النموذج السادس

الوحدات المستهدفة :
الوحدات الثلاثة الأولى من كتاب الجبر ، بالإضافة إلى الدرس الأول من الوحدة الرابعة

الوحد الأولى والثانية من كتاب الهندسة ، بالاضافة إلى الدرس الأول من الوحدة الثالثة

المدة المسموحة للانتهاء من الحل : ساعتان

حاول التأقلم مع عامل ضغط الوقت قبل موعد الامتحان بحل أكبر عدد ممكن من النماذج ضمن مدة زمنية لاتتجاوز الساعتين لكل نموذج

امتحان شهاده التعليم الأساسي والاعدادية الشرعية
دورة 2024

أولاً: أجب عن السؤالين الآتيين: ($60°$ درجة للسؤال الأول و $40°$ درجة للسؤال الثاني)

السؤال الأول: في كل من البنود الأربعة الأتية ثلاث إجابات مقترحة واحدة منها صحيحة فقط ، أشر إليها.

1)	تسعة أمثال العدد 3^8					
	A	3^7	B	3^{16}	C	3^{10}
2)	القاسم المشترك الأكبر للعددين 1215 و 945 هو :					
	A	5	B	135	C	215
3)	$if\ \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow GCD(a,b) = ??$					
	A	1	B	b	C	ليس أياً مما سبق
4)	إن $\frac{a^8 \times b^{-3} \times c^{-5}}{a^5 \times b^2 \times c^{-10}}$ هو :					
	A	$a^3 \times b^5 \times c^{-15}$	B	$a^3 \times b^{-5} \times c^5$	C	$a^3 \times b^{-5} \times c^{-5}$

السؤال الثاني: في كل مما يأتي أجب بكلمة صح أو خطأ:

1) نعلم أن التشابه يحافظ على قياسات الزوايا ، أما أطوال الأضلاع فتُضرب بمربع نسبة التشابه.

2) $\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{16}}}$ يساوي 4

3) نصف العدد 4^6 هو 2^{11}.

4) للعدد 5^{-2} جذران تربيعيان متعاكسان

ثانياً: حل التمارين الخمس الآتية: ($60°$ درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن العدد A حيث $A = \sqrt{3}(\sqrt{3}-1) + \sqrt{27} + 1$ والمطلوب:

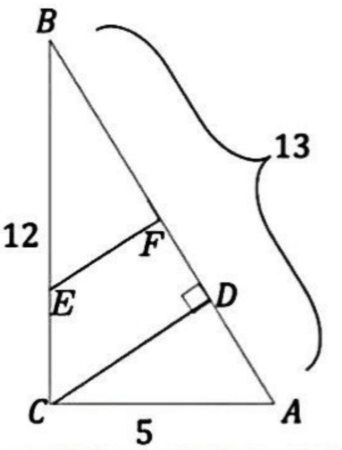
1) بيّن أن $A = 4 + 2\sqrt{3}$.

2) ليكن العدد B حيث $B = 4 - 2\sqrt{3}$ ، جد $A \times B$ و ما طبيعة العدد الناتج.

التمرين الثاني: في المتراجحة التالية $\frac{1}{3}x - 1 > 2$

1) أي الأعداد الأتية يحقق هذا المتراجحة: -12 و 12 و 3 .

2) حل المتراجحة السابقة وبين مجموعة الحلول ومثلها على مستقيم الأعداد.



التمرين الثالث: ABC مثلث فيه $AB = 13$, $AC = 5$, $BC = 12$, $AB \perp CD$, والمطلوب :

1- أثبت أن المثلث ABC قائم في C . 2- احسب $SinB$ و $TanA$.احسب طول CD .

3- إذا علمت أن $CE = 4$, $BF = \frac{2}{3}BD$

أثبت أن $EF \parallel CD$ واحسب النسبة $\frac{S_{BCD}}{S_{BEF}}$

التمرين الرابع: $\boxed{1\,St}$ مربعان طول ضلع أحدهما يزيد (1) على طول ضلع الآخر، ومربّع فرق مساحتيهما يساوي (9)، أوجد طول ضلع كل من المربعين.

$\boxed{2\,nd}$ لدينا المقدار $E=(3x+2)^2-(x+7)^2$ و المطلوب:

1) انشر ثم اختزل E .

2) حلل المقدار E ثم حل المعادلة $E=0$.

