

# أتمتة منهاج رياضيات البكالوريا السورية

الجزء الأول: الوحدة الرابعة

اختبار نهاية متتالية

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد




كتابة الأساتذة:


مصطفى الرزوق أمين الحايك

تنسيق وإخراج: أمين الحايك




التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

فيصل خالد	أحمد أبو نبوت	مروان بركة	محي الدين إسماعيل
بشار كعاز	صفوح الأفندي	هيثم ديوب	محمد السيد علي
فادي الحمد	خالد الحداد	حسام قاسم	زينب يوسف
فادي طنوس	محمد زين جعور	نادر أبوراس	يوسف منصور
مهند حريقة	علي جمول	أمين الحايك	زكي طحاوي
عبد السلام حسن	صلاح سالم	مصطفى الرزوق	محمد العيسى

<p>نتأمل متتاليتين <math>(x_n)_{n \geq 0}</math> و <math>(y_n)_{n \geq 0}</math> ، إذا كان <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty</math> و <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot y_n = 3</math></p> <p>كانت <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n</math> تساوي:</p>								1	
$+\infty$	E	3	D	1	C	$\frac{1}{3}$	B	0	A
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (x_n \cdot y_n) \cdot \frac{1}{x_n} \right] = (3)(0) = 0$									1
إعداد: م. طالب أسعد			الجواب: A			كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق			
<p>عند دراسة تقارب المتتالية <math>(u_n)_{n \geq 1}</math> حيث: <math>u_n = \frac{5^n - 7^n}{1 - 7^n}</math> نجد أنها متقاربة من العدد:</p>								2	
1	E	$\frac{5}{7}$	D	$\frac{1}{7}$	C	0	B	-1	A
 $u_n = \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{7}\right)^n - 1} ; -1 < \frac{1}{7} < \frac{5}{7} < 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n = 0 , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{0 - 1}{0 - 1} = 1$									1
إعداد: م. صفاء قرظ			الجواب: E			كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق			
<p>لنكن المتتالية <math>(u_n)_{n \geq 1}</math> المعرفة وفق: <math>u_n = \frac{\sin n}{n}</math> عندئذ تكون نهاية المتتالية <math>(u_n)_{n \geq 1}</math> هي:</p>								3	
$+\infty$	E	2	D	0	C	-2	B	$-\infty$	A
 <p>وبما أن:</p> $-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$ <p>فحسب مبرهنة الإحاطة يكون:</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$									1
إعداد: م. حسين رشيد			الجواب: C			كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق			



واحدة فقط من المتتاليات الآتية ليس لها نهاية:									4
$t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4^n$	<b>E</b>	$v_n = (-2)^n$	<b>D</b>	$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$	<b>C</b>	$x_n = 4^n$	<b>B</b>	$w_n = 2^n - 1$	<b>A</b>
 <p>المتتالية <math>v_n = (-2)^n</math> هندسية وفيها <math>-2 &lt; -1 &lt; q</math> وبالتالي ليس لها نهاية</p>									
إعداد: م. وسام علي			الجواب: <b>D</b>			كتابة وتنسيق: م. أمين الحايك			
<p>ليكن <math>q</math> عدداً حقيقياً يحقق <math>0 &lt; q &lt; 1</math> ولتكن المتتالية <math>(u_n)_{n \geq 0}</math> المعرفة وفق:</p> $u_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ <p>إذا علمت أن: <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3</math> فإن <math>q</math> يساوي:</p>									
$\frac{3}{4}$	<b>E</b>	$\frac{3}{5}$	<b>D</b>	$\frac{2}{3}$	<b>C</b>	$\frac{1}{2}$	<b>B</b>	$\frac{1}{3}$	<b>A</b>
<p>لدينا مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها <math>q</math> وعدد الحدود <math>n + 1</math> ومنه:</p> $u_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ <p>وبما أن: <math>0 &lt; q &lt; 1</math> فإن:</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1 - q} \Rightarrow \frac{1}{1 - q} = 3 \Rightarrow q = \frac{2}{3}$									
إعداد: م. محمد العاشق			الجواب: <b>C</b>			كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق			
<p>لتكن المتتالية <math>(u_n)_{n \geq 0}</math> المعرفة وفق: <math>u_n = n\sqrt[3]{n}</math>، إن أصغر عدد طبيعي <math>n_0</math> يحقق الشرط:</p> <p>من أجل كل <math>n &gt; n_0</math> فإن <math>u_n &gt; 10^{12}</math> هو:</p>									
$10^{12}$	<b>E</b>	$10^9$	<b>D</b>	$10^8$	<b>C</b>	$10^6$	<b>B</b>	$10^4$	<b>A</b>
<p><math>u_n &gt; 10^{12} \Rightarrow n\sqrt[3]{n} &gt; 10^{12} \Rightarrow n^4 &gt; 10^{12 \times 3} \Rightarrow n &gt; 10^9</math></p> <p>إذن <math>n_0 = 10^9</math></p>									
إعداد: م. عبدالله حناوي			الجواب: <b>D</b>			كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق			

