	$\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$	D	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$

7) **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو:**

A	ليس للتابع $x \mapsto \cos x$ نهاية عند $+\infty$	B	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{1}{\cos x} = -\infty$	C	$\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\dfrac{1}{x} = 1$	D	$\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{1}{\sin x} = -\infty$

8) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$ وفق : $f(x) = x + \sqrt{2x^2 - 8}$

وليكن المستقيم Δ الذي معادلته $y = (1-\sqrt{2})x$. **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو :**

A	المستقيم Δ مقارب مائل للخط C_f في جوار $-\infty$	B	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	C	C_f يقع تحت Δ على المجال $]-\infty,-2]$	D	C_f يقع تحت Δ على المجال $[2,+\infty[$

9) ليكن $x \mapsto E(x)$ تابع الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

ولنعرّف التابع f على $[\frac{1}{2},2]$ وفق العلاقة: $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

A	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{1}{2}} & : x \in [\frac{1}{2},1[\\ 1 + \sqrt{x-1} & : x \in [1,2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases}$	B	$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & : x \in [\frac{1}{2},1[\\ 1 + \sqrt{x-1} & : x \in [1,2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases}$
C	$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & : x \in [\frac{1}{2},1[\\ 1 - \sqrt{x-1} & : x \in [1,2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases}$	D	$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & : x \in [\frac{1}{2},1[\\ 1 - \sqrt{x-1} & : x \in [1,2[\\ -1 & : x = 2 \end{cases}$

10) ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ وفق العلاقة : $f(x) = \dfrac{2x-3}{1-x}$

إنّ أكبر عدد حقيقي A يحقّق الشرط : إذا كان $x < A$ كان $f(x) \in]-2.05,-1.95[$ يساوي

A	-21	B	-20	C	-19	D	21

التحليل 2:

11) بفرض $\ln(x^3 \cdot y^2) = a$ و $\ln\dfrac{x}{y} = b$. عندئذٍ $\ln x$ تساوي

A	$a - 2b$	B	$\dfrac{a-2b}{5}$	C	$\dfrac{a-2b}{3}$	D	$\dfrac{a+2b}{5}$

12) ليكن f التابع المعيّن بالعلاقة : $f(x) = x \cdot (\ln x)^2$ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $0 \times +\infty$

لإزالتها يمكن أنْ نكتب $f(x)$ بإحدى الصيغ الآتية :

A	$f(x) = 2\,x \ln x$	B	$f(x) = x \cdot \ln x \cdot \ln x$	C	$f(x) = (2\sqrt{x} \cdot \ln\sqrt{x})^2$	D	$f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}$ ثمّ نفرض $t = \dfrac{1}{x}$

13) ليكن f التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = 2x \ln x$. عندئذٍ $f'(x)$ يساوي

A	$2\ln x$	B	2	C	$2(\ln x + 1)$	D	$\dfrac{2}{x}$

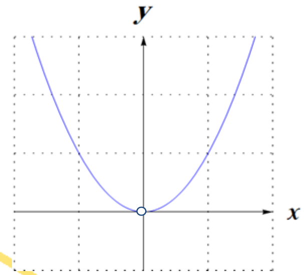
14) حلول المتراجحة : $\ln(-x) \le 1$ هي

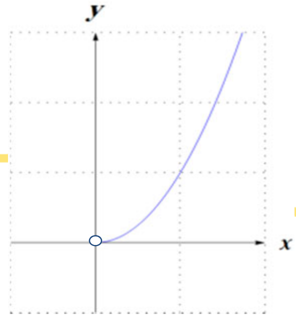
A	$[-e,+\infty[$	B	$[-e,0[$	C	$\varnothing$	D	$[-1,0[$

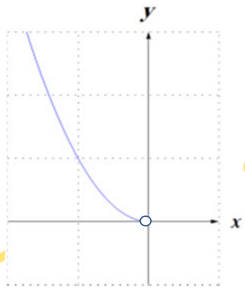
15) f تابع معرّف على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق : $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$. **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو:**

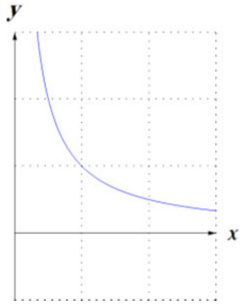
A	$\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$	B	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	C	$\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$	D	$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

16) مجموعة النقاط $M(x,y)$ في المستوي التي تحقّق المساواة : $\ln x^2 - \ln y = 0$ تمثل إحدى الأشكال الآتية :

A


B


C


D


17) ليكن f التابع المعرّف على $]-3,3[$ وفق العلاقة : $f(x) = \ln(\dfrac{3-x}{x+3})$

واحدٌ من الخيارات الآتية **خاطئة** :

A	$f(0) = 0$	B	$f'(x) = \dfrac{1}{3-x} - \dfrac{1}{3+x}$	C	f متناقص تماماً على $]-3,3[$	D	أياً تكن $x \in]-3,3[$ يكن $f(-x) = -f(x)$

18) ليكن C الخط البياني للتابع f الاشتقاقي على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x+1} - 4$

معادلة المماس للخط C في نقطةٍ منه فاصلتها 1 هي

A	$y = x + 3$	B	$y = x - 5$	C	$y = -x - 3$	D	$y = 2x - 6$

19) ليكن C الخط البياني لتابع f معرّف على $\mathbb{R}$ يحقّق العلاقة : $f(-2-x) = -f(x) + 4$

A	للخط C مركز تناظر $A(-1,2)$	B	للخط C مركز تناظر $A(-2,4)$	C	f تابعٌ فردي	D	للخط C محور تناظر $x = -1$

20) f تابعٌ معرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$

إذا علمت أنّ جدول اطراده هو

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

عندئذٍ مجموعة حلول المتراجحة $\ln x > -\dfrac{1}{x}$ هي

A	$]0,+\infty[$	B	$]0,1[$	C	$]1,+\infty[$	D	$]0,+\infty[\setminus\{1\}$

الجبر:

21) إذا كان z عدداً عقدياً يحقّق : $|z| = \sqrt{2}$ عندئذٍ $|\bar{z} - i\bar{z}|$ تساوي

A	$2\sqrt{2}$	B	$\sqrt{2}$	C	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	D	2

22) إذا علمتَ أنّ المعادلة : $z^3 - (1+4i)z^2 + (6i-6)z + 8 + 4i = 0$ تقبل $z = 2$ حلاً لها فالحلين الآخرين هما :

A	$\{2i, -1+2i\}$	B	$\{3i, -1+i\}$	C	$\{3i, \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3}i\}$	D	$\{2i, -2i\}$

23) ليكن العدد العقدي $z = a + bi$ حيث $a > 0$ و $\left|z + \overline{z}\right| + z - 24 = 2i$ عندئذٍ $\mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z)$ تساوي

A	-18	B	-16	C	8	D	16

24) ليكن العدد العقدي : $z = \dfrac{\sqrt{2} + i}{4 - \sqrt{5}i}$. عندئذٍ $\left|z^2\right|$ تساوي

A	$\dfrac{1}{7}$	B	$\dfrac{2}{3}$	C	$\sqrt{10}$	D	$\dfrac{1}{3}$

25) في حالة عدد عقدي ما z نضع : $w = z^2 + 2i$ إنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل w حقيقياً تمثّل

A	محور الأعداد الحقيقة	B	محور الأعداد التخيلية البحتة	C	مجموعة النقاط الموجودة في الخيارين A و B .	D	قطع زائد مرسوم في الربعين الثاني والرابع

26) ليكن العددان العقديان : $z_1 = e^{i\pi}$ و $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

A	$z_1^{\,5} \in \mathbb{R}^+$	B	$z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$	C	$\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$	D	$z_2^{\,4} \in \mathbb{R}$

27) زاوية العدد العقدي $z = (1 - \sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{5}}$ تساوي

A	$\dfrac{\pi}{5}$	B	$-\dfrac{2\pi}{15}$	C	$\dfrac{2\pi}{5}$	D	$\dfrac{-4\pi}{5}$

28) ليكن n عدداً طبيعياً و z عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد و $z^{2n} \neq -1$

ولنعرّف العدد العقدي : $w = \dfrac{z^n}{1 + z^{2n}}$.

A	w تخيلي بحت	B	w ليس حقيقياً	C	$\left\|w\right\| = 1$	D	$w = \dfrac{1}{\overline{z}^n + z^n}$

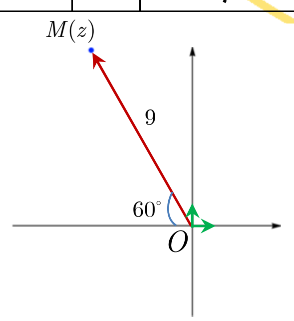
29) لتكن المعادلة: $(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4) = 0$ ولنرمز إلى S مجموعة حلولها

والنقاط A و B و C و D التي تمثّل حلولها في المستوي العقدي عندئذٍ

A	$S = \{2e^{i\frac{\pi}{4}}, 2e^{-i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, 2e^{i\frac{7\pi}{6}}\}$	B	$S = \{2e^{i\frac{\pi}{4}}, 2e^{-i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{4\pi}{3}}, 2e^{i\frac{2\pi}{3}}\}$	C	النقاط تمثّل رؤوس مستطيل وليس مربعاً	D	النقاط تمثّل رؤوس مربع

30) في المستوي العقدي $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة M التي يمثلها العدد العقدي z

أحد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي z الممثّل جانباً هو



A	$\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$	B	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$
C	$1 - \sqrt{3}i$	D	$3 + 3\sqrt{3}i$

الأشعة :

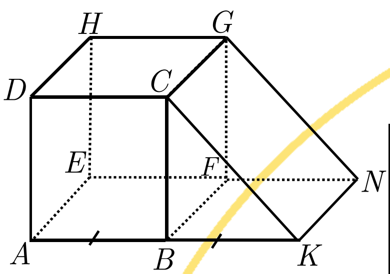
31) في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: لدينا النقاط $A(2,3,-1)$ و $B(1,-2,3)$ و $C(0,1,-2)$

إحداثيات النقطة D التي تجعل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

A	$(-1,-4,2)$	B	$(1,6,-6)$	C	$(1,-4,-6)$	D	$(1,-4,6)$

32) المجسّم الآتي: يتكوّن من مكعب مع موشور قائم قاعدته مثلث.

ولنختر المعلم $(B;\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BC})$, لتكن النقطة I إحداثياتها $I(3,-1,-1)$



A	$D(-1,1,1)$	B	فالنقاط H و I و K تقع على استقامةٍ واحدة
C	النقاط A و G و K و I لا تقع في مستوٍ واحد	D	المستقيمان (AG) و (HK) متخالفان .

33) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: لدينا $\overrightarrow{AC}(0,2,1)$ و $\overrightarrow{AB}(2,1,\alpha)$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

عندئذٍ قيمة α حتى تنتمي النقطة A إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[CB]$ تساوي

A	-2	B	0	C	$\frac{1}{2}$	D	2

34) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: ليكن المستقيم (AB) والنقطة M لا تنتمي إلى المستقيم (AB)

وبفرض أنّ كل نقطة K من المستقيم (AB) إحداثياتها من النمط $K(1,t,t-1)$ حيث $t \in \mathbb{R}$.

وكان $MK^2 = 2(t-2)^2 + 5$ عندئذٍ بعد النقطة M عن المستقيم (AB) تساوي

A	5	B	2	C	$\sqrt{5}$	D	$\sqrt{3}$

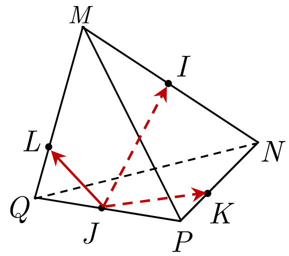
35) ليكن الشعاعان غير الصفريين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً وليكن $\vec{w}$ شعاعاً ما غير صفري عندئذٍ

A	يوجد عددان حقيقيان a و b يحقّقان $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$	B	الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{w}$ مرتبطان خطياً .	C	الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً	D	بفرض $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ و $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$ النقاط A و B و E و F تقع في مستوٍ واحد

36) $\mathcal{P}$ مستوٍ يمر بالنقطة A وشعاعا توجيهه $\vec{u}$ و $\vec{v}$. ولتكن النقطة $B \notin \mathcal{P}$

ولنعرّف مستقيم d يمر بالنقطة B وشعاع توجيهه $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. عندئذٍ المستقيم d

A	d يقطع المستوي $\mathcal{P}$	B	d محتوى في المستوي $\mathcal{P}$	C	d يعامد المستوي $\mathcal{P}$	D	d يوازي المستوي $\mathcal{P}$



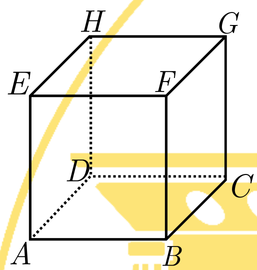
37) $MNPQ$ رباعي وجوه والنقاط : I و J و K و L معرّفة كما يأتي :

I منتصف $[MN]$ و J منتصف $[PQ]$

و $\overrightarrow{NK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{NP}$ و $\overrightarrow{ML}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$ وإذا علمتَ أنّ : $\overrightarrow{JL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{JI}-\overrightarrow{JK}$ عندئذٍ :

A	الأشعة $\overrightarrow{JL}$ و $\overrightarrow{JI}$ و $\overrightarrow{JK}$ ليست مرتبطة خطياً	B	المستقيم (JL)محتوى في المستوي (IJK)	C	المستقيمان (LJ) و (IK) متخالفان	D	المستقيمان (LJ) و (IK) متوازيان

38) $ABCDEFGH$ مكعب .



الأشعة الثلاثة **غير** المرتبطة خطياً هي :

A	$\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{EH}$	B	$\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{HG}$
C	$\overrightarrow{GH}$ و $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{DA}$	D	$\overrightarrow{FD}$ و $\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{AD}$

39) في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$

العلاقة بين x و y حتى تقع النقاط A و B و C و $D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد هي :

A	$x+6y-19=0$	B	$x+6y-11=0$	C	$x+6y+5=0$	D	$-x+6y-13=0$

40) معادلة الأسطوانة التي محورها $(O;\vec{i})$ ومركز قاعدتها الدنيا $(3,0,0)$ ومركز قاعدتها العليا $(8,0,0)$ وتمر بالنقطة $A(4,-4,3)$ هي :

A	$y^2+z^2=25$ بشرط $3\le x\le 8$	B	$y^2+z^2=25$ بشرط $0\le x\le 8$	C	$x^2+z^2=9$ بشرط $3\le x\le 8$	D	$y^2+z^2=5$ بشرط $3\le x\le 8$

.... انتهت الأسئلة..

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

حل المذاكرة الأولى لمادة الرياضيات

للصف الثالث الثانوي العلمي (شتاء 2025)

الاسم :.........

الدرجة: 600 النموذج : B

فيما يأتي 40 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 15 درجة .

التحليل 1:

1) f و g تابعان معرّفان على $\mathbb{R}$ ويحققّان : $f(x) \le g(x)$ أياً تكن $x \in \mathbb{R}$ عندئذٍ

A	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	B	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
C	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	D	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و $f(x)$ تابعٌ أصغر منه فلا نستطيع عندئذٍ تحديد نهاية f عند $+\infty$.

فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ كان التابع الذي أكبر منه $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ كان التابع الذي أصغر منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. فالخيار الصحيح هو C

أمّا الخيار D : إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ كان $g(x)$ تابع أكبر منه فلا نستطيع تحديد نهاية g عند $+\infty$.

---

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\cos\sqrt{x} - 1)}{x}$ تساوي

A	1	B	$-\dfrac{1}{2}$	C	$\dfrac{1}{2}$	D	0

التبرير: نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\cos\sqrt{x} - 1)}{x}$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$ لإزالتها .

بفرض $f(x) = \dfrac{\sin(\cos\sqrt{x} - 1)}{x}$

$$f(x) = \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x} \times \frac{\sin(\cos\sqrt{x} - 1)}{\cos\sqrt{x} - 1}$$

ومنه $f(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2} \times \dfrac{\sin(\cos\sqrt{x} - 1)}{\cos\sqrt{x} - 1}$

بفرض $t = \cos\sqrt{x} - 1$

عندما $x \to 0$ يكون $t \to 0$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\cos\sqrt{x} - 1)}{\cos\sqrt{x} - 1} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$

ونحن نعلم أنّ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{-1}{2}$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2} \times 1 = -\dfrac{1}{2}$. فالخيار الصحيح هو B .

---

3) f تابع معرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق العلاقة : $f(x) = 5 + \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ خطّه البياني C_f يقبل مستقيم مقارب معادلته :

A	$x = 0$	B	$x = -1$	C	$y = 0$	D	$y = 5x$

التبرير: f معرّف على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ فالمستقيم $x = 0$ مقارب شاقولي . فالخيار الصحيح هو A .

---

4) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ ويقبل مستقيماً مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ معادلته : $y = 3x - 5$:

عندئذٍ : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{-x+f(x)}{x})$ تساوي

A	-3	B	-2	C	2	D	3

التبرير: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{-x+f(x)}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-1+\dfrac{f(x)}{x}) = -1+3 = 2$

لأنّه لدينا فرضاً (ميل المقارب المائل في جوار $+\infty$) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 3 = a$. فالخيار الصحيح هو C .

---

5) f تابعٌ معرّف على المجال $[1,+\infty[$ ويحقّق المتراجحة : $\dfrac{1}{x} \le f(x) \le 1$.

A	$f(1) \ne 1$	B	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	C	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$	D	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : $1 \le f(1) \le 1$ ومنه $f(1) = 1$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $\dfrac{1}{x} \le f(x) \le 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ فلا يمكن تحديد جواب نهاية f عند $+\infty$. فالخيار B خاطئ .

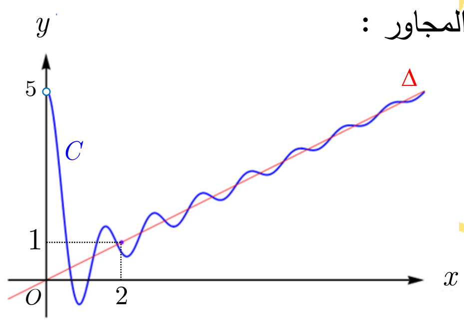
لندقّق في الخيار C : $\dfrac{1}{x^2} \le \dfrac{f(x)}{x} \le \dfrac{1}{x}$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$.

فالخيار C خاطئ والخيار D هو الخيار الصحيح .

---

6) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$: المرسوم في الشكل المجاور :



A	الخط C يقبل مستقيم مقارب مائل Δ معادلته $y = \dfrac{1}{2}x$.	B	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$
C	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$	D	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : من الواضح أنّ للخط C مستقيم مقارب مائل Δ لإيجاد معادلته

نلاحظ أنّ الخط C يمر بالنقطتين $(0,0)$ و $(2,1)$ ومنه $m_\Delta = \dfrac{1-0}{2-0} = \dfrac{1}{2} = a$ وبما أنّه يمر بالنقطة $(0,0)$ فإنّ $b = 0$

فمعادلته $y = \dfrac{1}{2}x$. فالخيار الصحيح هو A .

أمّا الخيار B : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$. فالخيار B خاطئ .

أمّا الخيار C : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 5$. فالخيار C خاطئ .

أمّا الخيار D : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. فالخيار D خاطئ .

---

7) **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو:**

A	ليس للتابع $x \mapsto \cos x$ نهاية عند $+\infty$	B	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty$	C	$\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x} = 1$	D	$\lim\limits_{x\to\pi^-} \frac{1}{\sin x} = -\infty$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : نحن نعلم أنّ ليس للتابع $x \mapsto \cos x$ نهاية عند $+\infty$. فالخيار A صحيح .

لندقّق في الخيار B : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty$ (لأنّ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0$ و $\cos x < 0$ في الربع الثاني) . فالخيار B صحيح .

لندقّق في الخيار C : $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x} = \lim\limits_{t\to 0} \cos t = 1$. فالخيار C صحيح .

أمّا الخيار D : $\lim\limits_{x\to\pi^-} \frac{1}{\sin x} = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to\pi^-} (\sin x) = 0$ و $\sin x > 0$ في الربع الثاني) .

فالخيار D هو الخيار الوحيد الخاطئ . والذي يجب أنْ نختاره .

---

8) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$ وفق : $f(x) = x + \sqrt{2x^2 - 8}$

وليكن المستقيم Δ الذي معادلته $y = (1-\sqrt{2})x$. **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو :**

A	المستقيم Δ مقارب مائل للخط C_f في جوار $-\infty$	B	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	C	C_f يقع تحت Δ على المجال $]-\infty,-2]$	D	C_f يقع تحت Δ على المجال $[2,+\infty[$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : $f(x) - y_\Delta = x + \sqrt{2x^2 - 8} - ((1-\sqrt{2})x)$ ومنه

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{2x^2 - 8} + \sqrt{2}x$$

نضرب بالمرافق ونقسّم عليه : $f(x) - y_\Delta = \dfrac{-8}{\sqrt{2x^2 - 8} - \sqrt{2}x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$ ومنه المستقيم Δ الذي معادلته $y = (1-\sqrt{2})x$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $-\infty$.

فالخيار A صحيح .

من أجل الأتمتة : في جوار $-\infty$ يكون $f(x) \approx x - \sqrt{2}x = (1-\sqrt{2})x$

ومنه $\Delta : y = (1-\sqrt{2})x$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $-\infty$. فالخيار A صحيح .

لندقّق في الخيار B : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\infty + \infty-$ لإزالتها :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2(2 - \frac{8}{x^2})}$$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2}\sqrt{(2 - \frac{8}{x^2})}$$

ومنه $f(x) = x + |x|\sqrt{(2 - \frac{8}{x^2})}$

بما أنّ x في جوار $-\infty$ فإنّ $|x| = -x$

ومنه $f(x) = x - x\sqrt{(2 - \frac{8}{x^2})}$

$f(x) = x(1 - \sqrt{(2 - \frac{8}{x^2})})$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{(-\infty) \times (1 - \sqrt{2})} = +\infty$. فالخيار B صحيح .

من أجل الأتمتة : في جوار $-\infty$ يكون $f(x) \approx x - \sqrt{2}x = (1 - \sqrt{2})x$ ومنه $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{(-\infty) \times (1 - \sqrt{2})} = +\infty$.

لندقّق في الخيار D : لدراسة وضع C بالنسبة إلى Δ ندرس إشارة الفرق :

$f(x) - y_\Delta = \sqrt{2x^2 - 8} + \sqrt{2}x$ عندما $x \in [2, +\infty[$ يكون $f(x) - y_\Delta > 0$ وضوحاً مجموع مقدارين موجبين

(حيث $\sqrt{2x^2 - 8} \geq 0$ و $\sqrt{2}x > 0$ عندما $x \in [2, +\infty[$) .

ومنه C_f يقع فوق Δ على المجال $[2, +\infty[$. فالخيار D خاطئ وهو الخيار الذي يجب أنْ نختاره .

وبالتالي الخيار C صحيح .