التمرين الخامس:

في جملة المعادلتين التاليتين:
$$\begin{cases} 2x+y=8 & \text{.........①} \\ y-2x=0 & \text{.........②} \end{cases}$$

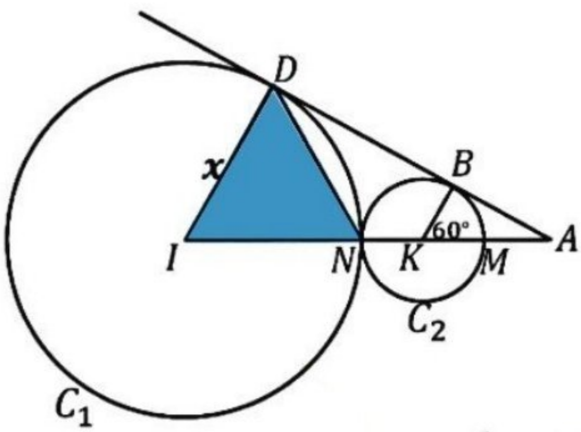
١) أي النقاط الآتية: $A(4,0)$, $B(2,4)$ تحقق المعادلة ① ؟

٢) أي النقاط الآتية : $C(1,1)$, $D(-2,-4)$ تحقق المعادلة ② ؟

٣) حل جملة المعادلتين جبرياً

ثالثاً: حل المسألتين الاثنتين: ($100°$ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: في الشكل المرسوم جانباً: C_1 دائرة مركزها I ، و C_2 دائرة مركزها K وهما متماستان خارجاً في النقطة N ولدينا الطول $AK=10$ وقياس الزاوية $A\hat{K}B=60°$ ،والمستقيم (AB) يمس كلاً من الدائرة C_1 في النقطة D والدائرة C_2 في B. ونفرض أنَ $x=DI$.



والمطلوب:

1) احسب قياس كل من الزاويتين $A\hat{B}K$ و $A\hat{D}I$ ، وبيَن أنَ المستقيمين (BK) و (ID) متوازيان.

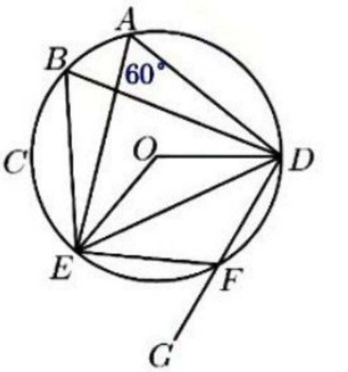
2) احسب قياس كل من الزاويتين $D\hat{I}A$ و $A\hat{D}N$.

3) في المثلث القائم KBA احسب الطول BK.

4) احسب الطول AN ، ثمَ احسب قيمة x.

المسألة الثانية:★ في الشكل المرسوم جانباً:

النقاط A و B و E و D واقعة على دائرة واحدة C مركزها O ، $E\hat{A}D=60°$ والمطلوب:



1) ما قياس الزاوية $E\hat{B}D$.

2) احسب كلاً من قياس الزاويتين $E\hat{O}D$ المباشرة والمنعكسة.

3) احسب قياس الزاوية $E\hat{F}D$

4) تقع النقطة G على امتداد $[DF]$ احسب قياس الزاوية $E\hat{F}G$.

5) احسب قياس الزاوية $O\hat{D}E$.

★ لتكن المعادلة: $3^{2x}+3^{2x+1}=12$ أثبت أن $3^{2x}=3$ ثم جد قيمة x

(انتهت الأسئلة)

حل النموذج الخامس.

أولاً:

- السؤال الأول:

1) $9\times 3^{8}=3^{2}\times 3^{8}=3^{10}$ الإجابة C

2) $GCD(1215,945)=??$

باستخدام خوارزمية اقليدس نجد:

$$\left.\begin{array}{l}1215=1\times 945+270\\ 945=3\times 270+135\\ 270=2\times 135+0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$GCD(1215,945)=135$ الإجابة B

3) if $\frac{a}{b}=1\Rightarrow GCD(a,b)=??$

نلاحظ أن b يقسم a وبالتالي وحسب خواص القاسم المشترك الأكبر فإن:
إذا كان b قاسماً لـ a فإن:

$GCD(a,b)=b$ الإجابة B

4) $\frac{a^{8}\times b^{-3}\times c^{-5}}{a^{5}\times b^{2}\times c^{-10}}=\frac{a^{8}}{a^{5}}\times\frac{b^{-3}}{b^{2}}\times\frac{c^{-5}}{c^{-10}}$

$=a^{3}\times b^{-5}\times c^{+5}$ الإجابة B

- السؤال الثاني:

1) خطأ الأطوال تتغير بنسبة التشابه ما لم يكن كالتطابق.

