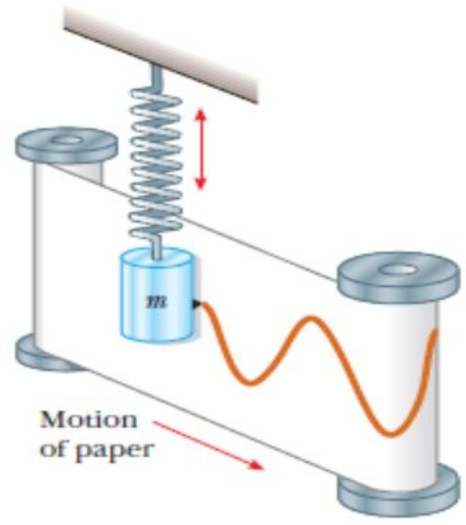
الدرس الأول: الحركة التوافقية البسيطة

(النواس المرن)



المقدمة:

س1. عرف الحركة الاهتزازية, وما هي أنواعها.

التعريف: هي حركة جسم يهتز إلى جانبي نقطة ثابتة تسمى مركز الاهتزاز.

أنواعها: **الحركة اهتزازية متخامدة** وذلك عندما تتناقص السعة بسبب وجود ضياع في الطاقة ويتوقف الجسم عن الحركة بعد عدة هزات.

الحركة توافقية بسيطة في حال كانت السعة ثابتة ولا يوجد ضياع في الطاقة, وفي هذه الحالة تكون محصلة القوى الخارجية هي قوة معيدة تحاول إعادة الجسم الى مركز الاهتزاز.

س2. عرف النواس المرن.

عبارة عن جسم صلب معلق بنابض مرن حلقاته متباعدة ثابت صلابته K ويهتز بحركة توافقية بسيطة حول مركز الاهتزاز $x = 0$.

قوة الارجاع:

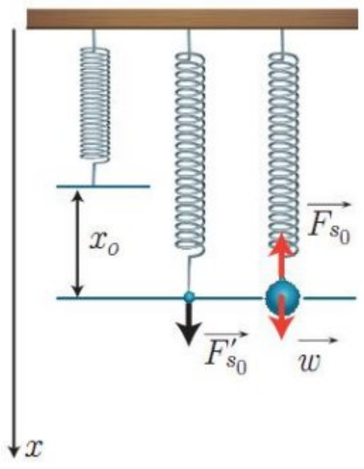
س3. نعلق كرة كتلتها m بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k , المطلوب:

1. حدد القوى المؤثرة في الكرة بعد توازنها, ما هي القوة المؤثرة في النابض في هذه الحالة.

2. انطلاقاً من شرط التوازن الانسحابي استنتج العلاقة التي تربط ثقل الكرة و قوة توتر النابض.

3. نشد الكرة نحو الأسفل مسافة مناسبة ضمن حدود مرونة النابض ونتركها دون سرعة ابتدائية, برهن أن محصلة القوى المؤثرة في مركز عطالة الكرة هي قوة إرجاع تتناسب طرداً مع المطال وتعاكسه بالإشارة.

1. القوى الخارجية المؤثرة في حالة السكون:



تؤثر بالجسم القوتان: قوة ثقله $\vec{w}$

$\overrightarrow{F_{S0}}$ قوة توتر النابض

تؤثر في النابض القوة $\overrightarrow{F_{S0}'}$ التي تسبب له الاستطالة x_0

حيث: $F_{S0}' = F_{S0} = k\, x_0$

2. نطبق شرط التوازن الانسحابي على الكرة:

$$\overrightarrow{\Sigma F} = \vec{0}$$

$$\vec{W} + \overrightarrow{F_{S0}} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$W - F_{S0} = 0$$

$$\rightarrow W = F_{S0}$$

حيث $W = m.g$ و $F_{S0} = k\, x_0$

نتيجة يمكن حساب الاستطالة السكونية من العلاقة:

$$x_0 = \frac{m\, g}{k}$$

3. في حالة الحركة:

القوى الخارجية المؤثرة في حالة الحركة:

تؤثر بالجسم القوتان: قوة ثقله $\vec{w}$ وقوة توتر النابض $\overrightarrow{F_S}$

تؤثر في النابض القوة F_S' التي تسبب له الاستطالة $(x + x_0)$

حيث: $F_S' = F_S = k\,(x + x_0)$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي على الجسم:

$$\overrightarrow{\Sigma F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \overrightarrow{F_S} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$W - F_S = ma$$

$$W - k(x + x_0) = ma$$

$$W - kx - k\, x_0 = ma$$

لكن لدينا من حالة السكون : $W = k\, x_0$

وبالتالي تصبح العلاقة: $-kx = ma$

سـوريانا التعليمية

أي ان محصلة القوى الخارجية $F = -kx$

F: قوة الارجاع (نيوتن N)

K: ثابت صلابة النابض ($N.m^{-1}$)

x: المطال (متر m)

ملاحظة: تدعى قوة الارجاع بهذا الاسم **لأنها** تعيد الجسم دوماً نحو مركز الاهتزاز.

قوانين	
حساب قوة الارجاع	$F = -kx$
حساب الاستطالة السكونية للنابض	$x_0 = \frac{m\,g}{k}$

نتائج قوة الارجاع $F = -kx$	
1	يتجه شعاع قوة الارجاع نحو مركز الاهتزاز ($x = 0$)
2	تتناسب قوة الارجاع طرداً مع المطال وتعاكسه بالإشارة.
3	تتعدم شدة قوة الارجاع عند مركز الاهتزاز ($x = 0$)
4	شدة قوة الارجاع أعظمية عند الوضعين الطرفيين $x = \pm X_{max}$ ويكون عندئذ $\|F\| = kX_{max}$

الدراسة التحريكية:

وجدنا أن $-kx = ma$

لدينا: $(x)''_t = a$ وبالتالي فإن:

$$-kx = m(x)''_t$$

$$(x)''_t = -\frac{k}{m}x \ldots\ldots (*)$$

ملاحظة: في الرياضيات ندعو المعادلة التي من الشكل

$$(x)''_t = -A.x$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وهي تقبل حلاً جيبياً, أي حلاً يحوي cos . حيث A عدد ثابت موجب.

س4. انطلاقاً من العلاقة $(x)''_t = -\frac{k}{m}x$ استنتج طبيعة حركة النواس المرن, ثم استنتج عبارة الدور الخاص للحركة مع ذكر دلالات الرموز.

$$(x)''_t = -\frac{k}{m}x \ldots\ldots (1)$$

هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل: $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

للتأكد نشتق مرتين بالنسبة بالزمن:

$$v = (x)'_t = -\omega_0 X_{max} sin\,(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a = (x)''_t = -{\omega_0}^2 X_{max} cos\,(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow (x)''_t = -\omega_\circ^2\, x \ldots\ldots (2)$$

بمقارنة (1) مع (2) نجد: $\omega_\circ^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$

وهذا ممكن لأن m ، k موجبان, **أي أن حركة النواس المرن هي حركة جيبية انسحابية.**

سـوريانا التعليمية

استنتاج الدور الخاص: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

لكن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_\circ}$ ومنه $\frac{2\pi}{T_\circ} = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

T_0 : الدور الخاص (s)

m: كتلة الجسم المهتز (Kg)

k: ثابت صلابة النابض ($N.m^{-1}$)

تذكر: الدور هو الزمن اللازم لقطع هزة كاملة.

قوانين		
حساب الدور الخاص		
$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$	$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$T_0 = \frac{\text{الزمن}}{\text{عدد الهزات}}$
حساب النبض الخاص		
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	
المعادلة التفاضلية لحركة النواس المرن		
$(x)''_t = -\frac{k}{m}x$	$(x)''_t = -\omega_0^2\, x$	
التابع الزمني للمطال		
$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$		
التابع الزمني للسرعة		
$v = -\omega_0 X_{max} sin(\omega_0 t + \varphi)$		
التابع الزمني للتسارع		
$a = -{\omega_0}^2 X_{max} cos(\omega_0 t + \varphi)$		
$a = -\omega_0^2\, x$		

نتائج الدور الخاص $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$	
1	لا يتعلق الدور الخاص بسعة الاهتزاز X_{max}
2	يتناسب الدور الخاص طرداً مع الجذر التربيعي لكتلة الجسم
3	يتناسب الدور الخاص عكساً مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض k

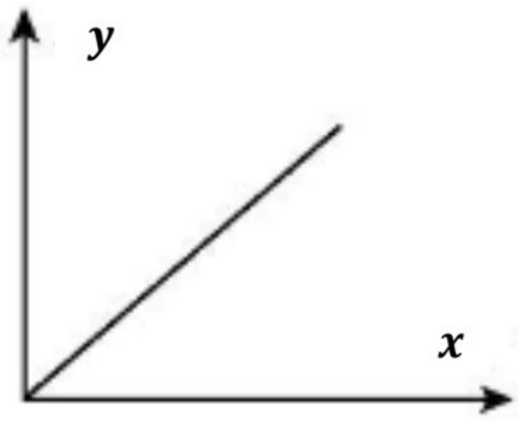
ملاحظة: يعطى الدور الخاص في النواس المرن أيضاً بالعلاقة:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}$$

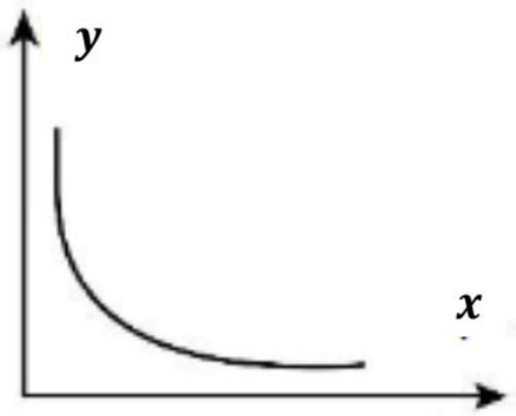
مع الانتباه الى أنه عند تغير تسارع الجاذبية g فإن الاستطالة السكونية x_0 تتغير بنفس المقدار فتبقى النسبة $\frac{x_0}{g}$ ثابتة, أي أن دور النواس المرن لا يتعلق بالجاذبية الأرضية g .

تذكير (من الرياضيات):

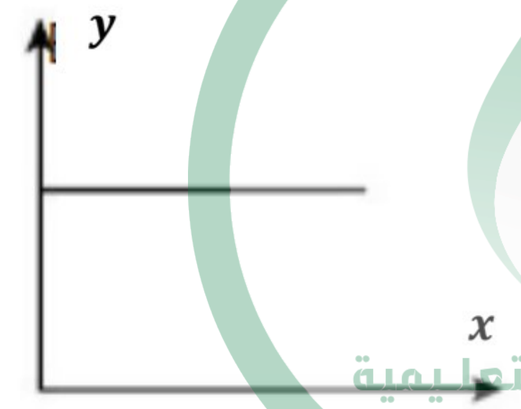
عندما يتناسب y طرداً مع x فإن الخط البياني الناتج من الشكل:



عندما يتناسب y عكساً مع x فإن الخط البياني الناتج من الشكل:



عندما y لا يتعلق بـ x فإن الخط البياني الناتج من الشكل:



.....