ملاحظة : نستطيع معالجة الخيارين C و D : بدراسة وضع C بالنسبة إلى Δ

$f(x) - y_\Delta = \sqrt{2x^2 - 8} + \sqrt{2}x$

$f(x) - y_\Delta = 0$ عندما $\sqrt{2x^2 - 8} + \sqrt{2}x = 0$ ومنه

$\sqrt{2x^2 - 8} = -\sqrt{2}x$

شرط الحل $-\sqrt{2}x \geq 0$ ومنه $x \leq 0$

نربّع الطرفين : $2x^2 - 8 = 2x^2$ وبالتالي $-8 = 0$ معادلة متناقضة .

x	$-\infty$ -2	2 $+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$-$	$+$
الوضع النسبي	C_f يقع تحت Δ	C_f يقع فوق Δ

---

9) ليكن $x \mapsto E(x)$ تابع الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

ولنعرّف التابع f على $[\frac{1}{2}, 2]$ وفق العلاقة: $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

A	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{1}{2}} & : x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 1 + \sqrt{x - 1} & : x \in [1, 2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases}$	B	$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & : x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 1 + \sqrt{x - 1} & : x \in [1, 2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases}$
C	$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & : x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 1 - \sqrt{x - 1} & : x \in [1, 2[\\ 2 & : x = 2 \end{cases}$	D	$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & : x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 1 - \sqrt{x - 1} & : x \in [1, 2[\\ -1 & : x = 2 \end{cases}$

التبرير: $f(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$

$f(x)=\begin{cases}0+\sqrt{x+0} & : x\in[\frac{1}{2},1[\\ 1+\sqrt{x-1} & : x\in[1,2[\\ 2+\sqrt{2-2} & : x=2\end{cases}$ فالخيار الصحيح هو B .

---

10) ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{2x-3}{1-x}$

إنّ أكبر عدد حقيقي A يحقّق الشرط : إذا كان $x<A$ كان $f(x)\in]-2.05,-1.95[$ يساوي

A	-21	B	-20	C	-19	D	21

التبرير: $f(x)\in]-2.05,-1.95[$ هذا يكافئ

$$\left|f(x)-(-2)\right|<0.05$$

$$\left|f(x)+2\right|<\frac{5}{100}$$

$$\left|\frac{2x-3}{1-x}+2\right|<\frac{5}{100}$$

ومنه $\left|\dfrac{2x-3}{1-x}+\dfrac{2(1-x)}{1-x}\right|<\dfrac{5}{100}$

$$\left|\frac{-1}{1-x}\right|<\frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{\left|1-x\right|}<\frac{1}{20}$$

ومنه $\left|1-x\right|>20$

بما أنّ $x<A$ فإنّ x في جوار $-\infty$ فإنّ $\left|1-x\right|=1-x$

$1-x>20$ ومنه $-19>x$ و $x<-19$

ومنه أكبر عدد حقيقي A يحقّق الشرط هو $A=-19$ فالخيار الصحيح هو C.

التحليل 2:

11) بفرض $\ln(x^3\cdot y^2)=a$ و $\ln\dfrac{x}{y}=b$. عندئذٍ $\ln x$ تساوي

A	$a-2b$	B	$\dfrac{a-2b}{5}$	C	$\dfrac{a-2b}{3}$	D	$\dfrac{a+2b}{5}$

التبرير: من الواضح أنّ $x>0$ و $y>0$ ومنه $\ln(x^3\cdot y^2)=a$ تكافئ $\ln(x^3)+\ln y^2=a$

ومنه $3\ln(x)+2\ln y=a$

ولدينا أيضاً $\ln\dfrac{x}{y}=b$ ومنه $\ln x-\ln y=b$.

أصبح لدينا المعادلتين : $\begin{cases}3\ln(x)+2\ln y=a & (1)\\ \ln x-\ln y=b & (2)\end{cases}$

لنضرب المعادلة (2) بـ 2 :

$$\begin{cases} 3\ln(x) + 2\ln y = a & (1) \\ 2\ln x - 2\ln y = 2b & (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد : $5\ln x = a + 2b$ ومنه $\ln x = \dfrac{a+2b}{5}$. فالخيار الصحيح هو D .

---

12) ليكن f التابع المعيّن بالعلاقة : $f(x) = x\cdot(\ln x)^2$ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $0\times+\infty$

لإزالتها يمكن أنْ نكتب $f(x)$ بإحدى الصيغ الآتية :

A	$f(x) = 2x\ln x$	B	$f(x) = x\cdot\ln x\cdot\ln x$	C	$f(x) = (2\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x})^2$	D	$f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}$ ثمّ نفرض $t = \dfrac{1}{x}$

التبرير: $f(x) = x\cdot(\ln x)^2 = (\sqrt{x})^2(\ln x)^2 = (\sqrt{x}\ln x)^2$

ومنه $f(x) = (\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})^2)^2 = (2\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$. فالخيار الصحيح هو C .

وإذا أردنا أن نكمل الحل : $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x}) = \lim\limits_{t\to 0}(t\cdot\ln t) = 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

---

13) ليكن f التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = 2x\ln x$. عندئذٍ $f'(x)$ يساوي

A	$2\ln x$	B	2	C	$2(\ln x + 1)$	D	$\dfrac{2}{x}$

التبرير: $f'(x) = 2(1\ln x + \dfrac{1}{x}\ln x) = 2(\ln x + 1)$. فالخيار الصحيح هو C .

---

14) حلول المتراجحة : $\ln(-x) \le 1$ هي

A	$[-e,+\infty[$	B	$[-e,0[$	C	$\varnothing$	D	$[-1,0[$

التبرير: $\ln(-x) \le 1$

❒ المتراجحة معرّفة عندما $-x > 0$ ومنه $x < 0$ أي $x \in]-\infty,0[= D_1$.

❒ $\ln(-x) \le \ln e$

$-x \le e$ أي $x \ge -e$ ومنه $x \in [-e,+\infty[= D_2$.

❒ فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي : $x \in D_1 \cap D_2 =]-\infty,0[\cap[-e,+\infty[= [-e,0[$

$S = [-e,0[$. فالخيار الصحيح هو B .

---

15) f تابع معرّف على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق : $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$. **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو:**

A	$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$	B	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	C	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$	D	$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

التبرير:

لندقّق في الخيار A: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ (نتيجة موجودة في ص 164) . فالخيار A صحيح .

وبالتالي الخيار D خاطئ وهو الذي يجب أن نختاره .

أمّا الخيار B: $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$

$$f(x)=\frac{x}{\ln x}-\frac{1}{\ln x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. فالخيار B صحيح .

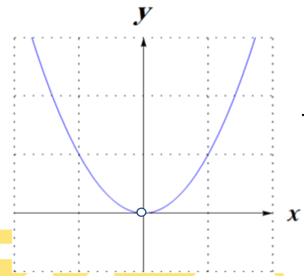
أمّا الخيار C: $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\boxed{\frac{-1}{-\infty}}=0 \;.$$

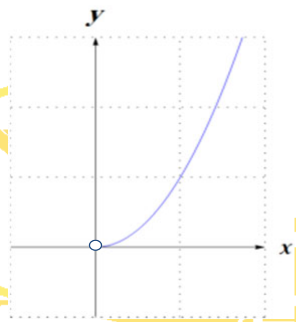
---

16) مجموعة النقاط $M(x,y)$ في المستوي التي تحقّق المساواة : $\ln x^2-\ln y=0$ تمثل إحدى الأشكال الآتية :

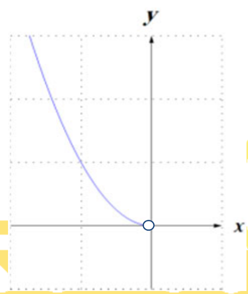
A



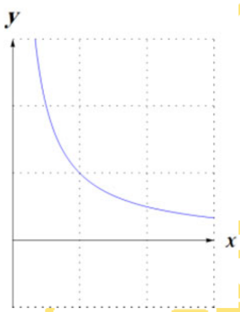
B



C



D



التبرير: $\ln x^2-\ln y=0$

المعادلة معرّفة عندما $y>0$ و $x^2>0$

$$\ln x^2=\ln y$$

ومنه $y=x^2$ بشرط $y>0$ و $x^2>0$ فالخيار الصحيح هو A .

---

17) ليكن f التابع المعرّف على $]-3,3[$ وفق العلاقة : $f(x)=\ln(\dfrac{3-x}{x+3})$

واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئة :

A	$f(0)=0$	B	$f'(x)=\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{1}{3+x}$	C	f متناقص تماماً على $]-3,3[$	D	أياً تكن $x\in]-3,3[$ يكن $f(-x)=-f(x)$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : $f(0)=\ln\dfrac{3}{3}=\ln 1=0$. فالخيار A صحيح .

لندقّق في الخيار B :

$$f'(x)=\frac{(\frac{3-x}{x+3})'}{\frac{3-x}{x+3}}=\frac{\frac{-1(x+3)-1(3-x)}{(x+3)^2}}{\frac{3-x}{x+3}}\;.$$

$$f'(x)=\frac{-1(x+3)-1(3-x)}{(3-x)(x+3)}=\frac{-6}{(3-x)(x+3)}\;.$$

وفي الخيار B نجد : $f'(x)=\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{1}{3+x}=\dfrac{3+x-3+x}{(3-x)(3+x)}=\dfrac{2x}{(3-x)(3+x)}$

فهو خيارٌ خاطئ وهو الخيار الوحيد الذي يجب أنْ نختاره .

أمّا الخيار C : f اشتقاقي على $]-3,3[$ و $f'(x)=\dfrac{-6}{(3-x)(x+3)}<0$

ومنه f متناقص تماماً على $]-3,3[$. فالخيار C صحيح .

أمّا الخيار D : $f(-x)=\ln(\dfrac{3+x}{-x+3})=\ln(\dfrac{-x+3}{3+x})^{-1}=-\ln(\dfrac{-x+3}{3+x})=-f(x)$. فالخيار D صحيح .

(حيث سيكون f تابعٌ فردي) (على فكرة : كل تابع فردي معرف عند 0 يكون $f(0)=0$ فالخيار A صحيح وضوحاً)

---

18) ليكن C الخط البياني للتابع f الاشتقاقي على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x+1}-4$

معادلة المماس للخط C في نقطةٍ منه فاصلتها 1 هي

A	$y=x+3$	B	$y=x-5$	C	$y=-x-3$	D	$y=2x-6$

<u>**التبرير**:</u> معادلة المماس للخط C في نقطةٍ منه فاصلتها 1 هي $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

$f(1)=-4$

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}(x+1)-2\ln x}{(x+1)^2}=\frac{2+\frac{2}{x}-2\ln x}{(x+1)^2}$$

ومنه $f'(1)=\dfrac{4}{4}=1$

$y=1(x-1)-4$

$y=x-5$. فالخيار الصحيح هو B .

---

19) ليكن C الخط البياني لتابع f معرّف على $\mathbb{R}$ يحقّق العلاقة : $f(-2-x)=-f(x)+4$

A	للخط C مركز تناظر $A(-1,2)$	B	للخط C مركز تناظر هو $A(-2,4)$	C	f تابعٌ فردي	D	للخط C محور تناظر $x=-1$

<u>**التبرير**:</u> $f(-2-x)=-f(x)+4$ أي $f(-2-x)+f(x)=+4$

نحن نعلم أنّ قانون التناظر بالنسبة إلى نقطة $A(a,b)$. هو $f(2a-x)+f(x)=2b$.

بالمقارنة نجد : $2a=-2\Rightarrow \boxed{a=-1}$.

و $2b=4\Rightarrow \boxed{b=2}$ فالخط C متناظر بالنسبة إلى النقطة $A(-1,2)$. فالخيار الصحيح هو A .

---

20) f تابعٌ معرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$

إذا علمتَ أنّ جدول اطراده هو

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

عندئذٍ مجموعة حلول المتراجحة $\ln x>-\dfrac{1}{x}$ هي

A	$]0,+\infty[$	B	$]0,1[$	C	$]1,+\infty[$	D	$]0,+\infty[\setminus\{1\}$

<u>**التبرير**:</u> $\ln x+\dfrac{1}{x}>0$ ومنه $f(x)>0$. نلاحظ من جدول اطراد التابع f أنّ $f(x)\geq 1>0$ أياً تكن $x\in]0,+\infty[$.

فالخيار الصحيح هو A .

الجبر:

21) إذا كان z عدداً عقدياً يحقّق : $|z| = \sqrt{2}$ عندئذٍ $|\bar{z} - i\bar{z}|$ تساوي

A	$2\sqrt{2}$	B	$\sqrt{2}$	C	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	D	2

التبرير: لدينا فرضاً $|z| = \sqrt{2}$ ومنه

$$|\bar{z} - i\bar{z}| = |\bar{z}(1-i)| = |\bar{z}| \times |1-i| = |z| \times |1-i| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

فالخيار الصحيح هو D .

---

22) إذا علمتَ أنّ المعادلة : $z^3 - (1+4i)z^2 + (6i-6)z + 8 + 4i = 0$ تقبل $z = 2$ حلاً لها فالحلين الآخرين هما :

A	$\{2i, -1+2i\}$	B	$\{3i, -1+i\}$	C	$\{3i, \frac{2}{3} - \frac{4}{3}i\}$	D	$\{2i, -2i\}$

التبرير:

بما أنّ $z = 2$ حل للمعادلة المفروضة فإنّ المعادلة تكتب بالشكل :

$(z-2)(z^2 + bz + c) = 0$ حيث $b, c \in \mathbb{C}$

ننشر ثمّ نطابق مع المعادلة المفروضة : $z^3 + (b-2)z^2 + (c-2b)z - 2c = 0$

فنجد :

$$\begin{cases} b - 2 = -1 - 4i & (1) \\ c - 2b = -6 + 6i & (2) \\ -2c = 8 + 4i & (3) \end{cases}$$

من (1) نجد $b = 1 - 4i$.

ومن (3) نجد $c = -4 - 2i$.

نتحقّق بالتعويض في (3) فنجد : $-4 - 2i - 2(1-4i) = -6 + 6i$ محقّق .

ومنه المعادلة المفروضة تكافئ : $(z-2)(z^2 + (1-4i)z - 4 - 2i) = 0$

$$z^2 + (1-4i)z - 4 - 2i = 0$$

$$\Delta = (1-4i)^2 - 4(1)(-4-2i)$$

ومنه $\Delta = 1 - 8i - 16 + 16 + 8i = 1$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$z_2 = \frac{-1 + 4i + 1}{2} = 2i$$

$$z_3 = \frac{-1 + 4i - 1}{2} = -1 + 2i$$

الخيار الصحيح هو A .

من أجل الأتمتة : كل معادلة كثير حدود من الدرجة n : $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$

لها n جذراً : تحقّق $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ و $z_1 \times z_2 \times \cdots \times z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

فإذا اختبرنا الخيار A : $z_1 + z_2 + z_3 = 1 + 4i$ لنختبر ذلك : $z_1 + z_2 + z_3 = 2 + 2i - 1 + 2i = 1 + 4i$ محقّق

حيث الخيار B أيضاً يحقّق ذلك .

إذن لا بدّ من اختبار آخر : $z_1 \times z_2 \times z_3 = (-1)^3(8+4i) = -8-4i$

لنتحقّق من ذلك في الخيار A : $z_1 \times z_2 \times z_3 = 2(2i)(-1+2i) = -8-4i$ محقّق وغير محقّق في الخيار B .

فالخيار الصحيح هو A .

---

23) ليكن العدد العقدي $z = a+bi$ حيث $a > 0$ و $|z+\overline{z}| + z - 24 = 2i$ عندئذٍ $\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z)$ تساوي

A	-18	B	-16	C	8	D	16

التبرير: $|z+\overline{z}| + z - 24 = 2i$

$|2a| + a + bi - 24 = 2i$

ولمّا كان $a > 0$ كان $|2a| = 2a$.

$3a + bi - 24 = 2i$

$3a - 24 + bi = 0 + 2i$

ومنه $3a - 24 = 0 \Rightarrow a = 8$

و $b = 2$

$\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z) = a \times b = 8 \times 2 = 16$. فالخيار الصحيح هو D .

---

24) ليكن العدد العقدي : $z = \dfrac{\sqrt{2}+i}{4-\sqrt{5}i}$. عندئذٍ $|z^2|$ تساوي

A	$\frac{1}{7}$	B	$\frac{2}{3}$	C	$\sqrt{10}$	D	$\frac{1}{3}$

التبرير: $z = \dfrac{\sqrt{2}+i}{4-\sqrt{5}i}$

$|z^2| = |z|^2 = \left|\dfrac{\sqrt{2}+i}{4-\sqrt{5}i}\right|^2 = \left(\dfrac{|\sqrt{2}+i|}{|4-\sqrt{5}i|}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}}\right)^2 = \dfrac{3}{21} = \dfrac{1}{7}$. فالخيار الصحيح هو A .

---

25) في حالة عدد عقدي ما z نضع : $w = z^2 + 2i$ إنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل w حقيقياً تمثّل

A	محور الأعداد الحقيقة	B	محور الأعداد التخيلية البحتة	C	مجموعة النقاط الموجودة في الخيارين A و B .	D	قطع زائد مرسوم في الربعين الثاني والرابع

التبرير: $w = z^2 + 2i$

لدينا فرضاً w حقيقي ومنه $\overline{w} = w$ وبالتالي

$\overline{z}^2 - 2i = z^2 + 2i$ ومنه

$\overline{z}^2 - z^2 = 4i$

ومنه $(\overline{z} - z)(\overline{z} + z) = 4i$.

ومنه $(-2yi)(2x) = 4i$

$-4xyi = 4i$

وهذا يكافئ $x \cdot y = -1$ ومنه $y = \frac{-1}{x}$

ومنه مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل w حقيقياً تمثّل قطع زائد مرسوم في الربعين الثاني والرابع .

فالخيار الصحيح هو D .

---

26) ليكن العددان العقديان : $z_1 = e^{i\pi}$ و $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

A	$z_1^{\ 5} \in \mathbb{R}^+$	B	$z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$	C	$\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$	D	$z_2^{\ 4} \in \mathbb{R}$

التبرير:

لندقق في الخيار A : $z_1^{\ 5} = e^{i5\pi} = e^{i\pi} = -1 \in \mathbb{R}^-$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $z_1 \cdot z_2 = e^{i\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i(\pi - \frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \notin \mathbb{R}$. فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{i\pi}}{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{i(\pi + \frac{\pi}{2})} = e^{i(\frac{3\pi}{2})} = -i \notin \mathbb{R}$. فالخيار C خاطئ .

لندقّق في الخيار D : $z_2^{\ 4} = (e^{-i\frac{\pi}{2}})^4 = e^{-i\frac{4\pi}{2}} = e^{-2\pi i} = e^{0i} = 1 \in \mathbb{R}$. فالخيار الصحيح هو D .

---

27) زاوية العدد العقدي $z = (1 - \sqrt{3})\, e^{\frac{i\pi}{5}}$ تساوي

A	$\frac{\pi}{5}$	B	$-\frac{2\pi}{15}$	C	$\frac{2\pi}{5}$	D	$\frac{-4\pi}{5}$

التبرير: $z = (1 - \sqrt{3})\, e^{\frac{i\pi}{5}}$

ومنه $z = -(\sqrt{3} - 1)\, e^{\frac{i\pi}{5}}$

$z = e^{i\pi}(\sqrt{3} - 1)\, e^{\frac{i\pi}{5}} = (\sqrt{3} - 1) e^{i(\frac{\pi}{5} + \pi)} = (\sqrt{3} - 1) e^{i(\frac{6\pi}{5})}$.

ومنه $\arg(z) = \frac{6\pi}{5}$ وبالتالي $\arg(z) = \frac{6\pi}{5} - 2\pi = \frac{-4\pi}{5}$. فالخيار الصحيح هو D .

---

28) ليكن n عدداً طبيعياً و z عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد و $z^{2n} \neq -1$

ولنعرّف العدد العقدي : $w = \frac{z^n}{1 + z^{2n}}$.

A	w تخيلي بحت	B	w ليس حقيقياً	C	$\lvert w \rvert = 1$	D	$w = \frac{1}{\overline{z}^n + z^n}$

التبرير:

لندقّق في الخيار A و B :

$$\overline{w} = \frac{\overline{z}^n}{1 + \overline{z}^{2n}} = \frac{(\frac{1}{z})^n}{1 + (\frac{1}{z})^{2n}} = \frac{\frac{1}{z^n}}{1 + \frac{1}{z^{2n}}} = \frac{\frac{1}{z^n}}{\frac{z^{2n} + 1}{z^{2n}}} = \frac{1}{\frac{z^{2n} + 1}{z^n}} = \frac{z^n}{z^{2n} + 1} = w$$

ومنه w حقيقي فالخياران A و B خاطئان .

وواضح أنّ $\lvert w \rvert \neq 1$ (لأنّ $\lvert z \rvert = 1$ ومنه $\lvert z \rvert^n = 1$ أي $\lvert z^n \rvert = 1$ ولكن $\lvert 1 + z^{2n} \rvert \neq 1$) فالخيار C خاطئ .

أمّا الخيار D : $w = \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$ نضرب البسط والمقام بِـ $\overline{z}^n$ فنجد

$$w = \frac{z^n \cdot \overline{z}^n}{\overline{z}^n + z^{2n} \cdot \overline{z}^n} = \frac{\left|z^n\right|^2}{\overline{z}^n + z^n \cdot z^n \cdot \overline{z}^n} = \frac{\left|z^n\right|^2}{\overline{z}^n + z^n \cdot \left|z^n\right|^2} = \frac{1}{\overline{z}^n + z^n}$$

فالخيار الصحيح هو D .

---

29) لتكن المعادلة: $(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4) = 0$ ولنرمز إلى S مجموعة حلولها

والنقاط A و B و C و D التي تمثّل حلولها في المستوي العقدي عندئذٍ

A	$S = \{2e^{i\frac{\pi}{4}}, 2e^{-i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, 2e^{i\frac{7\pi}{6}}\}$	B	$S = \{2e^{i\frac{\pi}{4}}, 2e^{-i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{4\pi}{3}}, 2e^{i\frac{2\pi}{3}}\}$	C	النقاط تمثّل رؤوس مستطيل وليس مربعاً	D	النقاط تمثّل رؤوس مربع

التبرير: $(z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4) = 0$

إمّا $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8 - 4(1)(4) = -8 < 0$

للمعادلة حلان في $\mathbb{C}$: $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$z_2 = \overline{z}_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

أو $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

بفرض $z = -w$ فنجد $w^2 - 2\sqrt{2}w + 4 = 0$

وحسب ما سبق وجدنا

$w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $-z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ وبالتالي $z_3 = -2e^{i\frac{\pi}{4}}$ أي $z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$z_4 = \overline{z}_3 = 2e^{-i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

ومنه $S = \{2e^{i\frac{\pi}{4}}, 2e^{-i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, 2e^{i\frac{3\pi}{4}}\}$

(لاحظ دوماً المعادلة من الدرجة الرابعة من الشكل : $(az^2 + bz + c)(az^2 - bz + c) = 0$ بأمثال حقيقية

لها حل عقدي على الأقل تملك جذرين عقديين مترافقين ومعاكسيهما)

فالحلول دوماً تمثّل رؤوس مستطيل حيث القطران متناصفان و متساويان .

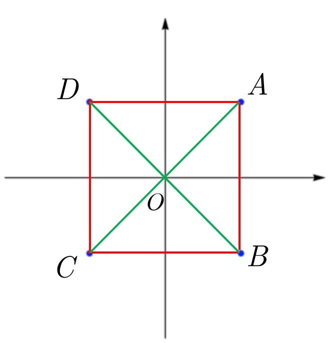
وأحياناً تمثّل مربّع إذا كان القطران متعامدين أيضاً .

