شيفرة الـ 600

للإعداد والتكوين والتأسيس في الرياضيات

للثالث الثانوي العلمي
الجـــزء الأول

النخبة
ELITE MATH

by:Hisham Labanieh

إعداد المدرس
خالد عامر

0940 916 753 خالد عامر Syria - Damascus

شيفرة الـ 600 في وحدة الاشتقاق

الرمز	
	• المشتق الأول للتابع f رمزه $f'(x)$ • المشتق الثاني للتابع f رمزه $f''(x)$ • المشتق من المرتبة n رمزه $f^{(n)}(x)$

قواعد الاشتقاق

التابع	القاعدة	تمرين: أوجد التابع المشتق للتابع f
ثابت "لا يحوي متحول x " $f(x)=\alpha$	مشتق التابع الذي لا يحوي متحول هو الصفر $f'(x)=0$	1. $f(x)=\pi \to f'(x)=0$ 2. $f(x)=\frac{\ln(2)}{e} \to f'(x)=0$
تابع من الدرجة الأولى "تابع تآلفي" $f(x)=\alpha x$	مشتق التابع التآلفي هو أمثال x $f'(x)=\alpha$	3. $f(x)=-x \to f'(x)=-1$ 4. $f(x)=-\frac{2x}{3} \to f'(x)=-\frac{2}{3}$
مجموع توابع $f(x)=g(x)+h(x)$	مشتق مجموع توابع هو مجموع المشتقات $f'(x)=g'(x)+h'(x)$	5. $f(x)=3x-7 \to f'(x)=3$ 6. $f(x)=\ln(2)-\frac{7x}{e} \to f'(x)=-\frac{7}{e}$ 7. $f(x)=\frac{5+3x}{2}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}x \to f'(x)=\frac{3}{2}$
تابع مرفوع إلى قوة "الحالة العامة" $f(x)=\left(g(x)\right)^{n}$	مشتق تابع مرفوع إلى قوة: "تزلني ، نقصني ، اشتق المضمون" بشرط الـ $n\neq 1$ $f'(x)=n.\left(g(x)\right)^{n-1}.g'(x)$	8. $f(x)=(5x-3)^{7}$ $f'(x)=7(5x-3)^{6}(5)=35(5x-3)^{6}$ 9. $f(x)=(3-4x)^{-4}+3x-2$ $f'(x)=-4(3-4x)^{-5}(-4)+3$ $=16(3-4x)^{-5}+3$
تابع مرفوع إلى قوة "الحالة الخاصة" $f(x)=x^{n}$	$f'(x)=n.x^{n-1}$	10. $f(x)=x^{2} \to f'(x)=2x$ 11. $f(x)=x^{-\frac{5}{2}} \to f'(x)=-\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$
تابع الجذر التربيعي $f(x)=\sqrt{g(x)}$	مشتق الجذر التربيعي: مشتق المضمون على ضعفي الجذر نفسه $f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	12. $f(x)=\sqrt{x} \to f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 13. $f(x)=\sqrt{x^{3}-x^{2}+1}$ $f'(x)=\frac{3x^{2}-2x}{2\sqrt{x^{3}-x^{2}+1}}$ 14. $f(x)=x-\sqrt{(x^{2}-7)^{3}}$ $f'(x)=1-\frac{3(x^{2}-7)^{2}(2x)}{2\sqrt{(x^{2}-7)^{3}}}=1-\frac{6x(x^{2}-7)^{2}}{\sqrt{(x^{2}-7)^{3}}}$
الجذر من المرتبة n $f(x)=\sqrt[n]{\left(g(x)\right)^{m}}$	لا توجد قاعدة تنص على اشتقاق التابع f إنما للاشتقاق نتبع الخطوات الآتية: 1. نحول الجذر إلى قوة وفق: $f(x)=\left(g(x)\right)^{\frac{m}{n}}$ 2. نشتق كما ورد معنا في الحالة العامة لقاعدة اشتقاق تابع مرفوع إلى قوة ويتم ذلك وفق: $f'(x)=\frac{m}{n}\left(g(x)\right)^{\frac{m}{n}-1}\left(g(x)\right)'$	15. $f(x)=\sqrt[4]{x^{7}}=x^{\frac{7}{4}}$ $f'(x)=\frac{7}{4}.x^{\frac{3}{4}}=\frac{7}{4}.\sqrt[4]{x^{3}}$ 16. $f(x)=\sqrt[7]{(1-x)^{2}}=(1-x)^{\frac{2}{7}}$ $f'(x)=\frac{2}{7}.(1-x)^{-\frac{5}{7}}(-1)$ $=-\frac{2}{7}.\sqrt[7]{(1-x)^{-5}}$ 17. $f(x)=\sqrt[3]{7-x^{5}}=(7-x^{5})^{\frac{1}{3}}$ $f'(x)=\frac{1}{3}(7-x^{5})^{-\frac{2}{3}}(-5x^{4})$ $=-\frac{5}{3}x^{4}.\sqrt[3]{(7-x^{5})^{-2}}=-\frac{5}{3}x^{4}.\sqrt[3]{(7-x^{5})^{-2}}$
جداء تابعين $f(x)=g(x).h(x)$	مشتق جداء تابعين: مشتق الأول بالثاني زائد مشتق الثاني بالأول $f'(x)=g'(x).h(x)+h'(x).g(x)$	18. $f(x)=x.\sqrt{x}$ $f'(x)=(1)(\sqrt{x})+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x)$ $=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ 19. $f(x)=(x-1).\sqrt{x^{2}-3}$ $f'(x)=1(\sqrt{x^{2}-3})+\frac{2x}{2\sqrt{x^{2}-3}}(x-1)$ $=\sqrt{x^{2}-3}+\frac{x^{2}-x}{\sqrt{x^{2}-3}}=\frac{2x^{2}-x-3}{\sqrt{x^{2}-3}}$

جداء عدد حقيقي بتابع $f(x) = \alpha . g(x)$	مشتق جداء عدد حقيقي بتابع هو: جداء العدد الحقيقي بمشتق التابع $f'(x) = \alpha . g'(x)$	20. $f(x) = 3\sqrt{x} \rightarrow f'(x) = 3.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$ 21. $f(x) = -5\sqrt{-x^3 + 3x^2 + 2} + 7x$ $f'(x) = -5.\left[\frac{-3x^2+6x}{2\sqrt{-x^3+3x^2+2}}\right] + 7$ $= \frac{15x^2-30x}{2\sqrt{-x^3+3x^2+2}} + 7$
قسمة تابعين "كسر" $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	مشتق قسمة تابعين هو: مشتق البسط بالمقام ناقص مشتق المقام بالبسط على مربع المقام. $f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - h'(x).g(x)}{\left(h(x)\right)^2}$	22. $f(x) = \frac{1}{x}$ $f'(x) = \frac{(0)(x)-(1)(1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$ 23. $f(x) = \frac{x-3}{5-x}$ $f'(x) = \frac{1(5-x)-(-1)(x-3)}{(5-x)^2} = \frac{2}{(5-x)^2}$ 24. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{7-x^2}$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(7-x^2)-(-2x)(\sqrt{x-1})}{(7-x^2)^2}$ $= \frac{\frac{7-x^2}{2\sqrt{x-1}}+\frac{4x(x-1)}{2\sqrt{x-1}}}{(7-x^2)^2} = \frac{3x^2-4x+7}{2\sqrt{x-1}.(7-x^2)^2}$

التابع المثلثي

قواعد		تعميم	
التابع	المشتق	التابع	المشتق
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin\left(g(x)\right)$	$f'(x) = g'(x).\cos\left(g(x)\right)$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos\left(g(x)\right)$	$f'(x) = -g'(x).\sin\left(g(x)\right)$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$ أو $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$f(x) = \tan\left(g(x)\right)$	$f'(x) = g'(x)(1 + \tan^2\left(g(x)\right))$ أو $f'(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2\left(g(x)\right)}$
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = -1 - \cot^2 x$ أو $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$f(x) = \cot\left(g(x)\right)$	$f'(x) = g'(x)(-1 - \cot^2\left(g(x)\right))$ أو $f'(x) = \frac{-g'(x)}{\sin^2\left(g(x)\right)}$

تعميم: مشتق أي تابع مثلثي هو مشتق الزاوية بمشتق الدالة

تمرين: أوجد التابع المشتق للتابع f :

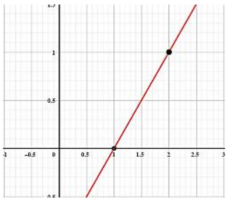
25. $f(x) = \cos x^2 \rightarrow f'(x) = -2x.\sin x^2$
26. $f(x) = \sin\sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\cos\sqrt{x} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
27. $f(x) = 7.\tan(x^2 - 3x^3)$
$\rightarrow f'(x) = 7.(2x - 9x^2).(1 + \tan^2(x^2 - 3x^3))$
28. $f(x) = \sqrt{\sin 3x - \frac{1}{x}} \rightarrow f'(x) = \frac{3.\cos 3x + \frac{1}{x^2}}{2.\sqrt{\sin 3x - \frac{1}{x}}}$

29. $f(x) = x.\sin x$
$f'(x) = (1)(\sin x) + (\cos x)(x) = \sin x + x.\cos x$
30. $f(x) = \frac{\tan x}{\cos x}$
$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)(\cos x) - (-\sin x)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{cos^2 x}$
$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x}}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$

معادلة المستقيم:

الشكل العام	$ax + by + c = 0$ أو $y = mx + p$
كتابة معادلة مستقيم	لكتابة معادلة المستقيم نحتاج: • نقطة من المستقيم: $A(x_A, y_A)$ • ميل المستقيم: m • فتكون المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$
تمرين: اكتب معادلة المستقيم Δ المار من $A(-3,1)$ والذي ميله $m = 2$	تحديد النقطة: "معلومة" $A(-3,1)$ تحديد الميل: "معلوم" $m = 2$ المعادلة: $\Delta : y = m(x - x_A) + y_A$ $y = 2(x + 3) + 1$ $y = 2x + 7$

حالات إيجاد الميل:

الحالة	فكرة الحل	تمرين
ميل مستقيم معادلته معطاة	نعزل y يكون ميل المستقيم هو أمثال x	ليكن لدينا المستقيم Δ الذي معادلته: $\Delta: x-3y=0$ أوجد ميل المستقيم Δ . الحل: $\Delta: -3y=-x \to y=\frac{1}{3}x \to m_\Delta=\frac{1}{3}$
ميل مستقيم أفقي	المستقيم الافقي ميله معدوم ومعادلته من الشكل $y=$ عدد	أوجد ميل المستقيم Δ الأفقي في النقطة $A(-2,3)$ واكتب معادلته: الحل: بما أنّ المستقيم أفقي فإنّ ميلهُ معدوم أيّ أنّ $m_\Delta=0$ ومعادلته: $y=3$
ميل مستقيم شاقولي	المستقيم الشاقولي ميله غير معروف ومعادلته من الشكل $x=$ عدد	اكتب معادلة المستقيم الشاقولي في النقطة $A(-2,3)$: الحل: بما أنّ المستقيم شاقولي فإنّ ميلهُ غير معرّف ومعادلته: $x=-2$
ميل مستقيم مار من نقطتين	إذا كان المستقيم Δ مار من $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ فإنّ ميل المستقيم Δ يُعطى بالعلاقة: $m_\Delta=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ أو $m_\Delta=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$ تعميم: $m=\frac{\text{فرق الوايات}}{\text{فرق الإكسات}}$ ملاحظة: أثناء كتابة معادلة مستقيم مار من نقطتين A و B ولتحديد النقطة المراد تعويضها في المعادلة يصح اختيار إما A أو B .	اكتب معادلة المستقيم Δ المار من $A(-1,0)$ و $B(3,-2)$: الحل: تحديد النقطة: $A(-1,0)$ تحديد الميل: $m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{0+2}{-1-3}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$ المعادلة: $\Delta: y=m(x-x_A)+y_A$ $=-\frac{1}{2}(x+1)+0$ $=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
ميل مستقيم Δ مرسوم في شكل	بالاعتماد على الشكل: نحدد نقطتان تنتميان إلى المستقيم المراد كتابة معادلته نوجد ميل المستقيم بالاعتماد على: $m=\frac{\text{فرق الوايات}}{\text{فرق الإكسات}}$	 تأمل الشكل المجاور واكتب معادلة المستقيم Δ الحل: لدينا $A(2,1)$ و $B(1,0)$ ومنهُ: تحديد النقطة: $A(2,1)$ تحديد الميل: $m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{1-0}{2-1}=1$ المعادلة: $\Delta: y=1(x-2)+1 \to y=x-1$
ميل مستقيم Δ يوازي مستقيم d	المستقيمان المتوازيان d و Δ لهما نفس الميل أيّ أنّ: $m_\Delta=m_d$	ليكن لدينا المستقيم d الذي معادلته $d: 3x-2y+1=0$ اكتب معادلة المستقيم Δ المار من $A(-1,2)$ والموازي للمستقيم d. الحل: تحديد النقطة: $A(-1,2)$ تحديد الميل: بما أنّ المستقيمان Δ و d متوازيان فإنّ: $m_\Delta=m_d$. إيجاد m_d وفق: $d: 3x-2y+1=0 \to 2y=3x+1 \to y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} \to m_d=\frac{3}{2}$ ومنهُ: $m_\Delta=m_d=\frac{3}{2}$ المعادلة: $\Delta: y=\frac{3}{2}(x+1)+2 \to y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$
ميل مستقيم Δ يعامد مستقيم d	إذا كان المستقيمان d و Δ متعامدان فإنّ: $m_\Delta . m_d=-1$	ليكن لدينا المستقيم d الذي معادلته $d: 3x-2y+1=0$ اكتب معادلة المستقيم Δ المار من $A(-1,2)$ ويعامد المستقيم d . الحل: تحديد النقطة: $A(-1,2)$ تحديد الميل: بما أنّ المستقيمان Δ و d متعامدان فإنّ: $m_\Delta . m_d=-1$. إيجاد m_d وفق: $d: 3x-2y+1=0 \to 2y=3x+1 \to y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} \to m_d=\frac{3}{2}$ ومنهُ: $m_\Delta . m_d=-1 \to m_\Delta=-\frac{1}{m_d} \to m_\Delta=-\frac{2}{3}$ المعادلة: $\Delta: y=-\frac{2}{3}(x+1)+2 \to y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$

المماس:

تعريف	هو مستقيم يشترك مع الخط البياني بنقطة واحدة هي نقطة التماس
الشكل العام	$y = f'(x)(x-a) + f(a)$ أو $y = m(x - x_A) + y_A$
كتابة معادلة المماس	لكتابة معادلة المماس نحتاج: * نقطة التماس: $A(x_A, y_A)$ حيث y_A نحصل عليها من خلال التصوير في التابع f * ميل المماس: m حيث الميل نحصل عليه من التصوير في التابع $f'(x)$ * فتكون المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$
تمرين: اكتب معادلة المماس T المار من $A(5,-3)$ والذي ميله $m = 1$	تحديد النقطة: "معلومة" $A(5,-3)$ تحديد الميل: "معلوم" $m = 1$ المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A \to y = 1(x-5) - 3 \to y = x - 8$

أنماط التمارين:

النمط الأول	كتابة معادلة المماس		
الحالة	نص السؤال	فكرة الحل	تمرين
الأولى	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f للتابع f (مُعطى) في النقطة $A(x_A, y_A)$	تحديد النقطة: $A(x_A, y_A)$ مُعطاة. تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = -x^2 + 2$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة $A(1,1)$ تحديد النقطة: $A(1,1)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = -2x$ $m = f'(1) = -2$ المعادلة: $T: y = -2(x-1) + 1 \to y = -2x + 3$
الثانية	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي فاصلتها x_A	تحديد النقطة: فاصلة نقطة التماس x_A ترتيب نقطة التماس $y = f(x_A)$ تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق: $f(x) = x\sqrt{x}$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة A التي فاصلتها $x_A = 1$. تحديد النقطة: الفاصلة: $x_A = 1$ الترتيب: $y_A = f(1) = 1$ النقطة: $A(1,1)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ $m = f'(1) = \frac{3}{2}$ المعادلة: $T: y = \frac{3}{2}(x-1) + 1 \to y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$
الثالثة	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي ترتيبها y_A	نحل المعادلة $f(x) = y_A$ وحل المعادلة هو فاصلة لنقطة التماس. تحديد النقطة: فاصلة نقطة التماس: $x_A = (f(x) = y_A$ حل المعادلة$)$ ترتيب نقطة التماس: $y_A = f(x_A)$ تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$ ملاحظة: عدد حلول المعادلة هو عدد المماسات	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sqrt{4x^2+1} - 2x$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة A التي ترتيبها $y_A = 1$. تحديد النقطة: الترتيب: $y_A = 1$ الفاصلة: نحل المعادلة $f(x) = 1$ ومنه: $\sqrt{4x^2+1} - 2x = 1 \to \sqrt{4x^2+1} = 2x + 1$ بشرط $x > -\frac{1}{2}$ نربع الطرفين وفق: $4x^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 1 \to x = 0$ النقطة: $A(0,1)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}} - 2$ $m = f'(0) = -2$ المعادلة: $T: y = -2(x-0) + 1 \to y = -2x + 1$
الرابعة	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.	بما أن نقطة التماس هي نقطة تقاطع الخط البياني مع محور التراتيب فإنّ $x_A = 0$ تحديد نقطة التماس: فاصلة نقطة التماس: $x_A = 0$ ترتيب نقطة التماس: $y_A = f(x_A)$ تحديد الميل نشتق التابع يكون الميل هو $m = f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y = m(x - x_A) + y_A$	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق: $f(x) = \frac{x-4}{x-1}$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب تحديد النقطة: بما أنّ نقطة التماس هي نقطة تقاطع الخط البياني مع محور التراتيب فإنّ $x_A = 0$ الفاصلة: $x_A = 0$ الترتيب: $y_A = f(0) = 4$ النقطة: $A(0,4)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ $m = f'(0) = 3$ المعادلة: $T: y = 3(x-0) + 4 \to y = 3x + 4$

	صيغة السؤال	طريقة الحل	مثال
الخامسة	صيغة أولى للسؤال: اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل. صيغة ثانية للسؤال: اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي فاصلتها تعدم $f(x)$.	نحل المعادلة $f(x)=0$ وحل المعادلة هو فاصلة لنقطة التماس. تحديد نقطة التماس: تحديد الفاصلة: $x_A=$ (حل المعادلة $f(x)=0$) تحديد التراتيب: $y_A=f(x_A)$ تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m=f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y=m(x-x_A)+y_A$ تنويه هام: عدد حلول المعادلة هو عدد المماسات.	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ وفق: $f(x)=\frac{3x^2-5x}{x-3}$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل الحل: تحديد النقطة: تحديد الفاصلة: بما أنّ نقطة التماس هي نقطة تقاطع الخط البياني مع محور الفواصل فإننا لإيجاد فاصلة نقطة التماس نحل المعادلة $f(x)=0$ $\frac{3x^2-5x}{x-3}=0\to 3x^2-5x=0\to x(3x-5)=0$ إما $x=0$ أو $x=\frac{5}{3}$ نلاحظ أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلّان ومنهُ يوجد للخط البياني مماسان فاصلة المماس الأول $x_A=0$ وفاصلة المماس الثاني $x_B=\frac{5}{3}$ الترتيب: النقطتين لهما ذات الترتيب $y=0$ نشتق التابع وفق: $f'(x)=\frac{3x^2-18x+15}{(x-3)^2}$ كتابة معادلة المماس الأول: النقطة: $A(0,0)$ الميل: $m=f'(0)=\frac{5}{3}$ المعادلة: $T_1: y=\frac{5}{3}(x-0)+0\to y=\frac{5}{3}x$ كتابة معادلة المماس الثاني: النقطة: $B\left(\frac{5}{3},0\right)$ الميل: $m=f'\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{15}{4}$ المعادلة: $T_2: y=-\frac{15}{4}\left(x-\frac{5}{3}\right)+0\to y=-\frac{15}{4}x+\frac{75}{12}$
السادسة	اكتب معادلة المماس للخط البياني C_f في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$	نحل المعادلة $f''(x)=0$ وحل المعادلة هو فاصلة لنقطة التماس. تحديد نقطة التماس: تحديد الفاصلة: $x_A=$ (حل المعادلة $f''(x)=0$) تحديد التراتيب: $y_A=f(x_A)$ تحديد الميل: نشتق التابع يكون الميل هو $m=f'(x_A)$ كتابة المعادلة: $y=m(x-x_A)+y_A$	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x^3-2x^2+1$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$ الحل: تحديد النقطة: بما أنّ فاصلة نقطة التماس هي النقطة التي تعدم $f''(x)$ فإننا لتحديد فاصلة نقطة التماس نحل المعادلة $f''(x)=0$ $f'(x)=3x^2-4x$ $f''(x)=6x-4$ $\to f''(x)=0$ $6x-4=0\to x=\frac{2}{3}$ الفاصلة: $x_A=\frac{2}{3}$ الترتيب: $y_A=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{11}{27}$ النقطة: $A\left(\frac{2}{3},\frac{11}{27}\right)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x)=3x^2-4x$ $m=f'\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}$ المعادلة: $T: y=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{11}{27}\to y=-\frac{4}{3}x+\frac{35}{27}$
السابعة	اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f علماً أنّ ميله m.	نحل المعادلة $f'(x)=m$ وحل المعادلة هو فاصلة لنقطة التماس. تحديد نقطة التماس: تحديد الفاصلة: $x_A=$ (حل المعادلة $f'(x)=m$) تحديد التراتيب: $y_A=f(x_A)$ تحديد الميل m : m (مُعطى)	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f إذا علمت أنّ ميل المماس $m=0$ الحل: تحديد النقطة: لتحديد فاصلة نقطة التماس نحل المعادلة $f'(x)=m$ $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\to f'(x)=0\to\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0\to x=0$ الفاصلة: $x_A=0$ الترتيب: $y_A=f(0)=1$ النقطة: $A(0,1)$ الميل: $m=0$ المعادلة: $T: y=0(x-0)+1\to y=1$

الثامنة	اكتب معادلة المماس للخط البياني C_f المار من $A(x_A, y_A)$	نفرض أنّ نقطة التماس هي $M(a, f(a))$ نوجد $f'(x)$ فتكون: $m = f'(a)$ نكتب معادلة المماس وفق: $T: y = m(x - x_M) + y_M$ بما أنّ المماس مار من A فهذا يعني أنّ إحداثيات النقطة A تحقق معادلة المماس ونعوض هذه الإحداثيات بمعادلة المماس فنحصل على قيمة a ثم نعوض قيم a في معادلة T فنحصل على المماسات المطلوبة.	ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x^2 + 1$ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f المار من المبدأ. الحل: تحديد النقطة: بفرض أنّ الفاصلة: $x_A = a$ ومنة الترتيب: $y_A = f(a) = a^2 + 1$ النقطة: $A(a, a^2 + 1)$ تحديد الميل: نوجد $f'(x)$ وفق: $f'(x) = 2x$ $m = f'(a) = 2a$ المعادلة: $T: y = m(x - x_A) + y_A$ $y = 2a(x - a) + a^2 + 1$ $y = 2ax - a^2 + 1 \dots (*)$ بما أنّ T مماس مار من المبدأ فإنّ النقطة $(0,0)$ تحقق معادلة المماس: $0 = 2a(0) - a^2 + 1$ $-a^2 + 1 = 0 \to a^2 = 1$ إما $a = 1$ نعوض في $(*)$ وفق: $T_1: y = 2x$ أو $a = -1$ نعوض في $(*)$ وفق: $T_2: y = -2x$

حالات خاصة لمعادلة المماس:

نص السؤال	فكرة الحل
اكتب معادلة المماس T الذي يوازي المستقيم d (ميله معلوم أو يُحسب)	يكون: $m_T = m_d$ ولكتابة المعادلة نتابع كما سبق.
اكتب معادلة المماس T الذي يعامد المستقيم d (ميله معلوم أو يُحسب)	يكون: $m_T . m_d = -1$ ولكتابة المعادلة نتابع كما سبق.
اكتب معادلة المماس T المار بالنقطتين A و B	يكون: $m_T = \frac{\text{فرق الوايات}}{\text{فرق الإكسات}}$ ولكتابة المعادلة نتابع كما سبق.
اكتب معادلة المماس T المرسوم في شكل	نحدد نقطتين من الشكل تنتميان إلى المماس يكون: $m_T = \frac{\text{فرق الوايات}}{\text{فرق الإكسات}}$ ولكتابة المعادلة نتابع كما سبق.
اكتب معادلة المماس الأفقي	يكون: $m_T = 0$ ومعادلة المماس هي: $y = y_A$
اكتب معادلة المماس الشاقولي	يكون: m_T غير معرّف. ومعادلة المماس هي: $x = x_A$
اكتب معادلة المماس في القيمة الحدية الصغرى أو الكبرى.	يكون: $m_T = 0$ ومعادلة المماس هي: $y = y_A$

النمط الثاني	اختبار وجود مماس
نص السؤال	هل يقبل الخط البياني مماساً ميله m "حيث الميل إما معلوم أو يُحسب"
فكرة الحل	* نحل المعادلة $f'(x) = m$ * نميز الحالات: الحالة الأولى: إذا كانت المعادلة مستحيلة الحل فهذا يعني ان الخط البياني لا يقبل مماسا ميله m الحالة الثانية: إذا كان للمعادلة حل وحيد فهذا يعني أنّ: الخط البياني يقبل مماسا ميله m هذا الحل هو فاصلة نقطة التماس "ولكتابة معادلة هذا المماس نتابع كما سبق" الحالة الثالثة: إذا كان للمعادلة حلّان فهذا يعني أنّ: الخط البياني يقبل مماسان ميل كل منهما هو m وحلول المعادلة هي فواصل نقاط التماس "ولكتابة معادلة كل مماس نتابع كما سبق" الحالة الرابعة: وهكذا ... انتبه: عدد الحلول هو عدد المماسات

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 + x - 3$$

الطلب الأول:

هل يقبل C مماساً ميله $m = 0$

الحل: نحل المعادلة $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 1$

$\to f'(x) = 0$

$3x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -\frac{1}{3}$

مستحيلة الحل

ومنة الخط البياني لا يقبل مماساً ميله $m = 0$

الطلب الثاني:

هل يقبل C مماساً ميله $m = 1$

الحل: نحل المعادلة $f'(x) = 1$

$3x^2 + 1 = 1$

$x^2 = 0 \to x = 0$

ومنة الخط البياني يقبل مماساً ميله $m = 1$

في النقطة التي فاصلتها $x_A = 0$

وترتيبها $y_A = f(0) = -3$ ومعادلته:

$T: y = 1(x - 0) - 3$

$y = x - 3$

الطلب الثالث:

هل يقبل C مماساً ميله $m = 13$

الحل: نحل المعادلة $f'(x) = 13$

$$3x^2 + 1 = 13$$

$$x^2 = 4$$

إما $x = 2$

أو $x = -2$

نلاحظ أنّ الخط البياني يقبل مماسان

المماس الأول:

تحديد النقطة:

الفاصلة: $x_A = 2$

الترتيب: $y_A = f(2) = 7$

النقطة: $A(2,7)$

الميل: $m = 13$

المعادلة: $T_1: y = 13(x-2) + 7$

$$y = 13x - 19$$

المماس الثاني:

تحديد النقطة:

الفاصلة: $x_B = -2$

الترتيب: $y_B = f(-2) = -13$

النقطة: $B(-2,-13)$

الميل: $m = 13$

المعادلة: $T_2: y = 13(x+2) - 13$

$$y = 13x + 13$$

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$$

الطلب الأول:

اكتب معادلة لمماس C في النقطة التي فاصلتها تساوي 1

الحل:

تحديد النقطة:

الفاصلة: $x_A = 1$

الترتيب: $y_A = f(1) = -\frac{1}{2}$

الميل: نوجد $f'(x)$ وفق:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2}$$

$$m = f'(1) = -\frac{1}{4}$$

المعادلة:

$$T: y = -\frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

الطلب الثاني:

هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = -4x$ ؟

الحل:

ميل المستقيم y هو $m = -4$ ومنه:

نحل المعادلة $f'(x) = -4$

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} = -4$$

$$\frac{5x^2 + 10x}{x^2 + 2x + 1} = 0$$

$$5x^2 + 10x = 0$$

$$5x(x+2) = 0$$

إما $x = 0$

أو $x = -2$

نلاحظ أنّ الخط البياني يقبل مماسان

المماس الأول:

تحديد النقطة:

الفاصلة: $x_A = 0$

الترتيب: $y_A = f(0) = 1$

النقطة: $A(0,1)$

الميل: $m = -4$

المعادلة: $T_1: y = -4(x+0) + 1$

$$y = -4x + 1$$

المماس الثاني:

تحديد النقطة:

الفاصلة: $x_B = -2$

الترتيب: $y_B = f(-2) = -11$

النقطة: $B(-2,-11)$

الميل: $m = -4$

المعادلة: $T_2: y = -4(x+2) - 11$

$$y = -4x - 19$$

الطلب الثالث:

هل يقبل C مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x - 2y = 0$ ؟

الحل:

ميل المستقيم $3x - 2y = 0$

هو $m = \frac{3}{2}$ ومنه نحل المعادلة:

$$f'(x) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2} = \frac{3}{2}$$

$$2x^2 + 4x - 8 = 3x^2 + 6x + 3$$

$$x^2 + 2x + 11 = 0$$

$$a = 1\,, b = 2\,, c = 11$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$= 4 - 44$$

$$= -40 < 0$$

مستحيلة الحل

ومنه الخط البياني لا يقبل مماس يوازي المستقيم الذي معادلته $3x - 2y = 0$

التقريب التآلفي المحلي:

الاستخدام: يُستخدم التقريب التآلفي المحلي في حساب صورة عدد عشري وفق القانون: $f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

نص السؤال:

- احسب قيمة تقريبية لـ $f(a+h)$
- باستخدام التقريب التآلفي
- أوجد قيمة لـ $x = a + h$
- استنتج القيمة التقريبية للتابع f عند $x = a + h$

فكرة الحل:

- لدينا $x = a + h$ عدد عشري:
- نحدد a حيث a عدد صحيح مناسب.
- نحدد h حيث h عدد عشري صغير جداً

$h = x - a$ ويتم ذلك وفق:

$h = x - a$	a	$x = a + h$
0.1	4	**4.1**
0.3	0	**0.3**
0.3	15	**15.3**
−0.3	16	**15.7**
−0.1	4	**3.9**
0.3	−6	**−5.7**
0.1	1	**1.1**

- نشتق التابع f
- نوجد كلاً من $f'(a)$ و $f(a)$
- نطبق القانون: $f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

تمرين:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \sqrt{x}$

احسب قيمة تقريبية لـ $f(16.1)$.

$$a = 16 \;\;,\;\; h = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a).h$$

$$f(16.1) \cong f(16) + f'(16).\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\cong 4 + \frac{1}{8}.\left(\frac{1}{10}\right) \cong \frac{321}{80} \cong 4.0125$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = \sin x$

احسب قيمة تقريبية للعدد $f(0.1)$.

$$a = 0 \;\;,\;\; h = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a).h$$

$$f(0.1) \cong f(0) + f'(0).\left(\frac{1}{10}\right) \cong 0 + 1.\left(\frac{1}{10}\right) \cong \frac{1}{10} \cong 0.1$$

قابلية الاشتقاق عند نقطة

أنماط التمارين:

النمط الأول	قابلية الاشتقاق عند a		
الحالة	الأولى	الثانية	الثالثة
نص السؤال	* هل التابع f اشتقاقي عند a؟ وفسر النتيجة هندسياً. * ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a وفسر النتيجة هندسياً.	ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a من اليمين وفسر النتيجة هندسياً.	ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a من اليسار وفسر النتيجة هندسياً.
فكرة الحل	نشكل التابع المساعد g "تابع تعريف العدد المشتق" وفق: $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ حيث مجموعة تعريفه تعطى: $D_g = D_f \backslash \{a\}$ نوجد $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ ونميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ فإنّ التابع f غير اشتقاقي عند a التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل مماساً شاقولياً معادلته $x = a$ الحالة الثانية: إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ حيث l عدد حقيقي فإنّ: التابع f اشتقاقي عند a وقيمة مشتقة $f'(a) = l$ التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل مماساً ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$ نكتب معادلة المماس وفق: $y = m(x-a) + f(a)$	نشكل التابع المساعد g وفق: $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نوجد $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)$ ونميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$ فإنّ: التابع f غير اشتقاقي عند a من اليمين التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل نصف مماس شاقولي من اليمين معادلته $x = a$ الحالة الثانية: إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = l$ حيث l عدد حقيقي فإنّ: التابع f اشتقاقي عند a من اليمين وقيمة مشتقة $f'(a^+) = l$ التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل نصف مماس من اليمين ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$ نكتب معادلة نصف المماس وفق: $y = m(x-a) + f(a)$	نشكل التابع المساعد g وفق: $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نوجد $\lim\limits_{x\to a^-} g(x)$ ونميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = \infty$ فإنّ: التابع f غير اشتقاقي عند a من اليسار التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل نصف مماس شاقولي من اليسار معادلته $x = a$ الحالة الثانية: إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = l$ حيث l عدد حقيقي فإنّ: التابع f اشتقاقي عند a من اليسار وقيمة مشتقة $f'(a^-) = l$ التفسير الهندسي: الخط البياني C_f يقبل نصف مماس من اليسار ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$ نكتب معادلة نصف المماس وفق: $y = m(x-a) + f(a)$

تنويه:

أحياناً يكون نص السؤال ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند a وكان التابع f يحوي قيمة مطلقة فإننا:
نتخلص منها ونناقش حالتين من اليمين ومن اليسار أو بالاعتماد على مجموعة تعريف التابع g فإننا ندرس نهايته عند a من اليمين ومن اليسار

فكرة الحل:

* نشكل التابع المساعد g وفق: $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
* نوجد $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^-} g(x)$
* ونميز:

<table>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \boxed{\ }$</td><td colspan="4">$\lim\limits_{x\to a^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} g(x)$
يكون التابع f غير اشتقاقي عند a</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boxed{\ } = \infty$
التابع f غيراشتقاقي عند a والخط البياني يقبل مماس شاقولي معادلته $x = a$</td><td rowspan="2">$\boxed{\ } = l$
التابع f اشتقاقي عند a والخط البياني يقبل مماس ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$</td><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = \boxed{\ }$</td><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \boxed{\ }$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{\ } = \infty$
التابع f غير اشتقاقي عند a من اليسار والخط البياني يقبل نصف مماس شاقولي من اليسار معادلته $x = a$</td><td>$\boxed{\ } = l$
التابع f اشتقاقي عند a من اليسار والخط البياني يقبل نصف مماس من اليسار ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$</td><td>$\boxed{\ } = \infty$
التابع f غير اشتقاقي عند a من اليمين والخط البياني يقبل نصف مماس شاقولي من اليمين معادلته $x = a$</td><td>$\boxed{\ } = l$
التابع f اشتقاقي عند a من اليمين والخط البياني يقبل نصف مماس من اليمين ميله $m = l$ في النقطة $(a, f(a))$</td></tr>
</table>

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

نشكل التابع المساعد $g(x)$ المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

إذاً f غير قابل للاشتقاق عند الصفر ويقبل مماساً شاقولياً معادلته $x = 0$.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x^2.\sqrt{x}$$

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

نشكل التابع المساعد $g(x)$ المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$g(x)=\frac{x^2.\sqrt{x}-0}{x-0}=x\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to0}g(x)=0$$

إذاً f اشتقاقي عند الصفر ويقبل مماساً ميله $m=0$ في النقطة A التي فاصلتها $x_A=0$ وترتيبها $y_A=f(0)=0$.

نكتب معادلة المماس وفق:

$$T: y=m(x-x_A)+y_A$$

$$y=0(x-0)+0$$

$$y=0$$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $[0,1[$:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

الطلب الأول:

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر؟

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $]0,1[$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}-0}{x-0}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

$$g(x)=\frac{1}{x}.\frac{x.\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x\to0}g(x)=0$$

إذاً f اشتقاقي عند الصفر ويقبل مماساً ميله $m=0$ في النقطة A التي فاصلتها $x_A=0$ وترتيبها $y_A=f(0)=0$.

نكتب معادلة المماس وفق:

$$T: y=m(x-x_A)+y_A$$

$$y=0(x-0)+0$$

$$y=0$$

الطلب الثاني:

احسب $f'(x)$ على $]0,1[$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x^3}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}=\frac{\frac{-2x^3+3x^2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

$$=\frac{2x^3+3x^2}{2(1-x)^2.\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}$$

التمرين الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=x-3+2\sqrt{x-1}$$

هل التابع f اشتقاقي عند $a=1$ ؟ وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $]1,+\infty[$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\frac{x-3+2.\sqrt{x-1}-(-2)}{x-1}$$

$$=\frac{x-1+2.\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1}g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{x-1+2.\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$=\frac{x-1\left(1+\frac{2}{\sqrt{x-1}}\right)}{x-1}$$

$$=1+\frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x\to1}g(x)=1+\frac{2}{0^+}=+\infty$$

إذاً التابع f غير اشتقاقي عند 1 والخط البياني يقبل مماس شاقولي معادلته $x=1$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0,2]$ وفق:

$$f(x)=x.\sqrt{x(2-x)}$$

الطلب الأول:

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر؟ وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $]0,2]$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\frac{x.\sqrt{x(2-x)}}{x}=\sqrt{x(2-x)}$$

$$\lim_{x\to0}g(x)=0$$

إذاً f اشتقاقي عند الصفر ويقبل مماساً ميله $m=0$ في النقطة A التي فاصلتها $x_A=0$ وترتيبها $y_A=f(0)=0$.

نكتب معادلة المماس وفق:

$$T: y=m(x-x_A)+y_A$$

$$y=0(x-0)+0$$

$$y=0$$

الطلب الثاني:

هل التابع f اشتقاقي عند الـ 2 وفسر النتيجة هندسياً.

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $[0,2[$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\frac{x.\sqrt{x(2-x)}-0}{x-2}=\frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2}g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x-2}$$

$$=\frac{x^2\left(x(2-x)\right)}{(x-2)\left(x\sqrt{x(2-x)}\right)}$$

$$=\frac{x^2(-x)}{x\sqrt{x(2-x)}}=\frac{-x^2}{\sqrt{x(2-x)}}$$

$$\lim_{x\to2}g(x)=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

إذاً التابع f غير اشتقاقي عند 2 والخط البياني يقبل مماس شاقولي معادلته $x=2$

التمرين السادس:

ليكن التابع f المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية بالصيغة:

$$f(x)=3x^2-4$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الـ 5 واحسب $f'(5)$.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{5\}$

$$g(x)=\frac{f(x)-f(5)}{x-5}$$

$$=\frac{3x^2-4-71}{x-5}=\frac{3x^2-75}{x-5}$$

$$\lim_{x\to5}g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{3x^2-75}{x-5}$$

$$=\frac{3(x^2-25)}{x-5}$$

$$=\frac{3(x-5)(x+5)}{x-5}$$

$$=3x+15$$

$$\lim_{x\to5}g(x)=30$$

التابع f اشتقاقي عند الـ 5 والخط البياني يقبل مماس ميله $m=30$ في النقطة A التي فاصلتها $x_A=5$ وترتيبها $y_A=f(5)=71$ ومعادلتها:

$$T: y=30x-79$$

حساب $f'(5)$:

$$f'(x)=6x$$

$$f'(5)=30$$

بقدرِ الكدِّ تُكتسَبُ المَعالِي .. 😔🥇💙

التمرين السابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف وفق:

$$D_g =]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$$

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \frac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x-0} = \frac{\frac{x+2-2x-2}{x+1}}{x}$$

$$= -\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = -\frac{1}{1} = -1$$

إذاً التابع f اشتقاقي والخط البياني يقبل مماس ميله $m=-1$ في النقطة A التي فاصلتها $x_A = 0$ وترتيبها $y_A = 2$

ومعادلته من الشكل:

$$T: y = -x + 2$$

التمرين الثامن:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = (3x+1).\sin x$$

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر؟

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $\mathbb{R}^*$

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \frac{(3x+1).\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{(3x+1).\sin x}{x}$$

$$= (3x+1).\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = (1)(1) = 1$$

علماً أنّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط البياني يقبل مماس ميله $m = 1$ في النقطة A وفاصلتها $x_A = 0$ وترتيبها $y_A = f(0) = 0$ ومعادلته:

$$T; y = x$$

التمرين التاسع:

التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right), f(0) = 0$$

في حالة $x \neq 0$ والمطلوب:

الطلب الأول:

هل التابع f اشتقاقي عند الصفر؟ علل إجابتك.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $\mathbb{R}^*$

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \frac{x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0} = x.\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

لإيجاد النهاية نستخدم الإحاطة.

نعلم أنّ:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

الحالة الأولى: $x < 0$:

نضرب بـ x بشرط $x < 0$ وفق:

$$-x \geq x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$$

$$-x \geq g(x) \geq x$$

$$\lim_{x\to 0^-}(-x) = \lim_{x\to 0^-}(x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$$

الحالة الثانية: $x > 0$:

نضرب بـ x بشرط $x > 0$ وفق:

$$-x \leq x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$-x \leq g(x) \leq x$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-x) = \lim_{x\to 0^+}(x) = 0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$$

وبما أنّ:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$$

ومنه:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط البياني يقبل مماس ميله $m = 0$ في النقطة A التي فاصلتها $x_A = 0$ وترتيبها $y_A = 0$ ومعادلته: $T: y = 0$

الطلب الثاني:

احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

الحل:

$$f(x) = x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 2x\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)x^2$$

$$f'(x) = 2x.\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

التمرين العاشر:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر.

$$f(x) = x.|x|$$

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $\mathbb{R}^*$:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \frac{x.|x|-0}{x-0} = |x|$$

الحالة الأولى: إذا كان $x < 0$:

$$g(x) = -x$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$$

الحالة الثانية: إذا كان $x > 0$:

$$g(x) = x$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$$

وبما أنّ:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$$

إذاً:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

التابع f اشتقاقي عند الصفر والخط البياني يقبل مماس ميله $m = 0$ في النقطة $A(0,0)$ ومعادلته: $T: y = 0$

التمرين الحادي عشر:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر

$$f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$$

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $\mathbb{R}^*$:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \frac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1}-0}{x-0} = \frac{x^2+|x|}{x^3+x}$$

الحالة الأولى: إذا كان $x < 0$:

$$g(x) = \frac{x^2-x}{x^3+x}$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{x^2-x}{x^3+x}$$

$$= \frac{x(x-1)}{x(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = -1$$

الحالة الثانية: إذا كان $x > 0$:

$$g(x) = \frac{x^2+x}{x^3+x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x) = \frac{x^2+x}{x^3+x}$$

$$= \frac{x(x+1)}{x(x^2+1)} = \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$$

بما أنّ:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x)$$

التابع f غير اشتقاقي عند الصفر.

عندما $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = -1$

الخط البياني يقبل نصف مماس من اليسار

ميله $m=-1$ في النقطة $A(0,0)$

معادلته: $T: y=-x$

عندما $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$

الخط البياني يقبل نصف مماس من اليمين

ميله $m=1$ في النقطة $A(0,0)$

معادلته: $T: y=x$

التمرين الثاني عشر:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$$

الطلب الأول:

ما نهاية التابع f عند الـ $-\infty$ ؟

الحل:

نتخلص من القيمة المطلقة وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x^2+1} & ; x>0\\[2mm] \dfrac{x^2-x}{x^2+1} & ; x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$$

الطلب الثاني:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الصفر من اليمين وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $\mathbb{R}^*$:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x^2+x}{x^2+1}-0}{x-0}=\frac{x^2+x}{x^3+x}$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{x^2+x}{x^3+x}=\frac{x(x+1)}{x(x^2+1)}=\frac{x+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=\frac{1}{1}=1$$

التابع f اشتقاقي عند الصفر من اليمين

والخط البياني يقبل نصف مماس من اليمين

ميله $m=1$ في النقطة $A(0,0)$

ومعادلته: $T: y=x$

التمرين الثالث عشر:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x+4}{1+|2-x|}$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الـ 2 وفسر النتيجة هندسياً.

الحل:

ليكن لدينا التابع g المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{\frac{x+4}{1+|2-x|}-6}{x-2}=\frac{\frac{x+4-6-6|2-x|}{1+|2-x|}}{x-2}=\frac{x-2-6|2-x|}{(x-2)(1+|2-x|)}$$

للتخلص من القيمة المطلقة فإننا ندرس إشارة مضمونها وفق:

$$2-x=0\to x=2$$

ننظم جدول الإشارة وفق:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	0	$-$
$\lvert 2-x\rvert$	$2-x$	$\lvert$	$x-2$

عندما $x<2$:

تكون $|2-x|=2-x$ ويكون التابع g

$$=\frac{x-2-6(2-x)}{(x-2)(1+2-x)}=\frac{x-2+6(x-2)}{(x-2)(3-x)}=\frac{(x-2)(1+6)}{(x-2)(3-x)}$$

$$g(x)=\frac{7}{3-x}$$

$$\lim_{x\to2^-} g(x)=7$$

عندما $x>2$:

تكون $|2-x|=x-2$ ويكون التابع g

$$=\frac{x-2-6(x-2)}{(x-2)(1+x-2)}=\frac{(x-2)(-5)}{(x-2)(x-1)}=\frac{-5}{x-1}$$

$$\lim_{x\to2^+} g(x)=-5$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x\to2^-} g(x)\neq\lim_{x\to2^+} g(x)$$

إذاً التابع f غير اشتقاقي عند الـ 2 .

التفسير الهندسي:

لدينا:

$$\lim_{x\to2^-} g(x)=7$$

التابع f اشتقاقي عند الـ 2 من اليسار والخط البياني C_f يقبل نصف مماس من اليسار في النقطة $A(2,6)$ ميله $m=7$ ومعادلته:

$$T_1: y=7x-8$$

لدينا:

$$\lim_{x\to2^+} g(x)=-5$$

التابع f اشتقاقي عند الـ 2 من اليمين والخط البياني C_f يقبل نصف مماس من اليمين في النقطة $B(2,6)$ ميله $m=-5$ ومعادلته:

$$T_2: y=-5x+16$$

	النمط الثاني: استنتاج نهاية	النمط الثالث: إزالة حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$
نص السؤال	أوجد كلّا من: $f(a)$ ، $f'(x)$ $f'(a)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	عند ظهور حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ وكان المقام عبارة عن: " المسبق $-x$ " فإننا نستخدم طريقة العدد المشتق. أوجد نهاية التابع f عند الـ a
فكرة الحل	١. نوجد كلّاً من: $f(a)$ ، $f'(x)$ $f'(a)$ ٢. قانون يدلنا على استنتاج النهاية: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$	١. نأخذ تابع g وفق: $g(x)$ هو المقدار من البسط الذي يحوي x ٢. نوجد $g(a)$ ، $g'(x)$ $g'(a)$ ٣. تكون $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$

التمرين الأول:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \sin x$$

الطلب الأول:

أوجد $f(\pi)$ و $f'(x)$ و $f'(\pi)$:

الحل:

$$f(\pi) = 0$$
$$f'(x) = \cos x$$
$$f'(\pi) = -1$$

الطلب الثاني:

استنتج: $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$
$$= \lim_{x \to \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = f'(\pi) = -1$$

التمرين الثاني:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{2x + 10}$$

الطلب الأول:

أوجد $f(3)$ و $f'(x)$ و $f'(3)$:

الحل:

$$f(3) = 4$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 10}}$$
$$f'(3) = \frac{1}{4}$$

الطلب الثاني:

استنتج: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x+10} - 4}{x - 3}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x + 10} - 4}{x - 3}$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = \frac{1}{4}$$

التمرين الثالث:

ليكن التابع $g(x) = \tan x$ والمطلوب:

الطلب الأول:

أوجد $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $g'(x)$ و $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

الحل:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$g'(x) = 1 + \tan^2 x$$
$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

الطلب الثاني:

استنتج: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$
$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

التمرين الرابع:

ليكن f تابع معرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

الطلب الأول:

أوجد $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ و $f'(x)$ و $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$:

الحل:

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$
$$f'(x) = \cos x - \sin x$$
$$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

الطلب الثاني:

استنتج: $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}$$
$$= \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{x + \frac{\pi}{4}} = f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

التمرين الخامس:

في كل من الحالات الآتية , احسب في حال وجودها نهاية التابع f عند a المشار إليها.

1. $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$	$a = 0$
2. $f(x) = \frac{\tan x}{x}$	$a = 0$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$	$a = 1$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{x-1}$	$a = 1$
5. $f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$	$a = \frac{\pi}{4}$
6. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1}$	$a = 1$
7. $f(x) = \frac{\sin x}{x - \pi}$	$a = \pi$
8. $f(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x+1}$	$a = -1$
9. $f(x) = \frac{\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{x + \frac{\pi}{8}}$	$x = -\frac{\pi}{8}$
10. $f(x) = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{1-x}$	$a = 1$
11. $f(x) = \frac{\sin\left(\pi\left(\sqrt{1-x}\right)\right)}{x}$	$a = 0$

الحل:

1. $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}\ ; a = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \cos x$$
$$g(0) = 1$$
$$g'(x) = -\sin x$$
$$g'(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 0$$

2. $f(x) = \frac{\tan x}{x}\ ; a = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \tan x$$
$$g(0) = 0$$
$$g'(x) = 1 + \tan^2 x$$
$$g'(0) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 1$$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}\ ; a = 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \sqrt{x + 1}$$
$$g(1) = \sqrt{2}$$
$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}$$
$$g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}\right)$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{x-1}\ ; a = 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$$
$$g(1) = 2$$
$$g'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 2}}$$
$$g'(1) = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1}\right)$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = \frac{3}{4}$$

اليوم هو فرصتك لتبني الغد الذي تريده .. 🏆💙

5. $f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}\ ;\ a = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \tan x$$
$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$
$$g'(x) = 1 + \tan^2 x$$
$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right)$$
$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

6. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x - 1}\ ;\ a = 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$
$$g(1) = \sqrt{2}$$
$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$
$$g'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1} \right)$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

7. $f(x) = \frac{\sin x}{x - \pi}\ ;\ a = \pi$

$$\lim_{x \to \pi} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \sin x$$
$$g(\pi) = 0$$
$$g'(x) = \cos x$$
$$g'(\pi) = -1$$
$$\lim_{x \to \pi} \left(\frac{\sin x}{x - \pi} \right)$$
$$= \lim_{x \to \pi} \frac{g(x) - g(\pi)}{x - \pi} = g'(\pi) = -1$$

8. $f(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x + 1}\ ;\ a = -1$

$$\lim_{x \to -1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$
$$g(-1) = 0$$
$$g'(x) = -\frac{\pi}{2} . \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$
$$g'(-1) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \to -1} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x + 1} \right)$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = g'(-1) = \frac{\pi}{2}$$

9. $f(x) = \frac{\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{x + \frac{\pi}{8}}\ ;\ a = -\frac{\pi}{8}$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{8}} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \sin 2x$$
$$g\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$g'(x) = 2\cos 2x$$
$$g'\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$$
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{8}} \left(\frac{\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{x + \frac{\pi}{8}} \right)$$
$$= \lim_{x \to -\frac{\pi}{8}} \frac{g(x) - g\left(-\frac{\pi}{8}\right)}{x + \frac{\pi}{8}} = g'\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$$

10. $f(x) = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{1 - x}\ ;\ a = 1$

$$f(x) = -\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{x - 1}$$
$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = -\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$
$$g(1) = 0$$
$$g'(x) = \frac{3\pi}{2} . \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$$
$$g'(1) = -\frac{3\pi}{2}$$
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{-\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{x - 1} \right)$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = -\frac{3\pi}{2}$$

11. $f(x) = \frac{\sin(\pi\sqrt{1-x})}{x}\ ;\ a = 0$

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

ليكن:

$$g(x) = \sin\left(\pi\sqrt{1 - x}\right)$$
$$g(0) = 0$$
$$g'(x) = \frac{-\pi}{2\sqrt{1 - x}} \cos\left(\pi\sqrt{1 - x}\right)$$
$$g'(0) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin\left(\pi\sqrt{1 - x}\right)}{x} \right)$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = \frac{\pi}{2}$$

التمرين السادس:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}\ ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ 2A + 2\ ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

الطلب الأول:

احسب نهاية التابع f عند الـ $\frac{\pi}{2}$

الحل:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

ليكن لدينا: التابع $g(x)$ المعرف وفق:

$$g(x) = \cos x$$
$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$g'(x) = -\sin x$$
$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

ومنه:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \right]$$
$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{g(x) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right] = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

الطلب الثاني:

احسب قيمة A التي تجعل f مستمر على $\mathbb{R}$:

الحل:

لدينا $x \mapsto \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ مستمر على $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ وحتى يكون مستمر على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمر عند الـ $\frac{\pi}{2}$ وبذلك يتحقق:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \ldots (*)$$

لدينا:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = -1$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2A + 2$$

نعوض في علاقة $(*)$ فنجد:

$$-1 = 2A + 2$$
$$2A = -3$$
$$A = -\frac{3}{2}$$

قابلية الاشتقاق على مجال:

النمط	الأول	الثاني
نص السؤال	أوجد المجموعة التي تنجز عليها المشتقة	هل التابع f اشتقاقي على المجال
فكرة الحل	* جميع التوابع ما عدا (تابع الجذر التربيعي وتابع القيمة المطلقة وتابع الفروع) تكون اشتقاقية على مجموعة تعريفها نفسها. * تابع الجذر التربيعي وتابع القيمة المطلقة وتابع الفروع تكون اشتقاقية على مجموعة تعريفها بعد فتح المجالات	* مجموع أو جداء أو قسمة تابعين اشتقاقيين على I يكون اشتقاقي على I أيّ: ليكن u و v تابعين اشتقاقيين على I وليكن $k \in \mathbb{R}$ عندئذٍ يكون: - $u.v$ اشتقاقي على I - $u+v$ اشتقاقي على I - $k.u$ اشتقاقي على I - $\frac{u}{v}$ اشتقاقي على I بشرط الـ $v \neq 0$ - $\frac{1}{v}$ اشتقاقي على I بشرط $v \neq 0$ * ليكن g تابعاً اشتقاقياً على مجال J وليكن u تابعاً اشتقاقياً على مجال I ولنفرض أنه أياً كان x من I انتمى $u(x)$ إلى J عندئذ يكون التابع f المعرف وفق: $f(x)=g(u(x))$ اشتقاقيا على I * إذا كان u تابعاً موجباً واشتقاقياً على مجال I كان التابع f المعرف بالصيغة $f(x)=\sqrt{u(x)}$ اشتقاقياً على I * ليكن n عدداً صحيحاً لا يساوي الصفر وليكن u تابعاً اشتقاقياً على مجال I ولا ينعدم على I في حالة $n>0$ عندئذ يكون التابع f المعرف وفق $f(x)=(u(x))^n$ اشتقاقياً على I * كل تابع اشتقاقي على I يكون اشتقاقي على أي مجال جزئي منه. تنويه: في التابع الجذري لدراسة قابلية الاشتقاق في حال كان المجال مغلق فإننا ندرس قابلية الاشتقاق على مرحلتين: المرحلة الأولى: ندرس قابلية الاشتقاق على المجال المفتوح (بالاعتماد على المناقشات والقواعد السابقة) المرحلة الثانية: ندرس قابلية الاشتقاق عند الأطراف المغلقة (باستخدام قابلية الاشتقاق عند a)

التمرين الأول:

فيما يأتي احسب التابع المشتق للتابع f مبيناً المجموعة التي تُحسب المشتق عليها:

1.	$f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{\sqrt{2}}{3}$
2.	$f(x)=\frac{x^2+3x-1}{4}$
3.	$f(x)=x^4-2x\sqrt{x}$
4.	$f(x)=\frac{2}{x+1}-x$
5.	$f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$
6.	$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$
7.	$f(x)=x\cos x$
8.	$f(x)=\frac{\sin x}{x}$
9.	$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$
10.	$f(x)=\sin x.\cos x$
11.	$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-1}$
12.	$f(x)=\frac{1+\sin x}{2+\cos x}$
13.	$f(x)=\cos^2 3x$
14.	$f(x)=\sin^3 2x$
15.	$f(x)=\frac{1}{\sin^2 3x}$
16.	$f(x)=\frac{1}{\cos^3 2x}$

الحل:

1. $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{\sqrt{2}}{3}$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=2x^2-x+1$$

2. $f(x)=\frac{x^2+3x-1}{4}$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{x}$$

3. $f(x)=x^4-2x\sqrt{x}$

التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=4x^3-3\sqrt{x}$$

4. $f(x)=\frac{2}{x+1}-x$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x-3}{(x+1)^2}$$

5. $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$

$$f'(x)=\frac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2}$$

6. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$

$$f'(x)=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

7. $f(x)=x\cos x$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\cos x-x.\sin x$$

8. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$

$$f'(x)=\frac{x.\cos x-\sin x}{x^2}$$

9. $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$

نعدم المقام:

$$\cos x=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k\,;k\in\mathbb{Z}$$

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+\pi k\,;k\in\mathbb{Z}\}$$

$$f'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

10. $f(x)=\sin x.\cos x$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$$

11. $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-1}$

نعدم المقام:

$$\sin x-1=0$$

$$\sin x=1$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\,;k\in\mathbb{Z}$$

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\,;k\in\mathbb{Z}\}$$

$$f'(x)=\frac{-\sin^2 x+\sin x-\cos^2 x}{(\sin x-1)^2}$$

$12.\ f(x) = \frac{1+\sin x}{2+\cos x}$

نعدم المقام:

$$2 + \cos x = 0$$
$$\cos x = -2$$

مستحيلة الحل.

إذاً التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2}$$

$13.\ f(x) = \cos^2 3x$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -6\sin(3x)\cos(3x)$$

$14.\ f(x) = \sin^3 2x$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6\sin^2 2x \,.\cos 2x$$

$15.\ f(x) = \frac{1}{\sin^2 3x}$

نعدم المقام:

$$\sin^2 3x = 0$$
$$\sin 3x = 0$$
$$3x = \pi k\ ;k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{3}k\ ;k \in \mathbb{Z}$$

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{3}k\ ;k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$f'(x) = \frac{-6\sin 3x \,.\cos 3x}{\sin^4 3x}$$

$16.\ f(x) = \frac{1}{\cos^3 2x}$

نعدم المقام:

$$\cos^3 2x = 0$$
$$\cos 2x = 0$$
$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k\ ;k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\ ;k \in \mathbb{Z}$$

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\ ;k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$f'(x) = \frac{-6\sin 2x}{\cos^4 2x}$$

التمرين الثاني:

في كل من الحالات الآتية تحقق هل f اشتقاقي على المجال I :

1.	$f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}$	$I =]1, +\infty[$
2.	$f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-3}$	$I =]3, +\infty[$
3.	$f(x) = \frac{-1}{x(x-1)}$	$I =]0, 1[$
4.	$f(x) = \frac{-4x^2+2x-9}{10-8x}$	$I =]\frac{5}{4} + \infty[$
5.	$f(x) = (2x^2-3)\left(\frac{1}{x}\right)$	$I = \mathbb{R}^*$
6.	$f(x) = x^2 . cos\, x$	$I = \mathbb{R}$
7.	$f(x) = \cos x + 3x$	$I = \mathbb{R}$
8.	$f(x) = \tan x - x$	$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
9.	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
10.	$f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$	$I = \mathbb{R}$
11.	$f(x) = \sqrt{x-1}$	$I =]1, +\infty[$
12.	$f(x) = \sqrt{x}$	$I =]0, +\infty[$
13.	$f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$	$I =]0, 2[$
14.	$f(x) = x^2\sqrt{x}$	$I = [0, +\infty[$
15.	$f(x) = \sqrt{x-1}$	$I = [1, +\infty[$

.١

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ فهو اشتقاقي على $I =]1, +\infty[$

.٢

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ فهو اشتقاقي على $I =]3, +\infty[$

.٣

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ فهو اشتقاقي على $I =]0,1[$

.٤

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\backslash\{\frac{5}{4}\}$ فهو اشتقاقي على $I =]\frac{5}{4}, +\infty[$

.٥

$x \mapsto (2x^2 - 3)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $I = \mathbb{R}^*$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$

ومنهُ التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$ لأنه عبارة عن جداء تابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}^*$

.٦

$x \mapsto x^2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$x \mapsto \cos x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

ومنهُ التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه عبارة عن جداء تابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$

.٧

$x \mapsto \cos x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$x \mapsto 3x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

ومنهُ التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه عبارة عن مجموع تابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$

.٨

$x \mapsto \tan x$ اشتقاقي على:

$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\ ;k \in \mathbb{Z}\right\}$ فهو اشتقاقي على المجال $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$x \mapsto x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ومنهُ التابع f اشتقاقي على I

.٩

التابع f اشتقاقي على

$$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\ ;k \in \mathbb{Z}\right\}$$

إذاً التابع f اشتقاقي على I

.١٠

$x \mapsto x^2 + 2x + 3$ موجب واشتقاقي على $\mathbb{R}$

.١١

$x \mapsto x - 1$ موجب واشتقاقي على $]1, +\infty[$ ، إذاً التابع f اشتقاقي على I

.١٢

$x \mapsto x$ موجب واشتقاقي على $]0, +\infty[$ ومنهُ f اشتقاقي على I

.١٣

$x \mapsto x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $]0,2[$

$x \mapsto x(2-x)$ موجب واشتقاقي على $]0,2[$ إذاً التابع f اشتقاقي على I

.١٤

المرحلة الأولى:

دراسة قابلية الاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$:

$x \mapsto x^2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$x \mapsto x$ موجب واشتقاقي على $]0, +\infty[$

إذاً التابع f اشتقاقي على $]0, +\infty[$ لأنه جداء تابعان اشتقاقيان على $]0, +\infty[$

المرحلة الثانية:

دراسة قابلية الاشتقاق عند الصفر:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$
$$= \frac{x^2 . \sqrt{x}}{x} = x\sqrt{x}$$
$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

إذاً التابع f اشتقاقي عند الصفر.

مما سبق نستنتج أنّ التابع f اشتقاقي على المجال $I = [0, +\infty[$

.١٥

المرحلة الأولى:

دراسة قابلية الاشتقاق على المجال $]1, +\infty[$:

$x \mapsto x - 1$ موجب واشتقاقي على $]1, +\infty[$ ، إذاً f اشتقاقي على $]1, +\infty[$

المرحلة الثانية:

دراسة قابلية الاشتقاق عند الواحد:

ليكن لدينا التابع $g(x)$ المعرف على:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 1} = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$$

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

إذاً التابع f غير اشتقاقي عند الواحد ومما سبق نجد أنّ f غير اشتقاقي على المجال $[1, +\infty[$

تذكرة: المعادلات المثلثية:

	$\cos x = \cos\theta$	$\sin x = \sin\theta$
الحالة العامة	$\cos x = \cos\theta$ حلّها: إما $x = \theta + 2\pi k$ أو $x = -\theta + 2\pi k$	$\sin x = \sin\theta$ حلّها: إما $x = \theta + 2\pi k$ أو $x = \pi - \theta + 2\pi k$
الحالة الخاصة	* $\cos\theta = 0 \to \theta = \frac{\pi}{2} + \pi k$ * $\cos\theta = 1 \to \theta = 2\pi k$ * $\cos\theta = -1 \to \theta = \pi + 2\pi k$	* $\sin x = 0 \to x = \pi k$ * $\sin x = 1 \to x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ * $\sin x = -1 \to x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$
مثال	حل المعادلة الآتية: $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$ إما: $3x + \frac{\pi}{3} = 2x + 2\pi k$ $3x - 2x = 2\pi k - \frac{\pi}{3} \to x = 2\pi k - \frac{\pi}{3}$ أو: $3x + \frac{\pi}{3} = -2x + 2\pi k \to 3x + 2x = 2\pi k - \frac{\pi}{3}$ $5x = 2\pi k - \frac{\pi}{3} \to x = \frac{2\pi k}{5} - \frac{\pi}{15}$	حل المعادلة الآتية: $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3} \to \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ إما: $3x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \to 3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} + 2\pi k$ $3x = \frac{2\pi}{15} + 2\pi k \to x = \frac{2\pi}{45} + \frac{2\pi k}{3}$ أو: $3x + \frac{\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k \to 3x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{5} + 2\pi k$ $3x = \frac{7\pi}{15} + 2\pi k \to x = \frac{7\pi}{45} + \frac{2\pi k}{3}$
انتباه	$\sin\theta$ و $\cos\theta$ قيمتها محصورة بين الـ -1 والـ 1 تمرين: $\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 3$ مستحيلة الحل.	

استنتاج مشتق:

نص السؤال	استنتج مشتق التابع $h(x)$
فكرة الحل	* نكتب التابع $h(x)$ بدلالة $f(x)$ * نستنتج المشتق حسب قواعد الاشتقاق * وتذكر: إذا كان لدينا تابع $h(x)$ من الشكل: $h(x) = f\big(g(x)\big)$ فإنّ مشتقه هو: $h'(x) = g'(x).f'\big(g(x)\big)$

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2 - x}}{2 + x}$$

الطلب الأول:

احسب $f'(x)$.

الحل:

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{2 - x}\right)'(2 + x) - (1)\left(\sqrt{2 - x}\right)}{(2 + x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6 + x}{2\sqrt{2 - x}(2 + x)^2}$$

الطلب الثاني:

استنتج مشتق كل من التوابع الآتية:

$$h(x) = \frac{\sqrt{2 + \sin x}}{2 - \sin x}$$

$$h(x) = f(-\sin x)$$

$$h'(x) = (-\sin x)'.f'(-\sin x)$$

$$h'(x) = -\cos x \, . \frac{-6 - \sin x}{2\sqrt{2 + \sin x}\,(2 - \sin x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{6\cos x + \cos x \, . \sin x}{2\sqrt{2 + \sin x}\,(2 - \sin x)^2}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{2 - \cos x}}{2 + \cos x}$$

$$g(x) = f(\cos x)$$

$$g'(x) = (\cos x)'.f'(\cos x)$$

$$g'(x) = \frac{6\sin x - \sin x \, . \cos x}{2\sqrt{2 - \cos x}\,(2 + \cos x)^2}$$

$$l(x) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{x}}}{2 + \sqrt{x}}$$

$$l(x) = f\left(\sqrt{x}\right)$$

$$l'(x) = \left(\sqrt{x}\right)'.f'\left(\sqrt{x}\right)$$

$$l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\frac{-6 + \sqrt{x}}{2\sqrt{2 - \sqrt{x}}.\left(2 + \sqrt{x}\right)^2}$$

$$k(x) = \frac{\sqrt{2 - \tan x}}{2 + \tan x}$$

$$k(x) = f(\tan x)$$

$$k'(x) = (\tan x)'.f'(\tan x)$$

$$k'(x) = (1 + \tan^2 x).\frac{-6 + \tan x}{2\sqrt{2 + \tan x}\,.(2 + \tan x)^2}$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$$

الطلب الأول:

عين التابع المشتق f' للتابع f

الحل:

$$f'(x) = \frac{2(x - 1) - (1)(2x + 3)}{(x - 1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = -\frac{5}{(x - 1)^2}$$

الطلب الثاني:

نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ وفق: $g(x) = f(\sin x)$

أثبت أنّ g اشتقاقي على I ثم احسب $g'(x)$ على I

الحل:

نعدم المقام:

$$\sin x = 1$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\,;k\in\mathbb{Z}$$
$$D_g=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\,;k\in\mathbb{Z}\right\}$$

التابع g اشتقاقي على D_g فهو اشتقاقي على I .

$$g'(x)=(\sin x)'.f'(\sin x)$$
$$g'(x)=\cos x.\frac{-5}{(\sin x-1)^2}$$
$$g'(x)=\frac{-5\cos x}{(\sin x-1)^2}$$

الطلب الثالث:

نرمز بالرمز h إلى التابع المعرف على $j=]1,+\infty[$ وفق: $h(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$

أثبت أنّ h اشتقاقي على j ثم احسب $h'(x)$ على j

الحل:

$$h(x)=\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}$$

التابع h معرف على:

$$D_h=[0,1[\cup]1,+\infty[$$

التابع h اشتقاقي على D_h فهو اشتقاقي على I .

$$h'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'.f'\left(\sqrt{x}\right)$$
$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\frac{-5}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

التمرين الثالث:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}x^2.\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & ;x\neq 0\\ 0 & ;x=0\end{cases}$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ التابع f اشتقاقي عند $x=0$

الحل:

ليكن لدينا التابع h المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$h(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$h(x)=\frac{x^2.\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)-0}{x-0}$$
$$h(x)=x.\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

إحاطة $\lim_{x\to0}h(x)\to$

$$-1\le\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\le1$$

عندما $x>0$:

$$-x\le x.\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\le x$$
$$-x\le h(x)\le x$$
$$\lim_{\to0^+}(-x)=\lim_{x\to0^+}(x)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to0^+}h(x)=0$$

عندما $x<0$:

$$-x\ge x.\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\ge x$$
$$-x\ge h(x)\ge x$$
$$\lim_{x\to0^-}(-x)=\lim_{x\to0^-}(x)=0$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد:

$$\lim_{x\to0^-}h(x)=0$$

نلاحظ أنّ:

$$\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^-}h(x)=0$$
$$\to\lim_{x\to0}h(x)=0$$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند $x=0$

وَأُفَوِّضُ أَمْرِي إِلَى اللَّهِ 💙

الطلب الثاني:

اكتب معادلة المماس لـ C_f في النقطة التي فاصلتها $x=0$.

الحل:

هي ذاتها التفسير الهندسي للطلب الأول:

بما أنّ التابع f اشتقاقي عند الصفر فإن الخط البياني يقبل مماساً في النقطة $A(0,0)$ ميله $m=0$ ومعادلتهُ:

$$T:y=0$$

الطلب الثالث:

احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)$.

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

استنتاج $\lim_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)=+\infty$$

الطلب الرابع:

أوجد $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$:

الحل:

$$f'(x)=x^2.\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)+\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)(x^2)$$
$$=2x.\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)+\pi.\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

الطلب الخامس:

استنتج مشتق التابع:

$$g(x)=(x^2+1)^2.\cos\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)$$

الحل:

نلاحظ أنّ:

$$g(x)=f(x^2+1)$$
$$g'(x)=(x^2+1)'.f'(x^2+1)$$
$$=(4x^3+4x).\cos\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)+2\pi x.\sin\left(\frac{\pi}{x^2+1}\right)$$

المشتقات من مراتب عُليا:

تمهيد:

- المشتق الأول للتابع f رمزه $f'(x)$
- المشتق الثاني للتابع f رمزه $f''(x)$
- المشتق من المرتبة n للتابع f رمزه $f^n(x)$
- قاعدة:

$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'$$

انتبه: كل حرف مختلف عن x هو ثابت مشتقه هو الصفر.

التمرين الأول:

في كل حالة من الحالات الآتية احسب المشتقات من المراتب 1 و 2 و 3 للتابع f المعرف بالعلاقة المشار إليها وحدد في كل حالة المجموعة التي تحسب عليها المشتق:

1. $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+x-1$

$$f'(x)=3x^2-x+1$$
$$f''(x)=6x-1$$
$$f'''(x)=6$$

2. $f(x)=x\sqrt{x}$

$$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$
$$f''(x)=\frac{3}{2}.\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$
$$f'''(x)=\frac{-6}{16x\sqrt{x}}$$

$$3.\quad f(x)=\frac{1}{x-1}$$
$$f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$$
$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$
$$f'''(x)=\frac{-6}{(x-1)^4}$$

$$4.\quad f(x)=\cos 2x+\sin 2x$$
$$f'(x)=-2\sin 2x+2\cos 2x$$
$$f''(x)=-4\cos 2x-4\sin 2x$$
$$f'''(x)=8\sin 2x-8\cos 2x$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$$

تحقق أن $\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=f(x)$ أياً يكن x من $\mathbb{R}$

استنتج أنه أياً يكن x من $\mathbb{R}$ كان:

$$(1+x^2)\cdot f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$$

الحل:

$$\underbrace{\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)}_{l_1}=\underbrace{f(x)}_{l_2}$$
$$l_1=\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)$$
$$=\sqrt{1+x^2}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$\sqrt{1+x^2}+x=f(x)=l_2$$

من الطلب السابق نعلم أن:

$$\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=f(x)$$

نشتق الطرفين

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)'\cdot f'(x)+f''(x)\cdot\sqrt{1+x^2}=f'(x)$$
$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x)+f''(x)\cdot\sqrt{1+x^2}=f'(x)$$

ننقل إلى الطرف الأيسر:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x)+f''(x)\cdot\sqrt{1+x^2}-f'(x)=0$$

نرتب:

$$f''(x)\cdot\sqrt{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x)-f'(x)=0$$

نضرب ب $\sqrt{1+x^2}$:

$$f''(x)\cdot(1+x^2)+x\cdot f'(x)-\underbrace{f'(x)\cdot\sqrt{1+x^2}}_{=f(x)}=0$$
$$(1+x^2)\cdot f''(x)+x\cdot f'(x)-f(x)=0$$

وهو المطلوب.

أنماط التمارين:

النمط الأول: إثبات صحة علاقة.

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ وفق: $f(x)=-\frac{1}{x}$

الطلب الأول: احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

$$f'(x)=-\left(\frac{-1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}$$
$$f''(x)=-\left(\frac{-2x}{x^4}\right)=\frac{-2}{x^3}$$

الطلب الثاني:

أثبت مستخدماً البرهان بالتدريج أنه مهما تكن $n\geq 1$ يعطى المشتق من المرتبة n بالصيغة: $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}$

وذلك في حالة $x\neq 0$

الحل:

لتكن الخاصة:

$$E(n):\underbrace{f^{(n)}(x)}_{l_1}=\underbrace{(-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}}_{l_2}$$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$:

$$l_1=f^{(1)}(x)=f'(x)=\frac{1}{x^2}$$
$$l_2=(-1)^2\cdot\frac{1!}{x^2}=\frac{1}{x^2}$$
$$l_1=l_2 \quad \text{محققة}$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}\ldots(*)$$

نثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أن:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1}=\underbrace{(-1)^{n+2}\cdot\frac{(n+1)!}{x^{n+2}}}_{l_2}$$

الإثبات:

$$l_1=f^{(n+1)}(x)\cdot\Big(\underbrace{f^{(n)}}_{(*)\text{من}}\Big)'=\left((-1)^{n+1}\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}\right)'$$
$$=\underbrace{((-1)^{n+1})'\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}}_{=0}+\left(\frac{n!}{x^{n+1}}\right)'\cdot(-1)^{n+1}$$
$$=\frac{-(n+1)x^n\cdot(1)\,n!}{(x^{n+1})^2}\cdot(-1)^{n+1}$$
$$=\frac{(-1)(n+1)x^n\cdot n!}{(x^{n+1})^2}\cdot(-1)^{n+1}=(-1)(-1)^{n+1}\frac{(n+1)\,n!}{x^{2n+2}\cdot x^n}$$
$$=(-1)^{n+2}\frac{(n+1)\,!}{x^{2n+2}\cdot x^{-n}}=(-1)^{n+2}\frac{(n+1)\,!}{x^{n+2}}=l_2$$

ملاحظة:

إذا كان المطلوب إثبات صحة علاقة تحوي $f^{(n)}(x)$ فإننا نستخدم الإثبات بالتدريج نمط المساواة مع الانتباه إلى أن القيمة الإبتدائية تكون $n=1$ وذلك في حال عدم وجود شرط البدء

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x\cos x$

احسب عند كل x من $\mathbb{R}$ المشتقات: $f'(x)$ و$f''(x)$ و $f'''(x)$ ثم

أثبت مستخدماً البرهان بالتريج أنه مهما تكن $n\geq 1$ فلدينا:

$$f^{(n)}(x)=x\cos\left[x+\frac{n\pi}{2}\right]+n\cos\left[x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right]$$

أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

الحل:

$$f'(x)=\cos x-x\sin x$$
$$f''(x)=-\sin x-\sin x-x\cos x$$
$$=-2\sin x-x\cos x$$
$$f'''(x)=-2\cos x-\cos x+x\sin x$$
$$=-3\cos x+x\sin x$$

لتكن الخاصة:

$$E(n):\underbrace{f^{(n)}}_{l_1}=\underbrace{x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)}_{l_2}$$

نثبت صحة $E(1)$:

$$l_1 = f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos x - x.\sin x$$

$$l_2 = x.\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos x = -x.\sin x + \cos x$$

$$= \cos x - x.\sin x$$

محققة $l_1 = l_2$

نفرض صحة $E(n)$:

$$f^{(n)} = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right) \dots (*)$$

نثبت صحة العلاقة $E(n+1)$: أي يجب إثبات أنّ:

$$\underbrace{f^{(n+1)}}_{l_1} = \underbrace{x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}_{l_2}$$

الإثبات

$$l_1 = f^{(n+1)} = \Big(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{(*)\text{من}}\Big)'$$

$$= \left(x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)'$$

$$= x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - x\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - n\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= x\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right) + (n+1)n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) = l_2$$

النمط الثاني: استنتاج علاقة ثم إثباتها:

تمرين:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

الطلب الأول:

أوجد عددين حقيقين a و b يحققان:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$

الحل:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{ax+a+bx-b}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$$

بالمقارنة مع: $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

نجد:

$$a+b = 2 \dots (1)$$

$$a-b = 0 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$2a = 2 \to a = 1$$

نعوض في (2) وفق:

$$1-b = 0 \to b = 1$$

$$\to f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

الطلب الثاني:

بالاستفادة مما سبق أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n \geq 1$ و x من $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4} + \frac{-6}{(x+1)^4}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n!)}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n!)}{(x+1)^{n+1}}$$

يجب إثباتها:

لتكن الخاصة $E(n)$

$$E(n):\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n!)}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n!)}{(x+1)^{n+1}}$$

نثبت صحة $E(1)$

$$l_1 = f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$l_2 = \frac{(-1)' \times 1}{(x-1)^2} + \frac{(-1)' \times 1}{(x+1)^2}$$

$$l_1 = l_2$$

نفرض صحة الخاصة $E(n)$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n!)}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n(n!)}{(x+1)^{n+1}} \dots (*)$$

نثبت صحة $E(n+1)$ أي يجب إثبات أنّ:

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{l_1} = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}}_{l_2}$$

$$l_1 = f^{(n+1)}(x) = \Big(\underbrace{f^{(n)}(x)}_{(*)\text{من}}\Big)'$$

$$= \frac{-(n+1)(x-1)^n(1)(-1)^n n!}{((x-1)^{n+1})^2} + \frac{-(n+1)(x-1)^n(1)(-1)^n n!}{((x+1)^{n+1})^2}$$

$$= \frac{(n+1)n!\,(-)(-1)^n}{(x-1)^{2n+2}\cdot(x-1)^{-n}} + \frac{(n+1)n!\,(-)(-1)^n}{(x+1)^{2n+2}\cdot(x-1)^{-n}}$$

$$= \frac{(n+1)!\,(-1)^{n+1}}{(x-1)^{n+2}} + \frac{(n+1)!\,(-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+2}} = l_2$$

اطراد تابع:

مبرهنة	ليكن f تابعاً اشتقاقياً على مجال I , تابعه المشتق f' ١. إذا كان f' موجباً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متزايداً تماماً على I ٢. إذا كان f' سالباً تماماً على I (باستثناء عدد منته من النقاط التي قد ينعدم عندها) كان f متناقصاً تماماً على I ٣. إذا كان f' معدوماً على I كان f ثابتاً على I
الخلاصة	نقصد بدراسة اطراد تابع هو تعرّف المجالات التي يكون f متزايد تماماً أو متناقص تماماً عليها أو ثابتة عليها ويمكن أن تُجزئ هذه الدراسة بالاستفادة من المقدمة السابقة عن طريق دراسة إشارة المشتق الأول وتنظيم جدول بهذه الدراسة (يُسمى جدول اطراد تابع) ويتم تنظيمه وفق:

x	مجموعة تعريف التابع f + القيم التي تعدم $f'(x)$
$f'(x)$	المشتقة + إشارات + أصفار

التمرين الأول:

ادرس اطراد التوابع الآتية المعرفة على R وفق:

$f(x) = x^3 + 3x - 2$
$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x$
$f(x) = x^4 - 4x + 3$

الحل:

الطلب الأول:

$$f(x) = x^3 + 3x - 2$$
$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

الطريقة الأولى:

$$3x^2 + 3 > 0$$

التابع متزايد

الطريقة ثانية:

$$f'(x) = 0$$
$$3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -3$$
$$x^2 = -1$$

مستحيلة الحل:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	

التابع f متزايد

الطلب الثاني:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x$$
$$f'(x) = -3x^2 + 4x - 3$$
$$f'(x) = 0$$
$$-3x^2 + 4x - 3 = 0$$
$$a = -3 \quad , \quad b = 4 \quad , \quad c = -3$$
$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$
$$= 16 - 36 = -20$$

مستحيلة الحل

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	

التابع f متناقص

الطلب الثالث:

$$f(x) = x^4 - 4x + 3$$
$$f'(x) = 4x^3 - 4$$
$$f'(x) = 0$$
$$4x^3 - 4 = 0$$
$$x^3 = 1 \to x = 1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

التمرين الثاني:

نتأمل التابع f المعرف على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x - \sin x$$

الطلب الأول: احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

إحاطة $\lim_{x\to+\infty} f(x) \to$

$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$1 \ge -\sin x \ge -1$$
$$x + 1 \ge x - \sin x \ge x - 1$$
$$f(x) \ge x - 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} (x - 1) = +\infty$$

استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى نجد أنّ:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

الطلب الثاني: أثبت أن f متزايد

$$f(x) = x - \sin x$$
$$f'(x) = 1 - \cos x$$
$$f'(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

إذاً التابع f متزايد على المجال $[0, +\infty[$

دراسة تغيرات تابع:

نص السؤال	ادرس تغيرات التابع f
فكرة الحل	١. نحدد مجموعة التعريف ونكتبها على هيئة مجالات ٢. نوجد النهايات عند أطراف مجالات مجموعة التعريف المفتوحة ونوجد الصورة عند الأطراف المغلقة ٣. نوجد $f'(x)$ ٤. نعدم $f'(x)$ أي نحل المعادلة $f'(x) = 0$ ٥. ننظم جدول التغيرات وفق: (جدول: x / $f'(x)$ / $f(x)$) حيث: ○ حقل x : نضع فيه: مجموعة تعريف التابع وقيم x التي تعدم $f'(x)$ "انتبه القيم توضع بالترتيب" ○ حقل $f'(x)$ نضع فيه: نضع العدد صفر تحت قيم x التي تعدم $f'(x)$ والإشارات والرمز (‖) قصيرة عندما يكون التابع f غير اشتقاقي انتبه: الرمز (‖) قصيرة فقط في حقل $f'(x)$ ○ حقل $f(x)$ نضع فيه: النهايات والصور والأسهم والرمز (‖) طويلة عندما يكون التابع f غير معرف انتبه: الرمز (‖) طويلة تأتي في حقل $f'(x)$ و $f(x)$ معاً ملاحظة: " نضع الشلمونة الطويلة عندما يكون المجال مفتوح عند عدد حقيقي فقط " انتبه: قيمة x التي تعدم $f'(x)$ نميز: ⁕ إذا كانت تنتمي الى مجموعة تعريف التابع (نصورها في التابع f) ⁕ أما إذا كانت لا تنتمي الى مجموعة تعريف التابع (لا نصورها ولا نضعها في جدول)

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

تمرين: ادرس تغيرات التابع f في كل من الحالات الآتية.