2) خطأ

$\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{16}}}=\sqrt{1+\sqrt{\underbrace{5+4}_{9}}}$

$=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

3) صح

$\frac{4^{6}}{2}=\frac{(2^{2})^{6}}{2}=\frac{2^{12}}{2}=2^{11}$

4) صح

$5^{-2}=\frac{1}{5^{2}}=\frac{1}{25}$

$x^{2}=\frac{1}{25}\Rightarrow\begin{cases}x=+\frac{1}{5}\\ x=-\frac{1}{5}\end{cases}$

ثانياً:

- التمرين الأول:

$A=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)+\underbrace{\sqrt{27}}+1$

1) $A=3-\sqrt{3}+3\sqrt{3}+1$

$=4+2\sqrt{3}$

2) $B=4-2\sqrt{3}$ ، $A=4+2\sqrt{3}$

$A\times B=(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})$

مطابقة $(a+b)(a-b)=a^{2}-b^{2}$

$=4^{2}-(2\sqrt{3})^{2}=16-12=4$

وهو عدد طبيعي (أصغر مجموعة ينتمي إليها)

- التمرين الثاني:

$\frac{1}{3}x-1>2$

1) $\cdot\, x=-12\Rightarrow -4-1>2$

$\Rightarrow -5>2$ غير محققة

ومنه $x=-12$ ليست حلاً للمتراجحة.

$\cdot\, x=+12\Rightarrow 4-1>2$

$\Rightarrow 3>2$ محققة

ومنه $x=12$ تمثل حلاً للمتراجحة.

$\cdot\, x=3\Rightarrow 1-1>2$

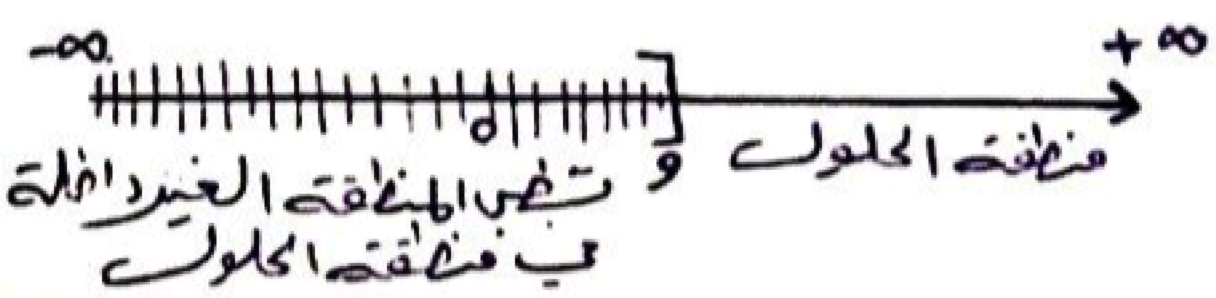
$\Rightarrow 0>2$ غير محققة

ومنه $x=3$ ليست حلاً للمتراجحة.

2) $\frac{1}{3}x>2+1\Rightarrow\frac{1}{3}x>3$

(نضرب الطرفين بـ $+3$) $\Rightarrow x>9$

ومنه الحلول المتراجحة هي جميع قيم المجهول الأكبر تماماً من 9 أي $x\in\,]9,+\infty[$



التمرين الثالث:

1) لنطبق عكس فيثاغورث في المثلث ABC

$$(AB)^2 \overset{?}{=} (AC)^2+(BC)^2$$
$$(13)^2 \overset{?}{=} 5^2 + (12)^2$$
$$169 \overset{?}{=} 25 + 144$$
$$169 = 169$$ محققة

بالتالي المثلث ABC قائم في الرأس المقابل لأكبر أضلاعه أي قائم في C ووتره AB.

2) من المثلث القائم ABC نجد:

$$\sin\hat{B} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$$

$$\tan\hat{A} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5}$$

* حساب طول CD:

من المثلث القائم BCD نجد:

$$\sin\hat{B} = \frac{CD}{CB} = \frac{CD}{12}$$

ووجدنا سابقاً:

$$\sin\hat{B} = \frac{5}{13} \Rightarrow$$

$$\frac{CD}{12} = \frac{5}{13} \Rightarrow CD = \frac{60}{13}$$

3) $CE = 4 \Rightarrow BE = 12 - 4 = 8$

حتى يكون $CD \parallel EF$ يجب أن تتحقق المساواة $\frac{BE}{BC} = \frac{BF}{BD}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{BE}{BC} &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \frac{BF}{BD} &= \frac{\frac{2}{3}\cancel{BD}}{\cancel{BD}} = \frac{2}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\frac{BE}{BC} = \frac{BF}{BD}$ وبما أن النقاط B, E, C على القاطع BC منتجة بالترتيب مع النقاط B, F, D على القاطع BD فإن $CD \parallel CF$

وذلك حسب مبرهنة النسب الثلاث العكسية.