حركة النواس المرن: حركة جيبية انسحابية (توافقية بسيطة)

التابع الزمني للمطال في الحركة التوافقية البسيطة

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

x: المطال (المتر m)

X_{max}: سعة الاهتزاز (المتر m)

ω_0 : النبض الخاص ($rad.s^{-1}$)

φ : الطور الابتدائي (rad)

t : الزمن (الثانية s)

سوريانا التعليمية

إيجاد توابع النواس المرن:

عندما يطلب إيجاد التابع الزمني للمطال انطلاقاً من شكله العام نتبع الخطوات الثلاث الآتية:

1. نكتب الشكل العام للتابع $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$
2. نوجد الثوابت X_{max} , ω_0 , φ
3. نعوض الثوابت في التابع

ويكون إيجاد الثوابت X_{max} , ω_0 , φ كالآتي:

إيجاد الثوابت

X_{max}	ω_0	φ
توجد من شروط البدء أو تعطى في نص المسالة	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	توجد من شروط البدء التي هي قيمة x وجهة الحركة عندما $t = 0$
$X_{max} = \frac{L}{2}$ حيث L هو طول القطعة المستقيمة التي يرسمها الجسم أثناء الحركة	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	

تتحدد قيمة الطور الابتدائي φ (بواحدة rad) من خلال الجدول الآتي:

في لحظة البدء $t = 0$ عندما تكون قيمة x :			
$x = +X_{max}$	$x = -X_{max}$	$x = 0$	$x = \frac{X_{max}}{2}$
$\varphi = 0$	$\varphi = \pi$	$\varphi = \frac{\mp\pi}{2}$	$\varphi = \frac{\mp\pi}{3}$

ولتحديد إشارة φ : إشارة φ عكس جهة الحركة عندما $t = 0$

أسئلة الأتمتة (1)

اقرأ النص الآتي ثم أجب عن الأسئلة (2,1) نعلق جسماً كتلته m بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته $k = 100\ N.m^{-1}$ فيستطيل بمقدار $10\ cm$ ثم يتوازن فإن:

1. قيمة كتلة الجسم تساوي:

$0.2\ kg$	B	$0.01\ kg$	A
$1\ kg$	D	$0.1\ kg$	C

2. شدة قوة توتر النابض تساوي:

$10\ N$	B	$1\ N$	A
$100\ N$	D	$0.1\ N$	C

3. نعلق كرة كتلتها m بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k ليستطيل النابض ثم يتوازن فإن محصلة القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

سالبة	B	موجبة	A
معدومة	D	متغيرة	C

4. نعلق جسماً كتلته $m = 100g$ بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k فيستطيل النابض بمقدار $2\ cm$ فإن قيمة ثابت صلابة النابض تساوي:

$10\ N.m^{-1}$	B	$50\ N.m^{-1}$	A
$25\ N.m^{-1}$	D	$20\ N.m^{-1}$	C

5. يتحرك جسم كتلته m معلق بنابض مرن ثابت صلابته k حركة توافقية بسيطة فيكون التسارع a عند مطال x ,نستبدل الجسم بجسم آخر كتلته $m' = 4m$ والنابض بنابض آخر ثابت صلابته $k' = 2k$ فيكون التسارع عند المطال x مساوياً:

$a' = \frac{a}{2}$	B	$a' = 2a$	A
$a' = a$	D	$a' = \sqrt{2}a$	C

6. تدعى محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم الصلب في الحركة التوافقية البسيطة بقوة إرجاع لأنها:

تسبب توقف الجسم عند المركز	B	تعيد الجسم دوماً نحو مركز الاهتزاز	A
تتجه دوماً نحو X_{max}	D	تتجه دوماً نحو $-X_{max}$	C

سـوريانا التعليمية

CamScanner

7. يزداد النبض الخاصّ للنواس المرن غير المتخامد بـ:

A	زيادة الكتلة	B	نقصان ثابت صلابة النابض
C	نقصان الكتلة	D	زيادة سعة الحركة

8. عندما ينتقل الجسم في الحركة التوافقية البسيطة من المطال الأعظم الموجب فإنه مع الاقتراب من مركز الاهتزاز:

A	شدة قوة الارجاع تزداد وجهة شعاع هذه القوة نحو المركز	B	شدة قوة الارجاع تتناقص وجهة شعاع هذه القوة نحو المركز
C	شدة قوة الارجاع تتناقص وجهة شعاع هذه القوة نحو المطال الأعظم الموجب	D	شدة قوة الارجاع تزداد وجهة شعاع هذه القوة نحو المطال الأعظم الموجب

اقرأ النص الآتي ثم أجب عن الأسئلة (11,10,9)

يهتز جسم كتلته $m = 100\ g$ بمرونة نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 16\ N.m^{-1}$ بسعة اهتزاز $X_{max} = 10cm$ فإن:

9. شدة قوة الارجاع الأعظمية تساوي:

A	$16\ N$	B	$0.16\ N$
C	$160\ N$	D	$1.6\ N$

10. عند المرور بمركز الاهتزاز فإنه:

A	تكون شدة قوة توتر النابض أعظمية	B	تكون شدة قوة الارجاع أعظمية
C	تنعدم شدة قوة توتر النابض	D	تنعدم شدة قوة الارجاع

11. نغير الكتلة المعلقة بالنابض لتصبح $m' = 200\ g$ فإن ثابت صلابة النابض:

A	$k = 16\ N.m^{-1}$	B	$k = 24\ N.m^{-1}$
C	$k = 8\ N.m^{-1}$	D	$k = 12\ N.m^{-1}$

12. نواس مرن دوره الخاص T_0 عند مستوى سطح البحر, نرفع النواس لقمة جبل فإن النواس:

A	يقدم	B	يؤخر
C	لا يتغير دوره	D	يتوقف عن الحركة

اقرأ النص الآتي ثم أجب عن الأسئلة (14,13)

تتألف هزازة جيبية انسحابية من نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 10\ N.m^{-1}$ مثبت من أحد طرفيه، ويحمل في طرفه الآخر جسماً كتلته m ، ويعطى التابع الزمني لمطال حركتها بالعلاقة: $x = 0.1\ cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

13. قيمة كتلة الجسم المعلق بالنابض تساوي:

A	$m = 1\ kg$	B	$m = 10\ kg$
C	$m = 0.1\ kg$	D	$m = 100\ kg$

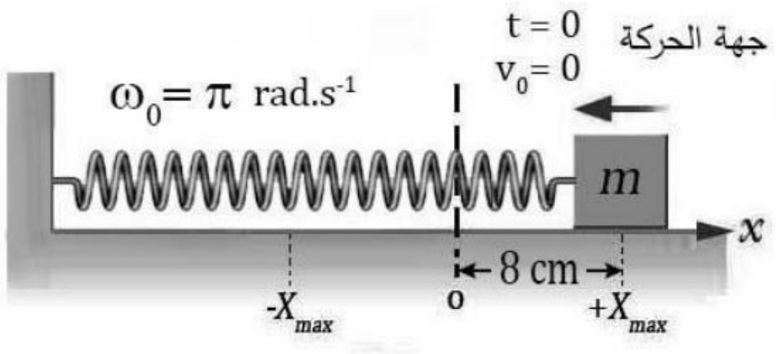
14. عند اللحظة $t = 0\ s$ فإن:

A	$x = -0.1\ m$	B	$x = 0.1\ m$
C	$x = 0\ m$ والحركة بالاتجاه الموجب	D	$x = 0\ m$ والحركة بالاتجاه السالب

15. يتحرك جسم بحركة توافقية بسيطة بمرونة نابض بحيث يبدأ حركته دون سرعة ابتدائية من مطاله الأعظم السالب بدور خاص $T_0 = 1\ s$ وسعة اهتزاز $X_{max} = 10\ cm$ فإن التابع الزمني للمطال يعطى بالعلاقة:

A	$x = 0.1\ cos(2\pi t + \pi)$	B	$x = 0.1\ cos(2\pi t)$
C	$x = 0.1\ cos(\frac{\pi}{2}t)$	D	$x = 0.2\ cos(2\pi t)$

16. تابع المطال الذي يصف حركة الهزازة الجيبية في الشكل المجاور هو :



A	$x = 0.08\cos(\pi t + \pi)$	B	$x = 0.08\cos(\pi t)$
C	$x = 8\cos(\pi t - \pi)$	D	$x = 0.8\cos(\pi t - \pi)$

17. نشكل هزازةً توافقيةً بسيطة من جسم كتلته $m = 1\ kg$ معلق بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة فينجز 10 هزات في $10\ s$ ، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 0.1m$ ، وبفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الجسم بنقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ وهو يتحرك بالاتجاه السالب فإن التابع الزمني لمطال الحركة:

$x = 0.1\ cos(\ 2\pi t)$	A
$x = 0.1\ cos(\ \pi t + \frac{\pi}{3})$	B
$x = 0.1\ cos(\ 2\pi t + \frac{\pi}{3})$	C
$x = 0.1\ cos(\ \pi t)$	D

18. انطلاقاً من تابع المطال $x = X_{max}\cos\omega_0 t$ في الحركة التوافقية البسيطة فإن عبارة تابع التسارع تعطى بالعلاقة:

$a = -\omega_0{}^2\ X_{max}\cos\frac{2\pi}{T_\circ}t$	A
$a = +\omega_0{}^2\ X_{max}\cos\frac{2\pi}{T_\circ}t$	C
$a = -\omega_0\ X_{max}\cos\frac{2\pi}{T_\circ}t$	B
$a = -\omega_0{}^2\ X_{max}\cos 2\pi t$	D

اقرأ النص الآتي ثم أجب عن الأسئلة (20,19)

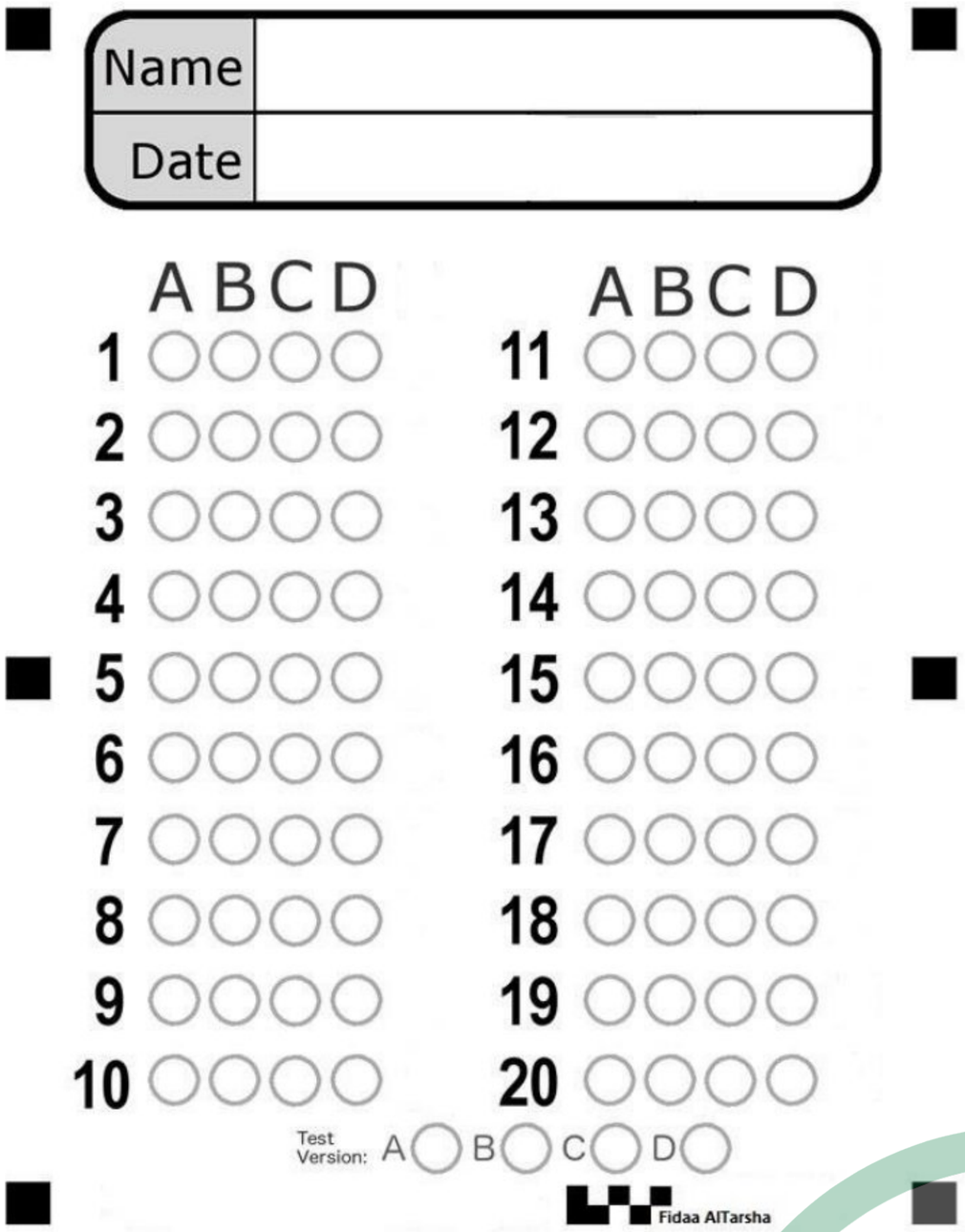
نواس مرن مؤلف من جسم كتلته $m = 1\ kg$ معلق بطرف نابض مرن ثابت صلابته k تعطى المعادلة التفاضلية لحركة الجسم بالعلاقة $(x)''_t = -40\ x$ فإنّ:

19. دور حركة هذا النواس يساوي:

$T_0 = 2\ s$	B	$T_0 = 2\pi\ s$	A
$T_0 = 1\ s$	D	$T_0 = \pi\ s$	C

20. قيمة ثابت صلابة النابض تساوي:

$4\ N.m^{-1}$	B	$16\ N.m^{-1}$	A
$2\pi\ N.m^{-1}$	D	$40\ N.m^{-1}$	C



مسودة إجابات أسئلة الأتمتة

سوريانا التعليمية

مفاتيح حل أسئلة الأتمتة (1)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
D	D	B	C	A	B	C	C	B	D
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
C	D	A	C	B	A	D	A	C	A

سـوريانا التعليمية

توابع الحركة التوافقية البسيطة:

تابع المطال:

التابع الزمني للمطال في الحركة التوافقية البسيطة

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

عندما $x = +X_{max}$, $t = 0$ فإن: $\varphi = 0$

ومنه يصبح التابع بشكله المختزل: $\mathbf{x = X_{max}\cos(\omega_0 t)}$

تابع السرعة:

$$x = X_{max}\cos\omega_0 t$$

$$\boldsymbol{v = (x)'_t = -\omega_0 X_{max}\sin\omega_0 t}$$

تغيرات السرعة	
قيمة x	قيمة v
$x = \pm X_{max}$	السرعة معدومة $v = 0$
$x = 0$	تكون السرعة أعظمية $v = \pm v_{max}$ حيث : $v_{max} = \omega_0 X_{max}$
عند الاقتراب من مركز الاهتزاز	تزداد القيمة المطلقة للسرعة
عند الابتعاد عن مركز الاهتزاز	تنقص القيمة المطلقة للسرعة

نتيجة: عند الاقتراب من مركز الاهتزاز تزداد السرعة وبالتالي تكون الحركة مستقيمة متسارعة.