الحالة الأولى:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$$
$$D_f =]-\infty, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \,, \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

نشتق التابع:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

نعدم المشتق: $f'(x) = 0$

$$6x^2 + 6x = 0$$
$$6x(x + 1) = 0$$

إما $6x = 0$

$$x = 0 \to f(0) = 1$$

أو $x + 1 = 0$

$$x = -1 \to f(-1) = 2$$

ننظم جدول تغيرات التابع f وفق:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

الحالة الثانية:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 7}{x + 1}$$
$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$$

نشتق التابع:

$$f'(x)=\frac{(4x+1)(x+1)-(2x^2+x+7)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0$$
$$\frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}=0$$
$$2x^2+4x-6=0$$
$$2(x^2+2x-3)=0$$
$$x^2+2x-3=0$$
$$(x+3)(x-1)=0$$

إما $x=-3\to f(-3)=-11$

أو $x=1\to f(1)=5$

ننظم جدول التغيرات وفق:

x	$-\infty$		-1		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثالث:

$$f(x)=x-\sqrt{x^2+8}$$
$$D_f=]-\infty,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$

$$f(x)=x-\sqrt{x^2+8}$$
$$=\frac{x^2-x^2-8}{x+\sqrt{x^2+8}}=\frac{-8}{x+\sqrt{x^2+8}}$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

نشتق التابع:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+8}-x}{\sqrt{x^2+8}}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0\to\frac{\sqrt{x^2+8}-x}{\sqrt{x^2+8}}=0$$
$$\sqrt{x^2+8}-x=0$$
$$\sqrt{x^2+8}=x$$

بشرط $x>0$ نربع الطرفين.

$$x^2+8=x^2\to 8\neq 0$$

مستحيلة الحل ومنه $f'(x)$ لا ينعدم.

ننظم جدول التغيرات وفق:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

نحن نحاول..
نتسابق في الهمم، ونتحدى في الأفكار،
ونتقن في الإنجاز، ونحسن في العمل ✌🏻💙
نخبة..!! 🏅

قراءة جدول التغيرات:

إيجاد مجموعة التعريف D_f :

تحدد من حقل x وتكتب وفق:

$D_f=\underbrace{\text{أول قيمة في بداية الجدول , اخر قيمة في نهاية الجدول}}_{\text{مجال}}\setminus\{\text{قيم } x \text{ التي تقابل الرمز شلمونة طويلة}\}$

تمرين:

تأمل جداول التغيرات الآتية وحدد D_f مجموعة تعريف التابع f :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

$$D_f=]-\infty,+\infty[$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	0

$$D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$\Vert\,-\infty$	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	0

$$D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$$

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$$D_f=[-2,2]$$

إيجاد النهايات والصور:

ننظر نظرة مزدوجة إلى حقلي x و $f(x)$ معاً وتحدد وفق:

$$\lim_{x\to(\text{القيمة الموجودة في حقل } x)}f(x)=\text{القيمة المقابلة لها في حقل } f(x)$$

تمرين: تتأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

١. أوجد $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

٢. أوجد $f(1)$

$$f(1)=3$$

٣. أوجد $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	0

١. أوجد $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

٢. أوجد $f(0)$

$$f(0)=2$$

٣. أوجد $\lim_{x\to1^-}f(x)$ و $\lim_{x\to1^+}f(x)$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$$

المقاربات:

ننظر نظرة مزدوجة على حقلي x و $f(x)$

المقارب الشاقولي:

إذا كان لدينا في حقل x عدد وليكن a يقابله ∞ في حقل $f(x)$ فهذا يعني أن المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب شاقولي في جوار ∞

المقارب الأفقي:

إذا كان لدينا في حقل x ∞ يقابلها عدد وليكن b في حقل $f(x)$ فهذا يعني أن المستقيم الذي معادلته $y=b$ مقارب أفقي في جوار ∞

ملخص:

x	a	∞
$f'(x)$		
$f(x)$	∞	b

- المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب شاقولي في جوار الـ ∞
- المستقيم الذي معادلته $y=b$ مقارب أفقي في جوار الـ ∞

تمرين:

تأمل جداول التغيرات الآتية وحدد معادلة كل مقارب موجود.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$\Vert\,-\infty$	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	0

$x=0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$x=1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^- ومن اليمين نحو oy^+

$y=0$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$\Vert\,0$	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	0

$x=1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^+ ومن اليمين نحو oy^-

$y=0$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

المقارب المائل:

نص السؤال:

هل يوجد مقارب مائل للخط البياني في جوار ∞؟ علل إجابتك , مكرر دورات..

تمهيد:

المقارب الافقي والمائل مثل الضراير لا يجتمعان معاً في نفس الجوار أيّ:

- وجود مقارب افقي في جوار $-\infty$ يعني استحالة وجود مقارب مائل في جوار $-\infty$

* وجود مقارب أفقي في جوار $+\infty$ يعني استحالة وجود مقارب مائل في جوار $+\infty$

فكرة الحل:

١. نتحقق من وجود مقارب أفقي في جوار ∞

٢. نميز حالتين:

الحالة الأولى: وجود مقارب أفقي:
يعني استحالة وجود مقارب مائل

الحالة الثانية: عدم وجود مقارب أفقي:
يعني إمكانية وجود مقارب مائل

التمرين الأول:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$			1			$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	5	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	5

١. اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي وجدته

$y = 5$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$ والـ $+\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^- ومن اليمين نحو oy^+

٢. هل يوجد مقارب مائل في جوار $-\infty$

لا , بسبب وجود مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

التمرين الثاني:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

١. اكتب معادلة كل مقارب في حال وجوده

$y = 0$ مقارب شاقولي في جوار الـ $-\infty$

٢. هل يوجد مقارب مائل في جوار $-\infty$

لا , بسبب وجود مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

ملاحظة: تذكر للرسم: إذا كان لدينا عدد في حقل x يقابله عدد في حقل $f(x)$ فهذا يعني وجود نقطة حيث تكون:

* نقطة عادية عند المجال المغلق
* نقطة مفرغة عند المجال المفتوح

المماسات:

ننظر إلى الحقول الثلاثة المماس يحتاج:

١. نقطة التماس A

وتحدد من حقلي x و $f(x)$ وفق:

* x_A فاصلة نقطة التماس تُحدد من حقل x
* y_A ترتيب نقطة التماس يُحدد من حقل $f(x)$

٢. ميل المماس m:

ويُحدد من حقل $f'(x)$ ونميز:

الحالة الأولى:

إذا كان في حقل $f'(x)$ العدد صفر فهذا يعني أنّ الميل معدوم وبالتالي لدينا مماس أفقي معادلته:

$$y = y_A$$

أي: $y =$ (العدد الموجود تحت الصفر)

تمرين:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	-2		0		2
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

١. اكتب معادلة المماس الأفقي.

$y = 2$ مماس أفقي.

٢. اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 0 :

تحديد نقطة التماس:

تحديد فاصلة نقطة التماس: $x_A = 0$

تحديد ترتيب نقطة التماس: $y_A = 2$

ومنهُ النقطة $A(0,2)$

تحديد الميل: $m = 0$

نكتب المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$
$$= 0(x - 0) + 2 = 2$$

الحالة الثانية:

إذا كان في حقل $f'(x)$ الرمز شلمونة قصيرة($||$) فهذا يعني وجود مماس شاقولي معادلته:

$$x = x_A$$

أي: $x =$ (العدد الموجود فوق الشلمونة القصيرة)

تمرين:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	-2		0		2
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

اكتب معادلة كل مماس شاقولي في حال وجوده

$x = -2$ مماس شاقولي

$x = 2$ مماس شاقولي

الحالة الثالثة:

إذا كان في حقل $f'(x)$ يوجد عدد مختلف عن الصفر فهذا يعني: وجود مماس ميله هذا العدد ولكتابة معادلته نحتاج:

* نقطة التماس A :

١. فاصلة نقطة التماس x_A هي العدد الموجود فوق m في حقل x

٢. ترتيب نقطة التماس y_A هي العدد الموجود تحت m في حقل x

* ميل المماس: من حقل $f'(x)$
* وتكون المعادلة:

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

تمرين:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	3	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

اكتب معادلة كل مماس في حال وجوده.

$y = -1$ مماس أفقي

تحديد نقطة التماس:

تحديد فاصلة نقطة التماس: $x_A = -1$

تحديد ترتيب نقطة التماس: $y_A = 5$

ومنهُ النقطة $A(-1,5)$

تحديد الميل: $m = 3$

كتابة المعادلة:

$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$
$$= 3(x + 1) + 5$$
$$= 3x + 3 + 5$$
$$= 3x + 8$$

الحالة الرابعة:

إذا كان لدينا في حقل $f'(x)$ الرمز شلمونة قصيرة على يمينها وعلى يسارها أعداد مختلفة فهذا يعني وجود:

نصف مماس من اليسار ميله العدد الموجود يسار الشلمونة القصيرة والنقطة تحدد وفق:

* فاصلة النقطة هي العدد الموجود فوق الشلمونة القصيرة في حقل x
* ترتيب النقطة هي العدد الموجود تحت الشلمونة القصيرة في حقل $f(x)$

نصف مماس من اليمين ميله العدد الموجود يمين الشلمونة القصيرة والنقطة تحدد وفق:

* فاصلة النقطة هي العدد الموجود فوق الشلمونة القصيرة في حقل x
* ترتيب النقطة هي العدد الموجود تحت الشلمونة القصيرة في حقل $f(x)$

تمرين:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$3 \,\|\|\, -2$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	0

اكتب معادلة كل مماس وجدته

$y = -1$ مماس أفقي

كتابة معادلة نصف المماس من اليسار:

تحديد نقطة التماس:

تحديد فاصلة نقطة التماس: $x_A = -1$

تحديد ترتيب نقطة التماس: $y_A = 5$

ومنهُ النقطة $A(-1,5)$

تحديد الميل: $m = 3$

كتابة المعادلة:

$$T_1: y = m(x - x_A) + y_A$$
$$= 3(x + 1) + 5$$
$$= 3x + 3 + 5$$
$$= 3x + 8$$

كتابة معادلة نصف المماس من اليمين:
تحديد نقطة التماس:
تحديد فاصلة نقطة التماس: $x_B = -1$
تحديد ترتيب نقطة التماس: $y_B = 5$
ومنه النقطة $B(-1,5)$
تحديد الميل: $m = -2$
كتابة المعادلة:

$$\begin{aligned} T_1: y &= m(x-x_A)+y_A \\ &= -2(x+1)+5 \\ &= -2x-2+5 \\ &= -2x+3 \end{aligned}$$

ملاحظة:
ظهور الرمز شلمونة طويلة يعني عدم وجود مماس.

القيم الحدية:
تعريف:
ليكن f تابعاً معرفاً على مجال I فإنّ:
نقول أنّ القيمة $M = f(c)$ قيمة كُبرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة c إذا وُجد مجال مفتوح J يضم النقطة c ويحقق الشرط:
$$\forall x \in J \cap I \,;\, f(x) \le f(c)$$
نقول أنّ القيمة $m = f(d)$ قيمة صُغرى محلياً للتابع f يبلغها عند النقطة d إذا وُجد مجال مفتوح J يضم النقطة d ويحقق الشرط:
$$\forall x \in J \cap I \,;\, f(x) \ge f(d)$$

المُلخص:
* إذا انعدم f' وغيّر إشارته من الموجب إلى السالب كانت $f(c)$ قيمة كُبرى محلياً للتابع f
* إذا انعدم f' وغيّر إشارته من السالب إلى الموجب كانت $f(d)$ قيمة صُغرى محلياً للتابع f

القيم الحدية الكبرى:

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

$f(a) =$ ______
قيمة حدية كبرى محلياً

x		a	
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

$f(a) =$ ______
قيمة حدية كبرى محلياً

x		a
$f'(x)$	$+$	$\|\|$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$

$f(a) =$ ______
قيمة حدية كبرى محلياً

x	a	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$

$f(a) =$ ______
قيمة حدية كبرى محلياً

القيم الحدية الصغرى:

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

$f(a) =$ ______
قيمة حدية صغرى محلياً

x		a	
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

$f(a) =$ ______
قيمة حدية صغرى محلياً

x		a
$f'(x)$	$-$	$\|\|$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$

$f(a) =$ ______
قيمة حدية صغرى محلياً

x	a	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$

$f(a) =$ ______
قيمة حدية صغرى محلياً

أنماط التمارين:
النمط الأول:
تعيين القيم الحدية:
نص السؤال:
عيّن القيم الحدية المحلية مبيّناً نوعها.
التمرين الأول:
تأمل جدول التغيرات الآتي وحدد القيم الحدية محلياً:

x	-2		0		2
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$f(-2) = 0$ قيمة حديّة صغرى محلياً.
$f(0) = 2$ قيمة حدية كبرى محلياً.
$f(2) = 0$ قيمة حدية صغرى محلياً.

التمرين الثاني:
تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0			1			$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

هل توجد قيمة حدية؟؟
نعم , $f(0) = 0$ قيمة حدية كبرى محلياً.

النمط الثاني:
إثبات القيم الحدية:
نص السؤال:
أثبت أنّ $f(a)$ قيمة حدية محلياً:
فكرة الحل:
1. نثبت أن f اشتقاقي على مجال I يحوي a
2. نثبت أنّ $f'(a) = 0$ ويغيّر إشارته.

تمرين:
تتأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1. أثبت أنّ $f(-1) = 4$ قيمة حدية كُبرى محلياً
2. أثبت أنّ $f(1) = 0$ قيمة حدية صُغرى محلياً

ملاحظة:
عند الرمز شلمونة طويلة لا يوجد قيم حدية.

قابلية الاشتقاق:
* وجود شلمونة قصيرة أو طويلة ضمن الجدول يعني أن التابع غير اشتقاقي
* وجود العدد صفر أو عدد مغاير للصفر في حقل $f'(x)$ يعني أن التابع اشتقاقي
* تلخيص:

x			
$f'(x)$	$\|\|$	$\|\|$	صفر أو أي عدد
$f(x)$		$\|\|$	
	غير اشتقاقي		اشتقاقي

تمرين:
تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	0

1. هل التابع f اشتقاقي عند -3؟
نعم
2. هل التابع f اشتقاقي عند 1؟
نعم

صورة مجال:
الرمز: $f(I)$
حيث:
* I هو مجال يؤخذ من حقل x
* $f(I)$ هي صورة المجال I وتؤخذ من حقل $f(x)$

لإيجاد صورة مجال، نميز ثلاث حالات:
الحالة الأولى:
التابع f متزايد على المجال I فإننا نصور الأطراف نحافظ على الترتيب.

الحالة الثانية:

التابع f متناقص على المجال I فإننا:
نصور الأطراف ونعكس الترتيب.

الحالة الثالثة:

إذا كان التابع f متزايد ومتناقص معاً على المجال I فإننا: نجزئ المجال I إلى مجالات التزايد والتناقص دون حذف أو تكرار وذلك بإغلاق المجال مرة وفتحه مرة أخرى.

توضيح:

- في حال فتحنا المجالات يعني أننا حذفنا القيمة.
- في حال أغلقنا المجالات يعني أننا كررنا قيمة.
- ولتجنب الحذف أو التكرار فإننا مرة نغلق المجال ومرة نفتحه.
- تكون صورة المجال I هي اجتماع صور المجالات السابقة.
- القيمة وصورتها يكون لها نفس نوع المجال

تذكرة سريعة:

العملية تقاطع $(\cap)$:
هي العناصر المشتركة فقط.
العملية اجتماع $(\cup)$:
هي العناصر المشتركة وغير المشتركة.

التقاء مجال مفتوح مع مجال مغلق عند نفس القيمة:

- في العملية تقاطع نأخذ المجال المفتوح
- في العملية اجتماع نأخذ المجال المغلق

التمرين الأول:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

١. أوجد $f(]-\infty,-2])$

$$f(]-\infty,-2])=]3,4]$$

٢. أوجد $f(]-2,2])$

$$f(]-2,2])=[-1,4[$$

٣. أوجد $f(]2,+\infty[)$

$$f(]2,+\infty[)=]-1,+\infty[$$

٤. أوجد $f(]-\infty,2])$

$$f(]-\infty,2])$$
$$=f(]-\infty,-2])\cup f(]-2,2])$$
$$=]3,4]\cup[-1,4[$$
$$=[-1,4]$$

٥. أوجد $f(]-\infty,+\infty[)$

$$f(]-\infty,+\infty[)=f(]-\infty,-2[)$$
$$\cup f([-2,2[)\cup f([2,+\infty])$$
$$=]3,4[\cup]-1,4]\cup[-1,+\infty[$$
$$=[-1,+\infty[$$

التمرين الثاني:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|-\infty\nearrow$		3	$\searrow$	0

١. أوجد $f(]0,1])$

$$f(]0,1])=]-\infty,3]$$

٢. أوجد $f(]1,+\infty[)$

$$f(]1,+\infty[)=]0,3[$$

٣. أوجد $f([1,+\infty[)$

$$f([1,+\infty[)=]0,3]$$

٤. أوجد $f(]0,+\infty[)$

$$f(]0,+\infty[)$$
$$=f(]0,1])\cup f(]1,+\infty[)$$
$$=]-\infty,3]\cup]0,3[$$
$$=]-\infty,3]$$

المستقر الفعلي $f(D_f)$:

الرمز: $f(D_f)$

حيث:

- تعيين D_f من حقل x كما تعلمنا سابقاً.
- وتعيين الصورة $f(D_f)$ من حقل $f(x)$ أيضاً كما تعلمنا سابقاً.
- يعني المستقر الفعلي هو تحصيل حاصل.

تمرين:

تأمل جداول التغيرات الآتية وعيّن المستقر الفعلي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

$$D_f=]-\infty,+\infty[$$
$$f(]-\infty,+\infty)$$
$$=f(]-\infty,1[)\cup f([1,+\infty[)$$
$$=]-\infty,3[\cup]0,3]$$

x	0			1			3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$		$\|\|$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|\,0$	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

$$D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$$
$$f(]0,1[)\cup f(]1,3[)\cup f([3,+\infty[)$$
$$=]-\infty,0[\cup]3,+\infty[\cup]3,+\infty[$$
$$=]-\infty,+\infty[$$

x	2			5			$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$		$\|\|$		$+$	
$f(x)$	$\|\|\,2$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0

$$D_f=]2,5[\cup]5,+\infty[$$
$$f(]2,5[\cup]5,+\infty[)$$
$$=f(]2,5[)\cup f(]5,+\infty[)$$
$$=]2,+\infty[\cup]-\infty,0[$$
$$=]-\infty,+\infty[$$

حلول المعادلة $f(x)=m$:

النمط الأول:

نص السؤال:
أثبت (يعني تحتاج كتابة) أو تحقق أنّ للمعادلة $f(x)=m$ عدداً (معلوم) من الحلول على المجال I .

فكرة الحل:

- بالاعتماد على الجدول:
- نجزئ المجال I إلى مجالات التزايد والتناقص كلاً على حدا دون حذف أو تكرار.
- نحدد صور المجالات السابقة.
- نتحقق من انتماء m إلى الصور السابقة.
- عدد الانتماءات هو عدد الحلول

النمط الثاني:

نص السؤال:
ما عدد حلول المعادلة $f(x)=m$؟

فكرة الحل:

- ننظر إلى حقل $f(x)$ عدد انتماءات m للحقل هو عدد الحلول لكن انتبه دون حذف أو تكرار.
- عند وجود عدد في بداية الجدول ضمن حقل $f(x)$ أو نهايته يقابلها ∞ في حقل x يكون هذا العدد لا ينتمي إلى الحلول.

التمرين الأول: تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		0			1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=1$ ثلاثة حلول:

التابع f مستمر ومتزايد على المجال $]-\infty,0]$ ولدينا:

$$f(]-\infty,0])=]-\infty,3]$$
$$\rightarrow 1\in]-\infty,3]$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]0,1[$

$$f(]0,1[)=]-\infty,3[$$
$$\rightarrow 1\in]-\infty,3[$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]1,+\infty[$ ولدينا:

$$f(]1,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$$
$$\rightarrow 1\in]-\infty,+\infty[$$

ومنهُ نجد أنّ للمعادلة $f(x)=1$ ثلاثة حلول.

أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=3$ حلّان:

التابع f مستمر ومتزايد على المجال $]-\infty,0]$ ولدينا:

$$f(]-\infty,0])=]-\infty,3]$$
$$\rightarrow 3\in]-\infty,3]$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]0,1[$

$$f(]0,1[)=]-\infty,3[$$
$$\rightarrow 3\notin]-\infty,3[$$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]1,+\infty[$ ولدينا:

$$f(]1,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$$
$$\rightarrow 3\in]-\infty,+\infty[$$

ومنهُ نجد أنّ للمعادلة $f(x)=3$ حلّان.

أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة حلول:

التابع f مستمر ومتزايد على المجال $]-\infty, 0]$ ولدينا:

$f(]-\infty, 0]) =]-\infty, 3]$

$\rightarrow 0 \in]-\infty, 3]$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]0,1[$

$f(]0,1[) =]-\infty, 3[$

$\rightarrow 0 \in]-\infty, 3[$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]1, +\infty[$ ولدينا:

$f(]1, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$

$\rightarrow 0 \in]-\infty, +\infty[$

ومنهُ نجد أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة حلول.

التمرين الثاني:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0			1			3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$		$\|\|$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|0$	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -1$ ؟

حل وحيد.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$ ؟

حلّان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$ ؟

حل وحيد.

التمرين الثالث:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		0			1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	2

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$ ؟

حلّان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$ ؟

حلّان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 3$ ؟

ثلاثة حلول.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

حلّان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$ ؟

حلّان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ ؟

حلّان.

ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 7$ ؟

حل وحيد.