لنرسم الشكل : $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \to A(2;\frac{\pi}{4})$

$z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \to B(2;-\frac{\pi}{4})$

$z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} \to C(2;\frac{5\pi}{4})$

$z_4 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \to C(2;\frac{3\pi}{4})$



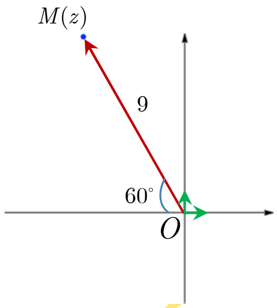
نلاحظ أنّ القطرين متعامدان حيث

$$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OB},\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{OA})=-(\vec{u},\overrightarrow{OB})+(\vec{u},\overrightarrow{OA})=-\arg(z_B)+\arg(z_A)=-(-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

فالشكل $ABCD$ مربع فالخيار الصحيح هو D .

---

30) في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطة M التي يمثلها العدد العقدي z



أحد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي z الممثّل جانباً هو

A	$\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$	B	$\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$
C	$1-\sqrt{3}i$	D	$3+3\sqrt{3}i$

<u>**التبرير :**</u> من الشكل نلاحظ أنّ $z=9e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$z=9e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

بفرض أنّ $w=re^{i\theta}$ هو أحد الجذرين التربيعيين للعدد z فيكون $w^2=z$

ومنه $(re^{i\theta})^2=9e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$r^2e^{i2\theta}=9e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

ومنه $r^2=9\Rightarrow r=3$

و $2\theta=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$

ومنه $\theta=\frac{\pi}{3}+\pi k\ ;k\in\{0,1\}$

عندما $k=0$ يكون $\theta=\frac{\pi}{3}$ فالجذر الأول : $w_1=3e^{i\frac{\pi}{3}}=3(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

فالخيار الصحيح هو A .

<u>طريقة ثانية</u> : لمّا كان العدد العقدي طويلته تساوي 9 كان جذره التربيعي طويلته تساوي 3

فنحن أمام اختيار فقط الخيارين A أو B .

ولمّا كان $z=9e^{i\frac{2\pi}{3}}=9(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{-9}{2}+\frac{9\sqrt{3}}{2}i$

من الملاحظ أنّ $b>0$ ومنه x و y لهما نفس الإشارة . وهذا محقّق في الخيارين A و B .

و $a<0$ كان القسم الحقيقي بالقيمة المطلقة أصغر من القسم التخيلي بالقيمة المطلقة

لأنّ $x^2-y^2=a<0$ ومنه $x^2-y^2<0$ أي $x^2<y^2$ ومنه $|x|<|y|$ وهذا يتوافق مع الخيار A .

الأشعة :

31) في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: لدينا النقاط $A(2,3,-1)$ و $B(1,-2,3)$ و $C(0,1,-2)$

إحداثيات النقطة D التي تجعل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

A	$(-1,-4,2)$	B	$(1,6,-6)$	C	$(1,-4,-6)$	D	$(1,-4,6)$

التبرير: الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

(حيث متيقنين أنّه شكل رباعي أي النقاط ليست على استقامةٍ واحدة حيث ذُكر في جذر السؤال أنّه رباعي ولا يوجد خيار من بين الخيارات المذكورة لا يمكن تعيين D)

بفرض $D(x,y,z)$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

$$(-1,-5,4)=(-x,1-y,-2-z)$$

وبالتالي $-x=-1$ ومنه $x=1$.

و $-5=1-y$ ومنه $y=6$ لاحظ وجدنا الخيار الصحيح ولكن لنكمل

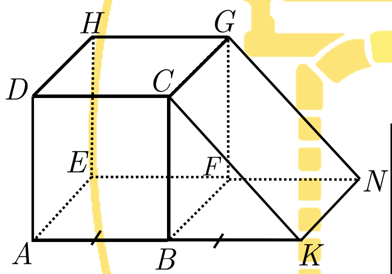
و $4=-2-z$ ومنه $z=-6$

وبالتالي $D(1,6,-6)$ فالخيار الصحيح هو B .

---

32) المجسّم الآتي: يتكوّن من مكعب مع موشور قائم قاعدته مثلث.

ولنختر المعلم $(B;\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BC})$, لتكن النقطة I إحداثياتها $I(3,-1,-1)$



A	$D(-1,1,1)$	B	فالنقاط H و I و K تقع على استقامةٍ واحدة
C	النقاط A و G و K و I لا تقع في مستوٍ واحد	D	المستقيمان (AG) و (HK) متخالفان .

التبرير:

لندقّق في الخيار A : $D(-1,0,1)$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $H(-1,1,1)$ و $K(1,0,0)$ و $I(3,-1,-1)$

$\overrightarrow{HK}(2,-1,-1)$ و $\overrightarrow{HI}(4,-2,-2)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{HI}=2\overrightarrow{HK}$ فالنقاط H و I و K تقع على استقامةٍ واحدة . فالخيار الصحيح هو B .

أمّا الخيار C : من الواضح أنّ النقاط A و K و G و H تقع في مستوٍ واحد هو $(AKGH)$.

والنقطة I تقع على (HK) حسب الخيار B . فالنقاط A و G و K و I تقع في مستوٍ واحد .ومنه الخيار C خاطئ .

أمّا الخيار D : قلنا أنّ A و K و G و H تقع في مستوٍ واحد فالخيار D خاطئ .

حيث أنّ المستقيمين (AG) و (HK) غير متوازيين ويقعان في مستوٍ واحد فهما متوازيان .

---

33) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا : $\overrightarrow{AC}(0,2,1)$ و $\overrightarrow{AB}(2,1,\alpha)$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

عندئذٍ قيمة α حتى تنتمي النقطة A إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[CB]$ تساوي

A	-2	B	0	C	$\frac{1}{2}$	D	2

التبرير: تنتمي النقطة إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[CB]$ إذا تحقّق

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ ومنه

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

$0+4+1 = 4+1+\alpha^2$ ومنه $\alpha^2 = 0$ وبالتالي $\alpha = 0$. فالخيار الصحيح هو B .

---

34) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: ليكن المستقيم (AB) والنقطة M لا تنتمي إلى المستقيم (AB)

وبفرض أنّ كل نقطة K من المستقيم (AB) إحداثياتها من النمط $K(1,t,t-1)$ حيث $t \in \mathbb{R}$.

وكان $MK^2 = 2(t-2)^2 + 5$ عندئذٍ بعد النقطة M عن المستقيم (AB) تساوي

A	5	B	2	C	$\sqrt{5}$	D	$\sqrt{3}$

التبرير: $MK^2 = 2(t-2)^2 + 5$

يكون MK^2 أصغر ما يمكن عندما $t = 2$ ويكون عندئذٍ $MK^2 = 5$ ومنه $MK = \sqrt{5}$

وهو بعد M عن المستقيم (AB) . فالخيار الصحيح هو C .

---

35) ليكن الشعاعان غير الصفريين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً وليكن $\vec{w}$ شعاعاً ما غير صفري عندئذٍ

A	يوجد عددان حقيقيان a و b يحقّقان $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$	B	الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{w}$ مرتبطان خطياً .	C	الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً	D	بفرض $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ و $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$ النقاط A و B و E و F تقع في مستوٍ واحد

التبرير:

من الواضح أنّ الخيار الصحيح هو C (حسب خاصة مذكورة بعد تعريف الارتباط الخطي لشعاعين)

أمّا باقي الخيارات بشكل عام لا تتحقق . أي يوجد مثال على كل حالة تجعل الخيار خاطئ فهي خاطئة .

---

36) $\mathcal{P}$ مستوٍ يمر بالنقطة A وشعاعا توجيهه $\vec{u}$ و $\vec{v}$. ولتكن النقطة $B \notin \mathcal{P}$

ولنعرّف مستقيم d يمر بالنقطة B وشعاع توجيهه $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. عندئذٍ المستقيم d

A	d يقطع المستوي $\mathcal{P}$	B	d محتوى في المستوي $\mathcal{P}$	C	d يعامد المستوي $\mathcal{P}$	D	d يوازي المستوي $\mathcal{P}$

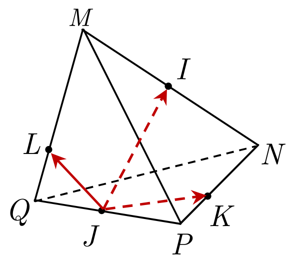
التبرير:

بما أنّ $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ كان شعاع توجيه المستقيم d مرتبط خطياً مع شعاعي توجيه المستوي فالمستقيم d يوازي المستوي $\mathcal{P}$

كون النقطة التي يمر بها المستقيم $B \notin \mathcal{P}$. فالخيار الصحيح هو D .

---

37) $MNPQ$ رباعي وجوه والنقاط : I و J و K و L معرّفة كما يأتي :



I منتصف $[MN]$ و J منتصف $[PQ]$

و $\overrightarrow{NK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{NP}$ و $\overrightarrow{ML}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$ وإذا علمتَ أنّ : $\overrightarrow{JL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{JI}-\overrightarrow{JK}$ عندئذٍ :

A	الأشعة $\overrightarrow{JL}$ و $\overrightarrow{JI}$ و $\overrightarrow{JK}$ ليست مرتبطة خطياً	B	المستقيم (JL)محتوى في المستوي (IJK)	C	المستقيمان (LJ) و (IK) متخالفان	D	المستقيمان (LJ) و (IK) متوازيان

التبرير:

لندقّق في الخيار A : لمّا كان فرضاً $\overrightarrow{JL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{JI}-\overrightarrow{JK}$

كانت الأشعة $\overrightarrow{JL}$ و $\overrightarrow{JI}$ و $\overrightarrow{JK}$ مرتبطة خطياً . فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : لمّا كان فرضاً $\overrightarrow{JL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{JI}-\overrightarrow{JK}$

كانت الأشعة $\overrightarrow{JL}$ و $\overrightarrow{JI}$ و $\overrightarrow{JK}$ مرتبطة خطياً ومنه النقاط I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد هو (IJK)

فالمستقيم (JL) محتوى في المستوي (IJK) . فالخيار الصحيح هو B .

أمّا الخيار C : قلنا بأنّ النقاط I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد . فالخيار C خاطئ .

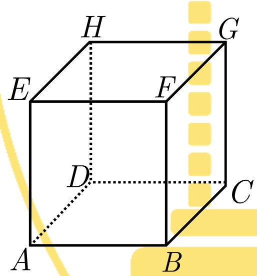
أمّا الخيار D : لنفرض جدلاً أنّ المستقيمين (LJ) و (IK) متوازيان كانا يوازيان الفصل المشترك (MP). وهذا تناقض .

فالخيار D خاطئ .

---

38) $ABCDEFGH$ مكعب .

الأشعة الثلاثة **غير** المرتبطة خطياً هي :



A	$\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{EH}$	B	$\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{HG}$
C	$\overrightarrow{GH}$ و $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{DA}$	D	$\overrightarrow{FD}$ و $\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{AD}$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : الشعاعان $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{DC}$ يقعان في المستوي $(ABCD)$ والشعاع $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD}$ يقع في مستويهما

فالأشعة : $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{EH}$ مرتبطة خطياً . فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : الشعاعان $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{BG}$ يقعان في المستوي $(ABGH)$ والشعاع $\overrightarrow{HG}$ يقع في مستويهما

فالأشعة : $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{HG}$ مرتبطة خطياً . فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : الشعاعان $\overrightarrow{GH}$ و $\overrightarrow{BF}$ يقعان في المستوي $(ABFE)$ والشعاع $\overrightarrow{DA}$ لا يقع في مستويهما

فالأشعة : $\overrightarrow{GH}$ و $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{DA}$ غير مرتبطة خطياً . فالخيار الصحيح هو C .

أمّا الخيار D : الشعاعان $\overrightarrow{FD}$ و $\overrightarrow{GA}$ يقعان في المستوي $(ADGF)$ والشعاع $\overrightarrow{AD}$ يقع في مستويهما

فالأشعة : $\overrightarrow{GH}$ و $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{DA}$ مرتبطة خطياً . فالخيار D خاطئ .

---

39) في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$

العلاقة بين x و y حتى تقع النقاط A و B و C و $D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد هي :

A	$x+6y-19=0$	B	$x+6y-11=0$	C	$x+6y+5=0$	D	$-x+6y-13=0$

<u>التبرير:</u>

$\overrightarrow{AB}(-2,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,-1,-3)$ نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{0}{-2}\neq\frac{-3}{-1}\right)$

و لدينا $\overrightarrow{AD}(x-3,y-2,2)$. حتى تقع النقاط المفروضة في مستوٍ واحد يجب أنْ تكون الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً أي يجب وجود عددين حقيقين a و b يحقّقان : $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ ومنه

$$\begin{pmatrix}x-3\\y-2\\2\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

وبالتالي : $\begin{pmatrix}x-3\\y-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a\\-b\\-a-3b\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}-2a=x-3 & (1)\\-b=y-2 & (2)\\-a-3b=2 & (3)\end{cases}$$

من (1) نجد : $a=\frac{3-x}{2}$ ومن (2) $b=2-y$ يجب أنْ تحقق المعادلة الثالثة

$-(\frac{3-x}{2})-3(2-y)=2$ ومنه

$\frac{x-3}{2}-6+3y=2$ وبالتالي $\frac{x-3}{2}+3y=8$

لنضرب طرفي المعادلة بـ 2 فنجد $x-3+6y=16$ ومنه $x+6y-19=0$. فالخيار الصحيح هو A .

---

40) معادلة الأسطوانة التي محورها $(O;\vec{i})$ ومركز قاعدتها الدنيا $(3,0,0)$ ومركز قاعدتها العليا $(8,0,0)$ وتمر بالنقطة $A(4,-4,3)$ هي :

A	$y^2+z^2=25$ بشرط $3\le x\le 8$	B	$y^2+z^2=25$ بشرط $0\le x\le 8$	C	$x^2+z^2=9$ بشرط $3\le x\le 8$	D	$y^2+z^2=5$ بشرط $3\le x\le 8$

التبرير : الأسطوانة التي محورها $(O;\vec{i})$ معادلتها من الشكل : $y^2+z^2=R^2$

$y^2+z^2=R^2$ بشرط $3\le x\le 8$.

لإيجاد R : النقطة $A(4,-4,3)$ تنتمي إلى الأسطوانة فهي تحقّق معادلتها

$(-4)^2+3^2=R^2$ ومنه $R^2=25$. فمعادلة الأسطوانة المطلوبة هي $y^2+z^2=25$ بشرط $3\le x\le 8$.

فالخيار الصحيح هو A .

....انتهت الأجوبة..

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

المذاكرة الأولى لمادة الرياضيات | الاسم: ....

للصف الثالث الثانوي العلمي (شتاء 2025) | النموذج : C | الدرجة: 600

فيما يأتي 40 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 15 درجة .

التحليل 1:

1) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

A	للخط C مستقيم مقارب أفقي في جوار $-\infty$ معادلته $y = 0$	B	للخط C مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ معادلته $y = x$	C	للخط C مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$ معادلته $y = x$	D	للخط C مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$ معادلته $y = x + 1$

2) واحدةٌ من النهايات الآتية صحيحة :

A	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = 0$	B	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	C	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$	D	$\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - x) = +\infty$

3) f تابعٌ معرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{2x} & : x \neq 0 \\ 2 & : x = 0 \end{cases}$. إنّ نهاية التابع f عند الصفر

A	$\dfrac{3}{2}$	B	1	C	2	D	غير موجودة

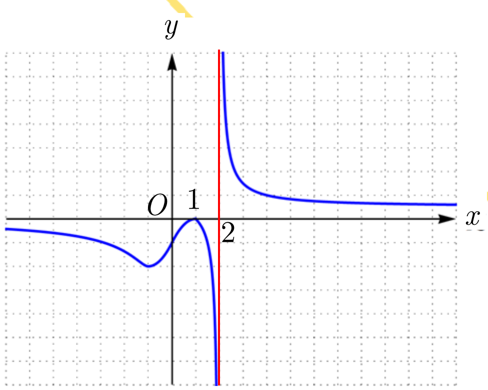
4) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق العلاقة : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 4}{x-1}$

A	للخط C مستقيم مقارب أفقي	B	$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$	C	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	D	$y = 2x - 3$ مستقيم مقارب مائل للخط C

5) f تابعٌ معرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق العلاقة : $f(x) = \dfrac{x \cdot \sin\frac{1}{x}}{x^2+5}$ إنّ نهاية التابع f عند الصفر تساوي

A	0	B	$\dfrac{1}{5}$	C	$+\infty$	D	غير موجودة

6) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$: المرسوم في الشكل المجاور :



A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	B	$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty$
C	مجموعة تعريف التابع $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ هي $]2, +\infty[$	D	عدد المستقيمات المقاربة للخط C هو اثنان فقط

7) ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعٌ زوجي و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ عندئذٍ

A	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$	B	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\ell$	C	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	D	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

8) f تابعٌ يحقّق $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+2x)=-3$ عندئذٍ خطّه البياني C_f يملك مقارب مائل معادلته :

A	$y=2x-3$	B	$y=-2x$	C	$y=-2x-3$	D	$y=-2x+3$

9) ليكن $x\mapsto E(x)$ تابع الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . عندما $x\in[\pi-1,e[$ يكون $E(x)$ يساوي

A	$\pi-1$	B	2	C	e	D	0

10) f تابعٌ يحقّق المتراجحة : $f(x)\le 3\le f(x)+\frac{1}{x}$ أياً تكن $x\in]0,+\infty[$.

عندئذٍ نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي

A	0	B	1	C	3	D	لا نستطيع تحديد الإجابة

التحليل 2:

11) بفرض $\ln(x+y)=\ln x+\ln y$. عندئذٍ x تساوي

A	$\frac{y}{y-1}$	B	$\frac{y-1}{y}$	C	$\frac{y-1}{y^2}$	D	$\frac{y^2}{y-1}$

12) ليكن f التابع المعيّن بالعلاقة : $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$

A	f معرّف على $]1,+\infty[$	B	f معرّف على $]0,+\infty[$	C	$f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln(x))}$	D	$f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x}$

13) f تابع معرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=2+3\ln x$, خطه البياني C_f

إنّ معادلة المماس للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x=1$ هي

A	$y=\frac{3}{x}$	B	$y=3x-1$	C	$y=3x$	D	$y=3x+2$

14) من أجل $x<0$ يكون $\ln(-\frac{1}{x})$ يساوي

A	$-\ln(-x)$	B	$\ln x$	C	$-\ln x$	D	$\frac{1}{\ln(-x)}$	E	$-\ln(\frac{1}{x})$

15) f تابع معيّن بالعلاقة وفق : $f(x)=\ln(E(x))$. مجموعة تعريف التابع f هي

A	$]0,+\infty[$	B	$[1,+\infty[$	C	$]1,+\infty[$	D	$]0,+\infty[\setminus\{1\}$

16) f تابع معرّف على المجال $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\ln(4x+3)$

أي التوابع الآتية المعرّفة على $]0,+\infty[$ لها نفس المشتق للتابع f

A	$g(x)=\ln(4x)\ln(3)$	B	$h(x)=\ln(6x+8)$	C	$i(x)=\ln(x+\frac{3}{4})$	D	$j(x)=4\ln(x+\frac{3}{4})$

17) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{\ln(x-2)}{(2-x)^3}-1\right)$ تساوي

A	0	B	$-\infty$	C	$+\infty$	D	1

18) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=x-x\ln(1-\frac{1}{x})$

يقبل خطّه البياني C مستقيم مقارب مائل معادلته :

A	$y=x+1$	B	$y=x-1$	C	$y=x$	D	$y=-x-1$

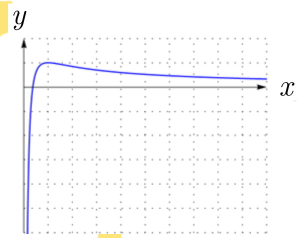
19) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=x-\ln x$

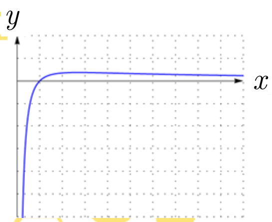
و C_1 الخط البياني للتابع f_1 المعيّن بالعلاقة : $f_1(x)=x-\ln(ex)$

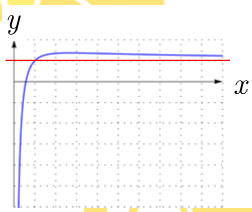
A	C_1 ينتج عن C بانسحاب شعاعه $\vec{i}$	B	C_1 ينتج عن C بانسحاب شعاعه $\vec{j}$	C	C_1 ينتج عن C بانسحاب شعاعه $-\vec{j}$	D	C_1 ينتج عن C بانسحاب شعاعه $-\vec{i}$

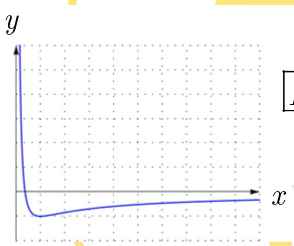
20) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$

عندئذٍ الخط البياني C هو

A


B


C


D


الجبر:

21) $\arg(\frac{e^{i\pi}}{i})$ تساوي

A	$\frac{\pi}{4}$	B	π	C	$\frac{\pi}{2}$	D	$\frac{3\pi}{2}$

22) ليكن w عدداً عقدياً ما يحقّق $|w|=2$ و $z=\frac{-3w}{(1+i)e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ عندئذٍ $|z|$ تساوي

A	$-3\sqrt{2}$	B	$\frac{9\sqrt{2}}{\pi}$	C	$3\sqrt{2}$	D	3

23) زاوية العدد العقدي $z=-2e^{-\frac{i\pi}{5}}$ تساوي

A	$-\frac{\pi}{5}$	B	$\frac{\pi}{5}$	C	$\frac{2\pi}{5}$	D	$\frac{4\pi}{5}$

24) θ عدد حقيقي يحقّق $\theta\in]0,\pi[$ و $z=1+e^{i\theta}$ عندئذٍ :

A	z عدد حقيقي موجب	B	$z=1$	C	$\arg(z)=\theta$	D	$\arg(z)=\frac{\theta}{2}$

25) مجموعة النقاط $M(z)$ في المستوي العقدي التي تحقّق المساواة : $(z-i)(\overline{z}+i)=0$ تمثّل

A	مستقيم	B	دائرة	C	نقطة وحيدة	D	اجتماع محوري الإحداثيات

26) إنّ حل المعادلة الآتية في $\mathbb{C}$ بالمجهول z : $(2+3i)z+(2-3i)\overline{z}=3i$ هو

A	$z=3i$	B	$z=2-3i$	C	$z=2+3i$	D	ليس لها أية حل

27) ليكن العدد العقدي $z=re^{i\theta}$. عندئذٍ $\arg(-z)+\arg(\overline{z})$ تساوي

A	$-\theta$	B	θ	C	$\frac{\pi}{2}$	D	π

28) $i^{2022}+i^{2023}+i^{2024}+i^{2025}$ تساوي

A	-1	B	0	C	1	D	i

29) بملاحظة أنّ $(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^2=1+2\sqrt{6}i$

فإنّ حلول المعادلة : $2z^2-2z-i\sqrt{6}=0$ هي

A	$z_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ $z_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$	B	$z_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ $z_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$	C	$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ $z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	D	$z_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ $z_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

30) ليكن العدد العقدي $z=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$. إنّ أحد الجذور التكعيبية للعدد z هو :

A	$e^{i\frac{4\pi}{3}}$	B	$e^{i\frac{\pi}{9}}$	C	$e^{i\frac{11\pi}{9}}$	D	$e^{i\frac{5\pi}{3}}$

الأشعة :

31) في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا ثلاث نقاط E و F و G متمايزة .