عند الابتعاد عن مركز الاهتزاز (الاقتراب من الوضعين الطرفيين) تتناقص السرعة وبالتالي تكون الحركة مستقيمة متباطئة.

ملاحظة:

عند الانتقال من $+X_{max}$ الى $-X_{max}$ فإن:

1. الزمن اللازم $t = \frac{T_0}{2}$

2. المسافة المقطوعة $L = 2.X_{max}$

للمسائل
لحساب السرعة عندما نعطى المطال (x) : $v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$
لحساب السرعة عند المرور بالتوازن أو عندما نعطى الزمن: $v = -\omega_0 X_{max} sin\,(\omega_0 t + \varphi)$
لحساب السرعة العظمى طويلة: $/v_{max}/ = \omega_0 X_{max}$
تحديد لحظات المرور بالتوازن
نستخدم المعادلة $x = 0$ $\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = 0$ $\omega_0 t + \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ حيث يأخذ k القيم : 0, 1 , 2 , ...

تابع التسارع:

$$x = X_{max}\cos\omega_0 t$$

$$v = (x)'_t = -\omega_0 X_{max}\sin\omega_0 t$$

$$a = (x)''_t = -\omega_0{}^2 X_{max}\cos\omega_0 t$$

وهو تابع التسارع بدلالة الزمن.

أما بدلالة المطال: $a = -\omega_0^2.x$

تغيرات التسارع	
قيمة x	قيمة a
$x = \pm X_{max}$	يكون التسارع أعظمي $a = \pm a_{max}$ حيث $a_{max} = \omega_0^2.X_{max}$
$x = 0$	التسارع معدوم $a = 0$
عند الاقتراب من مركز الاهتزاز	تنقص القيمة المطلقة للتسارع
عند الابتعاد عن مركز الاهتزاز	تزداد القيمة المطلقة للتسارع

ملاحظة: التسارعُ غيرُ ثابتٍ تتغيّرُ قيمتُه بتغيّر قيمة المطال

سوريانا التعليمية

CamScanner

قوانين
لحساب التسارع عند مطال x $a = -\omega_0^2 . x$
لحساب التسارع عند لحظة t $a = -\omega_0^2 . X_{max} cos\,(\omega_0 t + \varphi)$
العلاقة التي تربط التسارع الاعظمي مع السرعة الأعظمية $a_{max} = \omega_0 \cdot v_{max}$
العلاقة التي تربط التسارع الأعظمي بقوة الإرجاع الأعظمية $F_{max} = m \cdot a_{max}$

الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة:

إن الطاقة الميكانيكية للنواس المرن هي مجموع الطاقتين الكامنة المرونية والحركية .

الطاقة الكامنة المرونية: $E_p = \frac{1}{2}Kx^2$

الطاقة الحركية: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

س5. يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة بمرونة نابض مرن ثابت صلابته k المطلوب:

استنتج العلاقة المعبرة عن الطاقة الميكانيكية مبيناً ان قيمتها ثابتة.

استنتاج الطاقة الميكانيكية:

$$E = E_p + E_K$$

الطاقة الكامنة المرونية: $E_p = \frac{1}{2}Kx^2$

لدينا : $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$E_p = \frac{1}{2}K\ X^2_{max}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

الطاقة الحركية $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

لدينا: $v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$ نعوض في E_k :

$$E_k = \frac{1}{2}m\,\omega_0{}^2\,X^2_{max}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

لكن $\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$ نعوض في عبارة E_k

$$E_k = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}X^2_{max}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2}k\,X^2_{max}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

بالجمع نجد :

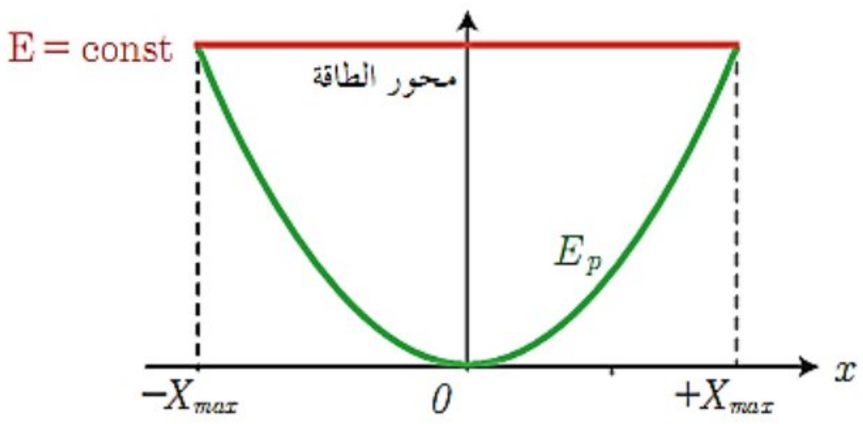
$$E = \frac{1}{2}k\,X^2_{max}\{\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\}$$

و منه: $\boldsymbol{E = \frac{1}{2}k\,X^2_{max}}$

بما أن k و X_{max} ثوابت فإن الطاقة الكلية ثابتة

للمسائل	
الطاقة الكلية (الميكانيكية)	$E = \frac{1}{2}KX^2_{max}$
الطاقة الكامنة	$E_p = \frac{1}{2}Kx^2$
الطاقة الحركية	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$
	$E_k = E - E_p$ $E_k = \frac{1}{2}K(X^2_{max} - x^2)$

الخط البياني لتغيرات الطاقة الكامنة المرونية في الحركة التوافقية البسيطة:



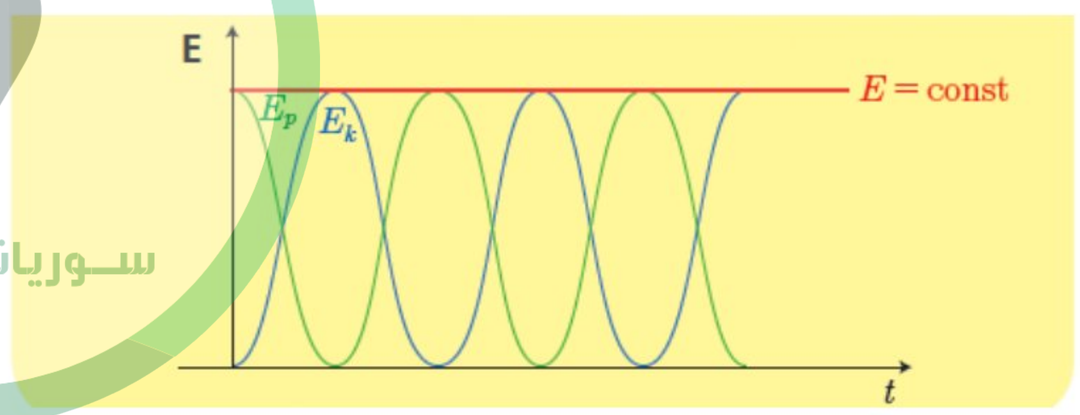
سـوريانا التعليمية

من الخط البياني نلاحظ:

تغيرات الطاقتين الكامنة والحركية	
قيمة x	قيمة E
$x = \pm X_{max}$	$E = E_p \quad E_k = 0$
$x = 0$	$E = E_k \quad E_p = 0$
عند الاقتراب من مركز الاهتزاز	تنقص E_p وبالتالي تزداد E_k
عند الابتعاد عن مركز الاهتزاز	تزداد E_p وبالتالي تنقص E_k

ملاحظة: دائماً تكون الطاقة الكلية (الميكانيكية) ثابتة, حيث أن أي زيادة في احدى الطاقتين الكامنة او الحركية يقابلها نقصان في الأخرى بحيث يبقى مجموعهما ثابتاً.

الخط البياني لتغيرات الطاقة بدلالة الزمن, عندما ينطلق الجسم من مطاله الأعظم الموجب ($t = 0 \ , \ x = +X_{max}$):



بالاعتماد على الخطوط البيانية لتغيرات الطاقة في الشكلين السابقين نحصل على الجدول الآتي:

t	$t = 0$	$t = \frac{T_0}{4}$	$t = \frac{T_0}{2}$	$t = \frac{3T_0}{4}$	$t = T_0$
x	$+X_{max}$	$x = 0$	$-X_{max}$	$x = 0$	$+X_{max}$
E	$E = E_p$	$E = E_k$	$E = E_p$	$E = E_k$	$E = E_p$

أسئلة الأتمتة (2)

هزازة توافقية بسيطة التابع الزمني لمطالها $\bar{x} = 0.1\cos(\pi t) \quad m$

1. لحظة المرور الأول بالتوازن:

$t = \frac{3}{2}\ s$	B	$t = \frac{1}{4}\ s$	A
$t = \frac{1}{2}\ s$	D	$t = 1\ s$	C

2. لحظة المرور الأول بالمطال الأعظم السالب:

$t = 4\ s$	B	$t = \frac{1}{2}\ s$	A
$t = 2\ s$	D	$t = 1\ s$	C

3. هزازة توافقية بسيطة التابع الزمني لمطالها

$$\bar{x} = 0.08\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \quad m$$

فإن لحظة المرور الأول بالتوازن:

$t = \frac{1}{12}\ s$	B	$t = \frac{7}{12}\ s$	A
$t = \frac{1}{6}\ s$	D	$t = \frac{1}{4}\ s$	C

4. عند اقتراب الجسم من موضع التوازن:

الحركة مستقيمة منتظمة	B	الحركة مستقيمة متسارعة	A
الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام	D	الحركة مستقيمة متباطئة	C

5. هزازة توافقية بسيطة دورها الخاص $T_0 = 4\ s$ وسعة الحركة $X_{max} = 0.1\ m$ وباعتبار $\pi^2 = 10$ فإن قيمة التسارع الأعظمي a_{max} لهذه الهزازة يساوي:

$a_{max} = \frac{\pi}{20}\ m.s^{-2}$	B	$a_{max} = 0.25\ m.s^{-2}$	A
$a_{max} = 0.5\ m.s^{-2}$	D	$a_{max} = 1\ m.s^{-2}$	C

6. عند الاقتراب من مركز الاهتزاز في الحركة التوافقية البسيطة:

تزداد السرعة وينقص التسارع	B	تنقص السرعة ويزداد التسارع	A
تنقص السرعة وينقص التسارع	D	تزداد السرعة ويزداد التسارع	C

سـوريانا التعليمية

CamScanner

7. يتألف نواس مرن من جسم صلب كتلته m معلق بنابض مرن مهمل الكتلة ثابت صلابته k النبض الخاص لحركته ω_0 نستبدل الجسم بجسم آخر كتلته $m' = 2m$ وبالنابض نابضاً آخر ثابت صلابته $k' = \frac{1}{2}k$ فيصبح النبض الخاص الجديد:

$2\ \omega_0$	B	$4\ \omega_0$	A
$\frac{\omega_0}{2}$	D	$\frac{\omega_0}{4}$	C

8. التابع الزمني للطاقة الحركية في الحركة التوافقية البسيطة يعطى بالعلاقة:

$E_k = \frac{1}{2}\ KX_{max}^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$	A
$E_k = \frac{1}{2}\ Kx^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)$	B
$\mathrm{E_k} = \frac{1}{2}\mathrm{k}\ X^2{}_{max} \sin^2\ (\omega_0 t + \varphi)$	C
$E_k = \frac{1}{2}\ Km^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$	D

9. نواس مرن طاقته الكلية $E = 0.9\ J$ فإن طاقته الحركية عند المطال $\frac{X_{max}}{3}$ تساوي:

$0.8\ J$	B	$0.1\ J$	A
$0.3\ J$	D	$0.9\ J$	C

10. تتساوى الطاقتان الحركية والكامنة المرونية في الحركة التوافقية البسيطة عند المواضع:

$x = \pm \mathrm{X_{max}}$	B	$x = \pm \frac{\mathrm{X_{max}}}{2}$	A
$x = \pm \frac{\mathrm{X_{max}}}{\sqrt{2}}$	D	$x = \pm \frac{\mathrm{X_{max}}}{4}$	C

11. نواس مرن دوره الخاص $T_\circ$ نجعل سعة الاهتزاز $X'_{max} = 2X_{max}$ فإن الدور الجديد:

$\frac{T_\circ}{2}$	B	$2T_\circ$	A
$T_\circ$	D	$4T_\circ$	C

12. يتحرك جسم حركة جيبية انسحابية دورها الخاص $T_0 = 2\ s$ فتكون المعادلة التفاضلية التي تصف حركة هذا الجسم:

$(x)''_t = -10\ x^2$	B	$(x)''_t = -4\ x$	A
$(x)''_t = -\pi\ x$	D	$(x)''_t = -10\ x$	C

13. هزازة توافقية بسيطة دورها الخاص $T_0 = 2\ s$ تتحرك على قطعة مستقيمة طولها $16\ cm$ بحيث تكون في مركز الاهتزاز في اللحظة $t = 0$ وهي تتحرك بالاتجاه الموجب فيكون التابع الزمني لمطالها:

$x = 0.08\cos(\pi t - \frac{\pi}{2})$	B	$x = 0.16\cos \pi t$	A
$x = 0.08\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$	D	$x = 8\cos(\pi t)$	C

14. يتحرك جسم كتلته $m = 1\ kg$ معلق بنابض مرن شاقولي ثابت صلابته $k = 10\ N.m^{-1}$ بحركة جيبية انسحابية توافقية بسيطة, بحيث ينطلق من مطاله الأعظم الموجب في لحظة البدء فإنه بعد مضي $3\ s$ يكون في الموضع:

$x = 0$	B	$x = \frac{-X_{max}}{2}$	A
$x = -X_{max}$	D	$x = +X_{max}$	C

15. تتساوى الطاقتان الحركية والكامنة المرونية في الحركة التوافقية البسيطة عندما تكون السرعة v مساوية:

$v = \pm\omega_0 \mathrm{X_{max}}$	B	$v = \pm \frac{\omega_0 . \mathrm{X_{max}}}{2}$	A
$v = \pm \frac{\omega_0 . \mathrm{X_{max}}}{\sqrt{2}}$	D	$v = \pm \frac{\omega_0 . \mathrm{X_{max}}}{4}$	C

16. تنعدم محصلة القوى الخارجية المؤثرة في جسم يتحرك حركة جيبية انسحابيه في اللحظة التي تكون فيها قيمة:

E_p عظمى	A	التسارع أعظمي	B
السرعة عظمى	C	المطال أعظمي	D

17. نواس مرن دوره الخاص $2\ s$ وسعة اهتزازه $10\ cm$ فتكون سرعته عند المرور بالمطال $8\ cm$ وهو يتحرك بالاتجاه الموجب:

$6 \times 10^{-2}\ m.s^{-1}$	B	$12\pi \times 10^{-2}\ m.s^{-1}$	A
$12 \times 10^{-2}\ m.s^{-1}$	D	$6\pi \times 10^{-2}\ m.s^{-1}$	C

18. نشكل هزازةً توافقيةً بسيطة من جسم كتلته $m = 1\ kg$ معلق بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة فينجز 10 هزات في $10\ s$ ، بسعة حركة $8\ cm$ فتكون الطاقة الميكانيكية لهذه الهزازة:

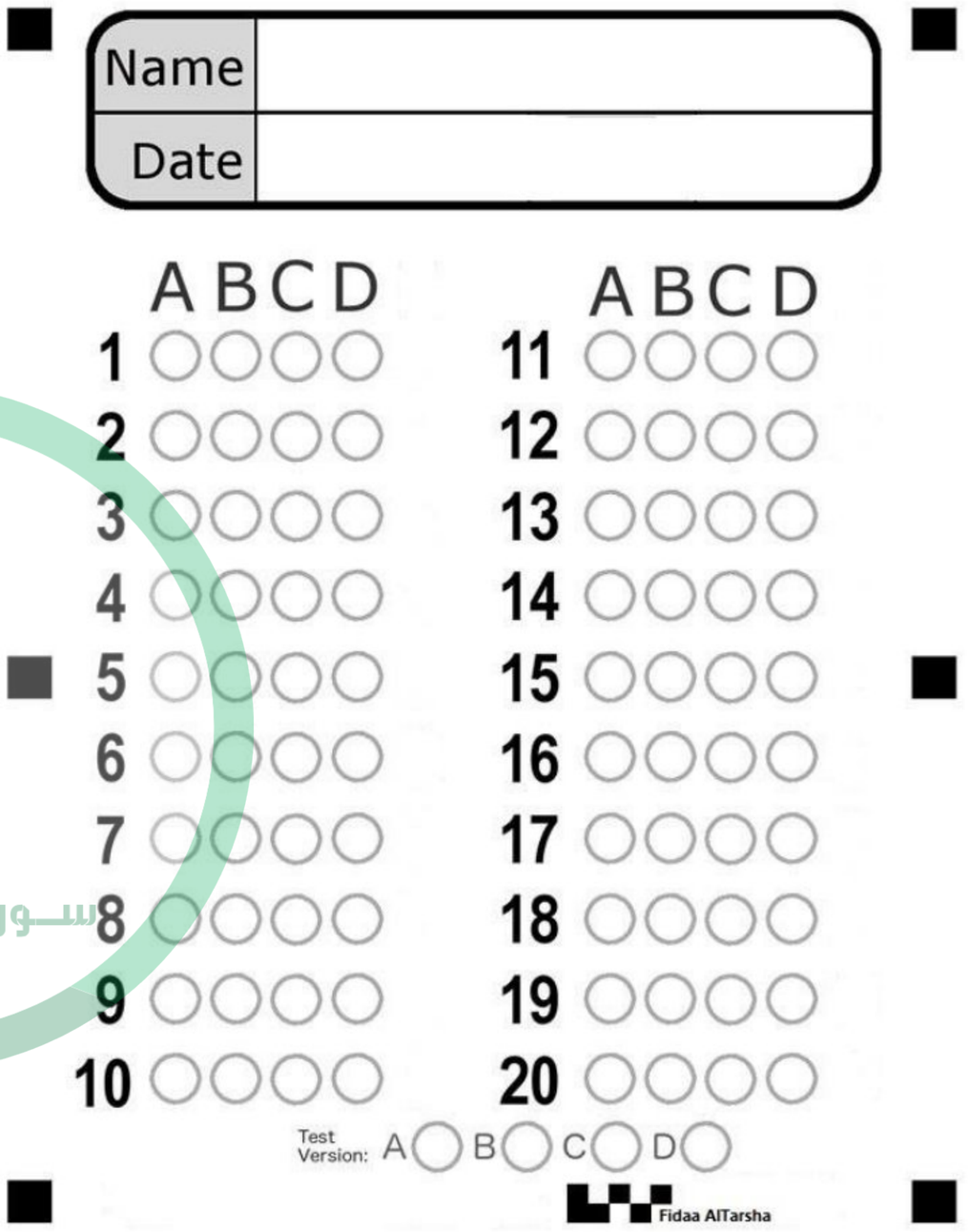
$32 \times 10^{-3}\ J$	B	$16 \times 10^{-3}\ J$	A
$128 \times 10^{-3}\ J$	D	$64 \times 10^{-3}\ J$	C

19. نواس مرن دوره الخاص $\boldsymbol{T_0}$ مؤلف من كتلة m معلقة بنابض مرن شاقولي, نغير الكتلة المعلقة بالنابض فيصبح الدور الخاص $T'_0 = \sqrt{2}\ T_0$ فتكون الكتلة:

$m' = 4m$	C	$m' = 2m$	A
$m' = \frac{m}{2}$	D	$m' = \sqrt{2}\, m$	B

20. هزازة توافقية بسيطة طاقتها الكلية E سعة اهتزازها X_{max} فإن القيمة العظمى لشدة محصلة القوى الخارجية المؤثرة تعطى بالعلاقة:

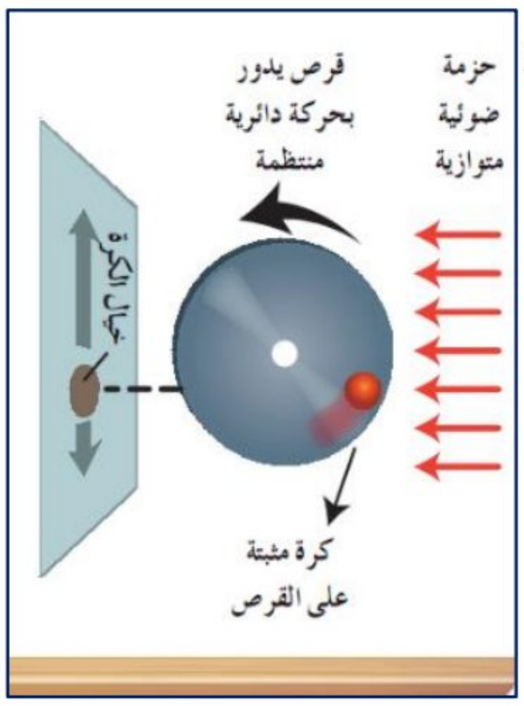
$F_{max} = \frac{2\, {X_{max}}^2}{E}$	B	$F_{max} = \frac{{X_{max}}^2}{2\, E}$	A
$F_{max} = \frac{2\, E}{X_{max}}$	D	$F_{max} = \frac{2\, X_{max}}{E}$	C



مسودة إجابات أسئلة الأتمتة

سوريانا التعليمية

علاقة الحركة الدائرية المنتظمة بالحركة التوافقية البسيطة:



سؤال نقوم بإجراء التجربة الموضحة في الشكل المجاور, حيث يدور القرص بحركة دائرية منتظمة .

و المطلوب:

1. ما نوع حركة الكرة.
حركة دائرية منتظمة

2. ما نوع حركة خيال الكرة على المستو الشاقولي.
حركة توافقية بسيطة

3. اكتب عبارة التابع الزمني الذي يصف حركة هذا المسقط

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

ملاحظة: لدينا ما ندعوه **انشاء فرينل** الذي سيتم شرحه واستخدامه في **بحث التيار المتناوب.**

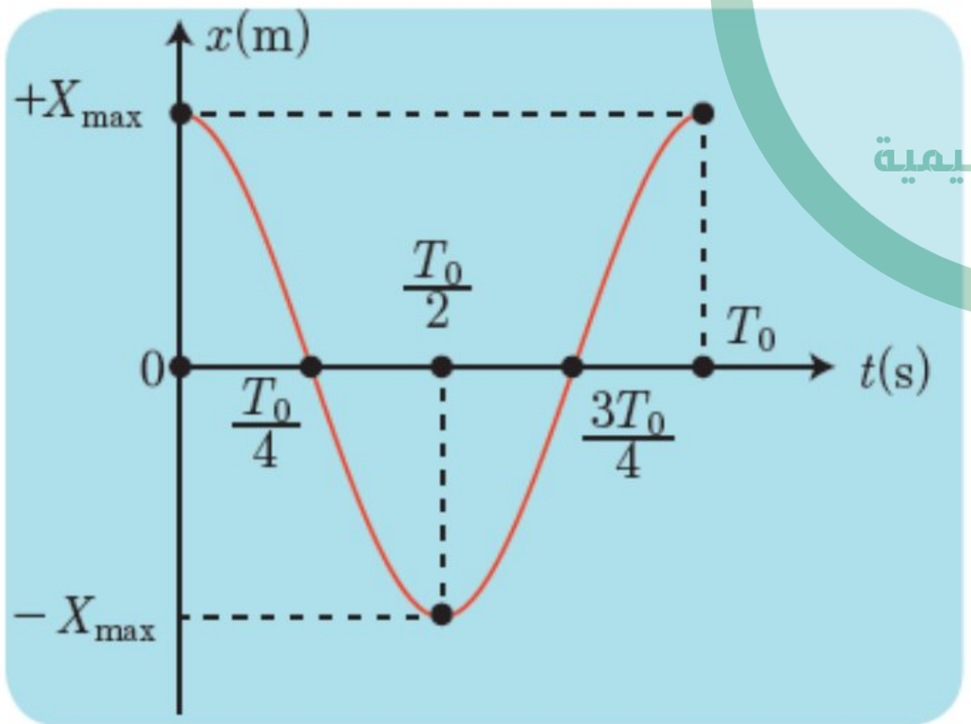
.....