حلول متراجحة (قيم x):

النمط الأول: حلول المتراجحة من النمط:

$f'(x)$ إشارة تراجح 0

الحالة الأولى: $f'(x) > 0$

الحلول هي مجالات التزايد (المجالات مفتوحة)

الحالة الثانية: $f'(x) \geq 0$

الحلول هي مجالات التزايد (المجالات مغلقة)

الحالة الثالثة: $f'(x) < 0$

الحلول هي مجالات التناقص (المجالات مفتوحة)

الحالة الرابعة: $f'(x) \leq 0$

الحلول هي مجالات التناقص (المجالات مغلقة)

انتبه:

عند وجود الرمز شلمونة فحصراً المجالات تكون مفتوحة مهما كانت المتراجحة

التمرين الأول:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1. أوجد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

$S =]2, +\infty[$

2. أوجد حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$

$S = [2, +\infty[$

3. أوجد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

$S =]-\infty, 2[$

4. أوجد حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$

$S =]-\infty, 2]$

التمرين الثاني:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		-3			1			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0

أوجد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

$S =]-3, 1[$

أوجد حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$

$S = [-3, 1[$

أوجد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

$S =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$

أوجد حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$

$S =]-\infty, -3] \cup]1, +\infty[$

النمط الثاني: حلول المتراجحة من النمط:

$f(x)$ إشارة تراجح b

فكرة الحل:

- ننظر إلى حقل $f(x)$ ونضيف حقل وهمي (المتراجحة)
- نحدد متى تكون محققة أو غير محققة
- حلول المتراجحة هي المجالات من حقل x التي تقابل كلمة محققة

التمرين الأول:

تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0			1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$		0	$+$	
$f(x)$	$\|\|+\infty$	$\searrow$		2	$\nearrow$	$+\infty$

1. أوجد حلول المتراجحة $f(x) > 0$

$S =]0, +\infty[$

2. أوجد حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$

$S =]0, +\infty[$

3. أوجد حلول المتراجحة $f(x) < 0$

$S = \emptyset$

4. أوجد حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$

$S = \emptyset$

التمرين الثاني:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

1. أوجد حلول المتراجحة $f(x) > 2$

$S =]-\infty, 1[$

2. أوجد حلول المتراجحة $f(x) \geq 2$

$S =]-\infty, 1]$

3. أوجد حلول المتراجحة $f(x) < 2$

$S =]1, +\infty[$

4. أوجد حلول المتراجحة $f(x) \leq 2$

$S = [1, +\infty[$

إيجاد $\lim_{x \to a} f(f(x))$:

فكرة الحل:

بالاعتماد على جدول التغيرات نوجد كلا من:

- $\lim_{x \to a} f(x) = b$
- $\lim_{x \to b} f(x) = c$
- $\lim_{x \to a} f(f(x)) = c$

تمرين: تأمل جدول التغيرات الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

احسب $\lim_{x \to +\infty} f(f(x))$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = -\infty$

إيجاد مجموعة تعريف تابع:

أولاً: أوجد مجموعة تعريف التابع:

$g(x) = \sqrt{f(x)}$

أي يقصد حل المتراجحة $f(x) \geq 0$

ثانياً: أوجد مجموعة تعريف التابع:

$g(x) = \ln(f(x))$

أي يقصد حل المتراجحة $f(x) > 0$

ثالثاً: أوجد مجموعة تعريف التابع:

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$

تكون مجموعة تعريف التابع g هي:

$D_g = D_f \setminus \{$القيم التي تعدم $f(x)\}$

حقيقة الوصول ..
تكمن في قوة السعي 💙

الدورات:

التمرين الأول: دورة 2017 فصل نصفي:

نتأمل جدول تغيرات التابع f المعرف والمستمر على $\mathbb{R}$ وخطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

١. جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

٢. اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C

$y = 3$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

٣. هل $f(2) = 4$ قيمة حدية محلياً؟
لا ليست قيمة حدية محلياً.

٤. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$
حلّان.

التمرين الثاني: دورة 2018 الثانية:

نجد فيما يلي جدولاً لتغيّرات التّابع f المعرّف على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

١. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

٢. اكتب معادلة المقارب الأفقي للتابع.

$y = 2$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

٣. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.
حلّان.

٤. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f.

$f(2) = -1$ قيمة حدية صُغرى محلياً.

التمرين الثالث: دورة 2019 الأولى:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وخطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط البياني C

$y = 3$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f

$f(-1) = -2$ قيمة حدية صُغرى محلياً

احسب $f(]-1,2[)$

$f(]-1,2[) =]-2,4[$

التمرين الرابع: دورة 2020 الثانية:

نجد جانباً جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

١. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

٢. دلّ على القيم الحدية للتابع f مبيناً أنواعها.

$f(0) = 2$ قيمة حديّة صُغرى محلياً.

$f(4) = 6$ قيمة حدية كُبرى محلياً.

٣. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$
حل وحيد.

٤. جد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

$S =]0,4[$

التمرين الخامس: دورة 2021 الثانية:

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وخطه البياني C والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

١. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ واكتب معادلة المقارب الأفقي

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

٢. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$
حل وحيد

٣. دل على القيمة المحلية وبين نوعها

$f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة حديّة كُبرى محلياً.

٤. جد مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

$S =]0,1[$

التمرين السادس: دورة 2022 الأولى:

نتأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ خطه البياني C وفق:

x	$-\infty$			1			2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$\|\|$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

١. جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

٢. اكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي للخط C

$x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^- ومن اليمين نحو oy^+

$y = 2$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

٣. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟
حلّان.

٤. ما هي حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

$S =]-\infty,1[\cup]1,2[$

التمرين السابع: دورة 2023 الثانية:

ليكن لدينا جدول تغيرات التابع f المعرّف على $]-\infty,3]$ والمطلوب:

x	$-\infty$		0		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

١. جد $f(3)$ و $f(]-\infty,3])$

$f(]-\infty,3]) = [-1,5[$

$f(3) = -1$

٢. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$ ؟
ثلاثة حلول.

٣. حدّد حلول المتراجحة $f'(x) > 0$

$S =]0,1[$

٤. اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط C_f

$y = 5$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

٥. اكتب القيم الحدّية للتابع f مبيناً نوع كل منها

$f(0) = 0$ قيمة حديّة صُغرى محلياً.

$f(1) = 2$ قيمة حديّة كُبرى محلياً.

$f(3) = -1$ قيمة حدّية صُغرى محلياً.

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:

نجد جانباً جدول تغيّرات التابع f، والمطلوب:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

١. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$.
حل وحيد.

٢. ما عدد القيم الحدّية محلّياً للتابع f؟

$f(1) = 1$ قيمة حدّية كُبرى محلياً.

٣. اكتب معادلة مماس منحني التابع عند نقطة فاصلتها $x = 1$

$y = 1$ مماس أفقي.

وَيُدهشك اللّه بما تمنّيتهُ ..
بعد أن حسبتهُ مُستحيلاً 💙

التمرين الثاني:

نجد فيما يأتي جدول تغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$			-1				1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$\|\|$		$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	3

1. اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C

$y = 3$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$ والـ $+\infty$

$x = -1$ مقارب شاقولي من اليسار ومن اليمين نحو oy^+

$x = 1$ مقارب شاقولي من اليسار نحو oy^- ومن اليمين نحو oy^+

2. هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني C ؟

لا

3. هل يوجد للخط C مماسات أفقية؟

لا

4. أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]-1,1[$

التابع f مستمر ومتناقص على المجال $]-1,1[$

$f(]-1,1[) =]-\infty,+\infty[$

$\rightarrow 0 \in]-\infty,+\infty[$

ومنهُ يوجد للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]-1,1[$.

التمرين الثالث:

نجد جانباً جدول تغيّرات التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	6

1. جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 6$

2. اذكر قيمة حدية للتابع f، وبيّن نوعها.

$f(2) = 0$ قيمة حدية صُغرى محليّاً.

3. هل $f(5) = 4$ قيمة حدية للتابع؟

لا

4. اكتب معادلة كلّ مقارب أفقي للخط البياني للتابع.

$y = 2$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

$y = 6$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

5. اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x) = \ln(f(x))$

$D_g =]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

طلب إضافي:

اكتب مجموعة تعريف التابع $h(x) = \sqrt{f(x)}$

$D_h = \mathbb{R}$

التمرين الرابع:

نجد فيما يأتي جدولاً لتغيرات التابع f والذي خطه البياني C والمطلوب:

x	$-\infty$			-2				3			$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$\|\|$		$+$	1	$\|\|$	-2	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$		0		$\searrow$	-3

1. اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط البياني C

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

$y = -3$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

$x = -2$ مقارب شاقولي من اليسار ومن اليمين نحو oy^-

2. هل يوجد مقاربات مائلة للخط C

لا

3. هل يمكننا رسم مماس أفقي للخط C في إحدى نقاطه؟

لا

4. هل f اشتقاقي عند الـ 3 ؟

لا

5. عين القيم الحدية للتابع f

$f(3) = 0$ قيمة حدية كبى محلياً.

مبرهنة القيمة الوسطى:

نص السؤال	أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً على المجال $]a,b[$ حيث $I =]a,b[$ مجال جُزئي من مجموعة التعريف.
شرط التطبيق	1. أن تكون قاعدة الربط $f(x)$ معلومة. 2. أن تكون المعادلة $f(x)$ تساوي الصفر حصراً. 3. أن يكون عدد الحلول وحيد 4. أن يوجد في نص السؤال: حلاً وحيداً على المجال $]a,b[$ حيث: $I =]a,b[$ معطى. ولا يهم إن كانت المجالات مغلقة أو مفتوحة
فكرة الحل	1. نثبت أنّ f مستمر على المجال $I =]a,b[$ 2. نثبت أنّ f مُطرد على المجال I 3. نوجد $f(a)$ 4. نوجد $f(b)$ 5. نوجد $f(a) . f(b)$ ونميز: ☜ إذا كان: $f(a) . f(b) < 0$ فإن: للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً حيداً على المجال $I =]a,b[$ ملاحظة: في حال اختلال أحد الشروط السابقة فإننا ندرس تغيرات التابع f ونتابع كما ورد معنا في فكرة إثبات حلول المعادلة $f(x) = m$ في قراءة جدول التغيرات

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$

أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]2,3[$.

الحل:

التابع f مستمر ومطرد على المجال $]2,3[$ ولدينا:

$f(2) = -1$

$f(3) = 8$

$f(2) \times f(3) = -8 < 0$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]2,3[$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$

أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]1,2[$

الحل:

التابع f مستمر ومطرد على المجال $]1,2[$

ولدينا:

$f(1) = -1$

$f(2) = 4$

$f(1) \times f(2) = -4 < 0$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]1,2[$

التمرين الثالث:

أثبت أنّ للمعادلة $x^3 + x + 1$ حلاً وحيداً a في $\mathbb{R}$ ثم بيّن أنّ $a \in]-1,0[$

الحل:

يجب دراسة التغيرات للاختلال أحد شروط مبرهنة القيمة الوسطى.

$D_f =]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

نشتق التابع:

$f'(x) = 3x^2 + 1$

نعدم المشتق:

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 1 = 0$

$$x^2=-\frac{1}{3}$$
مستحيلة الحل.
ننظم جدول التغيرات وفق:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا التابع f مستمر ومتزايد على المجال $]-\infty,+\infty[$ ومنه:
$$f(]-\infty,+\infty[)$$
$$=]-\infty,+\infty[$$
$$0\in]-\infty,+\infty[$$
إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $\mathbb{R}$.
لدينا التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-1,0[$ حيث:
$$f(-1)=-1$$
$$f(0)=1$$
$$f(-1).f(0)<0$$
إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α يحقق:
$$\alpha\in]-1,0[$$

التمرين الرابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=[2,+\infty[$ وفق:
$$f(x)=x+\sqrt{x-2}-4$$
١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
٢. أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً على I ثم جد هذا الحل جبرياً.

الحل:

الطلب الأول:

التابع f معرف ومستمر على I ولدينا:
$$f(2)=-2$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$
التابع f اشتقاقي على المجال $]2,+\infty[$
$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$
$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x-2}+1}{2\sqrt{x-2}}$$
نعدم المشتق:
$$f'(x)=0$$
$$\frac{2\sqrt{x-2}+1}{2\sqrt{x-2}}=0$$
$$2\sqrt{x-2}+1=0$$
$$2\sqrt{x-2}=-1$$
$$\sqrt{x-2}=-\frac{1}{2}$$
مستحيلة الحل والمشتق $f'(x)$ لا ينعدم
ننظم جدول تغيرات التابع f :

x	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني:

التابع f مستمر ومتزايد على المجال I ولدينا:
$$f(I)=[-2,+\infty[$$
$$0\in[-2,+\infty[$$
إذاً المعادلة $f(x)=0$
تقبل حلاً وحيداً على I
الحل الجبري للمعادلة $f(x)=0$:
لدينا:
$$f(x)=0$$
$$x+\sqrt{x-2}-4=0$$
$$\sqrt{x-2}=4-x$$
بشرط: $4-x>0 \Leftarrow x<4$
نربع الطرفين:
$$x-2=(4-x)^2$$
$$x-2=16-8x+x^2$$
$$x^2-8x-x+16+2=0$$
$$x^2-9x+18=0$$
$$(x-6)(x-3)=0$$
إما $x-6=0\Rightarrow x=6$
مرفوض لأن: $x<4$
أو $x-3=0\Rightarrow x=3$
مقبول لأن: $x<4$

حصر حلول معادلة:

نص السؤال	أحياناً يكون المطلوب أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ عدداً من الحلول ثم احصر كلاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}
فكرة الحل	١. القسم الأول من السؤال تم سابقاً. ٢. القسم الثاني من السؤال: الحصر: الخطوات: * نبدأ بتقسيم المجال وفق $[a,a+10^{-1}]$ ثم نصور الأطراف ونميز: - جداء الصور سالب فإننا نتوقف ويكون المجال المطلوب. - جداء الصور ليس سالب فإننا ننتقل إلى المجال $]a+10^{-1},a+10^{-1}+10^{-1}[$ ثم نصور الأطراف ونتابع كما سبق.

التمرين الأول:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:
$$f(x)=x^3-3x+5$$

الطلب الأول:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
الحل:
$$Df=]-\infty,+\infty[$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$
التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:
$$f'(x)=3x^2-3$$
$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-3=0$$
$$3x^2=3\Rightarrow x^2=1$$
إما $x=1\Rightarrow f(1)=3$
أو $x=-1\Rightarrow f(-1)=7$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني:

تحقق أن للمعادلة $f(x)$ جذراً وحيداً يقع بين -3 و -2 احصر هذا الجذر في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}
الحل
التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-3,-2[$ ولدينا:
$$f(-3)=-13$$
$$f(-2)=3$$
إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على المجال $]-3,-2[$

الحصر:

x	$f(x)$
-3	-13
$-2{,}9$	$-10{,}689$
$-2{,}8$	$-8{,}552$
$-2{,}7$	$-6{,}582$
$-2{,}6$	$-4{,}776$
$-2{,}5$	$-3{,}125$
$-2{,}4$	$-1{,}624$
$-2{,}3$	$-0{,}267$
$-2{,}2$	$0{,}952$
$-2{,}1$	
-2	

نلاحظ أن: $f(-2{,}3)\times f(-2{,}2)<0$
إذا للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على المجال: $]-2{,}3,-2{,}2[$

الصفات التناظرية:

الفكرة	محور التناظر	التابع الزوجي	مركز التناظر	التابع الفردي	التابع الدوري
الصفة التناظرية	الخط البياني متناظر بالنسبة لمحور شاقولي معادلته $x = a$	الخط البياني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.	الخط البياني للتابع متناظر بالنسبة إلى نقطة $I(a,b)$	الخط البياني للتابع متناظر بالنسبة إلى المبدأ	
نص السؤال	الصيغة الأولى: أثبت أن المستقيم الذي معادلته $x = a$ هو محور تناظر الصيغة الثانية: أثبت أن الخط البياني متناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $x = a$	• ادرس زوجية التابع f • أثبت أن التابع f زوجي • أثبت أن الخط C محور تناظر	الصيغة الأولى: أثبت أن النقطة $I(a\,,b)$ هي مركز تناظر للخط البياني الصيغة الثانية: أثبت أن الخط البياني متناظر بالنسبة الى النقطة $I(a\,,b)$	• أثبت أن التابع f فردي • أثبت أن الخط C مركز تناظر • ادرس فردية التابع	أثبت أن التابع f دوري
طريقة الإجابة	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أيا كان $x \in D_f$ فإن: $2a - x \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(2a-x) = f(x)$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أياً كان $x \in D_f$ فإن: $-x \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(-x) = f(x)$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أياً كان $x \in D_f$ فإن: $2a - x \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(2a-x) + f(x) = 2b$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أياً كان $x \in D_f$ فإن: $-x \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(-x) = -f(x)$	يجب تحقق الشرطين: الشرط الأول: أياً كان $x \in D_f$ فإن: $x + T \in D_f$ الشرط الثاني: يجب تحقق العلاقة: $f(x+T) = f(x)$

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = -3x^2 + 5x - 1$$

أثبت أن المستقيم الذي معادلته $x = \frac{5}{6}$ هو محور تناظر للخط البياني C_f

$$a = \frac{5}{6} \Rightarrow 2a = \frac{5}{3}$$

الشرط الأول:

أياً كان: $x \in \mathbb{R}$ فإن: $3 - x \in \mathbb{R}$ محقق وضوحاً

الشرط الثاني:

$$f(2a-x) = f(x)$$

$$l_1 = f(2a-x) = f\left(\frac{5}{3} - x\right)$$

$$= -3\left(\frac{5}{3} - x\right)^2 + 5\left(\frac{5}{3} - x\right) - 1$$

$$= -3\left(\frac{25}{9} - \frac{10}{3}x + x^2\right) + \frac{25}{3} - 5x - 1$$

$$= -\frac{25}{3} + 10x - 3x^2 + \frac{25}{3} - 5x - 1$$

$$= -3x^2 + 5x - 1 = f(x) = l_2$$

ومنهُ الخط البياني متناظر بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $x = \frac{5}{6}$.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{5x^2+3}}$$

أثبت أن التابع f زوجي.

وما الصفة التناظرية لخطه البياني؟

الحل:

الشرط الأول:

أياً كان $x \in \mathbb{R}$ فإن: $-x \in \mathbb{R}$ محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(-x) = f(x)$$

$$l_1 = f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{5(-x)^2+3}}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{5x^2+3}} = f(x) = l_2$$

ومنهُ التابع f زوجي.

الخط البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

التمرين الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{3 + x^2}$$

أثبت أن الخط البياني C محور تناظر.

الشرط الأول:

أياً كان $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(-x) = f(x)$$

$$l_1 = f(-x) = \sqrt{3 + (-x)^2}$$

$$= \sqrt{3 + x^2} = f(x) = l_2$$

الشرط الثاني محقق إذا للخط البياني C محور تناظر.

التمرين الرابع:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

أثبت أن النقطة $I(-1,2)$ هي مركز تناظر للخط البياني C_f

$$a = -1 \Rightarrow 2a = -2$$

$$b = 2 \Rightarrow 2b = 4$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in \mathbb{R}/\{-1\}$ فإن: $-x \in \mathbb{R}/\{-1\}$

الإثبات..

$$x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$-x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$-2 - x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(2a-x) + f(x) = 2b$$

$$l_1 = f(-2-x) + f(x)$$

$$= \frac{2(-2-x)-1}{-2-x+1} + \frac{2x-1}{x+1}$$

$$= \frac{-4-2x-1}{-1-x} + \frac{2x-1}{x+1}$$

$$= \frac{-5-2x-2x+1}{-1-x} = \frac{4(-x-1)}{-x-1}$$

$$= 4 = 2b = l_2$$

إذا $I(-1,2)$ هي مركز تناظر للخط البياني.

التمرين الخامس:

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-1}$$

أثبت أن النقطة $I(1,4)$ هي مركز تناظر للخط البياني C_f

$$a = 1 \Rightarrow 2a = 2$$

$$b = 4 \Rightarrow 2b = 8$$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in \mathbb{R}/\{1\}$ فإنَّ: $-x \in \mathbb{R}/\{-1\}$

الإثبات..

$$x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$-x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$-2 - x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(2a-x) + f(x) = 2b$$

$$l_1 = f(2a-x) + f(x)$$

$$= \frac{(2-x)^2 + 2(2-x) + 1}{2-x-1} + \frac{x^2+2x+1}{x-1}$$

$$= \frac{8x+8}{-x+1} = \frac{8(-x+1)}{-x+1} = 8 = 2b$$

إذاً $I(1,4)$ مركز التناظر للخط البياني.

التمرين السادس:

لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

أثبت أن التابع f فردي

ما الصفة التناظرية لخطه البياني؟

الشرط الأول:

$x \in \mathbb{R}$ فإن: $-x \in \mathbb{R}$

الشرط الأول محقق وضوحاً

الشرط الثاني:

$$f(-x) = -f(x)$$

$$l_1 = f(-x) = -x + \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}}$$

$$= -x - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -\left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= -f(x) = l_2$$

ومنهُ التابع f فردي.

الصفة التناظرية:

الخط البياني متناظر بنسبة إلى المبدأ.

التمرين السابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$$

أثبت أن الخط C مركز تناظر.

الحل:

الشرط الأول:

أياً كان $x\in\mathbb{R}$ فإن: $-x\in\mathbb{R}$

محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(-x)=-f(x)$$

$$l_1=f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2+1}$$

$$=\frac{-x}{x^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}$$

$$=-f(x)=l_2$$

ومنهُ للخط البياني مركز تناظر.

التمرين الثامن:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=2\sin x+\sin 2x$$

تحقق أن f دوري و 2π دور له.

$$T=2\pi$$

الشرط الأول:

أياً كان $x\in\mathbb{R}$ فإن: $x+T\in\mathbb{R}$

محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(x+T)=f(x)$$

$$l_1=f(x+T)=f(x+2\pi)$$

$$=2\sin(x+2\pi)+\sin(2(x+2\pi))$$

$$=2\sin(x)+\sin(2x)$$

$$=f(x)=l_2$$

إذاً التابع f دوري ودوره هو 2π

التمرين التاسع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+\pi k;k\in Z\}$ وفق:

$$f(x)=\tan x$$

أثبت أن التابع f دوري ودورهُ π

$$T=\pi$$

الشرط الأول: أياً كان $x\in D_f$

فإنّ $x+T\in D_f$

$$x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;k\in Z\right\}$$

$$x+\pi\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k+\pi;k\in Z\right\}$$

$$x+\pi\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi;K\in Z\right\}$$

$$x+\pi\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+\pi k;k\in Z\}$$

الشرط الأول محقق.

الشرط الثاني:

$$f(x+T)=f(x)$$

$$l_1=f(x+T)=f(x+\pi)$$

$$=\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$$

$$\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x=f(x)=l_2$$

إذاً التابع f دوري ودوره هو π.

تحديد الثوابت:

النمط	الأول	الثاني
المعطى	يكون المعطى هو علاقتين متكافئتين إحداهما تحوي ثوابت والمطلوب إيجاد هذه الثوابت	يكون المعطى هو تابع f علاقة واحدة تحوي ثوابت مع بعض المعطيات يساوي عدد الثوابت والمطلوب إيجاد الثوابت
فكرة الحل	- نحول إحدى العلاقتين إلى شكل العلاقة الثانية وفق استخدام (القسمة الإقليدية النشر- توحيد المقامات) - نقارن بين العلاقتين ونحدد الثوابت	- ترجمة المعطيات. - التعويض في الترجمة للحصول على معادلات. - حل المعادلات للحصول على ثوابت

المعطيات وترجمتها:

النمط	المعطى	ترجمته
الأول	الخط البياني يمر من النقطة $A(x_A,y_A)$	$f(x_A)=y_A$
	الخط البياني يقبل مماس ميله m (حيث الميل إما معلوم أو يُحسب) في النقطة التي فاصلتها x_A	$f'(x_A)=m$
	الخط البياني يقبل مماس ميله m في النقطة $A(x_A,y_A)$	$f(x_A)=y_A\ ,\ f'(x_A)=m$
	للتابع قيمة حدية عند: x_A	$f'(x_A)=0$
	للتابع قيمة حدية في النقطة $A(x_A\,,y_A)$ أو للتابع قيمة حدية قيمتها y_A يبلغها عند x_A أو للتابع قيمة حدية عند x_A هي y_A	$f(x_A)=y_A$ $f'(x_A)=0$
الثاني	المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب شاقولي للخط C	$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$
	المستقيم الذي معادلته $y=b$ مقارب أفقي للخط C	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$
	المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب مائل في جوار ∞	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-y_\Delta=0$

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=x^3+2x^2-16$$

عين a و b التي تحقق:

$$f(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$$

الطريقة الأولى: "القسمة الإقليدية"

بالقسمة الإقليدية نجد أن:

$$f(x)=(x-2)(x^2+4x+8)$$

بالمقارنة مع:

$$f(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$$

نجد أن: $a=4\quad,\quad b=8$

الطريقة الثانية: "النشر":

$$f(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$$

$$=x^3+ax^2+bx-2x^2-2ax-2b$$

$$=x^3+(a-2)x^2+(b-2a)x-2b$$

بالمقارنة مع: $f(x)=x^3+2x^2-16$

$$a-2=2\ \dots(1)$$

$$b-2a=0\ \dots(2)$$

$$-2b=-16\ \dots(3)$$

من (1) نجد: $a=4$

من (3) نجد: $b=8$

نتحقق في (2) :

$$8-2(4)=0$$

محققة

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x)=x^4-19x^2+52x-40$$

عين a و b التي تحقق:

$$f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+4x+2a)$$

الحل:

$$f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+4x+2a)$$

$$=x^4+4x^3+2ax^2+ax^3+4ax^2$$

$$+2a^2x+bx^2+4bx^2+2ab$$

$$=x^4+(4+a)x^3(6a+b)x^2+(2a^2+4b)x+2ab$$

بالمقارنة مع:

$$f(x)=x^4-19x^2+52x-40$$

نجد:

$$4 + a = 0 \dots (1)$$
$$6a + b = -19 \dots (2)$$
$$2a^2 + 4b = 52 \dots (3)$$
$$2ab = -40 \ (4)$$

من (1) نجد:

$$a = -4$$

نعوض في (2) :

$$b = 5 \Leftarrow -24 + b = -19$$

نتحقق في (3) :

$$2(-4)^2 + 4(5) = 52$$
$$32 + 20 = 52$$

محققة

نتحقق في (4)

$$2(-4)(5) = -40$$
$$-40 = -40$$

محققة

تنويه: لا يمكن الحل بطريقة ثانية.

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x}$$

عين a و b و $g(x)$ التي تحقق العلاقة:

$$f(x) = ax + b + \frac{g(x)}{x^2 + 2x}$$

بالقسمة الإقليدية نجد أنّ:

$$f(x) = x - 2 + \frac{4x + 1}{x^2 + 2x}$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$a = 1 \ , \ b = 2$$
$$g(x) = 4x + 1$$

التمرين الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

أوجد العددين a و b التي تحقق:

$$f(x) = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$$
$$f(x) = \frac{a(x + 1) + b(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)}$$
$$f(x) = \frac{ax + a + bx - b}{x^2 - 1}$$
$$f(x) = \frac{(a + b)x + a - b}{x^2 - 1}$$

بالمقارنة مع

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

نجد:

$$a + b = 2 \dots (1)$$
$$a - b = 0 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2a = 2 \to a = 1$$

نعوض في (2) : $b = 1$

تنويه: لا يمكن الحل بطريقة ثانية.