أياً كانت النقطة M كان الشعاع $2\overrightarrow{ME}-3\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}$ يساوي

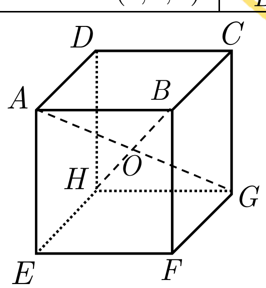
A	$4\overrightarrow{MF}$	B	$-\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}$	C	$5\overrightarrow{ME}$	D	$2\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}$

32) لتكن النقطتان $A(1,1,5)$ و $B(-1,3,1)$ إحداثيات النقطة K من محور الفواصل بحيث تكون متساوية البعد عن A و B هي

A	$K(0,0,2)$	B	$K(0,-4,0)$	C	$K(2,0,0)$	D	$K(4,0,0)$

33) $ABCDEFGH$ مكعّب

الأشعة الثلاثة المرتبطة خطياً هي :



A	$\overrightarrow{FG}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OG}$	B	$\overrightarrow{HG}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OG}$
C	$\overrightarrow{GH}$ و $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{DA}$	D	$\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OG}$

34) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. مجموعة نقاط الفراغ $M(x,y,z)$ التي تحقّق المساواة : $x^2+y^2=9$ تمثّل

A	دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها تساوي 3	B	أسطوانة محورها $(O;\vec{k})$ ونصف قطر قاعدتها تساوي 3	C	مخروط نصف قطر قاعدته 3	D	كرة نصف قطرها 3

35) في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا الأشعة : $\vec{u}(9,-1,-1)$ و $\vec{v}(3,-2,1)$ و $\vec{w}(x,0,-2)$

إنّ قيمة x التي تجعل الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً هي

A	0	B	3	C	9	D	10

36) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: لتكن A و B نقطتان مختلفتان

إنّ مجموعة نقاط الفراغ $M(x,y,z)$ التي تحقّق المساواة : $AM=BM$ تمثّل

A	كرة مركزها A وتمر بالنقطة B	B	محور القطعة $[AB]$	C	المستوي المحوري للقطعة $[AB]$	D	نقطة وحيدة

37) في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا مستوٍ P شعاعا توجيهه هما $\vec{u}(2,3,-1)$ و $\vec{v}(1,2,-1)$ ويمر بالنقطة $A(1,1,-1)$

فالمعادلة الديكارتية لمجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقّق العلاقة : $\overrightarrow{AM}=a\vec{u}+b\vec{v}$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ هي :

A	$x-y-z-1=0$	B	$x-y-z+1=0$	C	$x+y-z+1=0$	D	$-x+y-z-1=0$

38) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(3,1,-3)$ و $B(-1,5,-3)$ و $C(-1,1,\alpha)$ حيث α عددٌ حقيقي

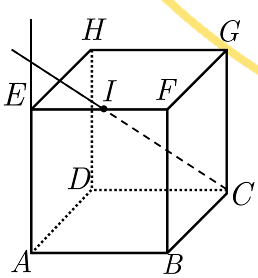
إنّ مجموعة قيم α التي تجعل المثلث ABC متساوي الأضلاع هي

A	$\varnothing$	B	$\{1,-7\}$	C	$\{7,-1\}$	D	$\{4\}$

39) إذا كان المستقيمان (AB) و (CD) متقاطعين

A	كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطياً	B	كان الشعاعان $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ مرتبطين خطياً	C	كانت الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً .	D	كانت النقاط A و B و C تقع على استقامةٍ واحدة .

40) $ABCDEFGH$ مكعب فيه النقطة I منتصف $[EF]$



واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ :

A	المستقيمان (CI) و (AE) متخالفان	B	المستقيمان (CI) و (AE) متقاطعان
C	$2\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{CE}$	D	$\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

.... انتهت الأسئلة..

فيما يأتي 40 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 15 درجة .

التحليل 1:

1) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

A	للخط C مستقيم مقارب أفقي في جوار $-\infty$ معادلته $y = 0$	B	للخط C مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ معادلته $y = x$	C	للخط C مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$ معادلته $y = x$	D	للخط C مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$ معادلته $y = x + 1$

التبرير: نحن نعلم كل تابع من الشكل : $f(x) = ax + b + g(x)$.

وكان $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lambda$ كان المستقيم Δ الذي معادلته : $y = ax + b + \lambda$ مقارب مائل . للخط C في جوار $-\infty$.

بفرض $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

في جوار $-\infty$ يكون $g(x) = \dfrac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

ومنه $y = x + 1 - 1 = x$ هو المقارب المائل للخط C في جوار $-\infty$. فالخيار الصحيح هو B .

(ونستطيع التحقّق أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x) = 0$)

والخيار A خاطئ حيث لا يوجد مقاربان أفقي ومائل في نفس الجوار .

أمّا في جوار $+\infty$: يكون $g(x) = \dfrac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

ومنه $y = x + 1 + 1 = x + 2$ هو المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$.

فالخياران C و D خاطئان .

2) واحدةٌ من النهايات الآتية صحيحة :

A	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=0$	B	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$	C	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$	D	$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-x)=+\infty$

التبرير: من الواضح أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$ هو الخيار الصحيح

حيث $-1\le\cos x\le 1$ بما أنّ x في جوار $+\infty$ فإذا قسّمنا طرفي المتراجحة على x لا تتغيّر جهة التراجح .

ومنه $\dfrac{-1}{x}\le\dfrac{\cos x}{x}\le\dfrac{1}{x}$ ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x}=0$ فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$.

فالخيار الصحيح هو C .

أمّا إذا دقّقنا في الخيار A : بفرض $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

نضرب بالمرافق ونقسّم عليه : $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x+4}-2)\times(\sqrt{x+4}+2)}{x\times(\sqrt{x+4}+2)}$

ومنه $f(x)=\dfrac{x+\cancel{4}-\cancel{4}}{x\times(\sqrt{x+4}+2)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}$.

وبالتالي $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{4}$ فالخيار A خاطئ .

أمّا إذا دقّقنا في الخيار B : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ بنفس الأسلوب الذي حللنا فيه الخيار C . فالخيار B خاطئ .

أمّا إذا دقّقنا في الخيار D : بفرض $f(x)=\sqrt{x}-x$

$$f(x)=\sqrt{x}(1-\sqrt{x})$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\sqrt{x})=-\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. فالخيار D خاطئ .

---

3) f تابعٌ معرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{2x} & : x\neq 0\\ 2 & : x=0\end{cases}$. إنّ نهاية التابع f عند الصفر

A	$\dfrac{3}{2}$	B	1	C	2	D	غير موجودة

التبرير:

عندما $x\neq 0$ يكون $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{2x}$ وعندئذٍ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{2}\dfrac{\sin 3x}{3x}=\dfrac{3}{2}\times 1=\dfrac{3}{2}$ .... (1)

ولدينا $f(0)=2$ .... (2)

من (1) و (2) نجد أنّه ليس للتابع f نهاية عند الصفر . فالجواب الصحيح هو D .

---

4) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+4}{x-1}$

A	للخط C مستقيم مقارب أفقي	B	$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$	C	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	D	$y=2x-3$ مستقيم مقارب مائل للخط C

التبرير: بما أنّ درجة البسط أعلى من المقام بدرجةٍ واحدةٍ فقط يخطر ببالنا أنّه يملك مستقيم مقارب مائل .

للحصول عليه نقسّم البسط على المقام قسمة إقليدية :

$$\begin{array}{r|l} & 2x-3 \\ \hline x-1 & 2x^2-5x+4 \\ & \mp 2x^2 \pm 2x \\ \hline & -3x+4 \\ & \pm 3x \mp 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$f(x)=2x-3+\frac{1}{x-1}$$

$$f(x)-(2x-3)=\frac{1}{x-1}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(2x-3))=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(2x-3))=0$

وبالتالي $y=2x-3$ مستقيم مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ و $-\infty$. فالخيار الصحيح هو D .

أمّا الخيار A : فهو خاطئ لأنّه ليس للخط C مقاربان أفقي ومائل في نفس الجوار .

أمّا الخيار B : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\boxed{\dfrac{1}{0^+}}=+\infty$. فالخيار B خاطئ .

أمّا الخيار C : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$. فالخيار C خاطئ .

---

5) f تابعٌ معرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{x\cdot\sin\frac{1}{x}}{x^2+5}$ إنّ نهاية التابع f عند الصفر تساوي

A	0	B	$\frac{1}{5}$	C	$+\infty$	D	غير موجودة

التبرير: بفرض $g(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$

$$|g(x)|=\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|=|x|.\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|(1)$$

أصبح لدينا $|g(x)|\le|x|$

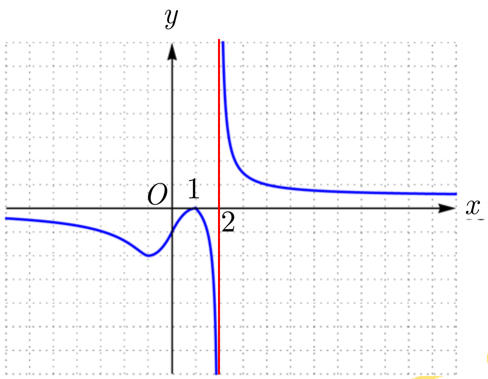
بما أنّ $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (2) نجد $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

و $\lim\limits_{x\to0}(x^2+5)=5$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\dfrac{0}{5}=0$. فالخيار الصحيح هو A .

---

6) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$:
المرسوم في الشكل المجاور :



A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	B	$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$
C	مجموعة تعريف التابع $x\mapsto\sqrt{f(x)}$ هي $]2,+\infty[$	D	عدد المستقيمات المقاربة للخط C هو اثنان فقط

التبرير:

لندقّق في الخيار A: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B: $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$. فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C: التابع $x\mapsto\sqrt{f(x)}$ عندما $f(x)\geq 0$ وهذا محقّق عندما $x\in]2,+\infty[\cup\{1\}$. فالخيار C خاطئ .

لندقّق في الخيار D: للخط C مستقيمان مقاربان أحدهما أفقي هو $y=0$ والآخر شاقولي هو $x=2$.

فالخيار الصحيح هو D .

---

7) ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعٌ زوجي و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ عندئذٍ

A	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$	B	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\ell$	C	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	D	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

التبرير:

بما أنّ f تابعٌ زوجي فخطّه البياني متناظر بالنسبة إلى المحور yy' .

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ كان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$. فالخيار الصحيح هو A .

---

8) f تابعٌ يحقّق $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x)=-3$ عندئذٍ خطّه البياني C_f يملك مقارب مائل معادلته :

A	$y=2x-3$	B	$y=-2x$	C	$y=-2x-3$	D	$y=-2x+3$

التبرير:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x)=-3$ ومنه $y=-2x-3$ مستقيم مقارب أفقي للخط C_f في جوار $+\infty$. فالخيار الصحيح هو C .

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x)=-3$ يكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x+3)=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(-2x-3))=0$.

---

9) ليكن $x\mapsto E(x)$ تابع الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . عندما $x\in[\pi-1,e[$ يكون $E(x)$ يساوي

A	$\pi-1$	B	2	C	e	D	0

التبرير: عندما $x\in[\pi-1,e[$ يكون $E(x)=2$ (لأنّ $\pi-1\approx 2.14$ و $e\approx 2.7$)

وبالتالي عندما x تكون محصورة بين 2.14 و 2.7 يكون $E(x)=2$. فالخيار الصحيح هو B .

10) f تابعٌ يحقّق المتراجحة : $f(x) \le 3 \le f(x) + \frac{1}{x}$ أياً تكن $x \in]0,+\infty[$.

عندئذٍ نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي

A	0	B	1	C	3	D	لا نستطيع تحديد الإجابة

التبرير: $f(x) \le 3 \le f(x) + \frac{1}{x}$.

لنطرح $f(x)$ من جميع أطراف المتراجحة .

$$0 \le 3 - f(x) \le \frac{1}{x}$$

لمّا كان $\lim_{x\to+\infty}(0) = 0$ و $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}) = 0$ فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة نجد $\lim_{x\to+\infty}(3 - f(x)) = 0$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ فالخيار الصحيح هو C .

التحليل 2:

11) بفرض $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$. عندئذٍ x تساوي

A	$\frac{y}{y-1}$	B	$\frac{y-1}{y}$	C	$\frac{y-1}{y^2}$	D	$\frac{y^2}{y-1}$

التبرير: $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$

ومنه $\ln(x+y) = \ln(x \cdot y)$ وبالتالي $x + y = x \cdot y$

$x \cdot y - x = y$ وبالتالي $x(y-1) = y$ ومنه

$x = \frac{y}{y-1}$ فالخيار الصحيح هو A .

---

12) ليكن f التابع المعيّن بالعلاقة : $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

A	f معرّف على $]1,+\infty[$	B	f معرّف على $]0,+\infty[$	C	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln(x))}$	D	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$

التبرير: $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

لندقّق في الخيار A : f معرّف عندما $\ln(\ln x) > 0$ ومنه $\ln(\ln x) > \ln 1$

وبالتالي $\ln x > 1$ ومنه $\ln x > \ln e$ ومنه $x > e$ فالتابع f معرّف عندما $x \in]e,+\infty[$. فالخيار A خاطئ .

الخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

$$f'(x) = \frac{(\ln(\ln x))'}{\ln(\ln x)} = \frac{\frac{(\ln x)'}{\ln x}}{\ln(\ln x)} = \frac{(\ln x)'}{\ln x \cdot \ln(\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x \cdot \ln(\ln x)} = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln(x))}$$

فالخيار الصحيح هو C . والخيار D خاطئ .

---

13) f تابع معرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=2+3\ln x$, C_f خطه البياني

إنّ معادلة المماس للخط C_f في نقطة منه فاصلتها $x=1$ هي

A	$y=\frac{3}{x}$	B	$y=3x-1$	C	$y=3x$	D	$y=3x+2$

التبرير: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$f(1)=2$

ومنه $f'(x)=\frac{3}{x}$ وبالتالي $f'(1)=\frac{3}{1}=3$

ومنه $y=3(x-1)+2$ وبالتالي

$y=3x-1$. فالخيار الصحيح هو B .

---

14) من أجل $x<0$ يكون $\ln(-\frac{1}{x})$ يساوي

A	$-\ln(-x)$	B	$\ln x$	C	$-\ln x$	D	$\frac{1}{\ln(-x)}$	E	$-\ln(\frac{1}{x})$

التبرير:

$\ln(-\frac{1}{x})=\ln(\frac{1}{-x})=-\ln(-x)$. فالخيار الصحيح هو A .

---

15) f تابع معيّن بالعلاقة وفق : $f(x)=\ln(E(x))$. مجموعة تعريف التابع f هي

A	$]0,+\infty[$	B	$[1,+\infty[$	C	$]1,+\infty[$	D	$]0,+\infty[\setminus\{1\}$

التبرير: $f(x)=\ln(E(x))$

f معرّف عندما $E(x)>0$ ومنه $x\in[1,+\infty[$. لأنّه عندما $x\in[0,1[$ يكون $E(x)=0$. فالخيار الصحيح هو B .

---

16) f تابع معرّف على المجال $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\ln(4x+3)$

أي التوابع الآتية المعرّفة على $]0,+\infty[$ لها نفس المشتق للتابع f

A	$g(x)=\ln(4x)\ln(3)$	B	$h(x)=\ln(6x+8)$	C	$i(x)=\ln(x+\frac{3}{4})$	D	$j(x)=4\ln(x+\frac{3}{4})$

التبرير: $f(x)=\ln(4x+3)$

$f'(x)=\frac{4}{4x+3}$

لندقّق في الخيار A : $g(x)=\ln(4x)\ln(3)$ ومنه

$g'(x)=\frac{1}{x}\ln(3)\neq f'(x)$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $h(x)=\ln(6x+8)$

$h'(x)=\frac{6}{6x+8}=\frac{3}{3x+4}\neq f'(x)$. فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : $i(x)=\ln(x+\frac{3}{4})$

$i'(x)=\frac{1}{x+\frac{3}{4}}=\frac{4}{4x+3}=f'(x)$. فالخيار C صحيح .

أمّا الخيار D : $j(x)=4\ln(x+\frac{3}{4})$

$j'(x)=4\dfrac{1}{x+\frac{3}{4}}=\dfrac{4}{x+\frac{3}{4}}=\dfrac{16}{4x+3}\neq f'(x)$. فالخيار D خاطئ .

ملاحظة : يمكن معرفة الخيار الصحيح بالأسلوب الآتي :

$$f(x)=\ln(4x+3)=\ln(4(x+\frac{3}{4}))=\ln 4+\ln(x+\frac{3}{4})=\ln 4+i(x)$$

$$f(x)=\ln 4+i(x)$$

لنشتق الطرفين $f'(x)=i'(x)$. حيث $\ln 4$ عددٌ ثابت مشتقّه معدوم . فالخيار C صحيح .

---

17) $\lim\limits_{x\to 2^{+}}(\dfrac{\ln(x-2)}{(2-x)^{3}}-1)$ تساوي

1	D	$+\infty$	C	$-\infty$	B	0	A

<u>**التبرير:**</u>

$\lim\limits_{x\to 2^{+}}(\dfrac{\ln(x-2)}{(2-x)^{3}}-1)=\dfrac{-\infty}{0^{-}}-1=+\infty$. فالخيار الصحيح هو C .

---

18) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=x-x\ln(1-\frac{1}{x})$

يقبل خطّه البياني C مستقيم مقارب مائل معادلته :

$y=-x-1$	D	$y=x$	C	$y=x-1$	B	$y=x+1$	A

<u>**التبرير:**</u> $f(x)=x-x\ln(1-\frac{1}{x})$

$$f(x)=x+\dfrac{\ln(1-\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x}}$$

بفرض $g(x)=\dfrac{\ln(1-\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x}}$

و لنضع : $t=\dfrac{-1}{x}$

عندما $x\to+\infty$ يكون $t\to 0$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$$

فالمستقيم $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$. فالخيار الصحيح هو A .

---

19) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = x - \ln x$

و C_1 الخط البياني للتابع f_1 المعيّن بالعلاقة : $f_1(x) = x - \ln(ex)$

A	C_1 ينتج عن C بانسحاب شعاعه $\vec{i}$	B	C_1 ينتج عن C بانسحاب شعاعه $\vec{j}$	C	C_1 ينتج عن C بانسحاب شعاعه $-\vec{j}$	D	C_1 ينتج عن C بانسحاب شعاعه $-\vec{i}$

التبرير : $f(x) = x - \ln x$

$f_1(x) = x - (\ln e + \ln x)$

ومنه $f_1(x) = x - (1 + \ln x)$

وبالتالي $f_1(x) = x - 1 - \ln x$

ومنه $f_1(x) = x - \ln x - 1$

وبالتالي $f_1(x) = f(x) - 1$

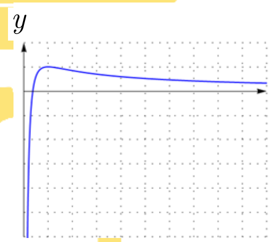
ومنه C_1 ينتج عن C بانسحاب شعاعه $-\vec{j}$. فالخيار الصحيح هو C .

---

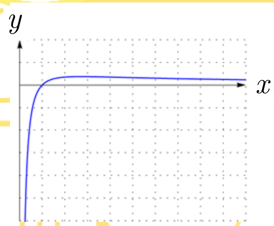
20) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$

عندئذٍ الخط البياني C هو

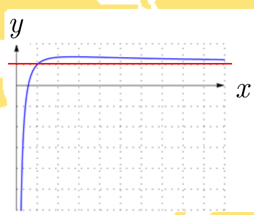
$\boxed{A}$



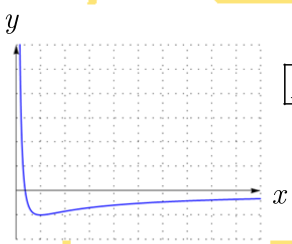
$\boxed{B}$



$\boxed{C}$



$\boxed{D}$



التبرير :

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ فالخيار D خاطئ .

عند $+\infty$: $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$ ومنه $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ فالخيار C خاطئ .

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1(1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ عندما $-\ln x = 0$ ومنه $\ln x = 0$ وبالتالي $x = 1$ ومنه $f(1) = 1$. فالخيار A هو الخيار الصحيح .

الجبر:

21) $\arg(\frac{e^{i\pi}}{i})$ تساوي

A	$\frac{\pi}{4}$	B	π	C	$\frac{\pi}{2}$	D	$\frac{3\pi}{2}$

التبرير:

$\arg(\frac{e^{i\pi}}{i}) = \arg(e^{i\pi}) - \arg(i) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. فالخيار الصحيح هو C .

---

22) ليكن w عدداً عقدياً ما يحقّق $|w| = 2$ و $z = \frac{-3w}{(1+i)e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ عندئذٍ $|z|$ تساوي

A	$-3\sqrt{2}$	B	$\frac{9\sqrt{2}}{\pi}$	C	$3\sqrt{2}$	D	3

التبرير: لدينا فرضاً $|w| = 2$

$$|z| = \left|\frac{-3w}{(1+i)e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right| = \frac{|-3w|}{\left|(1+i)e^{-i\frac{\pi}{3}}\right|} = \frac{3|w|}{|1+i| \cdot \left|e^{-i\frac{\pi}{3}}\right|} = \frac{3(2)}{\sqrt{2}(1)} = 3\sqrt{2}$$

فالخيار الصحيح هو C .

---

23) زاوية العدد العقدي $z = -2e^{-\frac{i\pi}{5}}$ تساوي

A	$-\frac{\pi}{5}$	B	$\frac{\pi}{5}$	C	$\frac{2\pi}{5}$	D	$\frac{4\pi}{5}$

التبرير:

$$z = -2e^{-\frac{i\pi}{5}} = 2e^{i\pi} \cdot e^{-\frac{i\pi}{5}} = 2e^{i(\pi - \frac{\pi}{5})} = 2e^{i(\frac{4\pi}{5})}$$

ومنه $\arg(z) = \frac{4\pi}{5}$. فالخيار الصحيح هو D .

---

24) θ عدد حقيقي يحقّق $\theta \in]0,\pi[$ و $z = 1 + e^{i\theta}$ عندئذٍ :

A	z عدد حقيقي موجب	B	$z = 1$	C	$\arg(z) = \theta$	D	$\arg(z) = \frac{\theta}{2}$

التبرير:

$z = 1 + e^{i\theta}$

ومنه $z = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})$

$z = e^{i\frac{\theta}{2}}(2\cos\frac{\theta}{2})$

$z = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ بما أنّ $\theta \in]0,\pi[$ فإنّ $\frac{\theta}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}[$ ومنه $\cos\frac{\theta}{2} > 0$.

فالشكل $z = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ هو شكل أسي للعدد العقدي z .

ومنه $\arg(z) = \frac{\theta}{2}$. فالخيار الصحيح هو D .

---

25) مجموعة النقاط $M(z)$ في المستوي العقدي التي تحقّق المساواة : $(z-i)(\overline{z}+i)=0$ تمثّل

A	مستقيم	B	دائرة	C	نقطة وحيدة	D	اجتماع محوري الإحداثيات

التبرير:

$$(z-i)(\overline{z}+i)=0$$
$$z\cdot\overline{z}+iz-i\overline{z}+1=0 \quad \text{ومنه}$$
$$z\cdot\overline{z}+i(z-\overline{z})+1=0$$

وبالتالي : $x^2+y^2+i(2yi)+1=0$

$$x^2+y^2-2y+1=0$$
$$x^2+(y-1)^2=0$$

فمجموعة النقاط $M(z)$ في المستوي العقدي التي تحقّق المساواة تمثّل نقطة وحيدة $(0,1)$.

فالخيار الصحيح هو C .