الخطوط البيانية (سؤال ثابت في الامتحان):

تابع المطال:

$$\mathbf{x = X_{max}\cos(\omega_0 t)}$$

- تغيرات المطال خلال دور كامل:



س: بالاعتماد على الخط البياني لتغيرات تابع المطال فإن:

t	$t = 0$	$t = \frac{T_0}{4}$	$t = \frac{T_0}{2}$	$t = \frac{3T_0}{4}$	$t = T_0$
x	$+\mathbf{X_{max}}$	$x = 0$	$-\mathbf{X_{max}}$	$x = 0$	$+\mathbf{X_{max}}$

مفاتيح حل أسئلة الأتمتة (2)

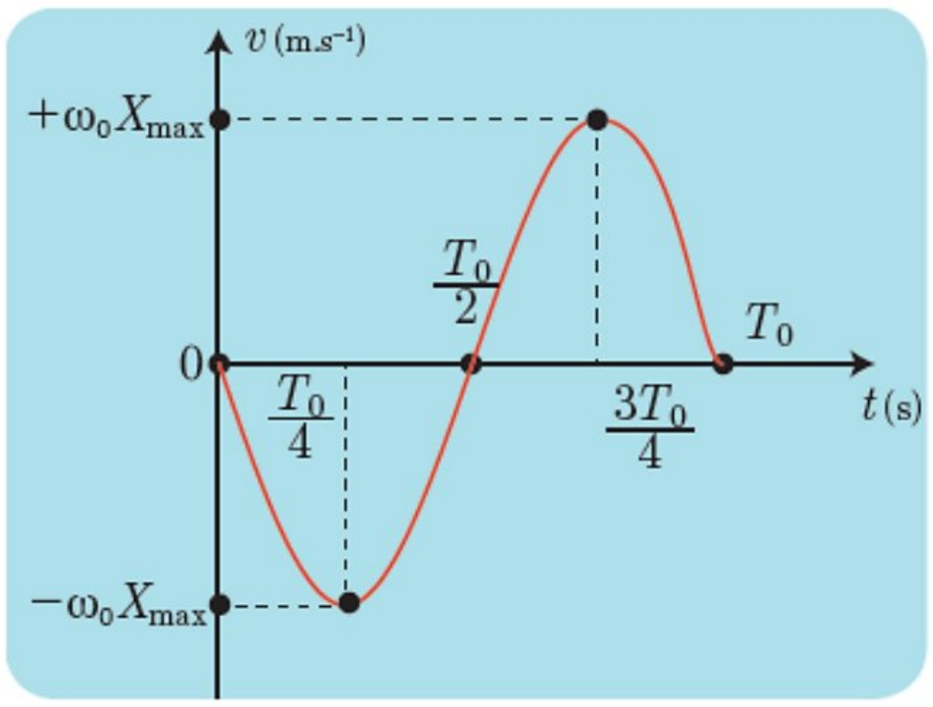
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
D	B	C	D	B	A	A	B	C	D
20	**19**	**18**	**17**	**16**	**15**	**14**	**13**	**12**	**11**
D	A	D	C	C	D	D	B	C	D

سـوريانا التعليمية

تابع السرعة:

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin \omega_0 t$$

- تغيرات تابع السرعة خلال دور كامل:



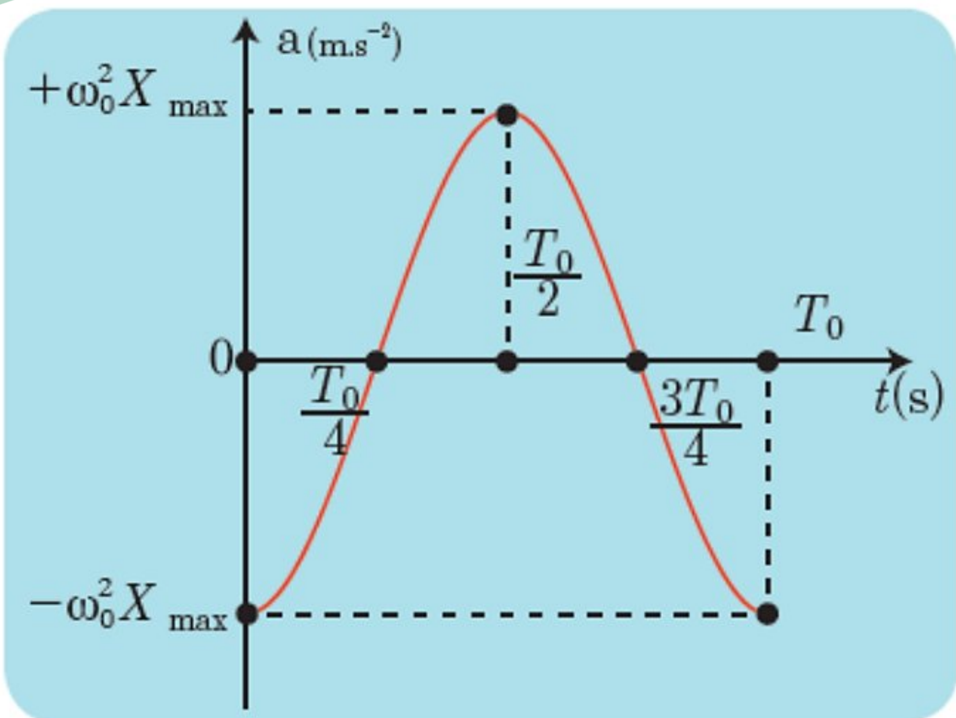
بالاعتماد على الخط البياني لتغيرات تابع السرعة املأ الجدول الآتي:

t	$t=0$	$t=\frac{T_0}{4}$	$t=\frac{T_0}{2}$	$t=\frac{3T_0}{4}$	$t=T_0$
v	$v=0$	$-\omega_0 X_m$	$v=0$	$+\omega_0 X_m$	$v=0$

تابع التسارع:

$$a = -\omega_0{}^2 X_{max} \cos \omega_0 t$$

- تغيرات تابع التسارع خلال دور كامل:



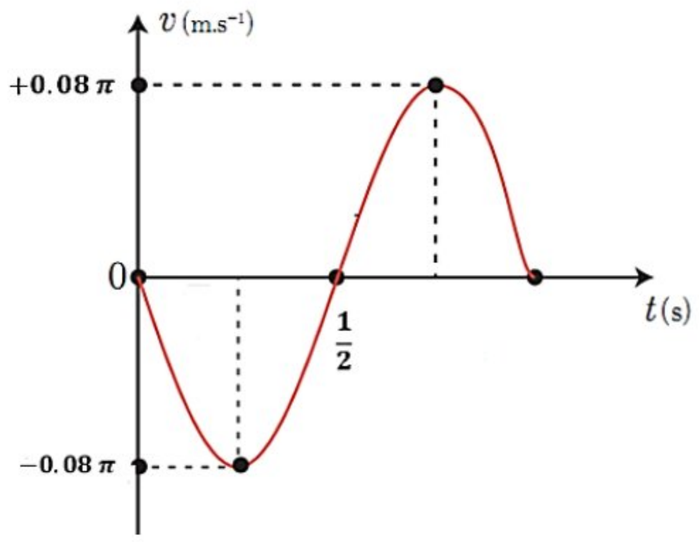
بالاعتماد على الخط البياني لتغيرات تابع التسارع املأ الجدول الآتي:

t	$t=0$	$t=\frac{T_0}{4}$	$t=\frac{T_0}{2}$	$t=\frac{3T_0}{4}$	$t=T_0$
a	$-\omega_0{}^2 X_m$	$a=0$	$+\omega_0{}^2 X_{ma}$	$a=0$	$-\omega_0{}^2 X_{ma}$

أسئلة الأتمتة (3)

اقرأ النص الآتي ثم أجب عن الأسئلة (2,1)

يمثل الشكل البياني المجاور تغيرات السرعة بدلالة الزمن لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة فإن :



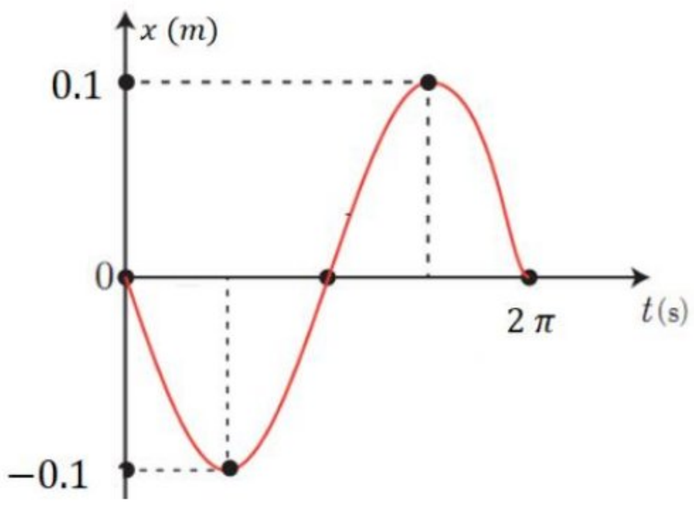
1. سعة الحركة لهذا الجسم X_{max} تساوي:

$0.04\ m$	B	$0.02\ m$	A
$0.16\ m$	D	$0.08\ m$	C

2. التابع الزمني الذي يصف سرعة الجسم:

$v = -0.08\pi\, cos(2\pi t)$	A
$v = -0.08\pi\, cos(\frac{\pi}{2} t)$	B
$v = -0.08\,\pi\, sin(\frac{\pi}{2} t)$	C
$v = -0.08\,\pi\, sin(2\pi t)$	D

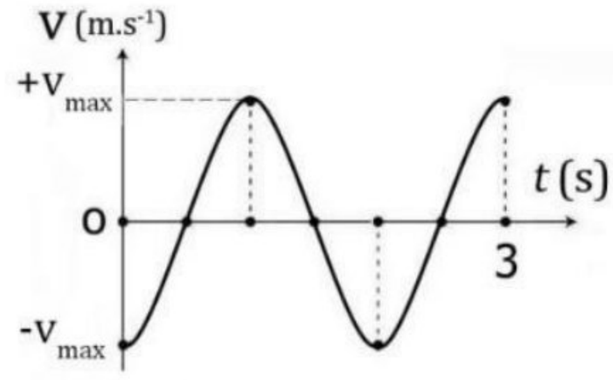
3. يمثل الشكل البياني المجاور تغيرات المطال بدلالة الزمن لجسم يتحرك حركة توافقية بسيطة فإن التابع الزمني الذي يصف مطال الحركة:



$x = 0.1\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2})$	B	$x = 0.1\cos(t + \frac{\pi}{2})$	A
$x = 0.1\cos(2\pi t + \pi)$	D	$x = 0.1\cos(t - \frac{\pi}{2})$	C

سـوريانا التعليمية

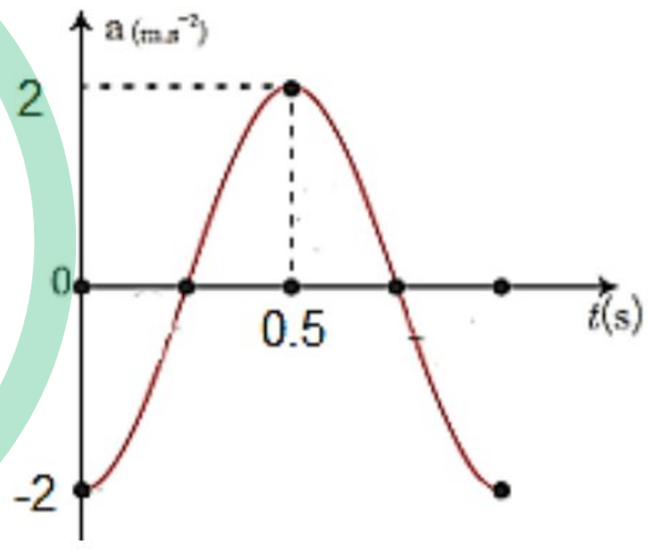
4. يمثّل الشكل البياني المجاور تغيّرات السرعة بدلالة الزمن لجسم يتحرك حركة جيبية انسحابيه فإذا كانت سعة الحركة $X_{max} = 0.2\ m$ تكون السرعة العظمى للحركة (طويلة) تساوي:



$\frac{\pi}{2}\ m.s^{-1}$	B	$\frac{\pi}{10}\ m.s^{-1}$	A
$\frac{\pi}{5}\ m.s^{-1}$	D	$\frac{\pi}{3}\ m.s^{-1}$	C

اقرأ النص الآتي ثم أجب عن الأسئلة (7,6,5)

الرسم البياني جانباً يمثل تغيرات التسارع مع الزمن لجسم مرتبط بنابض مرن يتحرك بحركة توافقية بسيطة، فإن:



5. قيمة سعة الحركة تساوي:

$5\ m$	B	$2\ m$	A
$0.5\ m$	D	$0.05\ m$	C

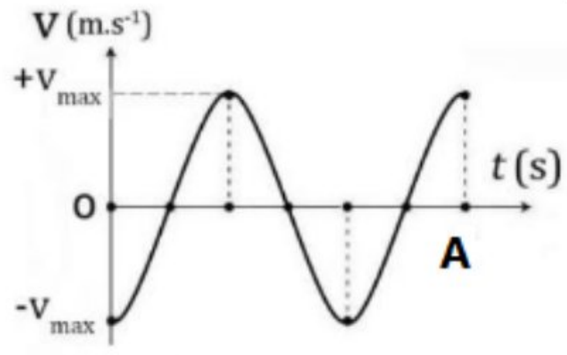
6. التابع الزمني الذي يصف التسارع:

$a = -2\cos(2\pi t)$	B	$a = 2\cos(t)$	A
$a = 2\cos(2\pi t)$	D	$a = -2\cos(2\pi t - \frac{\pi}{2})$	C

7. قيمة السرعة العظمى (طويلة) تساوي:

$\pi\ m.s^{-1}$	B	$2\pi\ m.s^{-1}$	A
$\frac{1}{2\pi}\ m.s^{-1}$	D	$\frac{1}{\pi}\ m.s^{-1}$	C

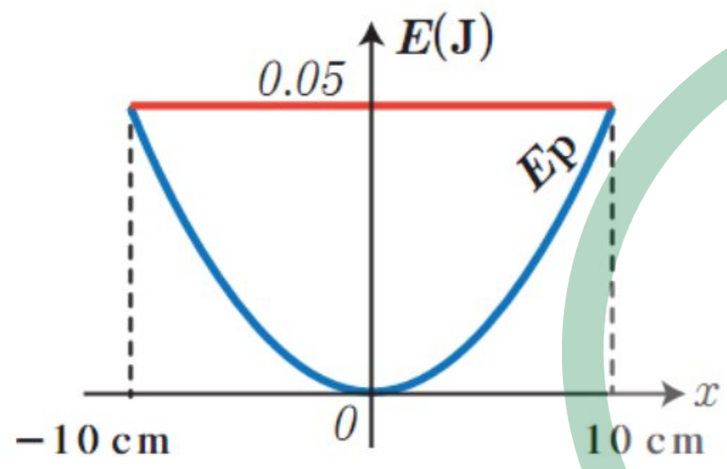
8. يمثّل الشكل البياني المجاور تغيّرات السرعة بدلالة الزمن لجسم يتحرك حركة جيبية انسحابيه فإذا كانت السرعة العظمى (طويلة) $v_{max} = \frac{\pi}{10}\ m.s^{-1}$ و سعة الحركة $0.2\ m$ فإن الزمن عند النقطة A يساوي:



$4\ s$	B	$2\ s$	A
$3\ s$	D	$6\ s$	C

اقرأ النص الآتي ثم اجب عن الأسئلة (10,9)

يوضح الرسم البياني المجاور تغيرات الطاقة الكامنة المرونية بتغير الموضع لهزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k معلق به جسم كتلته $m = 0.4\ Kg$ فإن:



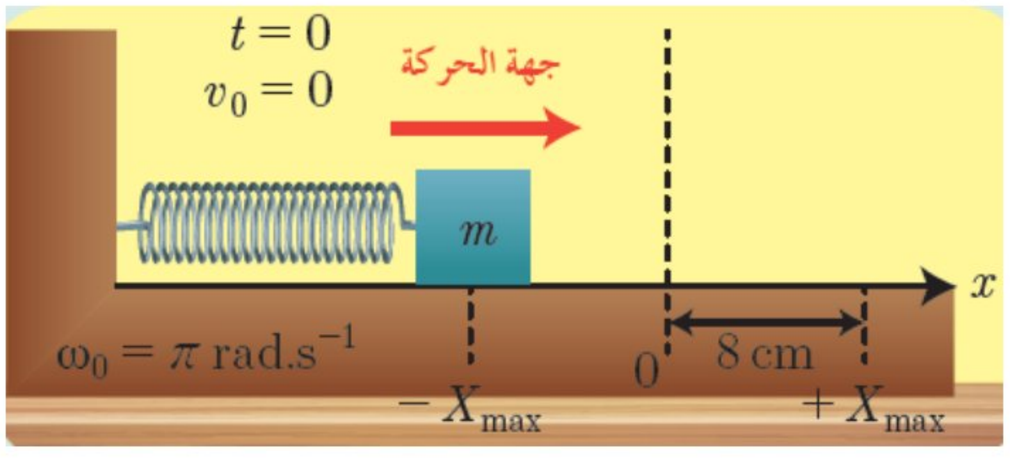
9. قيمة ثابت صلابة النابض تساوي:

$100\ N.m^{-1}$	B	$10\ N.m^{-1}$	A
$5\ N.m^{-1}$	D	$0.05\ N.m^{-1}$	C

10. الدور الخاص للحركة يساوي:

$2\ s$	B	$\frac{2}{5}s$	A
$\frac{2\pi}{5}s$	D	$\frac{\pi}{5}\ s$	C

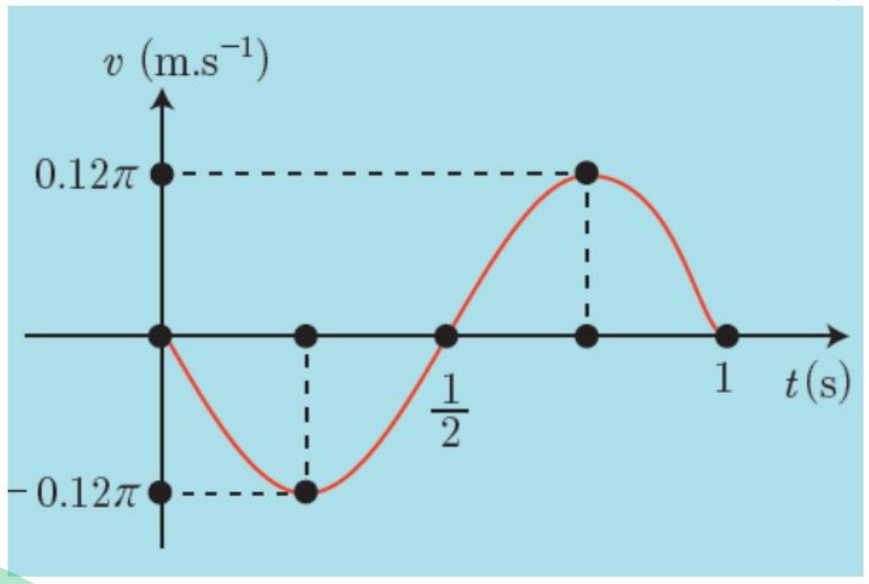
11. تابع المطال الذي يصف حركة الهزازة الجيبية في الشكل المجاور هو:



سـوريانا التعليمية

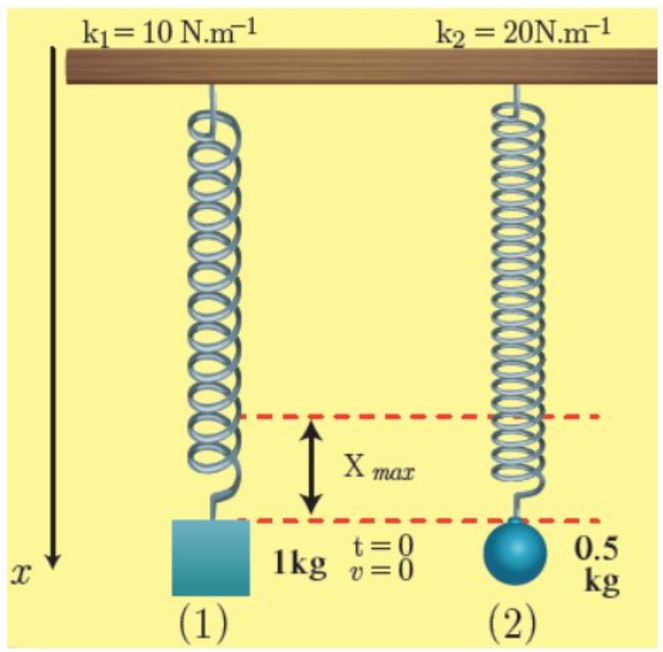
$x = 0.08\,cos(\pi t + \pi)$	A
$x = 8\,cos(\pi t - \pi)$	B
$x = 0.08\,cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$	C
$x = 0.8\,cos\,\pi t)$	D

12. الرسم البياني جانباً يمثل تغيرات السرعة مع الزمن لجسم مرتبط بنابض مرن يتحرك بحركة توافقية بسيطة، فيكون التابع الزمني للسرعة هو:



$v = 0.06\pi\,cos(\pi t)$	A
$v = 0.06\pi\,cos(2\pi t)$	B
$v = -0.12\,\pi\,sin(2\pi t)$	C
$v = -0.12\,\pi\,sin(\pi t)$	D

13. يمثل الشكل المجاور هزازتان توافقيتان تنطلقان من الموضع نفسه، وفي اللحظة نفسها، فإنهما بعد مضي **3 s** من بدء حركتهما:



A	تلتقيان في مركز الاهتزاز
B	تلتقيان في الموضع $+X_{max}$
C	لا تلتقيان لأن مطال الأولى $+X_{max}$ ومطال الثانية $-X_{max}$
D	لا تلتقيان لأن مطال الأولى $-X_{max}$ ومطال الثانية $+X_{max}$

Name
Date

	A	B	C	D		A	B	C	D
1	○	○	○	○	11	○	○	○	○
2	○	○	○	○	12	○	○	○	○
3	○	○	○	○	13	○	○	○	○
4	○	○	○	○	14	○	○	○	○
5	○	○	○	○	15	○	○	○	○
6	○	○	○	○	16	○	○	○	○
7	○	○	○	○	17	○	○	○	○
8	○	○	○	○	18	○	○	○	○
9	○	○	○	○	19	○	○	○	○
10	○	○	○	○	20	○	○	○	○

Test Version: A ○ B ○ C ○ D ○

Fidaa AlTarsha

مسودة إجابات أسئلة الأتمتة

سوريانا التعليمية

CamScanner

مفاتيح حل أسئلة الأتمتة (2)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
D	A	C	C	B	C	D	A	D	B
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
							D	C	A

سـوريانا التعليمية

الأسئلة النظرية (أختبر نفسي)

1. برهن صحة العلاقة: $v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

$$E = E_p + E_K$$

$$E_k = E - E_p$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kX_{max}{}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$mv^2 = k\left(X_{max}{}^2 - x^2\right)$$

لدينا : $k = m.\omega_0^2$

$$mv^2 = m.\omega_0^2\left(X_{max}{}^2 - x^2\right)$$

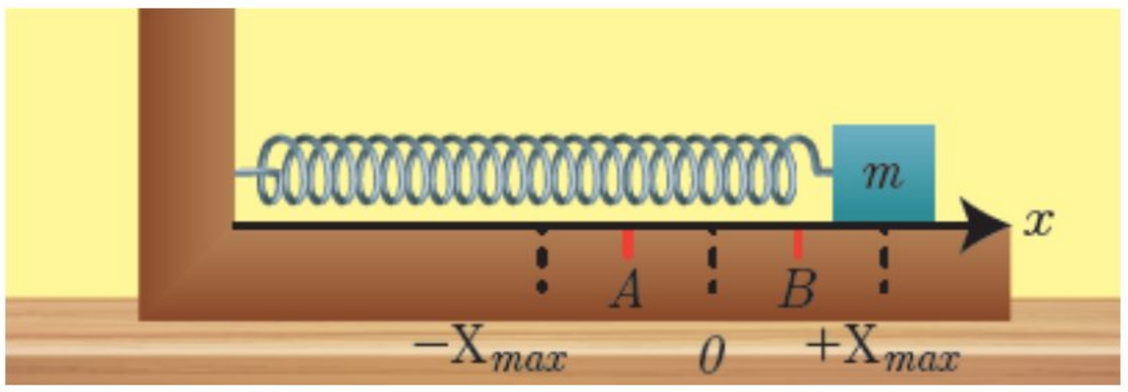
$$v^2 = \omega_0^2\left(X_{max}{}^2 - x^2\right)$$