التمرين الخامس:

ليكن لدينا التابع المعين بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - x - 2}$$

الطلب الأول:

عين D_f مجموعة تعريف التابع f

نعدم المقام:

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

إما $x = 2$, أو $x = -1$

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$$

الطلب الثاني:

أوجد الأعداد a و b و c التي تحقق

$$f(x) = a + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{x - 2}$$

أياً يكن x من D_f

الحل:

$$f(x) = a + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{x - 2}$$
$$f(x) = \frac{a(x + 1)(x - 2) + b(x - 2) + c(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)}$$
$$f(x) = \frac{ax^2 - ax - 2a + bx - 2b + xc + c}{x^2 - x - 2}$$

بالمقارنة مع:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - x - 2}$$

نجد:

$$a = 3 \dots (1)$$
$$-a + b + c = 6 \dots (2)$$
$$-2a - 2b + c = 0 \dots (3)$$

من (1) نجد: $a = 3$

نعوض في $(2$ و $3)$:

$$b + c = 9 \dots (2)'$$
$$-2b + c = 6 \dots (3)'$$

نضرب $(2)'$ بالعدد (2) :

$$2b + 2c = 18 \dots (2)''$$
$$-2b + c = 6 \dots (3)'$$

نجمع $(2)''$ و $(3)'$

$$3c = 24 \Rightarrow c = 8$$

نعوض في (3) :

$$-2b + 8 = 6$$
$$-2b = -2$$
$$\Rightarrow b = -1$$

الطلب الثالث:

ادرس نهاية f عند حلول المجالات الثلاثة التي تؤلف D_f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{24}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{24}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$$

التمرين السادس:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^3 - x^2 + ax$$

الطلب الأول:

عين العدد الحقيقي a ليمر الخط البياني من النقطة $A(2,1)$

الحل:

بما أن التابع f يمر من النقطة $A(2,1)$ فإنّ:

$$f(2) = 1$$
$$8 - 4 + 2a = 1$$
$$\Rightarrow 4 + 2a = 1 \Rightarrow 2a = -3$$
$$\Rightarrow a = \frac{-3}{2}$$

الطلب الثاني:

عيّن العدد الحقيقي a ليقبل الخط البياني مماساً ميله $m = 3$ في النقطة التي فاصلتها $x = -1$

الحل:

بما أن الخط البياني يقبل مماساً ميله $m = 3$ في النقطة التي فاصلتها $x = -1$ فإن:

$$f'(-1) = 3$$

سنعود بعد قليل..

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + a$$
$$f'(-1) = 3$$

عدنا..

$$3 + 2 + a = 3$$
$$5 + a = 3$$
$$a = -2$$

الطلب الثالث:

عيّن العدد الحقيقي a ليكون التابع f قيمة حدية محلياً عند $x = 1$

الحل:

بما أن التابع f قيمة حدية عند $x = 1$ فإنّ:

$$f'(1) = 0$$

من الطلب السابق $f'(x)$.

$$3 - 2 + a = 0$$
$$1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

التمرين السابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$$f(x) = ax + b - \frac{6}{x}$$

عين الأعداد a و b ليمر الخط البياني من النقطة $A(2,0)$ ويقبل مماساً في A معادلته: $\Delta: y - x + 2 = 0$

بما أنّ التابع f يمر من النقطة $A(2,0)$ فإنّ:

$$f(2) = 0$$
$$2a + b - 3 = 0 \dots (1)$$

وبما أنّ الخط البياني يقبل مماساً يوازي Δ في النقطة $A(2,0)$ فإنّ:

$$f'(2) = 1$$

سنعود بعد قليل..

$$f'(x)=a+\frac{6}{x^2}$$

عدنا..

$$f'(2)=1$$
$$a+\frac{6}{4}=1$$
$$a=-\frac{1}{2}\ldots(2)$$

من (2) نجد : $a=-\dfrac{1}{2}$

نعوض في (1) :

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)+b-3=0$$
$$-1+b-3=0\Rightarrow b=4$$

التمرين الثامن:

a و b عددان حقيقيان و C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=ax^3+bx^2+1$$

هل يمكن تعيين a و b لكي يقبل C مماساً أفقياً في النقطة $A(1,2)$ منه؟

الحل:

بما أن التابع f يمر من $A(1,2)$ فإنّ:

$$f(1)=2$$
$$a+b+1=2$$
$$a+b=1\ldots(1)$$

وبما أن الخط البياني يقبل مماس أفقي فإن:

$$f'(1)=0$$

سنعود بعد قليل..

نوجد $f'(x)$

$$f'(x)=3ax^2+2bx$$

عدنا..

$$f'(1)=0$$
$$3a+2b=0\ldots(2)$$

نضرب المعادلة 1 بـ (-2):

$$-2a-2b=-2\ldots(1)'$$

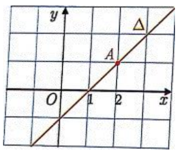
بجمع $(1)'$ و 2 نجد:

$$a=-2$$

نعوض في (1) :

$$-2+b=1$$
$$\Rightarrow b=3$$

التمرين التاسع:



ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,4]$ وفق: $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$

الطلب الأول:

عين a و b علماً بأن المستقيم Δ المرسوم في الشكل المجاور مماس للخط C في النقطة A .

الحل:

بما أن الخط البياني يمر من A فإنّ:

$$f(2)=1$$

$$\frac{2a+b}{5}=1$$
$$2a+b=5\ldots(1)$$

وبما أنّ للخط البياني مماس Δ في A فإنّ:

$$f'(2)=m_\Delta$$

سنعود بعد قليل...

نوجد m_Δ:

إنّ $A(2,1)$ و $B(1,0)$ من Δ فإنّ:

$$m_\Delta=\frac{1-0}{2-1}=1$$
$$\Rightarrow m_\Delta=1$$

نوجد $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$$

عدنا...

$$f'(2)=1$$
$$-3a-4b=25\ldots(2)$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد 4 :

$$8a+4b=2\ldots(1)'$$
$$-3a-4b=25\ldots(2)$$

بجمع $(1)'$ و (2) :

$$5a=45$$
$$\Rightarrow a=9$$

الطلب الثاني:

تحقق أن التابع الذي وجدته ينسجم مع مضمون النص.

نعوض في (1) :

$$18+b=5\Rightarrow b=-13$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{9x-13}{x^2+1}$$

التمرين العاشر:

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$$

حيث a و b عددان حقيقيان نهدف إلى البحث عن قيم a و b بحيث يتحقق الشرطان الآتيان:

* $f(-1)$ قيمة حدية للتابع
* هذه القيمة الحدية محلياً معدومة

الطلب الأول:

لماذا $f(-1)=0$, $f'(-1)=0$

الحل:

* بما أن $f(-1)$ قيمة حدية للتابع فإنّ:

$$f'(-1)=0$$

* بما أن $f(-1)$ قيمة حدية معدوم فإنّ: $f(-1)=0$

الطلب الثاني:

عين قيمة كل من a و b .

الحل:

بما أن $f(-1)$ قيمة حدية معلومة فإنّ:

$$f(-1)=0$$
$$a-b+1=0\ldots(1)$$

بما أن $f(-1)$ قيمة حدية للتابع فإنّ:

$$f'(-1)=0$$

سنعود بعد قليل...

نوجد $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{ax^2-2ax-b-1}{(x-1)^2}$$

عدنا...

$$f'(-1)=0$$
$$3a-b-1=0\ldots(2)$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد -1

$$-a+b-1=0\ldots(1)'$$
$$3a-b-1=0\ldots(2)$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد:

$$a=1$$

نعوض في (2) :

$$3-b-1=0$$
$$2-b=0$$
$$b=2$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$$

التمرين الحادي عشر:

ليكن لدينا التباع f المعطى وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+1}$$

عين a و b عددان حقيقيان إذا علمت أن التابع f يقبل قيمة حدية قيمتها -1 ويبلغها عند -2

الحل:

بما أنّ التابع f قيمة حدية قيمتها -1 ويبلغها عند -2 فإن:

$$f(-2)=-1$$
$$\frac{4-2a+b}{-2+1}=-1$$
$$2a-b=3\ldots(1)$$
$$f'(-2)=0$$

سنعود بعد قليل...

نوجد $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(2x+a)\big((x+1)-(x^2+ax+b)\big)}{(x+1)^2}$$
$$f'(x)=\frac{x^2+2x-a-b}{(x+1)^2}$$

عدنا....

$$f'(-2)=0$$
$$a-b=0\ldots(2)$$

نضرب (1) بالعدد (-1):

$$-2a+b=-3\ldots(1)'$$
$$a-b=0\ldots(2)$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد أنّ:

$$a=3$$

نعوض في $(2)'$:

$$3-b=0$$
$$b=3$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x+1}$$

التمرين الثاني عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$$

جد الأعداد الحقيقية a و b و c و d علماً أن الخواص الآتية محققة.

* المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = 3$ مقارب للخط C
* المستقيم المائل الذي معادلته $y = 2x - 5$ مقارب للخط C في جوار الـ $+\infty$ و $-\infty$
* تنتمي النقطة $A(1,2)$ إلى الخط C

الحل:

بما أن $x = 3$ مقارب للخط C فإنّ:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$$

حيث:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 3x + b + \frac{c}{3-d}$$

تكون $\lim_{x\to 3} f(x)$ هي ∞ إذا تحقق:

$$3 - d = 0 \Rightarrow d = 3$$

بما أنّ: $\Delta: y = 2x - 5$ مقارب مائل في جوار ∞ فإنّ:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

حيث:

$$\lim_{x\to\infty}\left(ax + b + \frac{c}{x-3} - (2x-5)\right)$$

تكون:

$\lim_{x\to\infty}(f(x) - y_\Delta)$ هي 0 إذا تحقق:

$$ax + b = 2x - 5$$

وهذا يكافئ أن:

$$a = 2$$
$$b = -5$$

بما أنّ النقطة A تنتمي الخط البياني فإنّ:

$$f(1) = 2$$
$$2(1) - 5 + \frac{c}{1-3} = 2$$
$$-3 + \frac{c}{-2} = 2$$
$$\frac{c}{-2} = 5$$
$$c = -10$$
$$\Rightarrow f(x) = 2x - 5 - \frac{10}{x-3}$$

رسم المستقيمات والخطوط البيانية:

أولاً: رسم المستقيمات:

نميز ثلاث حالات حسب معادلة المستقيم:

المستقيم معادلته من الشكل $x = a$:
هذا مستقيم شاقولي ولرسمه نذهب إلى النقطة التي فاصلتها a ونرسم مستقيم شاقولي يوازي محور التراتيب.

المستقيم معادلته من الشكل $y = b$:
هذا مستقيم أفقي ولرسمه نذهب إلى النقطة التي ترتيبها b ونرسم مستقيم أفقي يوازي محور الفواصل.

المستقيم الذي معادلته تحوي x و y :
هذا مستقيم مائل ولرسمه فإننا نأخذ نقطتان اختياريتان وذلك بفرض قيم لـ x وتعويضها في المعادلة فنحصل على قيم لـ y ومنه نحصل على النقاط المطلوبة وفق:

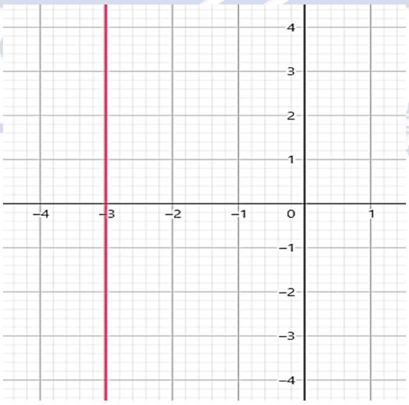
	المستقيم المراد كتابة معادلته	
x	قيم كيفية	
y	تعويض القيم بالمعادلة	
النقطة	(,)	

ثم نصل بين النقطتين فنحصل على المستقيم.

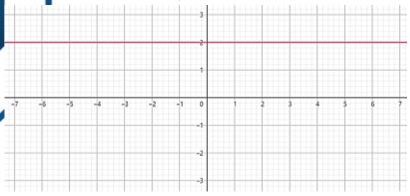
تمرين:

ارسم كلاً من المستقيمات الآتية:

Δ_1 الذي معادلته $x = -3$

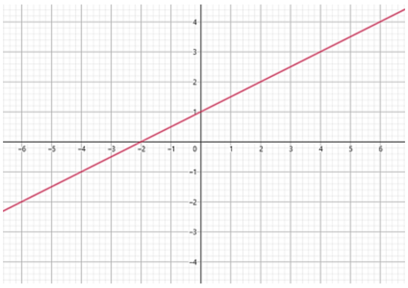


Δ_2 الذي معادلته $y = 2$



Δ_3 الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x + 1$

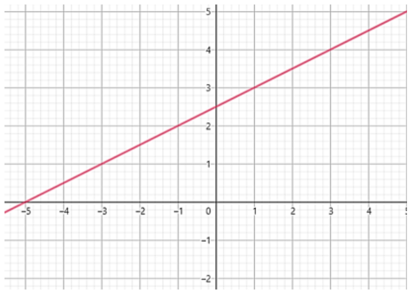
	$y = \frac{1}{2}x + 1$	
x	0	2
y	1	2
النقطة	$(0,1)$	$(2,2)$



Δ_4 الذي معادلته $x - 2y + 5 = 0$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

	$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$	
x	0	1
y	$\frac{5}{2}$	3
النقطة	$\left(0,\frac{5}{2}\right)$	$(1,3)$



رسم الخطوط البيانية:

نرسم المقاربات في حال وجودها "حتى ولو لم يطلب إلينا ذلك" ونرسم المماسات "عند الطلب" وفق: أفقي أو شاقولي "فوراً" , مائل " يحتاج نقطتين"

نحدد القيم الحدّية

نحدد نقطة التقاطع مع محور التراتيب ونميز:

$0 \in D_f$ إذاً يوجد نقطة تقاطع مع محور التراتيب وفق $(0, f(0))$

$0 \notin D_f$ إذاً لا يوجد نقطة تقاطع مع محور التراتيب.

نحدد نقطة التقاطع مع محور الفواصل ونميز:

حقق $0 \in f(x)$ يوجد نقطة تقاطع مع محور الفواصل ولتحديد هذه النقاط نحل المعادلة $f(x) = 0$ وتكون النقاط $(\text{حل المعادلة} , 0)$

حقق $0 \notin f(x)$ لا يوجد نقطة تقاطع مع محور الفواصل.

نرسم مع مراعاة:

x	عدد	∞	∞	عدد
$f(x)$	∞	عدد	∞	عدد
المعنى الهندسي	الخط البياني عند المقارب الشاقولي	الخط البياني عند المقارب الأفقي	الخط البياني يكون في أحد الأرباع أو عند المقارب المائل	الخط البياني يكون عند نقطة "مفرغة أو مطموسة"

ملاحظة:

أثناء الرسم انتبه لـ حركة المماس – حركة المقارب – الصفات التناظرية – التزايد والتناقص.

الخط البياني لا يقطع مقاربه في جوار التقارب بينما في غير جوار التقارب فـ يصطفلوا.

عند وجود طلب أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على المجال $]a,b[$ قبل طلب الرسم فإنّ الخط البياني يقطع محور الفواصل بين a و b

تمرين:

في كل من الحالات الآتية ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم ارسم خطه البياني:

$f(x)=x^2-4$	$D_f=\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$	$D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

الحل:

$$f(x)=x^2-4$$

التابع f معرف ومستمر على $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه:

$$f'(x)=2x$$

$$f'(x)=0$$

$$2x=0$$

$$x=0\in D_f \Rightarrow f(0)=-4$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

التحضير للرسم...

لا يوجد مقاربات؟

بطريقةٍ ما ستدرك وتتيقن أنّ كلّ اختيارات اللّه صالحة لكَ حتى وإن كُنت لا تفهم كلّ أسبابه 💙

نقاط التقاطع مع المحاور:

مع محور التراتيب: نلاحظ أنّ:

$$0\in D_f$$

$$\Rightarrow (0,f(0)) \Rightarrow (0,-4)$$

مع محور الفواصل:

نحل المعادلة:

$$f(x)=0$$

$$x^2-4=0$$

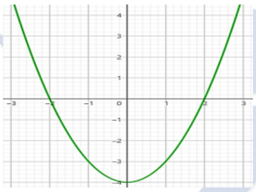
$$x^2=4$$

إما $x=2 \Rightarrow (2,0)$

أو $x=-2 \Rightarrow (-2,0)$

$f(0)=-4$ قيمة حدية صغرى.

الرسمة:



$$f(x)=\frac{x+1}{x-3}$$

التابع f معرف مستمر على $\mathbb{R}\setminus\{3\}$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

$y=1$ مقارب أفقي في جوار $+\infty,-\infty$

$$\lim_{x\to3^-} f(x)=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$x=3$ مقارب شاقولي من اليمين نحو oy^+ ومن اليسار نحو oy^-

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$$f'(x)=\frac{-4}{(x-3)^3}$$

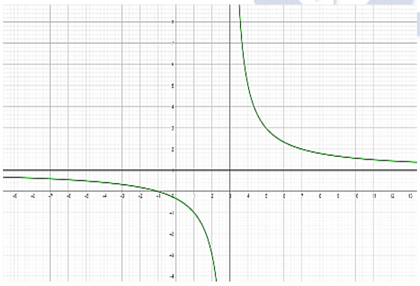
مستحيلة الحل

$$f'(x)=0$$

$$-4\neq 0$$

x	$-\infty$			3			$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$\|\|$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	1

الرسمة:



استنتاج رسم الخطوط البيانية:

نص السؤال	يكون لدينا التابع f الذي خطه البياني C_f والمطلوب: استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g حيث: $g(x)=\square$	
فكرة الحل	نكتب التابع $g(x)$ بدلالة التابع $f(x)$ ونميز الحالات:	
	الحالة	تعليلها
	$g(x)=f(-x)$	C_g نظير C_f بالنسبة إلى محور التراتيب
	$g(x)=-f(x)$	C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل
	$g(x)=-f(-x)$	C_g نظير C_f بالنسبة إلى المبدأ
	$g(x)=f(x)+\alpha$	C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأعلى بمقدار α
	$g(x)=f(x)-\alpha$	C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأسفل بمقدار α
	$g(x)=f(x+\alpha)$	C_g ينتج عن C_f انسحابه على محور الفواصل نحو اليسار بمقدار α
	$g(x)=f(x-\alpha)$	C_g ينتج عن C_f بانسحابه على محور الفواصل نحو اليمين بمقدار α
	$g(x)=\|f(x)\|$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على النقاط ذات التراتيب الموجبة وبأخذ النظائر ذات التراتيب السالبة إلى محور الفواصل
	$g(x)=f\|x\|$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على النقاط ذات الفواصل الموجبة، وبأخذ النظائر ذات الفواصل السالبة بالنسبة إلى محور التراتيب
	$g(x)=\alpha f(x)$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على فواصل النقاط وبضرب تراتيب النقاط بالعدد α
	$g(x)=f(\alpha.x)$	C_g ينتج عن C_f بالمحافظة على تراتيب النقاط وبضرب فواصل النقاط بالعدد α

نص السؤال	يكون لدينا التابع f الذي خطه البياني C_f والمطلوب: استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g حيث التابع g هو التقابل العكسي للتابع f
فكرة الحل	C_g نظير C_f بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y=x$ (المنصف للربعين الأول والثالث)

ملاحظات وتنبيهات:

- التعليل يكفي أو الرسم.
- ملاحظة: أولوية التفكير:
  - الحالات التي تأتي كما هي
  - الحالات التي تحتاج إلى إصلاح
  - الحالات التي تحتاج إلى تجريب
- عند انتهاء حلول الأرض فالأمر متروك لتجريب أول ثلاث حالات وعلى مسؤولية أ.خالد

تحذير: في طلب استنتاج رسم الخط البياني اترك الطلب دون حل ولا تفكر في دراسة تغيراته ثم رسمه

التمرين الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

الطلب الأول:

استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع:

$$g(x) = -x^3 + 3x$$

الحل:

الطريقة أولى:

$$g(x) = -x^3 + 3x$$

$$= -(x^3 - 3x) = -f(x)$$

C_g نظيرة C_f بالنسبة إلى محور الفواصل.

الطريقة الثانية:

نلاحظ أنّ:

$$g(x) = f(-x)$$

C_g نظيرة C_f بالنسبة لمحور التراتيب

الطلب الثاني:

استنتج رسم الخط البياني C_k للتابع:

$$k(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$k(x) = f(x) + 2$$

C_k ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأعلى بمقدار 2

التمرين الثاني:

ليكن لدينا التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

استنتج رسم الخط البياني C_k للتابع $k(x)$ حيث:

$$k(x) = x^3 - 3x - 4$$

$$k(x) = x^3 - 3x + 1 - 4 - 1$$

$$k(x) = f(x) - 5$$

C_k ينتج عن C_f بانسحابه على محور التراتيب نحو الأسفل بمقدار 5

هذا الوقت سيمضي، لا تدعه يمر دون .. علامة نجاح أو بصمة كفاح و المزيد من الأمل ✌️💙

المناقشة البيانية:

نص السؤال:

- ناقش بيانياً حلول المعادلة $f(x) = m$
- ناقش بيانياً قابلية المعادلة $f(x) = m$ للحل.

فكرة الحل:

- نضع المسطرة أسفل المعلم بالتوازي مع محور الفواصل xx' "يعني من y' وبشكل أفقي نمشي"
- نحرك المسطرة نحو الأعلى ونبحث عن عدد نقاط تقاطع المسطرة مع C_f في كل مرة.
- كلما تغيرت عدد نقاط التقاطع نتوقف لنناقش
- وهكذا تتم المناقشة.

ملاحظة:

قد تكون المعادلة غير معزول فيها الوسيط (الوسيط بطرف والتابع f بطرف آخر) لهيك: أول الشي نعزل الوسيط ونكمل بالمناقشة.

تنويه:

في حال ما عرفت تعزل الوسيط m فاستخدم أسلوب اجدبها واكتب المعادلة فوراً $f(x) = m$ ثم ابدأ بالمناقشة.

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ بالعلاقة الآتية:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$$

والمطلوب:

1. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم حدد القيم الحدية للتابع f
2. عيّن الأعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق:
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$
3. أثبت أن C يقبل مقارباً مائلاً اكتب معادلته وادرس وضعه النسبي مع الخط البياني c
4. ارسم ما وجدته من مقاربات لـ C ثم ارسم C
5. ناقش بيانياً تبعاً لقيم الوسيط m عدد حلول المعادلة:
$$x^2 - (m+5)x + 3m + 7 = 0$$

الحل:

الطلب الأول:

التابع f معرف ومستمر على المجال

$$D_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$$

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 3$ مقارب شاقولي للخط البياني C من اليسار نحو oy^-

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 3$ مقارب شاقولي للخط البياني C من اليمين نحو oy^+

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

التابع f اشتقاقي على $]-\infty, 1[$ و $]3, +\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = \frac{(2x-5)(x-3) - (x^2 - 5x + 7)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 6x - 5x + 15 - x^2 + 5x - 7}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2} = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-4)(x-2) = 0$$

إما $x - 4 = 0$

$$x = 4 \in D_f$$

$$f(4) = 3$$

أو $x - 2 = 0$

$$x = 2 \in D_f$$

$$f(2) = -1$$

ننظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الثاني:

لدينا:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$$

بالقسمة الاقليدية نجد أنّ:

$$\frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3} = x - 2 + \frac{1}{x - 3}$$

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-3} \; ...(*)$$

ولدينا:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3} \; ...(**)$$

بالمطابقة بين $(**)$ و $(*)$ نجد أنّ:

$$a = 1 \;,\; b = -2 \;,\; c = 1$$

الطلب الثالث:

لدينا:

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-3}$$

بفرض:

$$g(x) = \frac{1}{x-3}$$

وبما أنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

فإن المستقيم الذي معادلته $\Delta : y = x - 2$ مقارب مائل للخط البياني c_f في جوار الـ $-\infty$ والـ $+\infty$

دراسة الوضع النسبي بين Δ و c :

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$= x - 2 + \frac{1}{x-3} - (x-2)$$

$$= \frac{1}{x-3}$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$\frac{1}{x-3} = 0$$

$$1 \neq 0$$

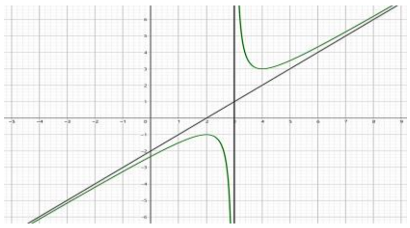
مستحيلة الحل إذاً الفرق $h(x)$ لا ينعدم

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$h(x)$	$-$	||	$+$
الوضع النسبي	c تحت Δ	||	c فوق Δ

الطلب الرابع:

الرسم:



الطلب الخامس:

نعزل m:

$$x^2 - (m+5)x + 3m + 7 = 0$$

$$x^2 - mx - 5x + 3m + 7 = 0$$

$$x^2 - 5x + 7 = mx - 3m$$

$$x^2 - 5x + 7 = m(x-3)$$

$$\frac{x^2 - 5x + 7}{x-3} = m$$

$$f(x) = m$$

المناقشة:

عندما $m \in]-\infty, -1[$

فإنّ للمعادلة $f(x) = m$ حليّن.

عندما $m = -1$

فإنّ للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

عندما $m \in]-1, 3[$

فإنّ للمعادلة $f(x) = m$ مستحيلة الحل.

عندما $m = 3$

فإنّ للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

عندما $m \in]3, +\infty[$

فإنّ للمعادلة $f(x) = m$ حليّن.

التمرين الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ بالعلاقة الآتية:

$$f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$$

والمطلوب:

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الحدية وبين نوعها.
٢. حدد معادلة المقارب الأفقي للخط C وادرس وضعه النسبي
٣. ادرس وضع C بالنسبة لمنصف الربع الأول
٤. ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C
٥. استنتج رسم الخط البياني للتابع:

$$g(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$

٦. ناقش بيانياً تبعاً لقيم الوسيط m حلول المعادلة:

$$mx^2 + (-2m - 4)x + m = 0$$

الحل:

الطلب الأول:

التابع f معرف ومستمر على المجال:

$$]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

ولدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي للخط البياني C في جوار الـ $-\infty$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب شاقولي للخط البياني C من اليسار نحو oy^+

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب شاقولي للخط البياني C من اليسار نحو oy^+

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي للخط البياني c في جوار الـ $+\infty$

التابع f اشتقاقي على:

$]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$ ومشتقة:

$$f'(x) = \frac{4(x-1)^2 - 2(x-1)(4x)}{((x-1)^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(4(x-1) - 8x)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{4x - 4 - 8x}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{-4x - 4}{(x-1)^3}$$

نعدم $f'(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-4x - 4}{(x-1)^2} = 0$$

$$-4x - 4 = 0$$

$$4x = -4$$

$$x = -1 \; \in D_f$$

$$f(-1) = -1$$

رسم الجدول:

x	$-\infty$		-1			1			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		||		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$	||	$+\infty$	$\searrow$	0

القيمة الحدية ونوعها:

لدينا $f(-1) = -1$

قيمة حديّة صغرى محلياً

الطلب الثاني:

المقارب الأفقي Δ:

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي للخط البياني c في جوار الـ $+\infty$ و $-\infty$

الوضع النسبي بين Δ و C:

نشكل الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$h(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} - 0$$

$$h(x) = \frac{4x}{(x-1)^2}$$

نعدم الفرق:

$$h(x) = 0$$

$$\frac{4x}{(x-1)^2} = 0$$

$$4x = 0$$

$$x = 0 \in D_f$$

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$	||	$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ	|	C فوق Δ	||	C فوق Δ

يشترك الخط البياني C مع المقارب الأفقي $y = 0$ بالنقطة $(0,0)$.