<p>عدد حقيقي يحقق <math>0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}</math> و <math>(u_n)_{n \geq 0}</math> متتالية معرفة وفق: <math>u_n = 2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)</math></p> <p>عندئذ نهاية المتتالية <math>(u_n)_{n \geq 0}</math>:</p>									7
$+\infty$	E	2	D	1	C	0	B	-1	A
<p><math>u_n = 2 \cos \left[ \theta \left( \frac{1}{2} \right)^n \right]</math></p> <p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n = 0 ; -1 &lt; \frac{1}{2} &lt; 1</math></p> <p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \cos(0) = 2</math></p>									7
إعداد : م. محي الدين اسماعيل			الجواب : D			كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق			
<p>المتتالية <math>(u_n)_{n \geq 1}</math> معرفة عند كل عدد طبيعي <math>n \geq 1</math> وفق:</p> <p><math>u_n = \sqrt{\frac{n}{n^3+1}} + \sqrt{\frac{n}{n^3+2}} + \sqrt{\frac{n}{n^3+3}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{n^2+1}}</math></p> <p>عندئذ تكون نهاية هذه المتتالية:</p>									8
$+\infty$	E	$\sqrt{2}$	D	1	C	$\frac{1}{2}$	B	0	A
<p>يساوي <math>u_n</math> مجموع <math>n</math> حداً أصغرها <math>\sqrt{\frac{1}{n^2+1}}</math> وأكبرها <math>\sqrt{\frac{n}{n^3+1}}</math> إذأ:</p> <p><math>n \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2+1}} \leq u_n \leq n \cdot \sqrt{\frac{n}{n^3+1}}</math></p> <p><math>\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = 1</math></p> <p><math>\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sqrt{\frac{n}{n^3+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^3}{n^3+1}} = 1</math></p> <p>وبالتالي حسب مبرهنة الإحاطة <math>\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1</math></p>									7
إعداد : م. موسى حجيج/ أبو نزار			الجواب : C			كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك			

المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تحقق: $u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ، عندئذ تكون نهاية هذه المتتالية:									9	
$+\infty$	<b>E</b>	1	<b>D</b>	$\frac{1}{2}$	<b>C</b>	0	<b>B</b>	$-\infty$	<b>A</b>	
 <p>لدينا: <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty</math> لأنها متتالية هندسية أساسها <math>q = \frac{3}{2} &gt; 1</math> وبالتالي حسب مبرهنة المقارنة <math>\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty</math></p>										
إعداد: م. خضر سيفو			الجواب: <b>E</b>			كتابة وتنسيق: م. أمين الحايك				
نتأمل المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n}$ إذا كان $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ عندئذ نهاية المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$ :										10
3	<b>E</b>	$\frac{3}{2}$	<b>D</b>	0	<b>C</b>	$-\frac{3}{2}$	<b>B</b>	-3	<b>A</b>	
 <p><math>S_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{1} + \frac{3}{3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{3} + \dots + \frac{3}{n} - \frac{3}{n-1} + \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n}</math> <math>S_n = -3 + \frac{3}{n+1}</math> <math>\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -3</math></p>										
إعداد: م. نادر أبو راس			الجواب: <b>A</b>			كتابة وتنسيق: م. نادر أبو راس				
لتكن المتتاليتان $(x_n)_{n \geq 0}$ و $(y_n)_{n \geq 0}$ فيهما: $x_0 = 2$ ، $y_0 = 8$ ولتكن المتتالية $(w_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق: $w_n = x_n \cdot y_n$ إذا علمت أن المتتالية $(w_n)_{n \geq 0}$ ثابتة، وأن المتتاليتين $(x_n)_{n \geq 0}$ و $(y_n)_{n \geq 0}$ متجاورتان عندئذ فإن النهاية المشتركة لهما:										11
0	<b>E</b>	2	<b>D</b>	3	<b>C</b>	4	<b>B</b>	8	<b>A</b>	
 <p><math>w_n = w_0 = x_0 \cdot y_0 = 16</math> <math>\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L</math> <math>\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n</math> <math>16 = L^2 \Rightarrow L = 4</math></p>										
إعداد: م. علي جمول			الجواب: <b>B</b>			كتابة وتنسيق: م. أمين الحايك				

<p>لتكن المتتاليتان <math>(u_n)_{n \geq 0}</math> و <math>(v_n)_{n \geq 0}</math> المعرفتان وفق:</p> $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = u_n + 4$ <p>إذا علمت أن المتتالية <math>(v_n)_{n \geq 0}</math> هندسية، وأن: <math>s_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n</math> عندئذ نهاية المتتالية <math>(s_n)_{n \geq 0}</math>:</p>									12
3	E	6	D	8	C	12	B	14	A
<p style="text-align: center;"><math>v_0 = 2 + 4 = 6</math></p> $v_1 = \left(\frac{1}{2}(2) - 2\right) + 4 = 3 \Rightarrow q = \frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{2}$ <p style="text-align: center;"><math>s_n = 6 \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 12 \left( 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)</math></p> <p style="text-align: center;">لدينا: <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0</math> لأنها متتالية هندسية وفيها <math>-1 &lt; q = \frac{1}{2} &lt; 1</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 12</math></p>									نوني الحل
إعداد : م. مروان بركة			الجواب : B			كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك			
<p>ليكن <math>a</math> و <math>b</math> عددين يحققان <math>a &lt; b &lt; 0</math> ولتكن <math>(u_n)_{n \geq 0}</math> متتالية معرفة وفق:</p> $u_n = \frac{b^n - a^n}{b^n}$ <p>عندئذ نهاية المتتالية:</p>									13
غير موجودة	E	$+\infty$	D	1	C	0	B	$-\infty$	A
<p style="text-align: center;"><math>u_n = 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n ; \frac{a}{b} &gt; 1 &gt; 0</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty</math></p>									نوني الحل
إعداد : م. عبد الحميد السيد			الجواب : A			كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق			



<p>لتكن المتتالية <math>(u_n)_{n \geq 0}</math> المعرفة وفق: <math>u_n = \frac{n! + (-1)^n}{n!}</math></p> <p>عندئذ نهاية المتتالية <math>(u_n)_{n \geq 0}</math>:</p>								14	
غير موجودة	E	1	D	0	C	-1	B	$-\infty$	A
<p></p> <p><math>u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n!} \Rightarrow u_n - 1 = \frac{(-1)^n}{n!}</math></p> <p><math>\Rightarrow  u_n - 1  = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}</math></p> <p>بما أن <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0</math></p> <p>وبالتالي حسب مبرهنة المقارنة <math>\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1</math></p>								14	
إعداد: م. يوسف منصور			الجواب: D			كتابة وتنسيق: م. أمين الحايك			
<p>لتكن المتتالية <math>(u_n)_{n \geq 0}</math> المعرفة وفق:</p> <p><math>u_n = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2 + 1}</math></p> <p>عندئذ نهاية المتتالية <math>(u_n)_{n \geq 0}</math>:</p>								15	
$+\infty$	E	3	D	0	C	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{3}$	A
<p></p> <p><math>u_n = \frac{n(n+1)}{2n^2+2} = \frac{n^2+n}{2n^2+2}</math></p> <p><math>\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}</math></p>								15	
إعداد: م. زكي طحاوي			الجواب: B			كتابة وتنسيق: م. أمين الحايك			



لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة تدريجياً بالعلاقة:

$$\begin{cases} u_0 = 3, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n} \end{cases}$$

16

عندئذ تكون نهاية هذه المتتالية:

 $+\infty$ **E**

3

**D** $\frac{1}{3}$ **C**

0

**B**

غير موجودة

**A**

العلاقة  $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$  تكافئ  $u_{n+1} = u_{n+2} \cdot u_n$

إذاً المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  متتالية هندسية أساسها:

$$q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{3} < 1$$

وبالتالي:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$



ل  
ق  
ل

كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

الجواب : **B**

إعداد : م. عمرو معدل

المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة وفق :

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^n}$$

17

إذا علمت أن:  $n \leq 2^n$  عندئذ أصغر عنصر راجح على المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  من بين الأعداد الآتية هو:

 $\frac{4}{3}$ **E** $\frac{4}{5}$ **D** $\frac{2}{3}$ **C** $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{5}$ **A**

$$u_n \leq \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$u_n \leq \frac{2}{5} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$$

$$u_n \leq \frac{2}{3}$$



ل  
ق  
ل

كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

الجواب : **C**

إعداد : م. رياض الزامل



<p>لتكن المتتالية <math>(u_n)_{n \geq 0}</math> المعرفة تدريجياً وفق:</p> $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2 \quad ; \quad u_0 = \frac{1}{2}$ <p>إذا علمت أن: <math>u_n \in ]0,1[</math> ، عندئذ نهاية هذه المتتالية:</p>								18	
غير موجودة	<b>E</b>	$+\infty$	<b>D</b>	1	<b>C</b>	$\frac{1}{2}$	<b>B</b>	0	<b>A</b>
<p><math>u_n \in ]0,1[</math> و <math>u_{n+1} - u_n = -(u_n)^2 &lt; 0</math></p> <p>فالمتتالية متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة</p> <p>نهايتها هو <math>L</math> هو حل المعادلة <math>f(x) = x</math>:</p> $x - x^2 = x \Rightarrow x = 0$ <p>مع ملاحظة أن التابع <math>f</math> مستمر عند 0 وبالتالي <math>\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0</math></p>								19	
إعداد: م. رابعة سليمان			الجواب: <b>A</b>			كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق			
<p><math>(u_n)_{n \geq 1}</math> متتالية معرفة وفق: <math>u_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n + \sqrt{n}}</math> ، فإن نهاية هذه المتتالية:</p>								19	
غير موجودة	<b>E</b>	1	<b>D</b>	0	<b>C</b>	-1	<b>B</b>	$-\infty$	<b>A</b>
<p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1</math> زوجي</p> <p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n+1}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = -1</math> فردي</p> <p>بالتالي ليس للمتتالية نهاية</p>								19	
إعداد: م. خالد العمر			الجواب: <b>E</b>			كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق			



لتكن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$$

إذا علمت أن  $(u_n)_{n \geq 0}$  تحقق:  $u_n < u_{n+1} < 4$

عندئذ نهاية المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$ :

20

غير موجودة

E

 $\sqrt{3}$ 

D

2

C

3

B

4

A

لدينا  $u_n < u_{n+1}$  إذا المتتالية متزايدة تماماً  
ولدينا  $u_n < 4$  إذا المتتالية محدودة من الأعلى

إذا نهايتها حل المعادلة:  $f(x) = x$

$$\sqrt{2x + 3} = x \quad (x \geq 0 \text{ شرط الحل})$$

$$2x + 3 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 & \text{مرفوض} \\ x = 3 \end{cases}$$

مع ملاحظة أن التابع  $f$  مستمر عند 3 وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$



ب  
ج  
د

كتابة وتنسيق: م. أمين الحايك

الجواب: B

إعداد: م. محمد زين جعور