نجذر الطرفين: $v = \omega_0\sqrt{\left(X_{max}{}^2 - x^2\right)}$

2. نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k ، مثبت من أحد طرفيه، ويربط بطرفه الآخر جسم صلب كتلته m يمكنه أن يتحرك على سطح أفقي أملس، نشد الجسم مسافةً أفقيةً مناسبةً، ونتركه دون سرعة ابتدائية. المطلوب:

a. ادرس حركة الجسم، واستنتج التابع الزمني للمطال.

b. استنتج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max} في كل من الموضعين $x_1 = \frac{-X_{max}}{2}$ $x_2 = \frac{+X_{max}}{\sqrt{2}}$ ماذا تستنتج؟



a) القوى الخارجية المؤثرة في الجسم:

قوة الثقل $\vec{w}$

قوة توتر النابض $\overrightarrow{F_S}$

قوة رد فعل السطح الأفقي $\vec{R}$

تؤثر في النابض القوة $F_S{}'$ التي تسبب له الاستطالة x حيث:

$$F_S{}' = F_S = k\,x$$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي على الجسم:

$$\overrightarrow{\Sigma F} = m\vec{a}$$

$$\overrightarrow{W} + \overrightarrow{F_S} + \vec{R} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور موجه $\overrightarrow{ox}$:

$$-F_S = ma$$

$$-kx = ma$$

$$-k.x = m\,(x)_t^{"}$$

و منه: $(x)_t^{"} = -\frac{k}{m}x \ldots\ldots(1)$

هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

نشتق مرتين بالنسبة بالزمن:

$$v = (x)_t' = -\omega_0 X_{max} sin\,(\omega_0 t + \varphi)$$

$$a = (x)_t^{"} = -\omega_0{}^2 X_{max} cos\,(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Longrightarrow (x)_t^{"} = -\omega_\circ^2\, x \ldots\ldots(2)$$

بمقارنة (1) مع (2) نجد:

$$\omega_\circ^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

وهذا ممكن لأن m ، k موجبان, أي أن حركة النواس المرن هي حركة جيبية انسحابية, الشكل العام للتابع الزمني للمطال فيها:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

b) عندما $x_1 = \frac{-X_{max}}{2}$ فإن: $E_k = E - E_p$

لنوجد E_p: $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

$$E_p = \frac{1}{2}k\frac{X_{max}{}^2}{4}$$

سـوريانا التعليمية

$$E_p = \frac{E}{4}$$

ومنه : $E_k = E - \frac{E}{4} = \frac{3E}{4}$

$$E_k = \frac{3}{4}(\frac{1}{2}kX_{max}{}^2) = \frac{3}{8}kX_{max}{}^2$$

عندما $x_2 = \frac{+X_{max}}{\sqrt{2}}$

$$E_k = E - E_p$$

لنوجد E_p: $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

$$E_p = \frac{1}{2}k\frac{X_{max}{}^2}{2}$$

$$E_p = \frac{E}{2}$$

$$E_k = E - \frac{E}{2} = \frac{E}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}kX_{max}{}^2) = \frac{1}{4}kX_{max}{}^2$$

3. جسم معلق بنابض مرن شاقولي حلقاته متباعدة يهتز بدوره الخاص ، ما نوع حركة الجسم بعد انفصاله عن النابض في كل من الموضعين الآتيين، ولماذا؟

a. مركز الاهتزاز، وهو يتحرك بالاتجاه السالب؟

b. المطال الأعظمي الموجب؟

لحظة انفصال الجسم:

$$\overrightarrow{\Sigma F} = m\vec{a}$$

$$\overrightarrow{W} = m\vec{a}$$

$$m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\vec{g} = \vec{a}$$

وبالتالي التسارع هو تسارع الجاذبية الأرضية.

a. الحركة قذف شاقولي نحو الأعلى وبالتالي الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام, طورها الأول (أثناء الصعود) متباطئة بانتظام وطورها الثاني (اثناء الهبوط) متسارعة بالانتظام.

b. الحركة سقوط حر لأنه ينفصل دون سرعة ابتدائية والحركة تكون مستقيمة متسارعة بانتظام.

سـوريانا التعليمية

المسائل

المسالة الأولى **تتألف هزازة جيبية انسحابية من نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 10\ N.m^{-1}$ مثبت من أحد طرفيه، ويحمل في طرفه الآخر جسماً كتلته m ، ويعطى التابع الزمني لمطال حركتها بالعلاقة:**

$$x = 0.1\ cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$$

المطلوب:

1. **أوجد قيم ثوابت الحركة ودورها الخاص.**
2. **احسب كتلة الجسم m.**
3. **احسب قيمة السرعة في موضع مطاله $x = 6\ cm$ ، والجسم يتحرك بالاتجاه الموجب للمحور.**
4. **حدد موضع الجسم وجهة حركته لحظة بدء الزمن.**

الحل:

كتلة الجسم m , $k = 10N.m^{-1}$

$$x = 0{,}1\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\bar{x} = X_{max}\ cos(\omega_0 t + \varphi)$$

بالمقارنة نجد:

1) الثوابت:

$$X_{max} = 0{,}1\ m$$

$$\omega_0 = \pi rad.s^{-1}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\ rad$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$$

2) $m = ?$

$$k = m{\omega_0}^2 \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{10}{10} = 1\ kg$$

3) $v = ?$ $\begin{bmatrix} X = 6cm = 6\times10^{-2}m \\ v > 0 \text{ يتحرك بالاتجاه الموجب} \end{bmatrix}$

$$v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$$

$$v = \pi\sqrt{10^{-2} - 36\times10^{-4}}$$

$$v = \pi\sqrt{100\times10^{-4} - 36\times10^{-4}}$$

$$v = \pi\sqrt{64\times10^{-4}}$$

$$v = \pm 8\pi\times10^{-2} m.s^{-1}$$

بما أن الحركة بالاتجاه الموجب: $v = +8\pi\times10^{-2} m.s^{-1}$

4. تحديد موضع الجسم x عندما $t = 0$

$$x = 0.1\ cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$$

$$x = 0.1\ cos(0 + \frac{\pi}{2})$$

$$x = 0\ m$$

الجسم في مركز الاهتزاز.

لتحديد جهة حركة الجسم:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\ sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

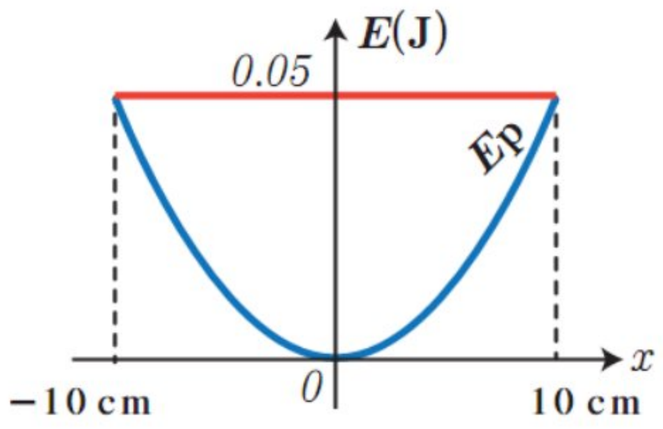
$$\bar{v} = -\pi\times0.1\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\bar{v} = -0.1\pi\ m.s^{-1}$$

السرعة سالبة ومنه **الحركة بالاتجاه السالب للمحور**

.....

المسألة الثانية **يوضح الرسم البياني المجاور تغيرات الطاقة الكامنة المرونية بتغير الموضع لهزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k معلق به جسم كتلته $m = 0.4\ Kg$**



المطلوب:

1. **استنتج قيمة ثابت صلابة النابض k .**
2. **احسب الدور الخاص للحركة.**
3. **احسب قيمة السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز علماً ان الجسم يتحرك بالاتجاه السالب.**

سوريانا التعليمية

الحل:

$m = 0.4\ kg$

من الخط البياني نستنتج:

$X_{max} = 10cm = 0.1\ m$

$E_{tot} = 0.05\ J$

1) $k = ?$

$E_{tot} = \frac{1}{2} K X_{max}^2$

$k = \frac{2E_{tot}}{X_{max}^2}$

$k = \frac{2 \times 0.05}{10^{-2}} = \frac{10^{-1}}{10^{-2}} = 10\ N.m^{-1}$

2) $T_0 = ؟$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{4 \times 10^{-1}}{10}} = 2\pi\sqrt{4 \times 10^{-2}}$

$T_0 = 2\pi \times 2 \times 10^{-1} = \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5} s$

3) $v = ?$ عند مركز الاهتزاز

عند مركز الاهتزاز تكون السرعة أعظمية $v_{max} = \pm\omega_0 X_{max}$

وبما أن الحركة بالاتجاه السالب $v_{max} = -\omega_0 X_{max}$

$v_{max} = -\omega_0 X_{max}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}} = 5\ rad.s^{-1}$

$v_{max} = -5 \times 10^{-1}\ m.s^{-1}$

.....

.....

المسالة الثالثة نشكل هزازةً توافقيةً بسيطة من جسم كتلته $m = 1\ kg$ معلق بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة فينجز 10 هزات في $10\ s$ ، ويرسم في أثناء حركته قطعةً مستقيمةً طولها $16\ cm$ المطلوب:

1. احسب النبض الخاص وقيمة ثابت صلابة النابض.

2. استنتج قيمة الاستطالة السكونية لهذا النابض.

3. احسب قيمة السرعة العظمى (طويلة).

4. احسب قيمة التسارع في مطال $x = 6\ cm$.

5. احسب الطاقة الكامنة المرونية في موضع مطاله $x = -4\ cm$ ، واحسب الطاقة الحركية عندئذ.

الحل:

$m = 1\ kg$

$(N = 10$ هزة $, t = 10s)$

$(L = 2X_{max} = 16 \times 10^{-2} m)$

1) حساب النبض الخاص:

$T_0 = \frac{t}{N} = \frac{10}{10} = 1\ S$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$

حساب قيمة ثابت الصلابة:

$k = m\omega_0^2$

$k = 1 \times (2\pi)^2 = 40\ N.m^{-1}$

2) استنتاج علاقة الاستطالة السكونية لهذا النابض ثم الحساب $x_0 = ?$

يستطيل النابض x_0 بعد تعليق الجسم فيه ويتوازن.

القوى المؤثرة على الجسم	قوة الثقل $\vec{w}$
	قوة توتر النابض $\vec{F}_{s_0}$

شرط التوازن السكوني:

$\Sigma\vec{F} = \vec{O}$

$\vec{w} + \vec{F}_{s_0} = \vec{O}$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$w - F_{s_0} = 0$

$w = F_{s_0}$ ①

تؤثر في النابض القوة $\vec{F}_{s_0}$ التي تسبب له الاستطالة x_0

إذاً: $F_{s_0}{}' = F_{s_0} = kx_0$ ②

نعوض ① بـ ② $\Leftarrow$ $\boxed{mg = kx_0}$

$\rightarrow \boxed{x_0 = \frac{mg}{k}}$

$$x_0 = \frac{1 \times 10}{40} = \frac{1}{4} = 0.25\ m$$

(3

$$v_{max} = |\pm\omega_0 X_{max}|$$

طويلة السرعة العظمى: $v_{max} = +\omega_0 X_{max}$

لحساب $X_{max} = ?$

$$L = 2X_{max} = 16 \times 10^{-2}$$

$$\Longrightarrow X_{max} = 8 \times 10^{-2}\ m$$

$$\Longrightarrow v_{max} = 2\pi \times 8 \times 10^{-2} = 16\pi \times 10^{-2} m.s^{-1}$$

$a = ?$ عند $x = 6cm = 0.06\ m$ -3

$$a = -\omega_0{}^2 . x$$

$$a = -[2\pi]^2 \times 0.06 = -40 \times 0.06$$

$$a - 2.4\ m.s^{-2}$$

$E_P = ?$ $E_k = ?$ عند $\bar{x} = -4\ cm = -4 \times 10^{-2} m$ (4

$$E_P = \frac{1}{2} K x^2$$

$$E_P = \frac{1}{2} \times 40 \times 16 \times 10^{-4}$$

$$E_P = 32 \times 10^{-3} J$$

نحسب $E_k = ?$

$$E_K = E_{tot} - E_P$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \times 40 \times (8 \times 10^{-2})^2$$

$$= 20 \times 64 \times 10^{-4}$$

$$E_{tot} = 128 \times 10^{-3}\ J$$

$$E_K = 128 \times 10^{-3} - 32 \times 10^{-3}$$

$$= 96 \times 10^{-3}\ J$$

.....