الطلب الثالث:

الوضع النسبي بين C ومنصف الربع الأول:

منصف الربع الأول:

هو المستقيم d الذي معادلته $y = x$

نشكل الفرق:

$$\ell(x) = f(x) - y_d$$

$$\ell(x) = \frac{4x}{(x-1)^2} - x$$

$$\ell(x) = \frac{4x - x(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$\ell(x)=\frac{x\left(4-(x^2-2x+1)\right)}{(x-1)^2}$$
$$\ell(x)=\frac{x(4-x^2+2x-1)}{(x-1)^2}$$
$$\ell(x)=\frac{x(-x^2+2x+3)}{(x-1)^2}$$

نعدم الفرق:

$$\ell(x)=0$$
$$\frac{x(-x^2+2x+3)=0}{(x-1)^2}$$
$$x(-x^2+2x+3)=0$$

إما $x=0\ \in D_f$

أو $-x^2+2x+3=0$

$$-(x^2-2x-3)=0$$
$$-(x-3)(x+1)=0$$

إما $x-3=0\Rightarrow x=3\ \in D_f$

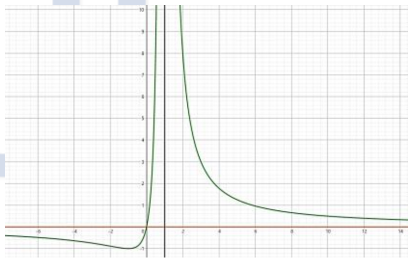
أو $x+1=0\Rightarrow x=-1\ \in D_f$

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$l(x)$		+	0	−	0	+	||	+	0	−	
الوضع النسبي		C فوق Δ	|	C تحت Δ	|	C فوق Δ	||	C فوق Δ	|	C تحت Δ	

يشترك الخط البياني مع منصف الربع الأول بالنقاط: $(3,3)$ و $(0,0)$ و $(-1,-1)$.

الطلب الرابع:

الرسم:



الطلب الخامس:

استنتاج رسم:

$$g(x)=\frac{4x}{(x+1)^2}$$

لدينا:

$$f(x)=\frac{4x}{(x-1)^2}$$
$$f(-x)=\frac{4(-x)}{(-x-1)^2}$$
$$f(-x)=\frac{-4x}{\left(-(x+1)\right)^2}$$
$$f(-x)=\frac{-4x}{(x+1)^2}$$
$$-f(-x)=\left(\frac{-4x}{(x+1)^2}\right)$$
$$-f(-x)=\frac{4x}{(x+1)^2}$$
$$-f(-x)=g(x)$$
$$\to g(x)=-f(-x)$$

ومنه نظير C_g بالنسبة للمبدأ C_f.

الطلب السادس:

ناقش بيانياً تبعاً لقيم الوسيط m حلول المعادلة:

$$mx^2+(-2m-4)x+m=0$$

نعزل m :

$$mx^2+(-2m-4)x+m=0$$
$$mx^2-2mx-4x+m=0$$
$$mx^2-2mx+m=4x$$
$$m(x^2-2x+1)=4x$$
$$m(x-1)^2=4x$$
$$m=\frac{4x}{(x-1)^2}$$

المناقشة:

أياً كان $m\in]-\infty,-1[$ فإنّ المعادلة $f(x)=m$ مستحيلة الحل

عندما $m=-1$

فإنه يكون للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد.

أياً كان $m\in]-1,0[$

فإنه يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلين.

عندما $m=0$

فإنه يكون للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد.

أياً كان $m\in]0,+\infty[$

فإنه يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلين.

مسائل:

المسألة الأولى:

ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x)=ax-\sqrt{x^2+b}$$

حيث a و b عددين حقيقيين

1. عين a و b كي يقبل الخط البياني للتابع f مماساً في النقطة $A(0,-1)$ يوازي المستقيم $\varDelta: y=2x$
إذا علمت أن $a=2$ و $b=1$ والمطلوب:
2. أوجد نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$.
3. أوجد $f'(x)$ ونظم جدولاً بتغيرات التابع f.
4. أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=3x$ مقارب مائل للخط c في جوار $-\infty$.
5. ادرس الوضع النسبي للخط البياني C_f والمستقيم d
6. أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على المجال $]0,1[$
7. اكتب معادلة المماس T في النقطة التي فاصلتها $x_B=1$.
8. ارسم كلاً من المستقيم d والخط البياني C

الحل:

الطلب الأول:

تعيين a و b:

بما أن الخط البياني للتابع f يقبل مماساً في النقطة $A(0,-1)$ يوازي المستقيم $\varDelta: y=2x$ فإنه يتحقق:

$$f(0)=-1\ \dots(*)$$
$$f'(0)=m$$

حيث m يمثل ميل المستقيم $\varDelta$ أيّ:

ومنه $m=2$:

$$f'(0)=2\ \dots(**)$$

بالتعويض في $(*)$ نجد :

$$f(0)=-1$$
$$a(0)-\sqrt{(0)^2+b}=-1$$
$$-\sqrt{b}=-1$$
$$\sqrt{b}=1$$
$$b=1$$

لدينا:

$$f'(x)=a-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+b}}$$
$$f'(x)=a-\frac{x}{\sqrt{x^2+b}}$$

بالتعويض في $(**)$ نجد:

$$f'(0)=2$$
$$a-\frac{0}{\sqrt{(0)^2-b}}=2$$
$$a=2$$

ومنه:

$$f(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$$

الطلب الثاني:

نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$:

نهاية f عند $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

نهاية f عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(\infty-\infty)$

$$f(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$$
$$f(x)=2x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$
$$f(x)=2x-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

نعلم أن $\sqrt{x^2}=|x|$

$$f(x)=2x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

بما أن $x\to+\infty$ فإن: $|x|=x$

$$f(x)=2x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$f(x)=x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

الطلب الثالث:

إيجاد $f'(x)$:

$$f'(x)=2-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x)=2-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$$

تغيرات f:

$$f'(x)=0$$

$$\frac{2\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$2\sqrt{x^2+1}-x=0$$

$$2\sqrt{x^2+1}=x$$

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}x$$

بشرط $\frac{1}{2}x>0 \leftarrow x>0$

نربع الطرفين:

$$x^2+1=\frac{1}{4}x^2$$

$$4x^2+4=x^2$$

$$4x^2-x^2=-4$$

$$3x^2=-4$$

$$x^2=\frac{-4}{3}$$

مستحيلة الحل ومنه $f'(x)$ لا ينعدم.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

الطلب الرابع:

إثبات أن $d: y=3x$ مقارب مائل لـ C في جوار $-\infty$

$$h(x)=f(x)-y_d$$

$$=2x-\sqrt{x^2+1}-3x$$

$$=-\sqrt{x^2+1}-x$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(-\infty+\infty)$

$$h(x)=-\sqrt{x^2+1}-x$$

$$h(x)=\frac{(-\sqrt{x^2+1}-x)(-\sqrt{x^2+1}+x)}{-\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$h(x)=\frac{\left(-\sqrt{x^2+1}\right)^2-(x)^2}{-\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$h(x)=\frac{x^2+1-x^2}{-\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$h(x)=\frac{1}{-\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$$

ومنهُ المستقيم $d: y=3x$ مقارب مائل للخط البياني في جوار الـ $-\infty$.

الطلب الخامس:

$$h(x)=f(x)-y_d$$

$$=-\sqrt{x^2+1}-x$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$

$$-\sqrt{x^2+1}-x=0$$

$$\sqrt{x^2+1}=-x$$

بشرط $x<0$ نربع الطرفين:

$$x^2+1=x^2$$

$$1\neq 0$$

مستحيلة الحل ومنهُ الفرق لا ينعدم.

ننظم جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$h(x)$	$-$
الوضع النسبي	C تحت Δ

الطلب السادس:

إثبات أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على المجال $]0,1[$:

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,1[$ ولدينا

$$f(0)=-1$$

$$f(1)=2-\sqrt{2}$$

ومنه نجد أن:

$$f(0).f(1)<0$$

إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على المجال $]0,1[$

الطلب السابع:

معادلة المماس T للخط البياني في النقطة التي فاصلتها $x_B=1$

تحديد النقطة B:

$$x_B=1$$

$$y_B=f(x_B)=f(1)=2-\sqrt{2}$$

$$B\left(1,2-\sqrt{2}\right)$$

تحديد الميل m:

$$m=f'(x_B)=f'(1)=\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

المعادلة:

$$T: y=m(x-x_B)+y_B$$

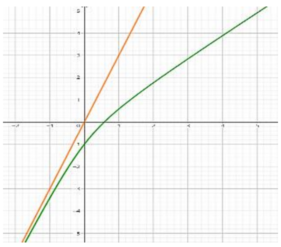
$$T: y=\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}(x-1)+2-\sqrt{2}$$

$$T: y=\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}x-\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+2-\sqrt{2}$$

$$T: y=\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

الطلب الثامن:

الرسمة



المسألة الثانية:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2-5x-6}{x^2+3}$$

1. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم حدد القيم الحدية للتابع f.
2. أثبت أن النقطة $A(0,-2)$ مركز تناظر الخط C.
3. أثبت أن المستقيم $\Delta: y=x-2$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$ و $+\infty$ وادرس وضع النسبي.
4. هل يقبل C مماساً يوازي المستقيم Δ؟ علل إجابتك.
5. أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد ثم احصر هذا الحل بمجال طوله الواحد.
6. ارسم Δ ثم ارسم c.

الحل:

الطلب الأول:

تغيرات التابع f:

التابع f معرف ومستمر على:

$$D_f=R=]-\infty,+\infty[$$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومشتقه:

$$f'(x)=\frac{x^4+14x^2-15}{(x^2+3)^2}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x)=0$$

$$\frac{x^4+14x^2-15}{(x^2+3)^2}=0$$

$$x^4+14x^2-15=0$$

$$(x^2+15)(x^2-1)=0$$

مستحيلة الحل

إما $x^2+15=0 \to x^2=-15$

مستحيلة الحل

أو $x^2-1=0 \to x^2=1$

إما $x=1\in D_f \to f(1)=-3$

أو $x=-1\in D_f \to f(-1)=-1$

وننظم جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

القيم الحدية للتابع f:

$f(-1)=-1$ قيمة حدية كبرى محلياً.

$f(1)=-3$ قيمة حدية صغرى محلياً.

الطلب الثاني:

إثبات أن $A(0,-2)$ مركز تناظر لـ C:

لدينا: $a=0 \to 2a-x=-x$

$b=-2 \to 2b=-4$

الشرط الأول:

أياً كان $x \in D_f$ فإن $2a - x \in D_f$

الشرط الأول محقق وضوحاً.

الشرط الثاني:

$$f(2a-x) + f(x) = 2b$$
$$l_1 = f(2a-x) + f(x)$$
$$= f(-x) + f(x)$$
$$= \frac{(-x)^3 - 2(-x)^2 - 5(-x) - 6}{(-x)^2 + 3} + \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3}$$
$$= \frac{-x^3 - 2x^2 + 5x - 6}{x^2+3} + \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6}{x^2+3}$$
$$= \frac{-4x^2 - 12}{x^2+3} = \frac{-4(x^2+3)}{x^2+3}$$
$$= -4 = 2b = l_2$$

بما أن $l_1 = l_2$ فإن الشرط الثاني محقق.

ومنه: النقطة $A(0,-2)$ مركز تناظر للخط البياني.

الطلب الثالث:

إثبات أن Δ مقارب لـ c:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$
$$= \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3} - (x - 2)$$
$$= \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6 - (x-2)(x^2+3)}{x^2+3}$$
$$= \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6 - (x^3 + 3x - 2x^2 - 6)}{x^2+3}$$
$$= \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 6 - x^3 - 3x + 2x^2 + 6}{x^2+3}$$
$$= \frac{-8x}{x^2+3}$$
$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

ومنه المستقيم الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب مائل لـ C في جوار $+\infty$ و $-\infty$

الوضع النسبي بين c و Δ:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta$$
$$= \frac{-8x}{x^2+3}$$
$$h(x) = 0$$
$$\frac{-8x}{x^2+3} = 0$$
$$-8x = 0$$
$$x = 0 \in D_f$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	C فوق Δ	|	C تحت Δ

الطلب الرابع:

يقبل C مماساً يوازي المستقيم Δ إذا كان للمعادلة $f'(x) = m$ حلول.

لدينا:

$$m = 1$$
$$f'(x) = 1$$
$$\frac{x^4 + 14x^2 - 15}{(x^2+3)^2} = 1$$
$$x^4 + 14x^2 - 15 = (x^2+3)^2$$
$$x^4 + 14x^2 - 15 = x^4 + 6x^2 + 9$$
$$8x^2 - 24 = 0$$
$$8x^2 = 24$$
$$x^2 = 3$$

إما $x = \sqrt{3}$

أو $x = \sqrt{3}$

وبالتالي C يقبل مماسين موازيين للمستقيم Δ

الأول في النقطة التي فاصلتها $x_B = \sqrt{3}$

الثاني في النقطة التي فاصلتها $x_C = -\sqrt{3}$

معادلتيهما:

المماس الأول T_1:

تحديد النقطة:

$$x_B = \sqrt{3}$$
$$y_B = f(\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3} - 6}{3}$$
$$B\left(\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3} - 6}{3}\right)$$

تحديد الميل:

$$m = 1$$

المعادلة:

$$T_1: y = m(x - x_B) + y_B$$
$$T_1: y = 1(x - \sqrt{3}) + \frac{-\sqrt{3} - 6}{3}$$
$$T_1: y = x - \sqrt{3} + \frac{-\sqrt{3} - 6}{3}$$
$$T_1: y = x + \frac{-3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 6}{3}$$
$$T_1: y = x - \frac{4\sqrt{3} + 6}{3}$$

المماس الثاني T_2:

تحديد النقطة:

$$x_C = -\sqrt{3}$$
$$y_C = f(-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3} - 6}{3}$$
$$C\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3} - 6}{3}\right)$$

تحديد الميل: $m = 1$

المعادلة:

$$T_2: y = m(x - x_C) + y_C$$
$$T_2: y = 1(x + \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3} - 6}{3}$$
$$T_2: y = x + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3} - 6}{3}$$
$$T_2: y = x + \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 6}{3}$$
$$T_2: y = x + \frac{4\sqrt{3} - 6}{3}$$

الطلب الخامس:

إثبات أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty, -1]$ ولدينا

$$f(\,]-\infty, -1]\,) =]-\infty, -1]$$
$$0 \notin]-\infty, -1]$$

التابع f مستمر ومتناقص تماماً على المجال $]-1, 1[$ ولدينا:

$$f(\,]-1, 1[\,) =]-3, -1[$$
$$0 \in]-3, -1[$$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد.

حصر الحل بمجال طوله واحد:

بما أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]1, +\infty[$ فإن:

x	$f(x)$
1	-3
2	$-\frac{16}{7}$
3	-1
4	$\frac{2}{19}$

وبما أنّ:

$$f(3) = -1$$
$$f(4) = \frac{2}{19}$$

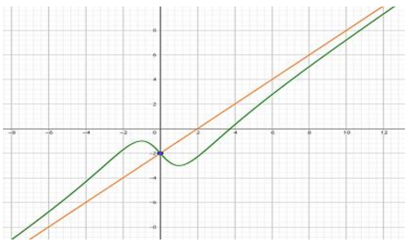
ومنه:

$$f(3).f(4) < 0$$

فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد محصور في المجال $]3,4[$

الطلب السادس:

الرسم:



المسألة الثالثة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة:

$$f(x) = x.\sqrt{6x - 3x^2}$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ التابع f معرف على المجال $[0,2]$

الحل:

التابع f معرف بشرط:

$$6x - 3x^2 \geq 0$$
$$6x - 3x^2 = 0$$
$$3x(2 - x) = 0$$

إما $3x = 0 \to x = 0$

أو $2 - x = 0 \to x = 2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$6x - 3x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
≥ 0	غ.م	|	م	|	غ.م

$$\to D_f = [0,2]$$

الطلب الثاني:

جد النهاية $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ وما طبيعة المماس في المبدأ؟

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x\sqrt{6x-3x^2}}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x\sqrt{6x-3x^2}}{x}$$

$$=\sqrt{6x-3x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند الصفر ويقبل مماس افقي في المبدأ معادلته $y=0$

الطلب الثالث:

ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند الـ 2 وما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

الحل:

ليكن لدينا التابع المساعد g المعرف على $[0,2[$ وفق:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\frac{x.\sqrt{6x-3x^2}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2}g(x)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$g(x)=\frac{x.\sqrt{6x-3x^2}}{x-2}$$

$$=\frac{x.\sqrt{3x(2-x)}}{x-2}$$

$$=\frac{x.\sqrt{3x}.\sqrt{2-x}}{-\sqrt{2-x}.\sqrt{2-x}}$$

$$=\frac{x.\sqrt{3x}}{-\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x\to2}g(x)=\frac{2\sqrt{6}}{0^-}=-\infty$$

وبالتالي التابع f غير اشتقاقي عند الـ 2 ويقبل مماس شاقولي في النقطة $(2,0)$ معادلته $x=2$

الطلب الرابع:

احسب $f'(x)$ ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $f(1.01)$.

الحل:

حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=(1)\sqrt{6x-3x^2}+\frac{6-6x}{2\sqrt{6x-3x^2}}.x$$

$$=6x-3x^2+\frac{3x-3x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}$$

$$=\frac{6x-3x^2+3x-3x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}$$

$$=\frac{9x-6x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}=\frac{x(9-6x)}{\sqrt{x(6-3x)}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}.\sqrt{x}(9-6x)}{\sqrt{x}.\sqrt{6-3x}}=\frac{\sqrt{x}(9-6x)}{\sqrt{6-3x}}$$

حساب قيمة تقريبية لـ $f(1.01)$:

$$a=1\quad,\quad h=0.01$$

$$f(a+h)\cong f(a)+f'(a).h$$

$$\cong f(1)+f'(1)(0.01)$$

$$\cong\sqrt{3}+(\sqrt{3})(0.01)$$

$$\cong 1.01\times\sqrt{3}$$

الطلب الخامس:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الحدية الكبرى وارسم C .

الحل:

دراسة التغيرات التابع f :

$$f(0)=0$$

$$f(2)=0$$

$$f'(x)=\frac{9x-6x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}$$

$$\to f'(x)=0$$

$$\frac{9x-6x^2}{\sqrt{6x-3x^2}}=0$$

$$9x-6x^2=0$$

$$3x(3-2x)=0$$

إما $3x=0\to x=0\in D_f\to f(0)=0$

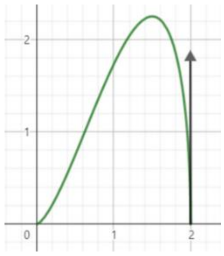
أو $3-2x=0\to x=\frac{3}{2}\in D_f\to f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$

نظم جدول تغيرات التابع f وفق:

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0

القيمة الحدية الكبرى: $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$

الرسم:



انظر للغيب بقلبٍ يؤمنُ أنّ ربَّ
الخيرِ لن يأتي إلا بالخير .. 💙

المسألة الرابعة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+x-1$$

والمستقيم Δ المعين بالعلاقة:

$$y=x-1$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ المستقيم Δ مقارب للخط C في جوار الـ $+\infty$

الحل:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x}}+x-1-(x-1)=\frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$

إذاً Δ مقارب للخط C في جوار الـ $+\infty$

الطلب الثاني:

ادرس الوضع النسبي لـ C و Δ :

الحل:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta$$

$$h(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$$

نعدم الفرق:

$$h(x)=0$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}}=0\to 2\neq0$$

مستحيلة الحل إذاً الفرق $h(x)$ لا ينعدم.

نظم جدول الوضع النسبي:

x	0	$+\infty$
$h(x)$	$\|\|$	$+$
الوضع النسبي	$\|\|$	C فوق Δ

الطلب الثالث:

أوجد نهايات التابع f عند أطراف مجال تعريفه واستنتج معادلة المقارب الشاقولي لـ C .

الحل:

$$\lim_{x\to0}f(x)=+\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

الطلب الرابع:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ودل على القيمة الحدية الصغرى.

الحل:

$$f'(x)=\frac{(0)(\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(2)}{(\sqrt{x})^2}+1$$

$$=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}+1=\frac{-1}{x.\sqrt{x}}+1$$

$$f'(x)=\frac{-1+x.\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

نعدم المشتق:

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{-1 + x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = 0$$
$$-1 + x\sqrt{x} = 0$$
$$x\sqrt{x} = 1$$
$$\sqrt{x} = \frac{1}{x}$$

بشرط $x > 0$ نربع الطرفين:

$$x = \frac{1}{x^2}$$
$$x^3 = 1$$
$$\rightarrow x = 1 \in D_f \rightarrow f(1) = 2$$

بسمِ الله على الغاياتِ .. حتى نصِل 💙

ننظم جدول تغيرات التابع f وفق:

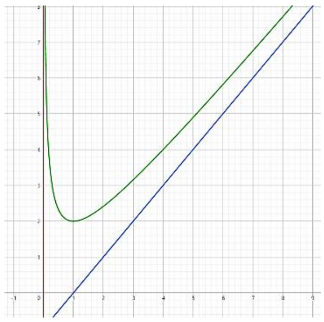
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert\vert$		0		
$f(x)$	$\vert\vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	∞

القيمة الحدية الصغرى للتابع: $f(1) = 2$

الطلب الخامس:

ارسم كل مقارب وجدته لـ C ثم ارسم C في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

الرسم:



الطلب السادس:

احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني والمستقيم Δ والمستقيمان $x = 1$ و $x = 2$

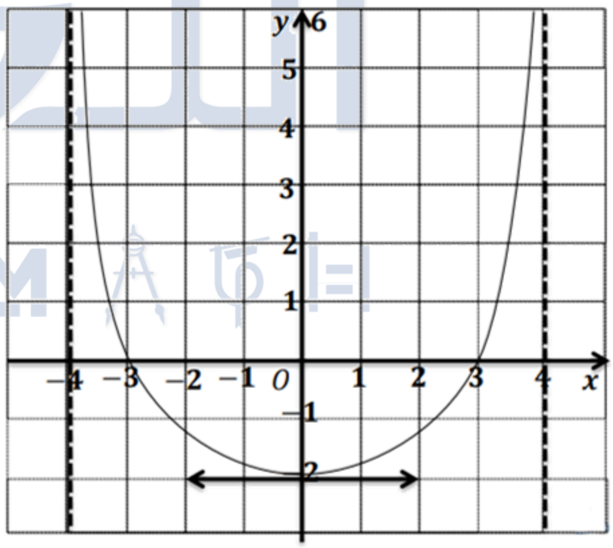
الحل:

$$S = \int_1^2 (f(x) - y_\Delta)\, dx$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + x - 1 - (x - 1)\right) dx$$
$$= \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx = \int_1^2 2(x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$
$$= \left[2.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = \left[4\sqrt{x}\right]_1^2 = 4\sqrt{2} - 4$$

قراءة الخطوط البيانية:

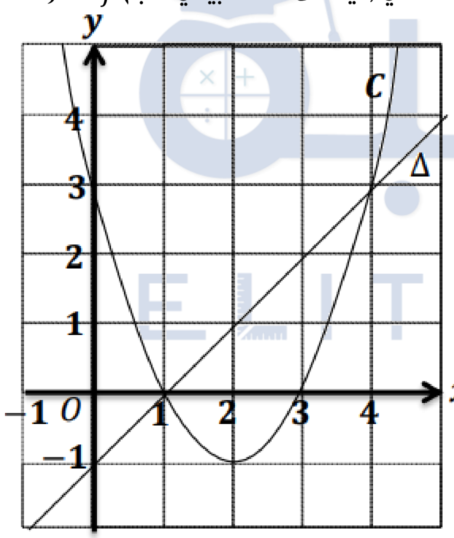
الشكل الأول:

في الشكل المجاور C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $]-4,4[$ وفق:



الشكل الثاني:

تأمل الشكل الآتي , ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:



انتّ رح تدرُس بالوقت الصَّح، ورح تشتغل بالوقت الصَّح..
واللي راح منك ما كان بنفع يضل إلك، واللي اخترته ما كان ينفع تتركه، ولو رجع فيك الزمن رح تختار نفس اختياراتك..
وصدّقني أنتّ بالمكان والهيئة اللي المفروض تكون فيها بالزبط، والندم على اللي راح ما إله فائدة، وكُتر التفكير فيه تضييع وقت.
صدّقني إنك تتخيَّل سيناريوهات بديلة والحُكم عليها بإنها كانت رح تحسِّن أحوالك عن وضعك الآن هو تضييع طاقة وصبر ع الفاضي..