---

26) إنّ حل المعادلة الآتية في $\mathbb{C}$ بالمجهول z : $(2+3i)z+(2-3i)\overline{z}=3i$ هو

A	$z=3i$	B	$z=2-3i$	C	$z=2+3i$	D	ليس لها أية حل

التبرير: $(2+3i)z+\overline{(2+3i)z}=3i$

ونحن نعلم أنّ $w+\overline{w}=2\operatorname{Re}(w)$.

والمعادلة المعطاة هي جمع عدد عقدي مع مرافقه فيجب أن يكون الناتج عدداً حقيقياً .

فالمعادلة مستحيلة الحل . فالخيار الصحيح هو D .

---

27) ليكن العدد العقدي $z=re^{i\theta}$. عندئذٍ $\arg(-z)+\arg(\overline{z})$ تساوي

A	$-\theta$	B	θ	C	$\dfrac{\pi}{2}$	D	π

التبرير: لدينا $\arg(z)=\theta$ عندئذٍ :

$$\arg(-z)+\arg(\overline{z})=\arg(-1)+\arg(z)-\arg(z)=\pi+\theta-\theta=\pi$$

فالخيار الصحيح هو D .

---

28) $i^{2022}+i^{2023}+i^{2024}+i^{2025}$ تساوي

A	-1	B	0	C	1	D	i

التبرير: إنّ : $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0$

(أي جمع أربع أعداد عقدية بأسس متتالية من الشكل i^n أو $(-i)^n$ يساوي الصفر حيث $n\in\mathbb{N}$)

الإثبات : $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=i^n+i\cdot i^n+i^n\cdot i^2+i^n\cdot i^3=i^n+i\cdot i^n-i^n-i^n\cdot i=0$

وبنفس الأسلوب يكون:

$$\boxed{\begin{aligned}(-i)^n+(-i)^{n+1}+(-i)^{n+2}+(-i)^{n+3}&=(-i)^n+(-i)^n(-i)+(-i)^n(-i)^2+(-i)^n(-i)^3\\&=(-i)^n+(-i)^n(-i)-(-i)^n+(-i)^n(i)=0\end{aligned}}$$

لنعود إلى التمرين : $i^{2022}+i^{2023}+i^{2024}+i^{2025}=0$. فالخيار الصحيح هو B .

ويمكن الحل : بأن نوجد كل حد على حدا حسب قاعدة القوى الطبيعية للعدد التخيلي i .

أو الحل باستخدام قانون مجموع حدود متتالية هندسية أساسها i .

---

29) بملاحظة أنّ $(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^2 = 1+2\sqrt{6}i$

فإنّ حلول المعادلة : $2z^2-2z-i\sqrt{6}=0$ هي

A		B		C		D	
A	$z_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ $z_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$	B	$z_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ $z_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$	C	$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ $z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	D	$z_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ $z_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

<u>التبرير:</u> $2z^2-2z-i\sqrt{6}=0$

$$\Delta=(-2)^2-4(2)(-i\sqrt{6})=4+8\sqrt{6}i=4(1+2\sqrt{6}i)$$

ومنه $\Delta=4(1+2\sqrt{6}i)=4(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^2$

$$z_1=\frac{2+2(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$z_2=\frac{2-2(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)}{4}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ فالخيار الصحيح هو A .

ونستطيع الحل : إذا أخذنا الخيار A : ولاحظنا أنّ $z_1+z_2=1=\frac{-b}{a}=\frac{2}{2}=1$ محقق ولا يوجد خيار ثاني يحقّق ذلك

فالخيار الصحيح هو A .

---

30) ليكن العدد العقدي $z=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$. إنّ أحد الجذور التكعيبية للعدد z هو :

A		B		C		D	
A	$e^{i\frac{4\pi}{3}}$	B	$e^{i\frac{\pi}{9}}$	C	$e^{i\frac{11\pi}{9}}$	D	$e^{i\frac{5\pi}{3}}$

<u>التبرير:</u> $z=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$

$$z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

لندقّق في الخيار A : $(e^{i\frac{4\pi}{3}})^3=e^{i4\pi}\neq e^{-i\frac{\pi}{3}}$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $(e^{i\frac{\pi}{9}})^3=e^{i\frac{\pi}{3}}\neq e^{-i\frac{\pi}{3}}$. فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : $(e^{i\frac{11\pi}{9}})^3=e^{i\frac{11\pi}{3}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ فالخيار الصحيح هو C .

أمّا الخيار D : $(e^{i\frac{5\pi}{3}})^3=e^{i5\pi}=e^{i\pi}\neq e^{-\frac{i\pi}{3}}$. فالخيار D خاطئ .

<u>طريقة ثانية :</u> $z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

بفرض أحد الجذور التكعيبية للعدد z هو $w=re^{i\theta}$ فيكون $w^3=z$

ومنه $(re^{i\theta})^3=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

وبالتالي $r^3e^{i3\theta}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$r^3=1$ ومنه $r=1$

و $3\theta=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$

أي $\theta = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$: $k \in \{0,1,2\}$

عندما $k = 0$ يكون $\theta = \frac{-\pi}{9}$ فالجذر الأول هو $w_1 = e^{-i\frac{\pi}{9}}$.

عندما $k = 1$ يكون $\theta = \frac{5\pi}{9}$ فالجذر الثاني هو $w_2 = e^{i\frac{5\pi}{9}}$.

عندما $k = 3$ يكون $\theta = \frac{11\pi}{9}$ فالجذر الثالث هو $w_3 = e^{i\frac{11\pi}{9}}$. فالخيار الصحيح هو C .

الأشعة :

31) في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا ثلاث نقاط E و F و G متمايزة .

أياً كانت النقطة M كان الشعاع $2\overrightarrow{ME} - 3\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}$ يساوي

A	$4\overrightarrow{MF}$	B	$-\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$	C	$5\overrightarrow{ME}$	D	$2\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$

التبرير:

$2\overrightarrow{ME} - 3\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{ME} - 2\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}$ ومنه

$$2\overrightarrow{ME} - 3\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 2(\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MF}) - \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$$

فالخيار الصحيح هو D .

---

32) لتكن النقطتان $A(1,1,5)$ و $B(-1,3,1)$ إحداثيات النقطة K من محور الفواصل بحيث تكون متساوية البعد عن A و B هي

A	$K(0,0,2)$	B	$K(0,-4,0)$	C	$K(2,0,0)$	D	$K(4,0,0)$

التبرير: النقطة K من محور الفواصل إحداثيّاتها من الشكل $K(x,0,0)$. فالخياران A و B خاطئان

$KA = KB$

ومنه $KA^2 = KB^2$

وبالتالي $(x-1)^2 + (0-1)^2 + (0-5)^2 = (x+1)^2 + (0-3)^2 + (0-1)^2$

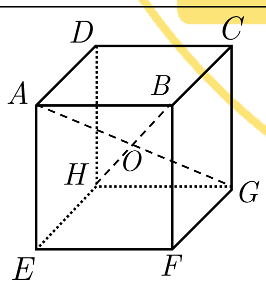
$x^2 - 2x + 1 + 1 + 25 = x^2 + 2x + 1 + 9 + 1$

$16 = 4x$

وبالتالي $\boxed{x = 4}$ ومنه $K(4,0,0)$. فالخيار الصحيح هو D .

---

33) $ABCDEFGH$ مكعّب



الأشعة الثلاثة المرتبطة خطياً هي :

A	$\overrightarrow{OG}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{FG}$	B	$\overrightarrow{OG}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{HG}$
C	$\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{GH}$	D	$\overrightarrow{OG}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{BF}$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : الشعاعان $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OG}$ يقعان في المستوي $(ABGH)$

والشعاع $\overrightarrow{FG}$ لا يقع في المستوي $(ABGH)$. فالأشعة $\overrightarrow{FG}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OG}$ ليست مرتبطة خطياً . فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : الشعاعان $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OG}$ يقعان في المستوي $(ABGH)$

والشعاع $\overrightarrow{HG}$ يقع في المستوي $(ABGH)$. فالأشعة $\overrightarrow{HG}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OG}$ مرتبطة خطياً . فالخيار B صحيح .

أمّا الخيار C : الشعاعان $\overrightarrow{GH}$ و $\overrightarrow{BF}$ يقعان في المستوي $(ABFE)$ و $\overrightarrow{DA}$ لا يقع في المستوي $(ABFE)$.

فالأشعة $\overrightarrow{GH}$ و $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{DA}$ ليست مرتبطة خطياً . فالخيار C خاطئ .

أمّا الخيار D : الشعاعان $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OG}$ يقعان في المستوي $(ABGH)$.

والشعاع $\overrightarrow{BF}$ لا يقع في المستوي $(ABGH)$. فالأشعة $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OG}$ ليست مرتبطة خطياً . فالخيار D خاطئ .

---

34) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. مجموعة نقاط الفراغ $M(x,y,z)$ التي تحقّق المساواة : $x^2+y^2=9$ تمثّل

A	دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها تساوي 3	B	أسطوانة محورها $(O;\vec{k})$ ونصف قطر قاعدتها تساوي 3	C	مخروط نصف قطر قاعدته 3	D	كرة نصف قطرها 3

<u>التبرير:</u> أسطوانة محورها $(O;\vec{k})$ ونصف قطر قاعدتها تساوي 3 (حيث إذا لم يحدّد ارتفاع الأسطوانة نعتبرها لا نهائية)

فالخيار الصحيح هو B .

---

35) في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا الأشعة : $\vec{u}(9,-1,-1)$ و $\vec{v}(3,-2,1)$ و $\vec{w}(x,0,-2)$

إنّ قيمة x التي تجعل الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً هي

A	0	B	3	C	9	D	10

<u>التبرير:</u> نلاحظ أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة ($\frac{9}{3}\neq\frac{-1}{-2}$)

الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً إذن يوجد عددان حقيقيان a و b يحقّقان أنّ $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$ ومنه

$$(x,0,-2)=a(9,-1,-1)+b(3,-2,1)$$

ومنه $$(x,0,-2)=a(9,-1,-1)+b(3,-2,1)$$

$$(x,0,-2)=(9a+3b,-a-2b,-a+b)$$

ومنه $$\begin{cases} 9a+3b=x & (1)\\ -a-2b=0 & (2)\\ -a+b=-2 & (3)\end{cases}$$

لنأخذ المعادلتين $\{(2),(3)\}$: بطرح (2) من (3) نجد $3b=-2$ ومنه $b=\frac{-2}{3}$ نعوّض في (2) فنجد $-a+\frac{4}{3}=0$

ومنه $a=\frac{4}{3}$ يجب أنْ تحقّق المعادلة (1) فنجد : $\frac{36}{3}+\frac{-6}{3}=x$ ومنه $x=10$.

فالخيار الصحيح هو D .

---

36) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: لتكن A و B نقطتان مختلفتان

إنّ مجموعة نقاط الفراغ $M(x,y,z)$ التي تحقّق المساواة : $AM=BM$ تمثّل

A	كرة مركزها A وتمر بالنقطة B	B	محور القطعة $[AB]$	C	المستوي المحوري للقطعة $[AB]$	D	نقطة وحيدة

<u>التبرير:</u> مجموعة نقاط الفراغ $M(x,y,z)$ التي تحقّق المساواة : $AM=BM$ تمثّل المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

فالخيار الصحيح هو C .

---

37) في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا مستوٍ $\mathcal{P}$ شعاعا توجيهه هما $\vec{u}(2,3,-1)$ و $\vec{v}(1,2,-1)$ ويمر بالنقطة $A(1,1,-1)$

فالمعادلة الديكارتية لمجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقّق العلاقة : $\overrightarrow{AM}=a\vec{u}+b\vec{v}$ حيث a و b من $\mathbb{R}$ هي :

A	$x-y-z-1=0$	B	$x-y-z+1=0$	C	$x+y-z+1=0$	D	$-x+y-z-1=0$

التبرير : $\overrightarrow{AM}=a\vec{u}+b\vec{v}$

$$\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z+1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$ ومنه

$$\begin{cases}2a+b=x-1 & (1)\\3a+2b=y-1 & (2)\\-a-b=z+1 & (3)\end{cases}$$

لنأخذ $\{(1),(3)\}$ فنجد بالجمع : $a=x+z$ نعوّض في (1) فنجد $2(x+z)+b=x-1$

ومنه $b=-x-2z-1$ يجب أنْ تحقّق المعادلة (2) :

$$3(x+z)+2(-x-2z-1)=y-1$$

ومنه $x-y-z-1=0$. فالخيار الصحيح هو A .

ملاحظة: نحن نعلم أنّ هذه المساوة تمثّل معادلة المستوي $\mathcal{P}$ ولمّا كانت النقطة A تنتمي إليه فهي تحقّق معادلته فالخياران B و C خاطئان .

---

38) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(3,1,-3)$ و $B(-1,5,-3)$ و $C(-1,1,\alpha)$ حيث α عددٌ حقيقي

إنّ مجموعة قيم α التي تجعل المثلث ABC متساوي الأضلاع هي

A	$\varnothing$	B	$\{1,-7\}$	C	$\{7,-1\}$	D	$\{4\}$

التبرير :

$$AB=\sqrt{(3+1)^2+(5-1)^2+(0)^2}=\sqrt{32}$$

$$AC=\sqrt{(3+1)^2+(0)^2+(\alpha+3)^2}=\sqrt{16+(\alpha+3)^2}$$

$$BC=\sqrt{(0)^2+(4)^2+(\alpha+3)^2}=\sqrt{16+(\alpha+3)^2}$$

نلاحظ أنّ $AC=BC$ أياً تكن $\alpha\in\mathbb{R}$ فالمثلث ABC متساوي الساقين .

حتى يكون متساوي الأضلاع يجب أنْ يتحقّق $AC=AB$ أي

$\sqrt{16+(\alpha+3)^2}=\sqrt{32}$ ومنه

$16+(\alpha+3)^2=32$ وبالتالي

$(\alpha+3)^2=16$

ومنه إمّا $\alpha+3=4$ أي $\alpha=1$

أو $\alpha+3=-4$ أي $\alpha=-7$

وبالتالي $\alpha\in\{1,-7\}$. التي تجعل المثلث ABC متساوي الأضلاع . فالخيار الصحيح هو B .

---

39) إذا كان المستقيمان (AB) و (CD) متقاطعين

A	كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطياً	B	كان الشعاعان $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ مرتبطين خطياً	C	كانت الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً .	D	كانت النقاط A و B و C تقع على استقامةٍ واحدة .

__التبرير:__

نحن نعلم أنّ المستقيمين المتقاطعين يعينان مستوٍ وحيد أي النقاط A و B و C و D تقع في هذا المستوي .

وبالتالي الأشعة : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً . فالخيار الصحيح هو C .

أمّا الخيار A : فهو خاطئ وضوحاً لأنّه لو كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطياً كان المستقيمان متوازيين .

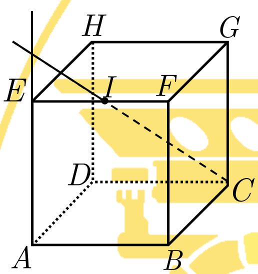
أمّا الخيار B : فليس بالضرورة أن يتحقّق فهو خيار خاطئ .

والخيار D : ليس بالضرورة أن يتحقّق فهو خيار خاطئ .

---

40) $ABCDEFGH$ مكعب فيه النقطة I منتصف $[EF]$

__واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ :__



A	المستقيمان (CI) و (AE) متخالفان	B	المستقيمان (CI) و (AE)متقاطعان
C	$2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CE}$	D	$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

__التبرير:__

لندقّق في الخيار A : من الواضح أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE}$ يقعان في المستوي $(ABFE)$

والنقطة I تنتمي إلى المستوي $(ABFE)$ و النقطة C لا تنتمي إلى المستوي $(ABFE)$

فالأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{CI}$ لا تقع في مستوٍ وحد فهي ليست مرتبطة خطياً

فالمستقيم (CI) يقطع المستوي $(ABFE)$ في النقطة I فلا يمكن أنْ يقطعه بنقطةٍ أخرى أي المستقيم (CI) لا يقطع امتداد $[AE)$ كما هو ملاحظ في الشكل .

فالمستقيمان (CI) و (AE) متخالفان وليسا متقاطعين . فالخيار A صحيح والخيار Bخاطئ وهو الذي يجب أنْ نختاره .

أمّا الخيار C : بما أنّ I منتصف $[EF]$ فإنّ حسب خاصة المتوسط $2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{CE}$. فالخيار C صحيح .

أمّا الخيار D : $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{CI}$. فالخيار D صحيح .

....انتهت الأجوبة...

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

الاسم :.........	المذاكرة الأولى لمادة الرياضيات
الدرجة: 600	النموذج : D — للصف الثالث الثانوي العلمي (شتاء 2025)

فيما يأتي 40 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 15 درجة .

التحليل 1:

1) f تابعٌ يحقّق المتراجحة : $x^2-1 \le x^2 f(x) \le x^2+x$ أياً تكن $x \ge 1$ عندئذٍ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ تساوي

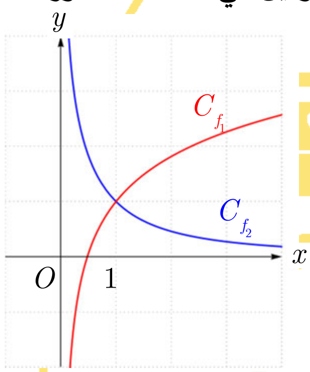
A	0	B	1	C	$+\infty$	D	$-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-\sin x^2}{x\cdot\cos x}$ تساوي

A	-2	B	-1	C	1	D	2

3) ليكن C_{f_1} و C_{f_2} الخطين البيانيين للتابعين f_1 و f_2 المعرّفين على المجال $]0,+\infty[$ والمرسومين في الشكل المجاور :

جدول إشارة f_2-f_1 هو



A:

x	0	$+\infty$
f_2-f_1	$\|\|$	$+$

B:

x	0	$+\infty$
f_2-f_1	$\|\|$	$-$

C:

x	0	1	$+\infty$
f_2-f_1	$\|\|$ $+$	0	$-$

D:

x	0	1	$+\infty$
f_2-f_1	$\|\|$ $-$	0	$+$

4) ليكن التابع $f(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$: لإيجاد $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ نضع

A	$-x \le f(x) \le x$	B	$x \le f(x) \le -x$	C	$\|f(x)\| \ge \|x\|$	D	$\|f(x)\| \le \|x\|$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{E(x)}{x^2}$ تساوي

A	0	B	1	C	2	D	$+\infty$

6) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$

معادلة المستقيم المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$ هي:

A	$y=x+2$	B	$y=-x+2$	C	$y=x-2$	D	$y=x-4$

7) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{x^2+x\sqrt{x}}{x+1}$

A	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$	B	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$	C	للخط C مستقيم مقارب مائل Δ معادلته : $y=x$	D	ليس للخط C مستقيم مقارب مائل

8) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ ويقبل مستقيم مقارب مائل Δ : معادلته : $y=2x-3$ عند $+\infty$

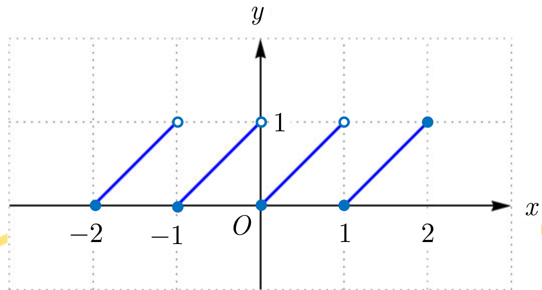
و يقبل النقطة $A(1,-1)$ مركز تناظر له . عندئذٍ يكون $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-2x}{f(2-x)+f(x)}$ تساوي

A	-2	B	$-\dfrac{3}{2}$	C	2	D	$\dfrac{3}{2}$

المذاكرة الأولى لمادة الرياضيات — الاسم :.........

للصف الثالث الثانوي العلمي (شتاء 2025) — النموذج : D — الدرجة: 600

9) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $[-2,2]$ المرسوم في الشكل المجاور :



A	f مستمر على المجال $[-2,2]$	B	f مستمر على المجال $[-1,0]$	C	f مستمر على المجال $[1,2]$	D	f مستمر على $]-2,1]\setminus\{0,1\}$

10) f تابعٌ معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{9}{(x+1)^2}$ إنّ أكبر قيمة للعدد الحقيقي α التي يتحقّق عندها الشرط :

إذا كان $x\in]-1-\alpha,-1+\alpha[\setminus\{-1\}$ كان $f(x)>10^4$

A	0.02	B	0.03	C	0.04	D	0.025

التحليل 2:

11) ليكن التابع f المعرّف على المجال $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=4\ln(3x)$. عندئذٍ التابع $f(2x)$ يساوي

A	$f(x)+\ln(24)-\ln(\frac{3}{2})$	B	$f(x)+f(16)$	C	$f(x)+\ln(2)$	D	$2f(x)$

12) حلول المتراجحة : $-\ln^2 x+7\ln x-10>0$ هي

A	$]2,5[$	B	$[e^2,e^5]$	C	$]e^2,e^5[$	D	$]-\infty,e^2[\cup]e^5,+\infty[$

13) ليكن f التابع المعرّف وفق العلاقة : $g(x)=\ln(\ln(1-x))$. عندئذٍ

A	g اشتقاقي على $]-\infty,1[$ و $g'(x)=\dfrac{-1}{1-x}$	B	g اشتقاقي على $]-\infty,0[$ و $g'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)\ln(1-x)}$	C	g اشتقاقي على $]-\infty,0[$ و $g'(x)=\dfrac{-1}{1-x}$	D	g اشتقاقي على $]-\infty,0[$ و $g'(x)=\dfrac{1}{(x-1)\ln(1-x)}$

14) للمعادلة: $\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(2x+1)$

A	حل وحيد	B	حلان فقط	C	ليس لها أية حلول	D	عدد غير منتهٍ من الحلول

15) f تابع معرّف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$. **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو:**

A	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$	B	$\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=-\infty$	C	$\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=+\infty$	D	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

16) مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تحقّق المتراجحة : $(\frac{1}{2})^n<0\cdot 03$

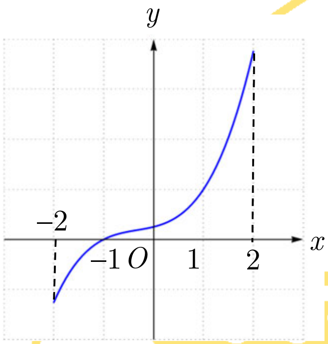
A	$n\le 6$	B	$n\le 7$	C	$n\ge 6$	D	$n\ge 7$

17) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق: $f(x) = x+1+\dfrac{\ln(2-\cos x)}{x^2}$. **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ**

A	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{3}{2}$	B	المستقيم Δ الذي معادلته $y = x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ و $-\infty$.
C	C يقع فوق $\Delta : y = x+1$ دوماً مع عدم وجود نقط مشتركة .	D	C يقع فوق $\Delta : y = x+1$ دوماً مع وجود نقط مشتركة إحداثيات كل منها من الشكل $(2\pi k, 2\pi k+1)$ حيث $k \in \mathbb{Z}^*$

18) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $[-2,2]$ والمرسوم في الشكل المجاور :

ولنعرّف التابع g وفق العلاقة : $g(x) = \ln(f(x))$. عندئذٍ مجموعة تعريف التابع g هي



A	$[-2,2]$	B	$]-1,2]$
C	$[-1,2]$	D	$]-1,2[$

19) ليكن f التابع المعرّف وفق العلاقة : $f(x) = \ln(g(x))$

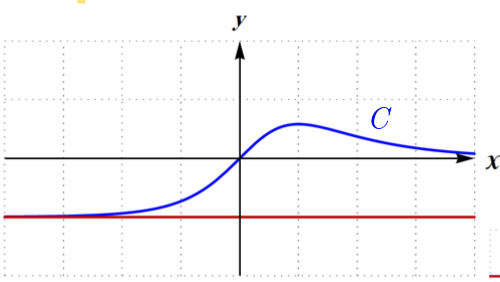
نقول عن التابع f أنّه اشتقاقي على المجال I إذا تحقّق :