- ونعلم أن نسبة مساحتي شكلين متشابهين تساوي مربع نسبة التشابه والمطلوب هنا: نسبة مساحة المثلث الكبير إلى الأصغر

وجدنا أن نسبة التصغير $\frac{2}{3}$ فتكون نسبة التكبير $\frac{3}{2}$ وهنا:

$$\frac{S_{BCD}\ \text{كبير}}{S_{BEF}\ \text{صغير}} = k^2\ \text{تكبير} \Rightarrow$$

$$\frac{S_{BCD}}{S_{BEF}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$\boxed{1SR}$

- التمرين الرابع:

بفرض طول ضلع المربع الصغير x

فيكون طول ضلع المربع الكبير $x+1$

- مساحة المربع الصغير x^2
- مساحة المربع الكبير $(x+1)^2$
- فرق المساحتين:

$$(x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2$$
$$= 2x + 1$$

- مربع فرق المساحتين $(2x+1)^2$

وحسب الفرض:

$$\underbrace{(2x+1)^2}_{\text{لا تنشرها}} = 9 \Rightarrow (\quad)^2 = a^2$$

إما $2x + 1 = +\sqrt{9} = +3$

$\Rightarrow 2x = 3 - 1 = 2 \Rightarrow x = 1$ مقبول

وهو طول ضلع المربع الأصغر فيكون طول ضلع المربع الأكبر $x + 1 = 1 + 1 = 2$

أو $2x + 1 = -\sqrt{9} = -3$

$\Rightarrow 2x = -3 - 1 = -4 \Rightarrow x = -2$

مرفوض، لا يمثل طول ضلع (الأطوال دائماً موجبة)

2nd

$$E=(3x+2)^2-(x+7)^2$$

1) $E=9x^2+12x+4-x^2-14x-49$

$=8x^2-2x-45$

2) نستفيد من المطابقة $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$E=(3x+2)^2-(x+7)^2$

$=(3x+2-x-7)(3x+2+x+7)$

$=(2x-5)(4x+9)$

- لحل المعادلة $E=0$ نعوض بعبارة التحليل:

$E=0 \Rightarrow (2x-5)(4x+9)=0 \Rightarrow$

إما $2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$

أو $4x-9=0 \Rightarrow x=\frac{-9}{4}$

$S=\left\{\frac{5}{2}, \frac{-9}{4}\right\}$

- التمرين الخامس:

الجملة تكتب بالشكل

$$\begin{cases} 2x+y=8 \quad \dots(1) \\ -2x+y=0 \quad \dots(2) \end{cases}$$

1) - نعوض إحداثيات النقطة A في المعادلة (1) نجد:

$A(4,0) \Rightarrow 8+0 \stackrel{?}{=} 8 \Rightarrow 8=8 \Rightarrow$ محققة

النقطة A تحقق المعادلة (1) فهي من (d_1)

- نعوض إحداثيات النقطة B في المعادلة (1) نجد:

$B(2,4) \Rightarrow 4+4 \stackrel{?}{=} 8 \Rightarrow 8=8 \Rightarrow$ محققة

النقطة B تحقق المعادلة (1) فهي من (d_1).

2) بنفس الطريقة السابقة نجد:

- النقطة $C(1,1)$ لا تحقق المعادلة (2) فهي ليست من (d_2).

- النقطة $D(-2,-4)$ تحقق المعادلة (2) فهي من (d_2).

3) لحل الجملة جبرياً نستخدم إحدى الطريقتين:

* طريقة الحذف بالجمع:

بجمع المعادلتين نجد: $2y=8 \Rightarrow y=4$

نعوض في (1) نجد:

$2x+4=8 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$

الثنائية $(x,y)=(2,4)$ هي حل و لجملة المعادلتين.