المسألة الرابعة تهتز كرة معدنية كتلتها m بمرونة نابض شاقولي مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $K = 16\ N.m^{-1}$ بحركة توافقية بسيطة دورها الخاص $1\ s$ ، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 0.1m$ ، وبفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة بنقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرك بالاتجاه السالب.المطلوب:

1. استنتج التابع الزمني لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العام.
2. عين لحظتي المرور الأول والثالث للكرة في موضع التوازن.
3. احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $x = +0.1m$
4. احسب كتلة الكرة.

الحل:

$k = 16\ N.m^{-1}$, $T_0 = 1\ s$

$X_{max} = 0{,}1\ m$

شروط البدء: $t = 0 \begin{cases} x = \frac{X_{max}}{2} \\ v < 0 \end{cases}$

1) استنتج التابع الزمنيّ لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العام.

$$\bar{x} = X_{max}\ cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

الثوابت X_{max} , ω_0 , $\bar{\varphi}$

$$X_{max} = 0{,}1\ m$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$$

لايجاد $(\varphi = ?)$ نعوض $t = 0$ $x = \frac{X_{max}}{2}$ في التابع:

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ \bar{x} = \frac{X_{max}}{2} \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{X_{max}}{2} = X_{max}\ cos(0 + \varphi)$$

$$\frac{1}{2} = cos(\varphi) \rightarrow \varphi \begin{cases} \frac{\pi}{3}\ rad \\ \frac{-\pi}{3}\ rad \end{cases}$$

نختار قيمة لـ (φ) تجعل السرعة سالبة

نعوض بالتابع الزمني للسرعة لحظة بدء الزمن:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\ sin(\bar{\varphi})$$

مقبول يوافق شروط البدء $\varphi = \frac{\pi}{3}\ rad \Longrightarrow v < 0$

مرفوض يخالف شروط البدء $\varphi = \frac{-\pi}{3}\ rad \Longrightarrow v < 0$

نعوض الثوابت في التابع: $\boldsymbol{x = 0.1 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\ m}$

سوريانا التعليمية

2) $t =?$ مرور أول وثالث للكرة في موضع التوازن $(x = 0)$

نعوض بالتابع الزمني للمطال.

$$x = 0 \Longrightarrow 0 = 0.1cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

تذكير
$cos\,\theta = 0 \longleftarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\pi \quad \pi$

$$\Longrightarrow 2\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

حيث $k = 0,1,2, \ldots$

$$\pi\left(2t + \frac{1}{3}\right) = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$$

$$\left(2t + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2} + k\right)$$

$$2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k$$

$$2t = \frac{1}{6} + k$$

المرور الأول: $(k = 0) \Longleftarrow 2t = \frac{1}{6} + 0$

$$\Longrightarrow t = \frac{1}{12}\ s$$

المرور الثالث $(k = 2)$:

$$2t = \frac{1}{6} + 2$$

$$\Longrightarrow 2t = \frac{13}{6} \Longrightarrow t = \frac{13}{12}\ s$$

3) ومطلوب حساب $F =?$ $\begin{bmatrix}\text{شدة قوة الإرجاع في نقطة}\\ \text{مطالها}\ (x = +0.1m)\end{bmatrix}$

قوة الإرجاع $F = -k\,\bar{x}$

$$F = -16 \times 0.1 = -1.6\ N$$

شدة قوة الا رجاع $|F| = +1.6\ N$

4) حساب $m =?$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2}$$

$$m = \frac{16}{(2\pi)^2} = \frac{16}{4\pi^2} = \frac{16}{40} = \frac{4}{10} = 0{,}4\ kg$$

.....

المسائل العامة

المسألة (1) الصفحة 270 في الكتاب

نشكّلُ هزّازةً توافقيّةً بسيطةً مؤلّفةً من نابضٍ مرنٍ شاقوليٍّ مهملِ الكتلة، حلقاتُهُ متباعدةٌ، ثابتُ صلابته $k = 10\ N.m^{-1}$ مثبَّتٍ من إحدى نهايتيه إلى نقطةٍ ثابتةٍ، ويحملُ في نهايته الثانية جسماً كتلتُه $m = 0.1\ kg$ فإذا علمتَ أنّ مبدأ الزمن لحظةَ مرور الجسم في مركز الاهتزاز، وهو يتحرّك بالاتّجاه السالب بسرعة $v = -3\ m.s^{-1}$

المطلوب:

1. احسبْ نبضَ الحركة.
2. استنتجِ التابعَ الزمنيَّ لمطال الحركة.
3. احسبْ شدّة قوّة الإرجاع في نقطة مطالها $x = 3\ cm$

سـوريانا التعليمية

$$k = 10\ N.m^{-1}\ ,m = 0.1kg$$

$$t = 0\begin{cases}x = 0\\ v = -3m.s^{-1}\end{cases}$$

1- حساب $\omega_0 =?$

$$k = m\omega_0^2 \Longrightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{10}{0.1} = 100$$

$$\omega_0 = 10\ rad.s^{-1}$$

2- استنتاج التابع الزمني لمطال الحركة:

$$\bar{x} = X_{max}\,cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

الثوابت $(\bar{\varphi}\ ,\omega_0\ ,X_{max}\ )$

$$\left.\begin{matrix}t = O\\ \bar{x} = O\\ \bar{v} = -3m.s^{-1}\end{matrix}\right\} v_{max} = 3m.s^{-1}$$

عند المرور بالتوازن فإن السرعة اعظمية:

$$v_{max} = \omega_0 X_{max} \Longrightarrow X_{max} = \frac{v_{max}}{\omega_0} = \frac{3}{10} = 0.3m$$

لإيجاد ?= φ من شروط البدء:

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} 0 = X_{max}\, cos(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$$

$$X_{max} \neq 0 \Longrightarrow cos\bar{\varphi} = 0$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} rad\,, \bar{\varphi} = \frac{-\pi}{2} rad$$

نختار قيمة لـ $\bar{\varphi}$ نجعل $(v < 0)$

التابع الزمني للسرعة لحظة بدء الزمن:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\, sin\bar{\varphi}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} rad \Longrightarrow sin\,\frac{\pi}{2} = 1 > 0 \Longrightarrow \bar{v} < 0$$

مقبول يوافق شروط البدء

$$\varphi = \frac{-\pi}{2} rad \Longrightarrow \sin\frac{3\pi}{2} = -1 > 0 \Longrightarrow v < 0$$

مرفوض يخالف شروط البدء.

نعوض مكان الثوابت : $\bar{\varphi} = 0.3\cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$

شدة $F = -kx \Longrightarrow F = kx$

$$F = 10 \times 3 \times 10^{-2} = 3 \times 10^{-1}\ \boldsymbol{N}$$

.....

المسألة (2) الصفحة 270 في الكتاب

تهتزُّ نقطة ماديَّة كتلتها $m = 0.5\,kg$ بحركة توافقيَّة بسيطة بمرونة نابض مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، شاقوليّ وبدور خاص $T_0 = 4\,s$ وبسعة اهتزاز $X_{max} = 8\,cm$ فإذا علمت أنَّ النقطة كانت في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ في بدء الزمن وهي متحرِّكة بالاتِّجاه السالب, المطلوب:

1. **استنتج التابع الزمنيّ لمطال حركة هذه النقطة بعد تعيين قيمة الثوابت.**
2. **عيّن لحظتي المرور الأوَّل والثالث في وضع التوازن.**
3. **عيّن المواضع التي تكون فيها شدَّة محصِّلة القوى عظمى، واحسب قيمتها، وحدّد موضعاً تنعدم فيه شدَّة هذه المحصِّلة.**
4. **احسب قيمة ثابت صلابة النابض، وهل تتغيَّر هذه القيمة باستبدال الكتلة المعلَّقة؟**
5. **احسب الكتلة التي تجعل الدَّور الخاصّ $1\,s$.**

الحل:

$$X_{max} = 8cm = 8 \times 10^{-2}m$$
$$T_0 = 4s \qquad m = 0.5kg$$

شروط البدء:

$$t = O \begin{cases} x = \frac{X_{max}}{2} \\ \overline{v} < 0 \left(\text{متحرك بالاتجاه السالب}\right) \end{cases}$$

1- التابع الزمني:

$$\bar{x} = X_{max}\, cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

الثوابت $(\bar{\varphi}\,, \omega_0\,, X_{max}\,)$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ rad.s^{-1}$$
$$X_{max} = 8 \times 10^{-2}m$$

لإيجاد ?= φ من شروط البدء:

$$\left.\begin{matrix} t = O \\ \bar{x} = \frac{X_{max}}{2} \end{matrix}\right\} \frac{X_{max}}{2} = X_{max}\, cos(\omega_0 \times 0 + \bar{\varphi})$$

$$cos\bar{\varphi} = \frac{1}{2} \begin{cases} \varphi_1 = \frac{\pi}{3}\ rad \\ \bar{\varphi}_2 = \frac{-\pi}{3}\ rad \end{cases}$$

نختار قيمة لـ φ تجعل $(\overline{v} < 0)$

التابع الزمني للسرعة لحظة بدء الزمن:

$$\bar{v} = -\omega_0\, X_{max}\, sin\varphi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}\ rad \Longrightarrow sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Longrightarrow v < 0$$

مقبول يوافق شروط البدء

$$\varphi = \frac{-\pi}{3}\ rad \Longrightarrow sin\frac{-\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2} < O \Longrightarrow v > O$$

مرفوض يخالف شروط البدء

نعوض مكان الثوابت:

$$\overline{x} = \mathbf{8 \times 10^{-2}}\, \boldsymbol{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{t} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right)$$

$$\boldsymbol{t} = ?\ \mathbf{-2}$$

(مرور أول – مرور ثاني) من وضع التوازن $\boxed{x = 0}$

سـوريانا التعليمية

نعوض بالتابع الزمني للمطال:

$$0 = 8 \times 10^{-2}\, cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = O$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + k$$

المرور الأول: $(k = 0) \Leftarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}t = \frac{1}{6}$$

$$t_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad (s)$$

المرور الثالث: $(k = 2) \Leftarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}t = \frac{1}{6} + \frac{12}{6}$$

$$\frac{t}{2} = \frac{13}{6} \Rightarrow t = \frac{13 \times 2}{6} = \frac{13}{3} \quad (s)$$

3) شدة محصلة القوى (شدة قوة الإرجاع) (شدة $\Leftarrow$ قيمة مطلقة)

a) تكون عظمى في الوضعين الطرفيين $x = \pm X_{max}$ ولحسابها :

$$a = a_{max} = \omega_0^2\, X_{max}$$

$$F_{max} = m\, a_{max} \Rightarrow F_{max} = m\, \omega_0^2\, X_{max}$$

$$F_{max} = 0.5 \times \frac{\pi^2}{4} \times 8 \times 10^{-2} = 0.1\ (N)$$

طريقة ثانية: $F_{max} = kX_{max}$ (الشدة)

تُحسب (k) من العلاقة $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ونعوض... (**لكن لأن k مطلوب في الطلب الرابع, يفضل الحل بالطريقة الأولى)**

b) تنعدم محصلة القوى في مركز الاهتزاز, حيث:

$$x = 0 \Rightarrow F = -k.x = 0$$

k =? −4

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = m\omega_0^2$$

$$k = 0.5 \times \frac{\pi^2}{4}$$

$$k = 5 \times 10^{-1} \times \frac{10}{4} = \frac{5}{4}\ N.m^{-1}$$

لا تتغير قيمة الثابت باستبدال الكتلة المعلقة, حيث k يتعلق بمادة النابض وعدد حلقاته فقط.

$m` =? -5$ من أجل $T_0' = 1\ s$

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{\grave{m}}{k}} \Rightarrow T_0'^2 = 4\pi^2\,\frac{\grave{m}}{k}$$

$$\grave{m} = \frac{T_0`^2\, k}{40} = \frac{\frac{5}{4} \times 1}{4 \times 10} = \frac{5}{160} = \frac{1}{32}\ kg$$

سـوريانا التعليمية