A	g اشتقاقي على I	B	g موجبٌ تماماً على I	C	الشرطين في الخيارين A و B معاً	D	f' معرّف على I

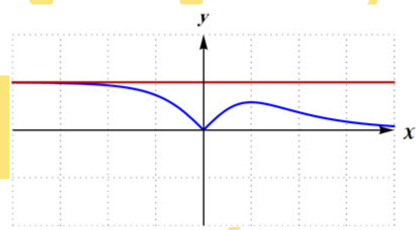
20) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ والمرسوم جانباً :

وليكن C_1 الخط البياني للتابع f_1 المعيّن بالعلاقة : $f_1(x) = f(|x|)$

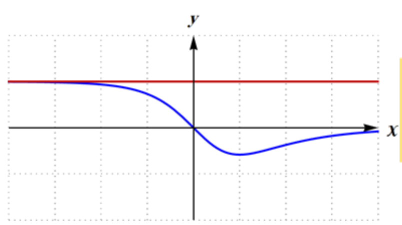
عندئذٍ واحدٌ من الخيارات الآتية يمثّل الخط البياني C_1 هو



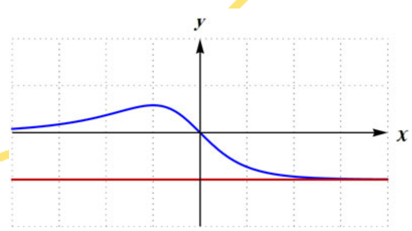
$\boxed{A}$



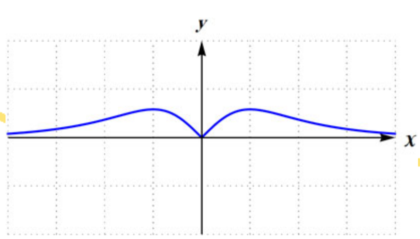
$\boxed{B}$



$\boxed{C}$



$\boxed{D}$



الجبر:

21) الشكل الأسي للعدد $\dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{\sqrt{3}+i}$

A	$\frac{1}{2}e^{i(-\theta-\frac{\pi}{6})}$	B	$2e^{i(-\theta-\frac{\pi}{6})}$	C	$2e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}$	D	$\frac{1}{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}$

22) ليكن z عدداً عقدياً غير معدوم : عندئذٍ واحدٌ من الأعداد الآتية تخيليٌ بحت هو

A	$z_1 = z^2 + \overline{z}^2$	B	$z_2 = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{z\cdot\overline{z}+3}$	C	$z_2 = i\dfrac{z-\overline{z}}{z+\overline{z}}$	D	$z_4 = \lvert iz\rvert$

23) ليكن $z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{15}}$ و $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{-3\pi}{5}$. عندئذٍ

A	$\arg(z_2) = \frac{4\pi}{3}$	B	$\arg(z_2) = \frac{-8\pi}{15}$	C	$\arg(z_2) = \frac{-4\pi}{3}$	D	$\arg(z_2) = \frac{8\pi}{15}$

24) ليكن العدد العقدي : $z = a + (1-b)i$ حيث $a,b \in \mathbb{R}$. عندئذٍ $\lvert\overline{z}\rvert - \lvert -z\rvert$ تساوي

A	$a^2 + b^2$	B	$2a$	C	$\sqrt{2}$	D	0

25) ليكن z عدد عقدي يحقّق $z \neq -i$. وليكن w عددٌ عقدي يحقّق : $w = \dfrac{z(\overline{z}-i)}{z+i}$

ولتكن ε مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل w تخيلياً بحتاً .

A	$\lvert w\rvert \neq \lvert z\rvert$	B	ε تمثّل محور الأعداد التخيلية البحتة محذوف منه $z=-i$	C	ε تمثّل دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي الواحد محذوف منها النقطة $(0,-1)$	D	ε تمثّل اجتماع مجموعتي النقاط الموجودتين في الخيارين B و C

26) في مجموعة الأعداد العقدية إذا كان $2-3i$ جذراً تربيعياً للعدد z فإنّ للعدد $-z$ جذراً تربيعياً يساوي

A	$-2+3i$	B	$3+2i$	C	$3-2i$	D	$2+3i$

27) لتكن المعادلة (E) الآتية : $z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$ حيث $a \in \mathbb{R}$

A	المعادلة (E) ليس لها حل في $\mathbb{C}$ أياً كان a .	B	حلول المعادلة (E) في $\mathbb{C}$ ليست حقيقية لأي قيمة لِـ a وليست مترافقة.
C	حلول المعادلة (E) في $\mathbb{C}$ ليست حقيقية لأي قيمة لِـ a و مترافقة .	D	توجد قيمة لِـ a تجعل للمعادلة (E) حل حقيقي واحد على الأقل

28) إنّ المعادلة $z^5 - 2z^3 + z - 3 = 2i$ لها

A	أربعة حلول عقدية وحل حقيقي	B	حلان حقيقيان و ثلاثة حلول عقدية	C	خمسة حلول عقدية	D	أربعة حلول حقيقية وحل عقدي

29) ليكن العدد العقدي $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ فإنّ

A	$z = 2^{10}$	B	$z = 2^{10}i$	C	$z = 2^9(1-i\sqrt{3})$	D	$z = 2^9(1+i\sqrt{3})$

30) إذا كان : $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ و $S = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ و $T = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$.

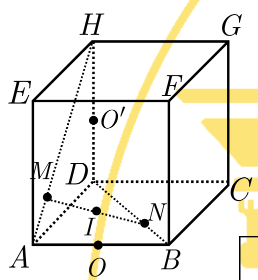
إذا علمتَ أنّ $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0$. **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو**

A	$S = \overline{T}$	B	$S + T = -1$	C	$S \times T = 2$	D	S و T هما جذرا المعادلة $z^2 - z + 2 = 0$

الأشعة :

31) $\vec{u}(-1,0,1)$ و $\vec{v}(-11,6,-1)$ و $\vec{w}(3,-2,1)$

A	$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً	B	$\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطان خطياً	C	$\vec{v} + 3\vec{w} - 2\vec{u} = \vec{0}$	D	الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مرتبطة خطياً

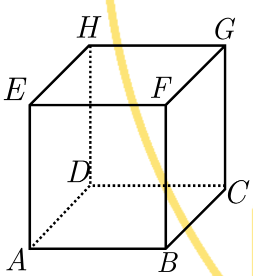


32) $ABCDEFGH$ مكعب : O منتصف $[AB]$ و O' منتصف $[DH]$

والنقطتان M و N تحقّقان : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$ و I منتصف $[MN]$.

إذا علمتَ أنّ $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

A	المستقيم (MN) يقطع المستوي (ABE)	B	المستقيمان (OO') و (MN) متخالفان
C	النقاط O و O' و I تقع على استقامةٍ واحدة	D	المستقيم (EA) يوازي المستوي (HIC) .



33) $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 . ولنختر معلماً $(D;\frac{1}{2}\overrightarrow{DA},\frac{1}{2}\overrightarrow{DC},\frac{1}{2}\overrightarrow{DH})$

معادلة مجموعة نقط الفراغ التي تنتج عن دوران الضلع $[BF]$ من المستطيل $BFHD$ حول (DH) هي

A	$x^2 + y^2 = 8$ و $0 \le z \le 2$	B	$x^2 + y^2 = 2$ و $0 \le z \le 2$
C	$x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ و $0 \le z \le 2$	D	$x^2 + y^2 = 2$ و $0 \le z \le 1$

34) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان : $A(2,-1,3)$ و $B(1,0,3)$.

إنّ إحداثيات النقطة $M(0,1,3)$ تحقّقها واحدة من العلاقات :

A	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$	B	$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$	C	$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$	D	$2\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM} = \vec{0}$

35) في الفراغ المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا A و B نقطتان متمايزتان .

واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو : مجموعة النقاط M التي تحقّق المساواة الآتية :

A	$MA = MB$ تمثّل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.	B	$MB = AB$ تمثّل كرة مركزها B ونصف قطرها AB .	C	$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ تمثّل نقطة وحيدة منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.	D	$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ تمثّل نقطة وحيدة $M = A$

36) في الفراغ المنسوب لمعلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط : $A(3,0,0)$ و $B(1,1,0)$ و $C(0,2,1)$ و النقطة I منتصف $[BC]$

والنقطة M تحقّق المساواة : $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ عندئذٍ **واحدٌ من الإجابات الآتية خاطئ هو**

A	$M\in(ABC)$	B	النقاط A و I و M تقع على استقامةٍ واحدة	C	يوجد عددان حقيقيّان x و y يحقّقان : $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$	D	A هي مركز ثقل المثلث MBC

37) في الفراغ المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

قيمة العدد الحقيقي k التي تجعل مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقّق المساواة :

$x^2+y^2+z^2-2x+4z+6+\sqrt{k}=0$ تمثّل نقطة وحيدة هي :

A	2	B	1	C	0	D	$\varnothing$

38) في الفراغ المنسوب لمعلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطتان $A(1,2,-1)$ و $B(3,0,1)$. $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ إذا وفقط إذا كان : $x+my+nz-1=0$

A	$m=-1$ و $n=1$	B	$m=0$ و $n=-1$	C	$m=1$ و $n=1$	D	$m=-1$ و $n=-1$

39) ليكن المستقيم d الذي يمر بالنقطة $A(3,-1,1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(1,0,-2)$

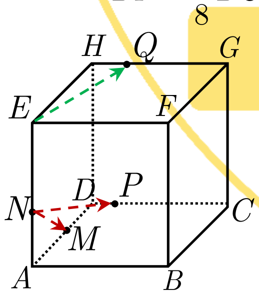
والمستقيم d' الذي يمر بالنقطة $B(3,-3,-1)$ وشعاع توجيهه $\vec{v}(2,1,-3)$

حيث تتحقّق العلاقة : $\overrightarrow{AB}=4\vec{u}-2\vec{v}$. عندئذٍ إحداثيات I نقطة تقاطع المستقيمين d و d' هي :

A	$I(7,1,-7)$	B	$I(-7,1,-7)$	C	$I(-7,-1,7)$	D	$I(7,-1,-7)$

40) $ABCDEFGH$ مكعب . M و N و P و Q تحقّق : $\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$ و $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{8}\overrightarrow{DC}$

و M منتصف $[AD]$. ولنختر معلماً $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



A	$\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{NP}-2\overrightarrow{NM}$	B	$\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{NP}+2\overrightarrow{NM}$
C	$\overrightarrow{EQ}=\overrightarrow{NP}+2\overrightarrow{NM}$	D	$\overrightarrow{EQ}=\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{NM}$

.... انتهت الأسئلة ....

حل المذاكرة الأولى لمادة الرياضيات — الاسم: ....

للصف الثالث الثانوي العلمي (شتاء 2025) — النموذج: D — الدرجة: 600

فيما يأتي 40 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 15 درجة .

التحليل 1:

1) f تابعٌ يحقّق المتراجحة : $x^2-1 \le x^2 f(x) \le x^2 + x$ أياً تكن $x \ge 1$ عندئذٍ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ تساوي

A	0	B	1	C	$+\infty$	D	$-\infty$

التبرير

$$x^2-1 \le x^2 f(x) \le x^2 + x$$

لنقسّم على x^2 : $\dfrac{x^2-1}{x^2} \le f(x) \le \dfrac{x^2+x}{x^2}$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2} = 1$

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. فالخيار الصحيح هو B .

---

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x^2}{x\cdot\cos x}$ تساوي

A	-2	B	-1	C	1	D	2

التبرير

نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x^2}{x\cdot\cos x}$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$ لإزالتها :

بفرض $f(x) = \dfrac{x-\sin x^2}{x\cdot\cos x}$ لنقسّم البسط والمقام على x فنجد :

ومنه $f(x) = \dfrac{1-\dfrac{\sin x^2}{x}}{\cos x}$

$$f(x) = \dfrac{1-x\dfrac{\sin x^2}{x^2}}{\cos x}$$

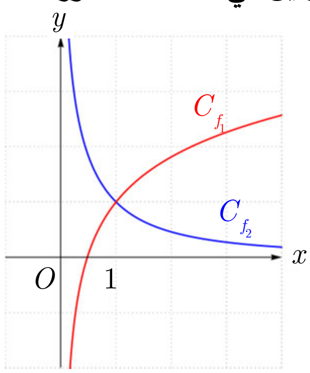
بما أنّ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{x^2} = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$

و $\lim\limits_{x\to0} x = 0$ و $\lim\limits_{x\to0}\cos x = 1$

فنجد $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \dfrac{1-0}{1} = 1$. فالخيار الصحيح هو C .

---

3) ليكن C_{f_1} و C_{f_2} الخطين البيانيين للتابعين f_1 و f_2 المعرّفين على المجال $]0,+\infty[$ والمرسومين في الشكل المجاور :



جدول إشارة $f_2 - f_1$ هو

A	x: 0 … $+\infty$ ؛ $f_2 - f_1$: $\|\|$ $+$	B	x: 0 … $+\infty$ ؛ $f_2 - f_1$: $\|\|$ $-$
C	x: 0 … 1 … $+\infty$ ؛ $f_2 - f_1$: $\|\|$ $+$ 0 $-$	D	x: 0 … 1 … $+\infty$ ؛ $f_2 - f_1$: $\|\|$ $-$ 0 $+$

التبرير

نلاحظ من الرسم أنّ C_{f_2} يقع فوق C_{f_1} على المجال $]0,1[$. أي $f_2 - f_1 > 0$ على المجال $]0,1[$.

و C_{f_2} يقع تحت C_{f_1} على المجال $]1,+\infty[$. أي $f_2 - f_1 < 0$ على المجال $]1,+\infty[$.

و النقطة $(1,1)$ هي نقطة مشتركة بين C_{f_1} و C_{f_2} . أي $f_2 - f_1 = 0$ عندما $x = 1$.

فالخيار الصحيح هو C .

---

4) ليكن التابع $f(x) = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$: لإيجاد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ نضع

A	$-x \le f(x) \le x$	B	$x \le f(x) \le -x$	C	$\lvert f(x)\rvert \ge \lvert x\rvert$	D	$\lvert f(x)\rvert \le \lvert x\rvert$

التبرير

التابع f معرّف على $\mathbb{R}^*$ لابدّ أن نطبّق مبرهنة الإحاطة :

لندقّق في الخيار A : $-1 \le \sin\dfrac{1}{x} \le 1$

لنضرب طرفي المتراجحة بِـ x وبما أنّ x في جوار الصفر فإنّ x يمكن أنْ تكون موجبة أو سالبة .

فالخيار A صحيح فقط عندما $x > 0$. فالخيار A خاطئ .

والخيار B صحيح فقط في حالة $x < 0$. فالخيار B خاطئ .

لذلك : $\lvert f(x)\rvert = \left\lvert x \cdot \sin\dfrac{1}{x}\right\rvert \le \lvert x\rvert \cdot \left\lvert \sin\dfrac{1}{x}\right\rvert \le \lvert x\rvert \cdot 1$

لأنّ $\left\lvert \sin\dfrac{1}{x}\right\rvert \le 1$

ومنه $\lvert f(x)\rvert \le \lvert x\rvert$. فالخيار الصحيح هو D .

وإذا أردنا أن نكمل الحل : $\lvert f(x)\rvert \le \lvert x\rvert$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to 0}\lvert x\rvert = 0$ فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (2) نجد أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

---

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E(x)}{x^2}$ تساوي

A	0	B	1	C	2	D	$+\infty$

التبرير

نحن نعلم أنّ : $x-1 < E(x) \le x$

في جوار $+\infty$ نقسّم المتراجحة على x

$$\frac{x-1}{x^2} < \frac{E(x)}{x^2} \le \frac{x}{x^2}$$ ومنه

$$\frac{x-1}{x^2} < \frac{E(x)}{x^2} \le \frac{1}{x}$$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2} = 0$ فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x^2} = 0$.

فالخيار الصحيح هو A .

---

6) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

معادلة المستقيم المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$ هي:

A	$y = x+2$	B	$y = -x+2$	C	$y = x-2$	D	$y = x-4$

التبرير

لنكتب المقدار $x^2 - 4x + 5$ بالصيغة القانونية (بالإتمام إلى مربّع كامل) :

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 5 = (x-2)^2 + 1$$

ومنه $f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + 1}$

وبالتالي $f(x) \approx \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ في جوار $+\infty$ يكون $y = x-2$ هو المقارب للخط C في جوار $+\infty$.

فالخيار الصحيح هو C .

ونستطيع إثبات بسهولة أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (x-2)) = 0$ لأنّ

$$f(x) - (x-2) = \sqrt{(x-2)^2 + 1} - (x-2)$$

نضرب بالمرافق ونقسّم عليه : $f(x) - (x-2) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2 + 1} + (x-2)}$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (x-2)) = 0$.

---

7) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{x^2+x\sqrt{x}}{x+1}$

A	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$	B	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$	C	للخط C مستقيم مقارب مائل Δ معادلته : $y=x$	D	ليس للخط C مستقيم مقارب مائل

التبرير

لندقق في الخيار A : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x^2+x\sqrt{x}}{x(x+1)}=\dfrac{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x})}=\dfrac{(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}{(1+\frac{1}{x})}$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$. فالخيار A خاطئ .

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$. فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C :

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ كان هناك إمكانية وجود مستقيم مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ معادلته من الشكل $y=ax+b$ لإيجاد a نحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1=a$.

لحساب b نوجد : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=b$

$$f(x)-x=\frac{x^2+x\sqrt{x}}{x+1}-x=\frac{x^2+x\sqrt{x}-x(x+1)}{x+1}=\frac{x\sqrt{x}-x}{x+1}=\frac{\cancel{x}\sqrt{x}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}=\frac{\sqrt{x}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}{(1+\frac{1}{x})}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=+\infty$ فليس للخط C مقارب مائل . فالخيار C خاطئ والخيار D هو الخيار الصحيح .

---

8) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ ويقبل مستقيم مقارب مائل Δ : معادلته : $y=2x-3$ عند $+\infty$ و يقبل النقطة $A(1,-1)$ مركز تناظر له . عندئذٍ يكون $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-2x}{f(2-x)+f(x)}$ تساوي

A	-2	B	$-\dfrac{3}{2}$	C	2	D	$\dfrac{3}{2}$

التبرير

لمّا كان المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-3$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=-3$.

ولمّا كانت النقطة $A(1,-1)$ مركز تناظر للخط C_f . كان $f(2-x)+f(x)=-2$.

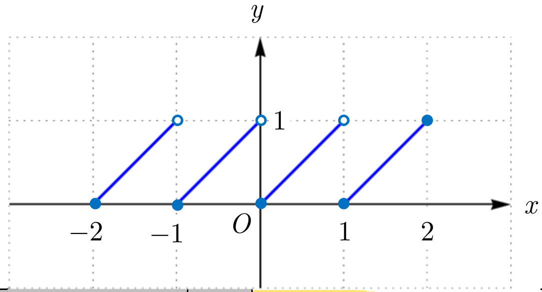
(لأنّه إذا كانت النقطة $A(a,b)$ مركز تناظر للخط C_f . كان $f(2a-x)+f(x)=2b$) .

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-2x}{f(2-x)+f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$

فالخيار الصحيح هو D .

---

9) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $[-2,2]$ المرسوم في الشكل المجاور :



A	f مستمر على المجال $[-2,2]$	B	f مستمر على المجال $[-1,0]$	C	f مستمر على المجال $[1,2]$	D	f مستمر على $]-2,1]\setminus\{0,1\}$

التبرير

لندقّق في الخيار A : نلاحظ أنّ f غير مستمر عند $x=-1$ لأنّ الخط C_f يعاني انقطاعاً عند هذه النقطة

فالتابع f ليس مستمراً على المجال $[-2,2]$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : نلاحظ أنّ f غير مستمر عند $x=0$ لأنّ الخط C_f يعاني انقطاعاً عند هذه النقطة

فالتابع f ليس مستمراً على المجال $[-1,0]$. فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C:

نلاحظ أنّ الخط البياني للتابع f عبارة عن قطعة واحدة على المجال $[1,2]$ فهو مستمر على هذا المجال

فالخيار الصحيح هو C .

أمّا الخيار D : نلاحظ أنّ f غير مستمر عند $x=-1$ لأنّ الخط C_f يعاني انقطاعاً عند هذه النقطة

فالتابع f ليس مستمراً على المجال $]-2,1]\setminus\{0,1\}$. فالخيار D خاطئ .

---

10) f تابعٌ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{9}{(x+1)^2}$ إنّ أكبر قيمة للعدد الحقيقي α التي يتحقّق عندها الشرط :

إذا كان $x\in]-1-\alpha,-1+\alpha[\setminus\{-1\}$ كان $f(x)>10^4$

A	0.02	B	0.03	C	0.04	D	0.025

التبرير

$$f(x)=\frac{9}{(x+1)^2}$$

$$f(x)>10^4$$

أي $\dfrac{9}{(x+1)^2}>10^4$

ومنه $\dfrac{(x+1)^2}{9}<10^{-4}$

وبالتالي : $(x+1)^2<9\times10^{-4}$

ومنه $|x+1|<3\times10^{-2}$

وبالتالي $-0.03<x+1<0.03$ أي $1-0.03<x<1+0.03$

أي أكبر قيمة لـ α تحقّق الشرط المعطى هي $\alpha=0.03$ فالخيار الصحيح هو B .

التحليل 2:

11) ليكن f التابع المعرّف على المجال $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = 4\ln(3x)$. عندئذٍ التابع $f(2x)$ يساوي

A	$f(x)+\ln(24)-\ln(\frac{3}{2})$	B	$f(x)+f(16)$	C	$f(x)+\ln(2)$	D	$2f(x)$

التبرير

$f(x) = 4\ln(3x)$

ومنه $f(2x) = 4\ln(6x)$

نلاحظ أنّ الخيارات مكتوبة بدلالة $f(x)$. ومنه

$$f(2x) = 4\ln(2\times 3x) = 4(\ln 2 + \ln 3x) = 4\ln 2 + 4\ln(3x)$$

وبالتالي $f(2x) = f(x) + 4\ln 2$

لندقّق في الخيار A :

$$f(2x) = f(x) + \ln(24) - \ln(\frac{3}{2}) = f(x) + \ln\frac{24}{\frac{3}{2}} = f(x) + \ln\frac{48}{3} = f(x) + \ln 16 = f(x) + 4\ln 2$$

فالخيار الصحيح هو A .

---

12) حلول المتراجحة : $-\ln^2 x + 7\ln x - 10 > 0$ هي

A	$]2,5[$	B	$[e^2,e^5]$	C	$]e^2,e^5[$	D	$]-\infty,e^2[\cup]e^5,+\infty[$

التبرير

$-\ln^2 x + 7\ln x - 10 > 0$

ومنه $\ln^2 x - 7\ln x + 10 < 0$

المتراجحة معرّفة عندما $x > 0$ أي $x \in]0,+\infty[$.

هذه متراجحة من الدرجة الثانية بالمجهول $\ln x$.

$\ln^2 x - 7\ln x + 10 = 0$

$(\ln x - 5)(\ln x - 2) = 0$

إمّا $\ln x - 5 = 0$ ومنه $\ln x = 5$ بالتالي $x = e^5$.