" ما أصابكَ لم يكُن ليُخطئك، وما أخطأكَ لم يكُن يُصيبك " 💙

الفكرة	الخطوات	تأمل الشكل الأول	تامل الشكل الثاني
تعيين إيجاد $f(a)$	* نرسم المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=a$ * نحدد نقطة تقاطع الخط البياني والمستقيم السابق * يكون $f(a)$ هو ترتيب نقطة التقاطع	$f(0)=-2$ $f(3)=0$ $f(-3)=0$	$f(0)=3\,,f(1)=0$ $f(2)=-1\,,f(3)=0$ $f(4)=3$
	النمط الأول: عدد حلول معادلة: نص السؤال: ما عدد حلول المعادلة $f(x)=b$ فكرة الحل: * نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته $y=b$ * عدد تقاطعات المستقيم السابق مع الخط البياني هو عدد الحلول	ما عدد حلول المعادلة $f(x)=1$ ؟ حلان ما عدد حلول المعالة $f(x)=-2$ حل وحيد ما عدد حلول المعادلة $f(x)=-4$ مستحيلة الحل	ما عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ ؟ حلان ما عدد حلول المعالة $f(x)=-1$ حل وحيد ما عدد حلول المعادلة $f(x)=-2$ مستحيلة الحل
حلول معادلة $f(x)=b$	النمط الثاني: نص السؤال: حل المعادلة $f(x)=b$ فكرة الحل: * نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته $y=b$ * نحدد نقاط تقاطع المستقيم مع الخط البياني * تكون حلول المعادلة هي فواصل نقاط التقاطع السابقة انتبه: حل المعادلة هو قيم x حصرا ويكون "إما حل صريح أو ينتمي إلى مجال"	ما هي حلول المعادلة $f(x)=1$ حلان هما: $x_1\in]-4,-3[$ $x_2\in]3,4[$ ما هي حلول المعادلة $f(x)=-2$ حل وحيد: $x=0$ ما هي حلول المعادلة $f(x)=-4$ مستحيلة الحل.	ما هي حلول المعادلة $f(x)=3$ حلان هما: $x_1=0$ $x_2=4$ ما هي حلول المعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد: $x=2$ ما هي حلول المعادلة $f(x)=-2$ مستحيلة الحل.
	النمط الثالث: نص السؤال: ناقش بيانياً حلول المعادلة $f(x)=m$ فكرة الحل: بالاعتماد على الشكل نحدد مجالات قيم m ونحدد عدد حلول المعادلة الموافقة لكل مجال	أياً كان $m\in]-\infty,-2[$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ ولا حل" أي مستحيلة الحل أياً كان $m=-2$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد أياً كان $m\in]-2,+\infty[$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلان	أياً كان $m\in]-\infty,-1[$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ ولا حل "أي مستحيلة الحل. أياً كان $m=-1$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد أياً كان $m\in]-1,+\infty[$ يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلان
حلول معادلة $f(x)=y_\Delta$	النمط الأول: عدد حلول معادلة: نص السؤال: ما عدد حلول المعادلة $f(x)=y_\Delta$ فكرة الحل: * نحدد عدد مرات تقاطع الخط البياني مع المستقيم * عدد تقاطعات الخط البياني هو عدد الحلول		ما عدد حلول المعادلة $f(x)=y_\Delta$ ؟ حلان
	النمط الثاني: حلول المعادلة: نص السؤال: حل المعادلة $f(x)=y_\Delta$ فكرة الحل: * نحدد نقاط تقاطع الخط البياني مع المستقيم Δ * نحدد فواصل نقاط التقاطع السابقة * فواصل نقاط التقاطع هي حلول المعادلة		ما هي حلول المعادلة $f(x)=y_\Delta$ ؟ حلان هما: $x_1=1$ $x_2=4$
إيجاد ميل مستقيم مرسوم في شكل	نص السؤال: أوجد ميل المستقيم Δ فكرة الحل: * إذا كان المستقيم أفقي فالميل $m=0$ * إذا كان المستقيم شاقولي فالميل غير معرف * إذا كان المستقيم مائل بالاعتماد على الشكل نحدد نقطتين تنتميان إلى المستقيم ونوجد ميل المستقيم وفق: $m=\frac{\text{فرق الوايات}}{\text{فرق الإكسات}}$	حدد ميل المماس المرسوم في الشكل: بما أنّ المماس أفقي فإنّ: $m=0$	حدد ميل المستقيم Δ : لتكن لدينا النقطتان: $A(0,-1)\,,B(-1,-1)$ ومنهُ ميل المستقيم Δ : $m_\Delta=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-1+2}{0+1}$ $m_\Delta=1$
كتابة معادلة مستقيم مرسوم في شكل	لكتابة معادلة مستقيم فإننا: * نحدد ميل المستقيم m * نحدد نقطة A * تنتمي إلى المستقيم بالاعتماد على الشكل * نكتب معادلة المستقيم وفق: $y=m(x-x_A)+y_A$	اكتب معادلة المماس المرسوم في الشكل: تحديد نقطة التماس: $A(0,-2)$ تحديد الميل: بما أنّ المماس أفقي فإنّ $m=0$ المعادلة: $T: y=-2$	اكتب معادلة المستقيم Δ : لتكن لدينا النقطتان: $A(0,-1)\,,B(-1,-1)$ ومنهُ ميل المستقيم Δ : $m_\Delta=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-1+2}{0+1}=1$ النقطة: $A(0,-1)$ المعادلة: $\Delta: y=x-1$

إيجاد $f'(a)$	الخطوات: • نحدد المماس المار من النقطة التي فاصلتها a • نوجد ميل هذا المماس • يكون $f'(a) = m$ انتبه: عند القيمة الحدية في الغالب يكون المماس الأفقي	احسب $f'(0)$: $f'(0) = 0$	احسب $f'(2)$: $f'(2) = 0$
التابع الزوجي والفردي	ننظر إلى الخط البياني ونميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كان الخط البياني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب يكون التابع زوجي الحالة الثانية: إذا كان الخط البياني متناظر بالنسبة إلى المبدأ يكون التابع فردي	هل التابع f زوجي؟ نعم	هل التابع f فردي؟ لا
إيجاد $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$	الخطوات: • نحدد المقارب المائل للخط البياني في جوار ∞ • نوجد ميل المقارب المائل • يكون: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = (m$ ميل المقارب المائل$)$		
أيجاد النهايات	قواعد: القاعدة الأولى: عند وجود مقارب أفقي $\lim\limits_{x\to\infty} =$ عدد $\rightarrow$ هو معادلة المقارب الأفقي القاعدة الثانية: عند وجود مقارب شاقولي $\lim\limits_{x\to a} = \infty$ $+\infty$ جوار التقارب في الأعلى $-\infty$ جوار التقارب في الأسفل القاعدة الثالثة: وجود مقارب مائل $\lim\limits_{x\to\infty} = \infty$ $+\infty$ جوار التقارب في الأعلى $-\infty$ جوار التقارب في الأسفل $-\infty$ يسار $+\infty$ يمين القاعدة الرابعة: وجود نقطة $\lim\limits_{x\to a} = b$ مفرغة (a,b) $f(a) = b$ غير مفرغة (a,b) القاعدة الخامسة: وجود مواقع (أرباع) الربع الأول: تكون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ الربع الثاني: تكون $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ الربع الثالث: تكون $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ الربع الرابع: تكون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	أوجد كل مما يلي: $\lim\limits_{x\to4} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-4} f(x) = +\infty$	أوجد كل مما يلي: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

هو شوف...
الدراسة صعبة، الشّغل صعب، وإنك تجيب شهادة جامعة صعب، وإنك تفلّل امتحان صعب، وإنك تحقّق حلم من أحلامك صعب..
بس سيّدنا عُمر بن عبد العزيز قال :" لو أنّ الناس كُلّما استصعبوا أمراً تركوه، ما قامَ للنّاس دُنيا ولا دين ".
لذلك وجّه قلبك نحو السماء، وقل: «لَا أَبْرَحُ حَتَّى أَبْلُغَ» 💙

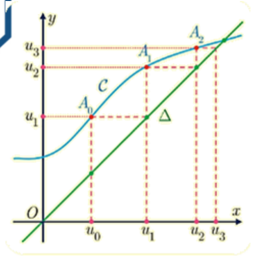
إيجاد صورة مجال	تمهيد: - المجال هو قيم x - بينما صورة المجال هي قيم لـ $f(x)$ - لإيجاد صورة مجال: نميز ثلاث حالات: الحالة الأولى: إذا كان التابع f متزايد تماماً على المجال I فإننا: - نصور المجال I أي نصور الأطراف - نحافظ على الترتيب الحالة الثانية: إذا كان التابع f متناقص تماماً على المجال I فإننا: 1. نصور الأطراف 2. لكن نعكس الترتيب الحالة الثالثة: إذا كان التابع f متزايد ومتناقص على المجال I فإننا: - نجزئ المجال I إلى مجالات التزايد والتناقص دون حذف أو تكرار - نصور الأجزاء السابقة - تكون صورة المجال هي اجتماع صور الأجزاء السابقة انتبه: - دائماً القيمة وصورتها نفس نوع المجال - طلب إيجاد صورة مجال هو ذاته طلب إيجاد النهايات والصور	أوجد كلاً مما يلي: $f(]-4,0])$ $=[-2,+\infty[$ $f(]0,4[)$ $=]-2,+\infty[$ $f(]-4,4[)$ $=f(]-4,0])\cup f(]0,4[)$ $=[-2,+\infty[\cup]-2,+\infty[$ $=[-2,+\infty[$	أوجد كلاً مما يلي: $f(]-\infty,2])$ $=[-1,+\infty[$ $f(]2,+\infty[)$ $=]-1,+\infty[$ $f(]-\infty,+\infty[)$ $=f(]-\infty,2])\cup f(]2,+\infty[)$ $=[-1,+\infty[\cup]-1,+\infty[$ $=[-1,+\infty[$
المستقر الفعلي	هو صورة مجموعة التعريف الخطوات: - نضع مجموعة التعريف - نوجد صورة مجموعة التعريف تنويه: - عملية الاجتماع: هي العناصر المشتركة والغير المشتركة - في حالة الخط البياني فرع واحد يكون المستقر الفعلي وفق: أكبر قيمة لـ $f(x)$, أصغر قيمة لـ $f(x)$ مجال مغلق مفتوح	أوجد $f(D_f)$: $f(D_f)=f(]-4,4[)$ $=f(]-4,0])\cup f(]0,4[)$ $=[-2,+\infty[\cup]-2,+\infty[$ $=[-2,+\infty[$	أوجد $f(D_f)$: $f(D_f)=f(]-\infty,+\infty[)$ $=f(]-\infty,2])\cup f(]2,+\infty[)$ $=[-1,+\infty[\cup]-1,+\infty[$ $=[-1,+\infty[$
قابلية الاشتقاق	ننظر إلى الخط البياني ونميز: - التابع f غير مستمر عند a (أي يوجد انقطاع) فيكون التابع f غير اشتقاقي عند a لأنه غير مستمر عند a - وجود مماس شاقولي عند a فيكون التابع f غير اشتقاقي - وجود نصفي مماسين للخط البياني عند a من اليسار ومن اليمين فيكون التابع f غير اشتقاقي		
حلول متراجحة من النمط: $f'(x)$ إشارة تراجح b	تمهيد: حلول المتراجحة هي قيم x نص السؤال: حل المتراجحة $f'(x)>0$ أو $f'(x)\geq 0$ الخطوات: - ننظر إلى الخط البياني وتحديداً عند تزايد التابع f (الخط البياني طالع) - تكون حلول المتراجحة هي قيم x التي يكون عندها f متزايد (مع مراعاة المجالات) نص السؤال: حل المتراجحة $f'(x)<0$ أو $f'(x)\leq 0$ الخطوات: - ننظر إلى الخط البياني وتحديداً عند تناقص التابع f (الخط البياني نازل) - تكون حلول المتراجحة هي قيم x التي يكون عندها f متناقص (مع مراعاة المجالات)	أوجد حلول المتراجحة: $f'(x)<0$ $S=]-4,0[$ $f'(x)\leq 0$ $S=]-4,0]$ $f'(x)>0$ $S=]0,4[$ $f'(x)\geq 0$ $S=[0,4[$	أوجد حلول المتراجحة: $f'(x)<0$ $S=]-\infty,2[$ $f'(x)\leq 0$ $S=]-\infty,2]$ $f'(x)>0$ $S=]2,+\infty[$ $f'(x)\geq 0$ $S=[2,+\infty[$

حلول المتراجحة من النمط: $f(x)$ إشارة تراجح b	نص السؤال: حل المتراجحة $f(x) > b$ أو $f(x) \ge b$ الخطوات: * نرسم المستقيم الذي معادلته $y = b$ * حلول المتراجحة هي قيم x التي تجعل الخط البياني فوق المستقيم (مع مراعاة المجالات) نص السؤال: حل المتراجحة $f(x) < b$ أو $f(x) \le b$ الخطوات: * نرسم المستقيم الذي معادلته $y = b$ * حلول المتراجحة هي قيم x التي تجعل الخط البياني تحت المستقيم (مع مراعاة المجالات)	أوجد حلول المتراجحة: $f(x) < 0$ $S =]-3,3[$ $f(x) \le 0$ $S = [-3,3]$ $f(x) > 0$ $S =]-4,-3[\cup]3,4[$ $f(x) \ge 0$ $S =]-4,-3] \cup [3,4[$	أوجد حلول المتراجحة: $f(x) < 3$ $S =]0,4[$ $f(x) \ge 3$ $S =]-\infty, 0] \cup [4,+\infty[$
القيم الحدية	النمط الأول: تحديد القيمة الحدية: نص السؤال: حدد القيمة الحدية فكرة الحل: نحدد نوعها وفقاً للشكل المرسوم	حدد القيم الحدية في حال وجودها: $f(0) = -2$ قيمة حدية صغرى	حدد القيم الحدية في حال وجودها: $f(2) = -1$ قيمة حدية صغرى
	النمط الثاني: إثبات وجود قيمة حدية: نص السؤال: أثبت أن $f(a)$ قيمة حدية كبرى للتابع f فكرة الحل: * نأخذ المجال I بحيث $a \in I$ * نوجد $D_1 = D_f \cap I$ * نكتب أياً كان $x \in D_1$ فإنه يتحقق: $f(a) \ge f(x)$ نص السؤال: أثبت أن $f(a)$ قيمة حدية صغرى للتابع f فكرة الحل: * نأخذ المجال I بحيث $a \in I$ * نوجد $D_1 = D_f \cap I$ * نكتب أياً كان $x \in D_1$ فإنه يتحقق: $f(a) \le f(x)$	أثبت أنّ $f(0)$ قيمة حدية صغرى للتابع: ليكن لدينا: $I =]-1,1[$ ولتكن: $D_1 = D_f \cap I$ أياً كان: $x \in D_1$ فإنّ: $f(0) \le f(x)$	أثبت أنّ $f(2)$ قيمة حدية صغرى للتابع: ليكن لدينا: $I =]1,3[$ ولتكن: $D_1 = D_f \cap I$ أياً كان: $x \in D_1$ فإنّ: $f(2) \le f(x)$
إيجاد $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	الخطوات: * نوجد $f'(a)$ فتكون $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$		
إيجاد $\lim_{x\to a} f(f(x))$	الخطوات: بالاعتماد على الشكل نوجد كلا من: * $\lim_{x\to a} f(x) = b$ * $\lim_{x\to b} f(x) = c$ * $\lim_{x\to a} f(f(x)) = c$		
إيجاد مجموعة التعريف	أوجد مجموعة تعريف التابع: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ أي يقصد حل المتراجحة $f(x) \ge 0$ أوجد مجموعة تعريف التابع: $g(x) = \ln(f(x))$ أي يقصد حل المتراجحة $f(x) > 0$ أوجد مجموعة تعريف التابع: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ تكون مجموعة تعريف التابع g هي: $D_g = D_f \backslash \{f(x) \text{القيم التي تعدم}\}$	أوجد مجموعة تعريف التابع g المعرف وفق: $g(x) = \frac{e^x}{f(x)}$ $D_g = D_f \backslash \{-3,3\}$ $=]-4,4[\backslash \{-3,3\}$	أوجد مجموعة تعريف التابع g المعرف وفق: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ $D_g = D_f \backslash \{1,3\}$ $D_g =]-\infty,+\infty[\backslash \{1,3\}$
إطراد متتالية معرفة وفق $u_n = f(n)$	يكون المعطى هو خط بياني والمطلوب تحديد جهة اطراد المتتالية u_n المعرفة بالشكل الصريح فكرة الحل: * بالاعتماد على الخط البياني نحدد جهة اطراد التابع $f(x)$ * تكون جهة اطراد المتتالية توافق جهة إطراد التابع f		

التمثيل الهندسي لمتتالية معطاة بشكل تدريجي

التمثيل الهندسي لمتتالية معطاة بشكل تدريجي:

يكون المعطى هو خط بياني والمطلوب أعد رسم الخط البياني على دفترك ثم مثل الحدود الاولى للمتتالية u_n المعرفة بالشكل التدريجي ثم خمن جهة تغييرها ونهايتها المحتملة.



فكرة الحل:

① نرسم الخط البياني c_f للتابع f (الموافق)

② نرسم المستقيم الذي معادلته $\Delta: y = x$ (المنصف للربعين الأول والثالث)

③ نحدد u_0 (مُعطاة) على محور الفواصل

④ نرسم المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = u_0$ ونحدد A نقطة تقاطعه مع الخط البياني

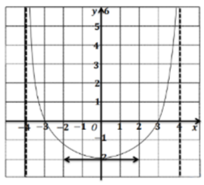
⑤ نرسم المستقيم الأفقي الذي معادلته $(y = A$ ترتيب$)$ ونحدد B نقطة تقاطعه مع المنصف Δ

⑥ فاصلة B هي u_1

☜ نكرر ما سبق

تمرين دورة 2017 الأولى:

في الشكل المجاور الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]-4,4[$ والمطلوب:



1. أوجد نهايات الآتية:

* $\lim_{x\to -4} f(x) =$
* $\lim_{x\to 4} f(x) =$

$\lim_{x\to -4} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 4} f(x) = +\infty$

2. احسب $f(0)$ و $f'(0)$

$f(0) = -2$

$f'(0) = 0$

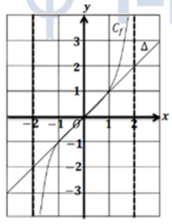
3. جد حلول المعادلة $f(x) = 0$

حلول المعادلة:

$x_1 = -3 \,, x_2 = 3$

تمرين دورة 2017 الثانية:

تأمل الشكل المرسوم جانباً حيث C_f هو الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]-2,2[$ والمطلوب:



1. أوجد النهايات الآتية:

* $\lim_{x\to -2} f(x) =$
* $\lim_{x\to 2} f(x) =$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

2. احسب $f(0)$ و $f'(0)$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

3. هل التابع فردي أو زوجي؟

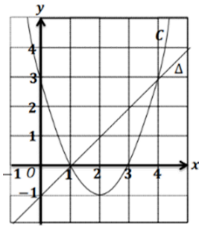
التابع فردي.

4. اكتب معادلة المماس Δ

من الرسم نلاحظ أنّ المماس يمر من Δ يمر بالمبدأ والنقطة $(1,1)$ وهو منصف الربع الأول والثالث ومعادلته: $y = x$

تمرين دورة 2018 الأولى:

تأمل الشكل المرسوم جانباً ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:



1. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f

$f(2) = -1$

2. أوجد نهاية $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

3. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = y_\Delta$

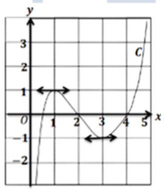
حلان هما: $x_1 = 1$ و $x_2 = 4$

4. اكتب معادلة المستقيم Δ

المستقيم Δ مار من $(1,0)$ وميله $m = 1$ وبالتالي $y = x - 1$.

تمرين دورة 2019 الأولى:

تأمل الشكل المرسوم جانباً ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ والمطلوب:



1. أوجد النهايات:

* $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$
* $\lim_{x\to 0} f(x) =$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

2. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f

$f(3) = -1$ قيمة حدية صغرى محلية.

3. جد حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$

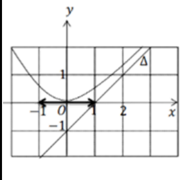
$S = [1,3]$

4. جد $f(]1,3[)$

$f(]1,3[) =]-1,1[$

تمرين دورة 2020 الأولى:

تأمل الشكل المرسوم جانباً، ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمستقيم Δ مقارب مائل لـ C والمطلوب:



1. أوجد النهايات عند

* $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$
* $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

2. اكتب معادلة المستقيم Δ

المستقيم Δ مار من $A(1,0)$ و $B(0,-1)$ وميله $m = 1$ ومعادلتهُ:

$\Delta: y = x + 1$

3. جد $f(0)$ و $f'(0)$

$f(0) = 0$

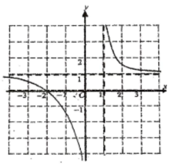
$f'(0) = 0$

4. جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

$S =]-\infty, 0[$

تمرين دورة 2021 الأولى:

تتأمل الخط البياني C للتابع f المعرف على $I =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$



1. أوجد النهايات

* $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$
* $\lim_{x\to 0} f(x) =$
* $\lim_{x\to 1} f(x) =$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$

2. اكتب معادلة كل مقارب أفقي وكل مقارب شاقولي لـ C

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو oy^+

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^-

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار الـ $+\infty$

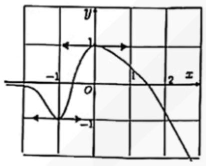
3. جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

$S =]-\infty, 0[\cup]1,+\infty[$

4. حل المعادلة $f(x) = 0$

$x = -2$

دورة 2022 الثانية:



نتأمل جانباً C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

١. جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

٢. اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط C_f

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار الـ $-\infty$

٣. اكتب مجموعة حلول المتراجحة

$$f'(x) > 0$$

$$S =]-1,0[$$

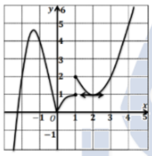
٤. عين القيم الحدية للتابع f مبيناً نوع كل منها.

$f(-1) = -1$ قيمة حدية صغرى.

$f(1) = 0$ قيمة حدية كبرى.

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:



نجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

١. ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 5$

حل وحيد

٢. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$

$S = [4,+\infty[$

٣. هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع f؟علل ذلك..

$f(1)$ قيمة حدية كبرى محلياً لأنه:

ليكن لدينا: $I =]0,2[$ ولتكن: $D_1 = D_f \cap I$

أياً كان: $x \in D_1$ فإنّ: $f(0) \leq f(x)$

٤. ما عدد القيم الحدية للتابع f

أربعة قيم حدية.

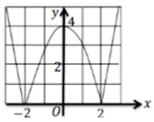
٥. ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$

$$f'(2) = 0$$

٦. أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x = 1$

التابع f غير مستمر عند $x = 1$ فهو غير اشتقاقي.

التمرين الثاني:



نجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ والمطلوب:

١. كم حل للمعادلة

$f(x) = 2$

أربعة حلول.

٢. عين صورة المجال $I = [-2,2]$ وفق f

$f([-2,2]) = [0,4]$

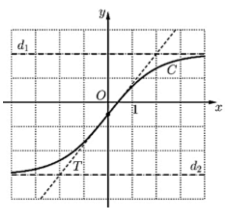
٣. كم قيمة صغرى أو كبرى محلياً للتابع f

$f(-2) = 0$ و $f(2) = 0$

قيم حدية صغرى محلياً.

$f(0) = 4$ قيمة حدية كبرى محلياً

التمرين الثالث:



إذا كان الخط البياني للتابع f والمستقيمين d_1 و d_2 مقاربين للخط C والمستقيم T مماس للخط C والمطلوب:

١. أوجد النهاية عند:

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$
* $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$$

٢. اكتب معادلة كل من المقاربين d_1 و d_2

$d_1 : y = 2$

$d_2 : y = -3$

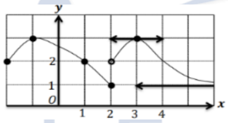
٣. إذا علمت أن المستقيم المائل المرسوم في الشكل يمس المنحني في النقطة $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ احسب $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ ثم اكتب معادلته.

المستقيم يمر من النقطتين $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ و $(2,2)$ وبالتالي $f'(0) = \frac{2+\frac{1}{2}}{2-0} = \frac{5}{4}$

ومعادلته:

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع:



ليكن C الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً

١. أوجد النهاية عند

* $\lim_{x\to2^-} f(x) =$
* $\lim_{x\to2^+} f(x) =$
* $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$
* $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) =$

الحل:

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = 2$$

٢. هل التابع f اشتقاقي عند 2

غير اشتقاقي لأنه غير مستمر

٣. جد $f'(3)$ و $f(3)$ وجد معادلة المماس عند 3

$$f(3) = 3$$

$$f'(3) = 0$$

ومعادلة المماس:

$$y = 3$$

٤. ما عدد القيم الحدية للتابع f

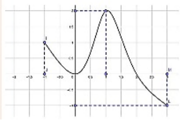
$f(-2) = 2$ و $f(2) = 1$

قيم حدية صغرى محلياً

$f(-1) = 3$ و $f(3) = 3$

قيم حدية كبرى محلياً

التمرين الخامس:



لدينا التابع f المعرف على المجال $[1,-3]$ واشتقاقي عليه وخطه البياني C , الشكل المرسوم جانباً يمثل الخط البياني للتابع f المشتق f' :

١. ما هو ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 1$.

$$m = f'(1) = 2$$

٢. هل $f(2)$ قيمة حدية للتابع f , علل إجابتك

نعم قيمة حدية لأنّ مشتق التابع ينعدم عندها ويغير إشارته.

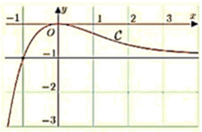
٣. هل $f(0)$ قيمة حدية للتابع f , علل إجابتك

لا ليست قيمة حدية لأنّ مشتق التابع ينعدم عندها دون أن يغير إشارته

٤. ما عدد المماسات الأفقية للخط C :

اثنان

التمرين السادس:



في الشكل المجاور خط بياني C لدالة f ومن خلال قراءة بيانية للشكل أجب عما يلي:

١. ما معادلة المستقيم المقارب للخط C ؟ وما الوضع النسبي للخط C مع هذا المقارب؟

$$y = -1$$

٢. يقبل f قيماً حدية محلياً عينها وبين نوعها

$f(0) = 0$ قيمة حدية كبرى محلياً

٣. في حالة عدد حقيقي k عين بدلالة k عدد حلول المعادلة

عندما $k \in]-\infty,-1] \cup \{0\}$ للمعادلة حل وحيد.

عندما $k \in]-1,0[$ للمعادلة حلين

عندما $k \in]0,+\infty[$ ليس للمعادلة حلول.

بسمِ اللّه على الأحلام .. حتّى نراها 💙

فهرس بحث الاشتقاق

فَقَدَ الفَتى لذّة جُهده لكَثرة ما طَلَبَ الكَمال..

أحيانًا نقتل أجمل أفكارنا لكثرة ارتجافنا من خطوة البداية، لخوفنا من الصّورة التي يراها الآخر منّا! نُدمن التفكير دون تسليمٍ للتّدبير، نُتقِن الكتابة على الورق، ونقف دون الجهد والعرق! وما زلنا أسرى الخجل ممّا سيقوله النّاس!

خطوتك الأولى، بدايتك الخجولة، كلّها تصنعُك، ما مِن مجتهد تراه إلّا وجاهَدَ خُطاه، وما مِن مُحاولٍ إلّا ويَغلِب هَواه، وما مِن مُخلِصٍ إلّا فَرّغَ قَلبَهُ مِن العَجز، وما مِن نجاحٍ إلّا نُسِجَ بخُيوط الألم، ياااا لكثرة أحلامنا ويااا لقلّة التّعَب.

اتّقِ اللّه تجد مَخرجًا، زِد صَبرًا ترى فَرَجًا، شُدَّ خُطاكَ ولَو عرَجًا، ثم استقم، إيّاك أن تستصغر دمعتك، أو تُقصّر سجدتك، أو تكسر خطوتك، أو أن تسُدَّ النّوافذ لأنّ الأبواب مغلقة! دَع نورًا يتسلّل إليك، وهواءً يُنعِشُ رئتيك، أنت للّه! أتفهم؟ لن تجد قَدَمًا تأخذ خطوتك، ولا قلبًا يحمل نبضتك، ولا عقلًا يُدمن فكرتك، ولا بابًا يُفتح دون طَرق! تحَمّل مسؤوليّة نفسك.

مَن صَدَقَ احترَق، ومَن جاهَد بَرَق
ومَن أدمَنَ الأحلام احترَق.. 💙