أو:

* طريقة الحذف بالتعويض:

من المعادلة (2) نجد: $y=2x \quad \dots(3)$

نعوض في (1) نجد:

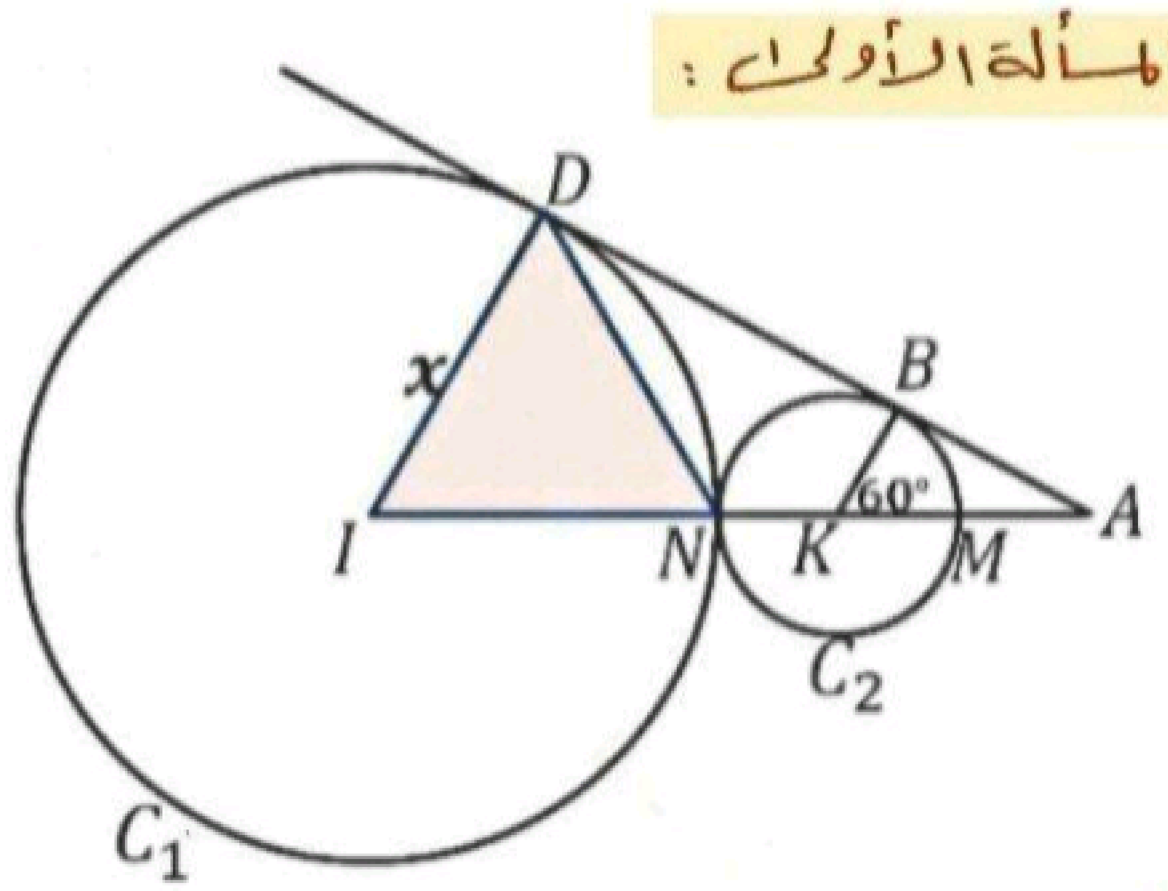
$2x+2x=8 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2$

نعوض في (3) نجد: $y=2(2)=4$

إذاً الثنائية $(x,y)=(2,4)$ هي حل لجملة المعادلتين.

ثالثاً:

- المسألة الأولى:



1) المستقيم AB مماس للدائرة C_2 في B

وامتداده يمس الدائرة C_1 في D حسب الفرض

- نعلم أن المماس يُعامد نصف القطر في نقطة التماس ومنه

$A\hat{B}K = 90^\circ$ أي $AB \perp KB$

$A\hat{D}I = 90^\circ$ أي $AD \perp ID$

مما سبق نجد:

$AB \perp KB \Leftrightarrow \begin{cases} KB \perp AD \\ ID \perp AD \end{cases} \Leftarrow$

$(KB) \parallel (ID)$ لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان.