أو $\ln x - 2 = 0$ ومنه $\ln x = 2$ وبالتالي $x = e^2$.

x	0	e^2	e^5	$+\infty$
$\ln^2 x - 7\ln x + 10$	$+$	0 $-$	0	$+$
المتراجحة	غير محققة	محققة		غير محققة

فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي $x \in]e^2,e^5[$. فالخيار الصحيح هو C .

13) ليكن f التابع المعرّف وفق العلاقة : $g(x)=\ln(\ln(1-x))$. عندئذٍ

A	g اشتقاقي على $]-\infty,1[$ و $g'(x)=\dfrac{-1}{1-x}$	B	g اشتقاقي على $]-\infty,0[$ و $g'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)\ln(1-x)}$	C	g اشتقاقي على $]-\infty,0[$ و $g'(x)=\dfrac{-1}{1-x}$	D	g اشتقاقي على $]-\infty,0[$ و $g'(x)=\dfrac{1}{(x-1)\ln(1-x)}$

التبرير

$g(x)=\ln(\ln(1-x))$

g اشتقاقي عندما $\ln(1-x)>0$

ومنه $\ln(1-x)>\ln 1$.

وبالتالي $1-x>1$

ومنه $0>x$

أي $x<0$ وبالتالي $x\in]-\infty,0[$.

$g'(x)=\dfrac{(\ln(1-x))'}{\ln(1-x)}=\dfrac{\frac{-1}{1-x}}{\ln(1-x)}=\dfrac{-1}{(1-x)\cdot\ln(1-x)}=\dfrac{1}{(x-1)\cdot\ln(1-x)}$. فالخيار الصحيح هو D .

---

14) للمعادلة: $\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(2x+1)$

A	حل وحيد	B	حلان فقط	C	ليس لها أية حلول	D	عدد غير منتهٍ من الحلول

التبرير

$\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(2x+1)$

❒ نوجد مجموعة تعريف المعادلة اللوغارتمية :

$x+4>0$ و $x-2>0$ و $2x+1>0$

وبالتالي $x>-4$ و $x>2$ و $x>-\dfrac{1}{2}$

ومنه $x\in]2,+\infty[=D_1$.

❒ نطبّق خواص اللوغاريتم : $\ln((x+4)\cdot(x-2))=\ln(2x+1)$.

وبالتالي : $(x+4)\cdot(x-2)=(2x+1)$

ومنه $x^2-2x+4x-8=2x+1$

وبالتالي $x^2=9$

ومنه : إمّا $x=-3\notin D_1$ مرفوض أو $x=3\in D_1$ مقبول .

$S=\{3\}$. فالخيار الصحيح هو A .

---

15) f تابع معرّف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق : $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$. **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو:**

A	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$	B	$\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=-\infty$	C	$\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=+\infty$	D	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

التبرير

$$f(x)=\frac{\ln x+1}{\ln x-1}$$

f معرّف عندما $]0,e[\cup]e,+\infty[$

لندقّق في الخيار A : نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{-\infty}{-\infty}$ لإزالتها :

$$f(x)=\frac{\ln x(1+\frac{1}{\ln x})}{\ln x(1-\frac{1}{\ln x})}=\frac{1+\frac{1}{\ln x}}{1-\frac{1}{\ln x}} .$$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. فالخيار A خاطئ وهو الخيار الذي يجب أن نختاره .

أمّا الخيار B: $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$. فالخيار B صحيح .

أمّا الخيار C: $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty$. فالخيار C صحيح .

أمّا الخيار D: $f(x)=\dfrac{\ln x(1+\frac{1}{\ln x})}{\ln x(1-\frac{1}{\ln x})}=\dfrac{1+\frac{1}{\ln x}}{1-\frac{1}{\ln x}}$.

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. فالخيار D صحيح .

---

16) مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تحقّق المتراجحة : $(\frac{1}{2})^n<0\cdot 03$

A	$n\le 6$	B	$n\le 7$	C	$n\ge 6$	D	$n\ge 7$

التبرير

$$(\frac{1}{2})^n<0\cdot 03$$

ومنه $2^n>\dfrac{100}{3}$

ومنه $n\ge 6$. فالخيار الصحيح هو C .

طريقة ثانية : $(\frac{1}{2})^n<0\cdot 03$

نأخذ $\ln$ للطرفين فنجد : $n\ln(\frac{1}{2})<\ln\dfrac{3}{100}$

ومنه $n>\dfrac{\ln 3-\ln 100}{-\ln(2)}$

أي $n > \dfrac{\ln 3 - \ln 100}{-\ln(2)}$

ومنه $n > \dfrac{\ln 100 - \ln 3}{\ln(2)}$

أي $n > \dfrac{\ln(25 \times 4) - \ln 3}{\ln(2)} = \dfrac{2\ln 5 + 2\ln 2 - \ln 3}{\ln 2}$

لمّا كان $\ln 2 \approx 0.7$ و $\ln 3 \approx 1.1$ و $\ln 5 \simeq 1.6$.

كان $n > \dfrac{2\ln 5 + 2\ln 2 - \ln 3}{\ln 2} \approx \dfrac{3.2 + 1.4 - 1.1}{0.7} = \dfrac{3.5}{0.7} = \dfrac{35}{7} = 5$

ومنه $n \geq 6$.

---

17) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق: $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln(2 - \cos x)}{x^2}$. **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ**

A	$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{3}{2}$	B	المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ و $-\infty$.	C	C يقع فوق $\Delta : y = x + 1$ دوماً مع عدم وجود نقط مشتركة .	D	C يقع فوق $\Delta : y = x + 1$ دوماً مع وجود نقط مشتركة إحداثيات كل منها من الشكل $(2\pi k, 2\pi k + 1)$ حيث $k \in \mathbb{Z}^*$

التبرير

من الواضح غالباً منذ البداية أنّ الخيار الصحيح محصوراً بين الخيارين C و D لأنّ الفرق بينهما إمّا وجود نقط مشتركة أو عدم وجود نقط مشتركة .

فإذا درسنا إشارة الفرق : $f(x) - y_\Delta = \dfrac{\ln(2 - \cos x)}{x^2}$

$f(x) - y_\Delta = 0$ عندما $\ln(2 - \cos x) = 0$

ومنه $2 - \cos x = 1$ وبالتالي $\cos x = 1$

وبالتالي $x = 2\pi k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^*$. أي الخيار C خاطئ . وهو الخيار الوحيد الذي يجب أنْ نختاره .

ونلاحظ أنّ $-1 \leq \cos x \leq 1$ ومنه $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$

وبالتالي $0 \leq \ln(2 + \cos x) \leq \ln 3$ أي $f(x) - y_\Delta \geq 0$ أياً تكن $x \in \mathbb{R}^*$ مع وجود نقط مشتركة بين C و Δ إحداثيات كل منها من الشكل $(2\pi k, 2\pi k + 1)$ حيث $k \in \mathbb{Z}^*$. فالخيار الصحيح هو D.

أمّا الخيار A : نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$ لإزالتها :

وبالتالي $f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln(1 + 1 - \cos x)}{x^2}$

$f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln(1 + 1 - \cos x)}{x^2(1 - \cos x)} \times (1 - \cos x)$

$f(x) = x + 1 + \dfrac{\ln(1 + 1 - \cos x)}{(1 - \cos x)} \times \dfrac{(1 - \cos x)}{x^2}$

بما أنّ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + 1 - \cos x)}{1 - \cos x} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1 + t)}{t} = 1$

و $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

و $\lim_{x\to 0}(x+1)=1$.

فإنّ $\lim_{x\to 0} f(x)=1+(1\times\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$. فالخيار A صحيح .

أمّا الخيار B : $f(x)-y_{\Delta}=\dfrac{\ln(2-\cos x)}{x^2}$

ونلاحظ أنّ $-1\le \cos x\le 1$ ومنه $1\le 2+\cos x\le 3$

وبالتالي $0\le \ln(2+\cos x)\le \ln 3$

لنقسّم على x^2 : $0\le \dfrac{\ln(2+\cos x)}{x^2}\le \dfrac{\ln 3}{x^2}$

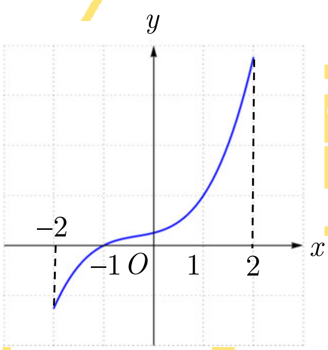
ومنه $0\le f(x)-y_{\Delta}\le \dfrac{\ln 3}{x^2}$.

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_{\Delta})=0$ و $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_{\Delta})=0$

ومنه المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ و $-\infty$. فالخيار B صحيح .

---

18) ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $[-2,2]$ والمرسوم في الشكل المجاور :



ولنعرّف التابع g وفق العلاقة : $g(x)=\ln(f(x))$. عندئذٍ مجموعة تعريف التابع g هي

A	$[-2,2]$	B	$]-1,2]$
C	$[-1,2]$	D	$]-1,2[$

التبرير

التابع g معرّف عندما $f(x)>0$ أي البحث عن المجال الذي يوافق C_f حيث يقع فوق المحور xx'

وهذا محقّق عندما $x\in]-1,2]$ فالخيار الصحيح هو B .

---

19) ليكن f التابع المعرّف وفق العلاقة : $f(x)=\ln(g(x))$

نقول عن التابع f أنّه اشتقاقي على المجال I إذا تحقّق :

A	g اشتقاقي على I	B	g موجبٌ تماماً على I	C	الشرطين في الخيارين A و B معاً	D	f' معرّف على I

التبرير

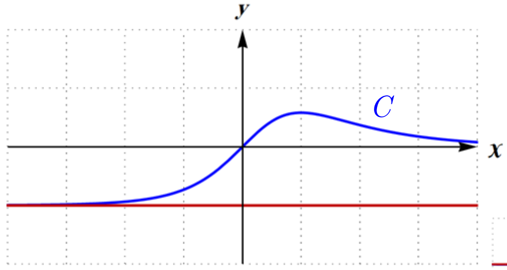
$f(x)=\ln(g(x))$

إذا كان g اشتقاقياً على I و كان g موجباً تماماً على I قلنا أنّ التابع $f:x\mapsto g(x)$

اشتقاقياً على I فالخيار الصحيح هو C .

---

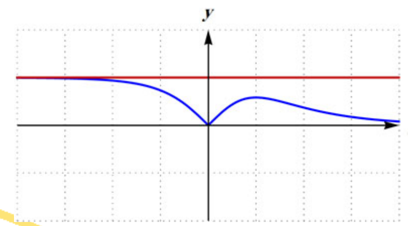
20) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ والمرسوم جانباً :



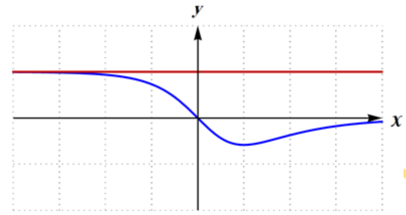
وليكن C_1 الخط البياني للتابع f_1 المعيّن بالعلاقة : $f_1(x) = f(|x|)$

عندئذٍ واحدٌ من الخيارات الآتية يمثّل الخط البياني C_1 هو

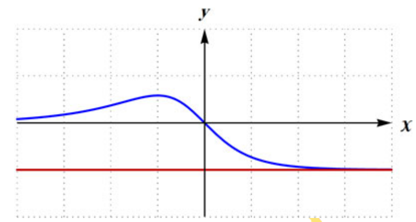
$\boxed{A}$



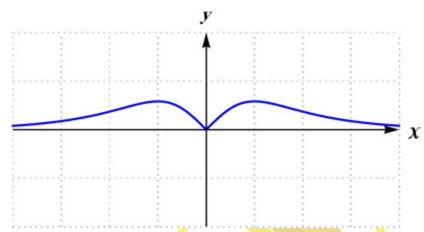
$\boxed{B}$



$\boxed{C}$



$\boxed{D}$



التبرير

$f_1(x) = f(|x|)$

إنّ التابع f_1 هو تابعٌ زوجي لأنّ

$f_1(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = f_1(x)$ (لأنّ $|x| = |-x|$) .

أي الخط البياني C_1 للتابع f_1 متناظر بالنسبة للمحور yy' . فالخيار الصحيح هو D .

أمّا بالنسبة لرسمه : عندما $x \ge 0$ يكون $f_1(x) = f(x)$ أي C_1 منطبق على C عندما $x \ge 0$.

ثمّ نحذف الخط C على المجال $]-\infty, 0[$

ثمّ نكمل رسم C_1 على $]-\infty, 0[$ بأخذ نظير C_1 عندما $x \in [0, +\infty[$ بالنسبة غلى المحور yy' كونه تابعٌ زوجي .

الجبر:

21) الشكل الأسي للعدد $\dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{\sqrt{3} + i}$

A	$\frac{1}{2}e^{i(-\theta-\frac{\pi}{6})}$	B	$2e^{i(-\theta-\frac{\pi}{6})}$	C	$2e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}$	D	$\frac{1}{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}$

التبرير

$$\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\sqrt{3} + i} = \frac{e^{-i\theta}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2}e^{i(-\theta-\frac{\pi}{6})}$$

فالخيار الصحيح هو A .

---

22) ليكن z عدداً عقدياً غير معدوم : عندئذٍ واحدٌ من الأعداد الآتية تخيليٌ بحت هو

A	$z_1 = z^2 + \overline{z}^2$	B	$z_2 = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{z \cdot \overline{z} + 3}$	C	$z_2 = i\dfrac{z - \overline{z}}{z + \overline{z}}$	D	$z_4 = \lvert iz \rvert$

التبرير

لندقّق في الخيار A : $z_1 = z^2 + \overline{z}^2$

ومنه $z_1 = z^2 + \overline{z}^2 = 2\operatorname{Re}(z^2)$ فهو حقيقي . فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $z_2 = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{z \cdot \overline{z} + 3}$

$z_2 = \dfrac{2\operatorname{Im}(z^2)i}{|z|^2 + 3}$: البسط تخيّلي بحت والمقام حقيقي فالكسر تخيّلي بحت . فالخيار الصحيح هو B .

أمّا الخيار C :

$z_2 = i\dfrac{z - \overline{z}}{z + \overline{z}} = i\dfrac{2\operatorname{Im}(z)i}{2\operatorname{Re}(z)} = -\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \in \mathbb{R}$. فالخيار C خاطئ .

أمّا الخيار D : $z_4 = |iz| = |i| \times |z| = |z| \in \mathbb{R}$. فالخيار D خاطئ .

---

23) ليكن $z_1 = 5e^{i\frac{\pi}{15}}$ و $\arg(\dfrac{z_1}{z_2}) = \dfrac{-3\pi}{5}$. عندئذٍ

A	$\arg(z_2) = \dfrac{4\pi}{3}$	B	$\arg(z_2) = \dfrac{-8\pi}{15}$	C	$\arg(z_2) = \dfrac{-4\pi}{3}$	D	$\arg(z_2) = \dfrac{8\pi}{15}$

التبرير

$\arg(\dfrac{z_1}{z_2}) = \dfrac{-3\pi}{5}$

ومنه $\arg(z_1) - \arg(z_2) = \dfrac{-3\pi}{5}$

وبالتالي : $\dfrac{\pi}{15} - \arg(z_2) = \dfrac{-3\pi}{5}$.

$\dfrac{\pi}{15} + \dfrac{3\pi}{5} = \arg(z_2)$

وبالتالي $\arg(z_2) = \dfrac{10\pi}{15}$

ومنه $\arg(z_2) = \dfrac{2\pi}{3}$

وبالتالي $\arg(z_2) = \dfrac{2\pi}{3} - 2\pi = \dfrac{-4\pi}{3}$ فالخيار الصحيح هو C .

---

24) ليكن العدد العقدي : $z=a+(1-b)i$ حيث $a,b\in\mathbb{R}$. عندئذٍ $|\overline{z}|-|-z|$ تساوي

A	a^2+b^2	B	$2a$	C	$\sqrt{2}$	D	0

التبرير

$|\overline{z}|-|-z|=|z|-|z|=0$. لأنّ ($|\overline{z}|=|z|$ و $|-z|=|z|$) . فالخيار الصحيح هو D .

---

25) ليكن z عدد عقدي يحقّق $z\neq -i$. وليكن w عددٌ عقدي يحقّق : $w=\dfrac{z(\overline{z}-i)}{z+i}$

ولتكن ε مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل w تخيلياً بحتاً .

A	$\lvert w\rvert\neq\lvert z\rvert$	B	ε تمثّل محور الأعداد التخيلية البحتة محذوف منه $z=-i$	C	ε تمثّل دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي الواحد محذوف منها النقطة $(0,-1)$	D	ε تمثّل اجتماع مجموعتي النقاط الموجودتين في الخيارين B و C

التبرير

لندقّق في الخيار A :

$|z|=\dfrac{|z|\cdot|z+i|}{|z+i|}=\dfrac{|z|\cdot|\overline{(\overline{z}-i)}|}{|z+i|}=\dfrac{|z|\cdot|(\overline{z}-i)|}{|z+i|}=\left|\dfrac{z(\overline{z}-i)}{z+i}\right|=|w|$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B :

لدينا فرضاً w تخيّلي بحت ومنه : $\overline{w}=-w$.

$$\frac{\overline{z}(z+i)}{\overline{z}-i}=-\frac{z(\overline{z}-i)}{z+i}$$

وبالتالي : $\overline{z}(z+i)(z+i)=-z(\overline{z}-i)(\overline{z}-i)$

ومنه $\overline{z}(z+i)^2=-z(\overline{z}-i)^2$

وبالتالي $\overline{z}(z^2+2iz-1)=-z(\overline{z}^2-2i\overline{z}-1)$

ومنه $\overline{z}z^2+2iz\overline{z}-\overline{z}=-z\overline{z}^2+2iz\overline{z}+z$.

وبالتالي : $z|z|^2-\overline{z}=-\overline{z}|z|^2+z$.

أي : $z|z|^2+\overline{z}|z|^2-z-\overline{z}=0$

ومنه $|z|^2(z+\overline{z})-(z+\overline{z})=0$

وبالتالي $(z+\overline{z})(|z|^2-1)=0$

إمّا $z+\overline{z}=0$ أي $\overline{z}=-z$ ومنه $M(z)$ تمثّل محور الأعداد التخيلية البحتة محذوف منه $z=-i$.

أو $|z|^2-1=0$ أي $|z|^2=1$ أي $|z|=1$ ومنه $M(z)$ تمثّل دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي الواحد محذوف منها النقطة $(0,-1)$.

ممّا سبق نستنتج أنّ $M(z)$ تمثّل اجتماع محور الأعداد التخيلية البحتة محذوف منه $z=-i$ مع الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي الواحد محذوف منها النقطة $(0,-1)$. فالخيار الصحيح هو D .

---

26) في مجموعة الأعداد العقدية إذا كان $2-3i$ جذراً تربيعياً للعدد z فإنّ للعدد $-z$ جذراً تربيعياً يساوي

A		B		C		D	
A	$-2+3i$	B	$3+2i$	C	$3-2i$	D	$2+3i$

التبرير

بما أنّ $2-3i$ جذراً للعدد z فإنّ $z=(2-3i)^2$

ومنه $z=(2-3i)^2=4-12i-9=-5-12i$

وبالتالي : $-z=5+12i$.

أصبح المطلوب إيجاد أحد الجذرين التربيعيين للعدد $w=5+12i$.

طريقة (1) : بفرض $z=x+yi$ أحد الجذرين التربيعيين للعدد $w=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

فيكون $z^2=w=5+12i$

أي $(x+yi)^2=5+12i$

ومنه $x^2-y^2+2xyi=5+12i$

ومنه $\boxed{x^2-y^2=5}$

و $2xy=12$ ومنه $\boxed{x\cdot y=6}$

$\left|(x+yi)^2\right|=\left|5+12i\right|$

وبالتالي $\left|x+yi\right|^2=\left|5+12i\right|$

ومنه $x^2+y^2=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$ ومنه $\boxed{x^2+y^2=13}$

أصبح لدينا المعادلات الثلاث الآتية :

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 & (1) \\ x^2-y^2=5 & (2) \\ x\cdot y=6 & (3) \end{cases}$$

❒ بجمع (1) و (2) نجد $2x^2=18$ ومنه $x^2=9$

ومنه إمّا $x=3$ أو $x=-3$

❒ بطرح (2) من (1) نجد $2y^2=8$ ومنه $y^2=4$

ومنه إمّا $y=2$ أو $y=-2$

❒ من (3) نجد $x\cdot y=6>0$ ومنه x و y من نفس الإشارة .

وبالتالي $z_1=3+2i$ أو $z_2=-3-2i$ فالخيار الصحيح هو B .

طريقة (2) : بفرض z أحد الجذرين التربيعين للعدد $w=a+bi$ فيكون

$z^2=w=a+bi$

في حالة $b>0$ يكون $z=\pm\left(\sqrt{\dfrac{|w|+a}{2}}+i\sqrt{\dfrac{|w|-a}{2}}\right)$

في حالة $b<0$ يكون $z=\pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}}-i\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)$

التفسير: بفرض $z=x+yi$ فتتحقّق المعادلات الثلاث الآتية :

$$\begin{cases} x^2+y^2=|w| & (1) \\ x^2-y^2=a & (2) \\ x\cdot y=\frac{b}{2} & (3) \end{cases}$$

❒ بجمع (1) و (2) نجد $2x^2=|w|+a$ ومنه $x^2=\frac{|w|+a}{2}$

ومنه $x=\sqrt{\frac{|w|+a}{2}}$ أو $x=-\sqrt{\frac{|w|+a}{2}}$

❒ بطرح (2) من (1) نجد $2y^2=|w|-a$ ومنه $y^2=\frac{|w|-a}{2}$

ومنه $y=\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}$ أو $y=-\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}$

❒ من (3) نجد : $x\cdot y=\frac{b}{2}$

في حالة $b>0$ يكون $z=\pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}}+i\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)$

في حالة $b<0$ يكون $z=\pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}}-i\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)$

في مثالنا $b>0$ ومنه $z=\pm\left(\sqrt{\frac{|w|+a}{2}}+i\sqrt{\frac{|w|-a}{2}}\right)$ لدينا $|w|=13$ و $a=5$

$z=\pm\left(\sqrt{\frac{13+5}{2}}+i\sqrt{\frac{13-5}{2}}\right)=\pm(3+2i)$ فالخيار الصحيح هو B .

طريقة (3) : بما أنّ $b>0$ فإنّ قسمي الحقيقي والتخيلي في الجذرين التربيعين من نفس الإشارة .

فإنّ الخيارين A و C خاطئان .

ولمّا كان $a>0$ كان القسم الحقيقي بالقيمة المطلقة أكبر من القسم التخيلي بالقيمة المطلقة

لأنّ $x^2-y^2=a>0$ ومنه $x^2-y^2>0$ وبالتالي $x^2>y^2$ ومنه $|x|>|y|$

فالخيار الصحيح هو B .

طريقة (4) : أنْ نربّع الجواب في الخيار B أو D الذي يكون ناتجه هو w هو الخيار الصحيح .

---

27) لتكن المعادلة (E) الآتية : $z^2+2az+a^2+1=0$ حيث $a\in\mathbb{R}$

A	المعادلة (E) ليس لها حل في $\mathbb{C}$ أياً كان a .	B	حلول المعادلة (E) في $\mathbb{C}$ ليست حقيقية لأي قيمة لِـ a وليست مترافقة.
C	حلول المعادلة (E) في $\mathbb{C}$ ليست حقيقية لأي قيمة لِـ a و مترافقة .	D	توجد قيمة لِـ a تجعل للمعادلة (E) حل حقيقي واحد على الأقل

التبرير

$z^2+2az+a^2+1=0$ حيث $a\in\mathbb{R}$

لندقّق في الخيار A : المعادلة من الدرجة الثانية في C لا يمكن أن تكون مستحيلة الحل فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : نلاحظ أنّ المعادلة المعطاة هي معادلة من الدرجة الثانية بأمثال حقيقية حلولها ليست حقيقية في حال $\Delta<0$ ولكن عندئذٍ ستكون مترافقة . فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : حسب مناقشة الخيار B لا بدّ من إيجاد Δ

$$\Delta=(2a)^2-4(1)(a^2+1)=-4<0$$

فحلول المعادلة (E) في $\mathbb{C}$ ليست حقيقية لأي قيمة لِـ a و مترافقة .

فالخيار C صحيح .

أمّا الخيار D : لمّا كانت $\Delta<0$ أياً كانت قيمة a فليس للمعادلة أي حل حقيقي . فالخيار D خاطئ .

---

28) إنّ المعادلة $z^5-2z^3+z-3=2i$ لها

A	أربعة حلول عقدية وحل حقيقي	B	حلان حقيقيان و ثلاثة حلول عقدية	C	خمسة حلول عقدية	D	أربعة حلول حقيقية وحل عقدي

التبرير

لنفرض جدلاً أنّ المعادلة المعطاة لها حل حقيقي فإذا عوضناه في الطرف الأيسر من المعادلة التي أمثالها أيضاً حقيقية فمن المستحيل أن يساوي $2i$ فالفرض الجدلي خاطئ والمعادلة المفروضة لا تملك حلاً حقيقياً.

فالخيارات A و B و D خاطئة . فالخيار الصحيح هو C .

---

29) ليكن العدد العقدي $z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ فإنّ

A	$z=2^{10}$	B	$z=2^{10}i$	C	$z=2^9(1-i\sqrt{3})$	D	$z=2^9(1+i\sqrt{3})$

التبرير

$z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ (نحن نعلم أنّ أي عدد عقدي مكتوباً بالشكل الجبري ومرفوعاً إلى أس كبير إذا طلب منا إيجاد ناتجه لابدّ أوّلاً أن نحوّله للشكل المثلثي أو الأسي حتى لو لم يطلب منّا ذلك)

نلاحظ أنّ $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

و $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

وبالتالي $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$$z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}=(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}})^{20}=2^{10}(e^{i\frac{140\pi}{12}})$$

وبالتالي $z=2^{10}(e^{i\frac{35\pi}{3}})=2^{10}(e^{i\frac{5\pi}{3}})=2^{10}e^{i(\frac{5\pi}{3}-2\pi)}=2^{10}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z=2^{10}(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2^{9}(1-i\sqrt{3})$ فالخيار C هو الخيار الصحيح .

---

30) إذا كان $\alpha=e^{i\frac{2\pi}{7}}$: $S=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$ و $T=\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6$.

إذا علمتَ أنّ $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=0$. **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو**

A	$S=\overline{T}$	B	$S+T=-1$	C	$S\times T=2$	D	S و T هما جذرا المعادلة $z^2-z+2=0$

التبرير

إذا كان الخياران B و C صحيحين كان الخيار D خاطئ لأنّه لو كان S و T هما جذرا معادلة من الدرجة الثانية :

كانت المعادلة من الشكل : $z^2-(S+T)z+S\times T=0$ أي من الشكل : $z^2+z+2=0$ فيصبح الخيار D خاطئ .

فواحدٌ من الخيارات على الأقل : B أو C أو D خاطئ حتماً .

لندقّق في الخيار B :

$S+T=\alpha+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6=-1$ لأنّ $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=0$ ومنه

$\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=-1$. فالخيار B صحيح .

لندقّق في الخيار B :

$S\times T=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)\times(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)$.

$S\times T=\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^5+\alpha^7+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^9+\alpha^{10}$.

ومنه $S\times T=\alpha^4+\alpha^6+1+\alpha^5+1+\alpha^7\alpha+1+\alpha^7\alpha^2+\alpha^7\alpha^3$

وبالتالي : $S\times T=\alpha^4+\alpha^6+1+\alpha^5+1+\alpha+1+\alpha^2+\alpha^3$

$S\times T=\underbrace{1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6}_{0}+1+1=2$.

فالخيار C الصحيح . وبالتالي الخيار D هو الخيار الخاطئ وهو الذي يجب أنْ نختاره .

أمّا الخيار A:

$$\overline{T}=\overline{(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)}=\overline{\alpha}^3+\overline{\alpha}^5+\overline{\alpha}^6$$

بما أنّ $|\alpha|=\left|e^{i\frac{2\pi}{7}}\right|=1$ فإنّ $\overline{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$.

وبملاحظ أنّ : $\alpha^7=(e^{i\frac{2\pi}{7}})^7=e^{i2\pi}=1$

نجد : $\overline{T}=\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^5}+\frac{1}{\alpha^6}=\frac{\alpha^7}{\alpha^3}+\frac{\alpha^7}{\alpha^5}+\frac{\alpha^7}{\alpha^6}=\alpha^4+\alpha^2+\alpha=S$. فالخيار A صحيح .

الأشعة :

31) $\vec{u}(-1,0,1)$ و $\vec{v}(-11,6,-1)$ و $\vec{w}(3,-2,1)$

A	$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً	B	$\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطان خطياً	C	$\vec{v}+3\vec{w}-2\vec{u}=\vec{0}$	D	الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مرتبطة خطياً

التبرير

لندقّق في الخيار A : نلاحظ أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة ($\frac{0}{6} \neq \frac{-1}{-11}$)

فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : نلاحظ أنّ الشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة ($\frac{-2}{6} \neq \frac{3}{-11}$)

فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : $\vec{v}+3\vec{w}-2\vec{u}=\vec{0}$

$$\vec{v}+3\vec{w}-2\vec{u}=\begin{pmatrix}-11\\6\\-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

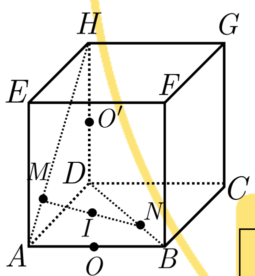
فالخيار C صحيح .

أمّا الخيار D : طالما الخيار C صحيح أي $\vec{v}+3\vec{w}-2\vec{u}=\vec{0}$ كانت الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً

فالخيار D خاطئ .

---

32) $ABCDEFGH$ مكعب : O منتصف $[AB]$ و O' منتصف $[DH]$



والنقطتان M و N تحقّقان : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$ و I منتصف $[MN]$.

إذا علمتَ أنّ $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

A	المستقيم (MN) يقطع المستوي (ABE)	B	المستقيمان (OO') و (MN) متخالفان
C	النقاط O و O' و I تقع على استقامةٍ واحدة	D	المستقيم (EA) يوازي المستوي (HIC) .

التبرير

لندقّق في الخيار A : لمّا كان $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

كانت الأشعة $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE}$ مرتبطة خطياً فالمستقيم (MN) يوازي المستوي (ABE) . فالخيار A خاطئ .

لندقّق أولاً في الخيار C : حيث أقرب للصحة من الخيار B فإذا كان صحيحاً كان الخيار B خاطئاً .

$2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}$

ومنه $2\overrightarrow{OI}=\cancel{\overrightarrow{OB}}+\overrightarrow{BN}+\cancel{\overrightarrow{OA}}+\overrightarrow{AM}$

$2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AH}$

$$\boxed{\overrightarrow{OI}=\frac{1}{8}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AH}}\cdots(1)$$

من جهةٍ أخرى :

$$2\overrightarrow{O'I}=\overrightarrow{O'N}+\overrightarrow{O'M}$$

ومنه : $2\overrightarrow{O'I}=\overrightarrow{O'D}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{O'H}+\overrightarrow{HM}$

$$2\overrightarrow{O'I}=\cancel{\overrightarrow{O'D}}+\overrightarrow{DN}+\cancel{\overrightarrow{O'H}}+\overrightarrow{HM}$$

وبالتالي : $2\overrightarrow{O'I}=\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{HM}$

$$2\overrightarrow{O'I}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$$

$$\boxed{\overrightarrow{O'I}=-\frac{3}{8}\overrightarrow{BD}-\frac{3}{8}\overrightarrow{AH}}\cdots(2)$$

من (1) و (2) نجد أنّ $\overrightarrow{O'I}=-3\overrightarrow{OI}$. فالشعاعان $\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{O'I}$ مرتبطان خطياً .

فالنقاط O و I و O' تقع على استقامةٍ واحدة . فالخيار الصحيح هو C .

أمّا الخيار B: فيصبح خاطئاً وضوحاً . لأنّ المستقيمين (OO') و (MN) متقاطعان في I .

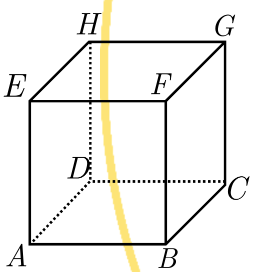
أمّا الخيار D: من الواضح أنّ المستقيم (GC) يقطع المستوي (HIC) في C فموازيه (EA) يقطعه أيضاً

فالخيار D خاطئ أيضاً .

---

33) $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 . ولنختر معلماً $(D;\frac{1}{2}\overrightarrow{DA},\frac{1}{2}\overrightarrow{DC},\frac{1}{2}\overrightarrow{DH})$

معادلة مجموعة نقط الفراغ التي تنتج عن دوران الضلع $[BF]$ من المستطيل $BFHD$ حول (DH) هي



A	$0\le z\le 2$ و $x^2+y^2=8$	B	$0\le z\le 2$ و $x^2+y^2=2$
C	$0\le z\le 2$ و $x^2+y^2-2z^2=0$	D	$0\le z\le 1$ و $x^2+y^2=2$

التبرير

مجموعة نقط الفراغ التي تنتج عن دوران الضلع $[BF]$ من المستطيل $BFHD$ حول (DH)

تمثّل أسطوانة محورها $(O;\vec{k})$ ونصف قطر قاعدتها $R=BD=2\sqrt{2}$

فمعادلتها من الشكل : $x^2+y^2=8$ و $0\le z\le 2$. فالخيار الصحيح هو A .

---

34) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان : $A(2,-1,3)$ و $B(1,0,3)$.

إنّ إحداثيات النقطة $M(0,1,3)$ تحقّقها واحدة من العلاقات :

A	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$	B	$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$	C	$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$	D	$2\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

التبرير

لندقّق في الخيار A : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$ وهذا يعني أنّ M منتصف $[AB]$

ولكن منتصف $[AB]$ هو النقطة $(\frac{3}{2},\frac{-1}{2},3)\neq M$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ يكافئ أنّ $A=B$ وهذا يناقض الفرض . فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$ يكافئ $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}$ وهذا تناقض . فالخيار C خاطئ .
مما سبق نستنتج أنّ الخيار الصحيح هو D .
والتحقّق من ذلك هو : $2\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ يكافئ $2\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$. هذا يكافئ أنّ B منتصف $[AM]$
فإذا أوجدنا منتصف $[AM]$ نجد $B=(1,0,3)$.

---

35) في الفراغ المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا A و B نقطتان متمايزتان .
واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو : مجموعة النقاط M التي تحقّق المساواة الآتية :

A	$MA=MB$ تمثّل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.	B	$MB=AB$ تمثّل كرة مركزها B ونصف قطرها AB.	C	$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ تمثّل نقطة وحيدة منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.	D	$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$ تمثّل نقطة وحيدة $M=A$

التبرير

لندقّق في الخيار A : من تعريف المستوي المحوري للقطعة المستقيمة نجد أنّ الخيار A صحيح .
لندقّق في الخيار B : من تعريف الكرة نجد أنّ الخيار B صحيح .
لندقّق في الخيار C : $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ يكافئ أنّ $A=B$ وهذا تناقض فمجموعة النقاط M تمثّل مجموعة خالية من النقاط
فالخيار C خاطئ . وهو الخيار الوحيد الذي يجب أنْ نختاره .
أمّا الخيار D : $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$ تمثّل نقطة وحيدة $M=A$. فالخيار D صحيح .

---

36) في الفراغ المنسوب لمعلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط : $A(3,0,0)$ و $B(1,1,0)$ و $C(0,2,1)$ و النقطة I منتصف $[BC]$
والنقطة M تحقّق المساواة : $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ عندئذٍ **<u>واحدٌ من الإجابات الآتية خاطئ هو</u>**

A	$M\in(ABC)$	B	النقاط A و I و M تقع على استقامةٍ واحدة	C	يوجد عددان حقيقيّان x و y يحقّقان : $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$	D	A هي مركز ثقل المثلث MBC

التبرير

لندقّق في الخيار A : لدينا $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OM}+3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{MC}$
وبالتالي : $3\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$
ومنه $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$ فالأشعة $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ مرتبطة خطياً فالنقاط M و A و B و C
تقع في مستوٍ واحد ومنه $M\in(ABC)$. فالخيار A صحيح .
طريقة ثانية : نوجد أوّلاً إحداثيات النقطة M فنستفيد من العلاقة الشعاعية المعطاة: $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OA}+-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$
ومنه $M(3(3)-(1)-(0),3(0)-(1)-(2),3(0)-(0)-(1))$
وبالتالي $M(8,-3,-1)$
ثمّ نبحث عن عددين حقيقيين x و y يحقّقان $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}$

$$\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}-7\\4\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-8\\5\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7x-8y\\4x+5y\\x+2y\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-7x-8y=-5 & (1)\\ 4x+5y=3 & (2)\\ x+2y=1 & (3)\end{cases}$$

لنأخذ المعادلتين $\{2,3\}$: $\begin{cases}4x+5y=3 & (2)\\ x+2y=1 & (3)\end{cases}$

لنضرب المعادلة (3) بالعدد (-4) فنجد $\begin{cases}4x+5y=3 & (2)\\ -4x-8y=-4 & (3)\end{cases}$

بالجمع : $-3y=-1$ ومنه $y=\dfrac{1}{3}$ نعوّض في (3) فنجد : $x+\dfrac{2}{3}=1$ ومنه $x=\dfrac{1}{3}$.

نتحقّق بالتعويض في المعادلة (1) فنجد : $-7(\dfrac{1}{3})-8(\dfrac{1}{3})=\dfrac{-15}{3}=-5$ محقّقة

ومنه $\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MC}$ فالأشعة $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ مرتبطة خطياً فالنقاط M و A و B و C تقع في مستوٍ واحد ومنه $M\in(ABC)$. فالخيار A صحيح .

طريقة ثالثة: من أجل الأتمتة : لإثبات أنّ ثلاثة أشعة مرتبطة خطياً أم لا دون البحث عن العددين x و y

لتكن الأشعة : $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ و $\vec{w}(x_3,y_3,z_3)$ نقول إنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً إذا تحقّق الشرط الآتي :

$$\begin{array}{ccccc}\vec{u} & \vec{v} & \vec{w} & \vec{u} & \vec{v}\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2\\ - & - & - & + & + & +\end{array}$$

إذا تحقّق أنّ $x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_2y_1z_3-x_1y_3z_2-x_3y_2z_1=0$ قلنا بأنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً .

أمّا إذا كان $x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_2y_1z_3-x_1y_3z_2-x_3y_2z_1\neq 0$ قلنا بأنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مرتبطة خطياً.

لنعود إلى مثالنا :

$$\begin{array}{ccccc}\overrightarrow{MA} & \overrightarrow{MB} & \overrightarrow{MC} & \overrightarrow{MA} & \overrightarrow{MB}\\ -5 & -7 & -8 & -5 & -7\\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1\\ - & - & - & + & + & +\end{array}$$

$(-5)(4)(2)+(-7)(5)(1)+(-8)(3)(1)-(-7)(3)(2)-(-5)(5)(1)-(-8)(4)(1)=$
$-40-35-24+42+25+32=-99+99=0$

فالأشعة $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ مرتبطة خطياً فالنقاط M و A و B و C تقع في مستوٍ واحد ومنه $M \in (ABC)$.

فالخيار A صحيح .

أمّا الخيار B : وجدنا أنّ $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$

ولمّا كانت I منتصف $[BC]$ كان $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

ومنه $\overrightarrow{MA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MI}$ فالشعاعان $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MI}$ مرتبطان خطياً .

فالنقاط A و I و M تقع على استقامةٍ واحدة . فالخيار B صحيح .

لندقّق في الخيار C : نلاحظ أنّ النقاط A و B و O تقع في المستوي (Oxy) كون كل من إحداثيات تلك النقاط تحقّق $z = 0$ أمّا النقطة C فأصبح لها علو حيث راقمها يساوي 1 . فالنقطة C لا تقع في المستوي (Oxy)

فالنقاط O و A و B و C لا تقع في مستوٍ واحد فالأشعة $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ ليست مرتبطة خطياً .

وبالتالي لا يوجد عددان حقيقيّان x و y يحقّقان : $\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}$.

فالخيار C خاطئ وهو الخيار الذي يجب أنْ نختاره .

ملاحظة : نستطيع الحل بطريقة ثانية بنفس الأسلوب الذي ناقشنا فيه الطريقة الثانية في الخيار B .

أمّا الخيار D : وجدنا أنّ $\overrightarrow{MA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MI}$

$\overrightarrow{MA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MI}$ وبالتالي A هي مركز ثقل المثلث MBC . فالخيار D صحيح .

طريقة ثانية : لدينا $M(8,-3,-1)$ و $B(1,1,0)$ و $C(0,2,1)$

لنطبّق قانون إحداثيات مركز ثقل المثلث : $(\frac{8+1+0}{3}, \frac{-3+1+2}{3}, \frac{-1+0+1}{3})$

$A = (3,0,0)$ ومنه A هي مركز ثقل المثلث MBC .

---

37) في الفراغ المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

قيمة العدد الحقيقي k التي تجعل مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقّق المساواة :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 6 + \sqrt{k} = 0$ تمثّل نقطة وحيدة هي :

A	2	B	1	C	0	D	$\varnothing$

التبرير

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 6 + \sqrt{k} = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + y^2 + (z^2 + 4z + 4) - 4 + 6 + \sqrt{k} = 0$$

ومنه $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 + 1 + \sqrt{k} = 0$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = -1 - \sqrt{k}$$

تمثّل نقطة وحيدة عندما $-1 - \sqrt{k} = 0$

ومنه $\sqrt{k} = -1$ مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$. فالخيار الصحيح هو D .

على فكرة المعادلة دوماً تمثّل مجموعة خالية من النقاط أياً تكن $k \geq 0$.

---

38) في الفراغ المنسوب لمعلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطتان $A(1,2,-1)$ و $B(3,0,1)$. $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ إذا وفقط إذا كان : $x+my+nz-1=0$

A	$m=-1$ و $n=1$	B	$m=0$ و $n=-1$	C	$m=1$ و $n=1$	D	$m=-1$ و $n=-1$

التبرير

نحن نعلم أنّ منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ وهي $(2,1,0)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ فهي تحقّق معادلته ومنه : $2+m+0-1=0$

وبالتالي $m=-1$ فالخيار الصحيح إمّا A أو B . أمّا الخياران B و C خاطئان .

$M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ إذا وفقط إذا كان : $MA=MB$

ومنه $MA^2=MB^2$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=(x-3)^3+y^2+(z-1)^2$$

ومنه : $x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2+2z+1=x^2-6x+9+y^2+z^2-2z+1$

$$4x-4y+4z-4=0$$

وبالتالي $x-y+z-1=0$ ومنه $m=-1$ و $n=1$. فالخيار الصحيح هو A .

---

39) ليكن المستقيم d الذي يمر بالنقطة $A(3,-1,1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(1,0,-2)$

والمستقيم d' الذي يمر بالنقطة $B(3,-3,-1)$ وشعاع توجيهه $\vec{v}(2,1,-3)$

حيث تتحقّق العلاقة : $\overrightarrow{AB}=4\vec{u}-2\vec{v}$. عندئذٍ إحداثيات I نقطة تقاطع المستقيمين d و d' هي :

A	$I(7,1,-7)$	B	$I(-7,1,-7)$	C	$I(-7,-1,7)$	D	$I(7,-1,-7)$

التبرير

لمّا كانت I نقطة تقاطع المستقيمين d و d' . كان الشعاعان $\overrightarrow{AI}$ و $\vec{u}$ مرتبطين خطياً .

ومنه يوجد عدد حقيقي α يحقّق الشرط : $\overrightarrow{AI}=\alpha\,\vec{u}\cdots\cdots\cdots(1)$

و كان الشعاعان $\overrightarrow{IB}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً . ومنه يوجد عدد حقيقي β يحقّق الشرط : $\overrightarrow{IB}=\alpha\,\vec{u}\cdots\cdots\cdots(2)$

بجمع (1) و (2) : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}$

ومنه : $\overrightarrow{AB}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}$

ولدينا فرضاً $\overrightarrow{AB}=4\vec{u}-2\vec{v}$

بالمطابقة نجد : $\alpha=4$ و $\beta=-2$.

نعوّض في (1) ومنه : $\overrightarrow{AI}=4\,\vec{u}$ بفرض $I(x,y,z)$ نجد

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

وبالتالي :

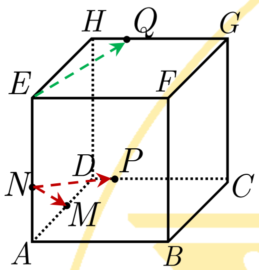
$$\begin{cases} x-3=4 \Rightarrow x=7 \\ y+1=0 \Rightarrow y=-1 \\ z-1=-8 \Rightarrow z=-7 \end{cases}$$

وبالتالي $I(7,-1,-7)$. فالخيار الصحيح هو D .

---

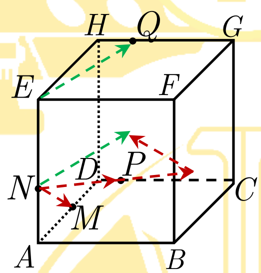
40) $ABCDEFGH$ مكعب . M و N و P و Q تحقّق : $\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$ و $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{8}\overrightarrow{DC}$

و M منتصف $[AD]$. ولنختر معلماً $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



A	$\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{NP}-2\overrightarrow{NM}$	B	$\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{NP}+2\overrightarrow{NM}$
C	$\overrightarrow{EQ}=\overrightarrow{NP}+2\overrightarrow{NM}$	D	$\overrightarrow{EQ}=\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{NM}$

التبرير



لندقّق في الخيار A : لنحاول أنّ نتخيّل الرسم :

فالخيار A صحيح .

أمّا الخيارات الباقية :

بنفس الأسلوب سنجد أنّ الطرف الأيمن من كل مساواة

لا يساوي الشعاع $\overrightarrow{EQ}$ حتماً .

أمّ الحل بشكل تفصيلي :

$E(0,0,1)$ و $Q(\frac{1}{4},1,1)$ ومنه $\overrightarrow{EQ}(\frac{1}{4},1,0)$

$N(0,0,\frac{1}{3})$ و $P(\frac{1}{8},1,0)$ ومنه $\overrightarrow{NP}(\frac{1}{8},1,-\frac{1}{3})$

$N(0,0,\frac{1}{3})$ و $M(0,\frac{1}{2},0)$ ومنه $\overrightarrow{NM}(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$

نلاحظ أنّ $2\overrightarrow{NP}-2\overrightarrow{NM}=(\frac{1}{4},2,\frac{-2}{3})-(0,1,\frac{-2}{3})=(\frac{1}{4},1,0)=\overrightarrow{EQ}$

فالخيار الصحيح هو A .

....انتهت الأجوبة ....