2) بما أن المستقيمات (ID) ، (BK) متوازيات فالزاويتان $D\hat{I}A$ ، $B\hat{K}A$ متساويتان لأنهما متناظرتان ومنه $D\hat{I}A = 60^\circ$

• $D\hat{I}A = 60^\circ$ ومنه $\overset{\frown}{DN} = 60^\circ$

(مركزية نقيس بقياس القوس المقابلة لها)

والزاوية $A\hat{D}N$ مماسية تحصر القوس $\overset{\frown}{DN}$ وقياسها يساوي نصف قياس القوس $\overset{\frown}{DN}$ ومنه

$$A\hat{D}N = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DN} = 30^\circ$$

(أو مباشرة تساوي نصف المركزية المشتركة معها بالقوس)

3) في المثلث القائم KBA لدينا:

$\hat{B} = 90^\circ$ ، $\hat{K} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ$

في المثلث القائم الضلع المقابل للزاوية 30° يساوي نصف طول الوتر ومنه

$$BK = \frac{KA}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

(يوجد طرائق أخرى للحساب)

4) لاحظ الشكل:

$$AN = AK + \underbrace{KN}_{\text{نصف قطر في الدائرة } C_2} \Rightarrow$$

$$AN = 10 + 5 = 15$$

• لحساب x يوجد عدة طرائق منها:

* طريقة أولى:

في المثلث القائم ADI.

$\hat{A} = 30$ ومنه الضلع المقابل x يساوي نصف طول الوتر $IA \Leftarrow$

$$x = \frac{1}{2}[IA]$$

$$= \frac{1}{2}[IN + NA] = \frac{1}{2}(x + 15) \Rightarrow$$

$$x = \frac{x}{2} + \frac{15}{2} \xrightarrow{\times 2} 2x = x + 15$$

ومنه $\boxed{x = 15}$

* طريقة ثانية: تطبيق مبرهنة النسب الثلاث على المثلثين ABK ، ADI حيث $(KB) \parallel (ID)$.

$$\underbrace{\frac{AB}{AD} = \frac{AK}{AI}} = \frac{BK}{DI} \Rightarrow$$

$$\frac{10}{15+x} = \frac{5}{x} \Rightarrow$$

$$10x = 75 + 5x \Rightarrow$$

$$5x = 75 \Rightarrow \boxed{x = 15}$$

$$3^{2x} + \underbrace{3^{2x+1}} = 12 \Rightarrow$$

$$3^{2x} + 3^{2x} \times 3^{1} = 12 \Rightarrow$$

$$3^{2x}(1+3) = 12 \Rightarrow$$

$$4 \times 3^{2x} = 12 \Rightarrow \boxed{3^{2x} = 3}$$

$$\boxed{a^{m} = a^{n} \Rightarrow m = n}$$

$$3^{2x} = 3 \Leftrightarrow \cancel{3}^{2x} = \cancel{3}^{1}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

المسألة الثانية

1) $E\hat{B}D = E\hat{A}D = 60^\circ$

(زاويتان محيطيتان تشتركان بالقوس ذاته)

2) $E\hat{O}D$ زاوية مركزية قوسها $\overset{\frown}{ED}$

حيث: $\underbrace{E\hat{B}D}_{60} = \frac{\overset{\frown}{ED}}{2}$ (محيطية) ومنه

$$60 = \frac{\overset{\frown}{ED}}{2} \Rightarrow$$

$\overset{\frown}{ED} = 120^\circ$

وبالتالي:

$E\hat{O}D = \overset{\frown}{ED} = 120^\circ$ (مركزية)

وقياس زاويته المنعكسة $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$

3) وجدنا في الطلب السابق $\overset{\frown}{ED} = 120^\circ$ ومنه قياس القوس الكبرى

$$\underbrace{\overset{\frown}{EBAD}}_{\overset{\frown}{ED}\text{ الكبرى}} = 360 - 120^\circ = 240^\circ$$

$E\hat{F}D = \frac{\overset{\frown}{ED}\text{ الكبرى}}{2}$ (محيطية)

$$= \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$$

4) $G\hat{F}D$ زاوية مستقيمة قياسها 180°

$$G\hat{F}D = G\hat{F}E + E\hat{F}D$$

$$180 = G\hat{F}E + 120^\circ \Rightarrow$$

$$G\hat{F}E = 180 - 120 = 60^\circ$$

5) المثلث ODE متساوي الساقين في O

حيث $OE = OD = R$ ووجدنا أن:

$E\hat{O}D = 120^\circ$ وهو متساوي الساقين إذن

زاويتي القاعدة متساويتين وكل منهما يساوي

$$\frac{180 - 120}{2} = \frac{60}{2} = 30^\circ \Rightarrow$$

$$O\hat{D}E = 30^\circ$$