// التعبير عن المتتالية //

1- اعطاء الحد العام u_n بدلالة n

$\boxed{u_n = f(n)}$

2- اعطاء صيغة تدريجية $u_n = \dots$

$u_{n+1} = f(u_n)$

سلسلة نعطي u_n بشكل مجموع

$u_n = \dots + \dots + \dots$

// دراسة اطراد المتتالية //

هناك أربعة طرق

1- نوجد الفرق $u_{n+1} - u_n$ ونقارنه مع الصفر .

أكبر من الصفر ← متزايدة

أصغر من الصفر ← متناقصة

يساوي الصفر ← ثابتة

2- نوجد النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ونقارنها مع الواحد

أكبر من الواحد ← متزايدة

أصغر من الواحد ← متناقصة

تساوي الواحد ← ثابتة

بشرط : جميع حدود المتتالية موجبة .

3- إذا كانت معطاة بالحد العام

$u_n = f(n)$

ندرس أطراد التابع $f(x)$ على المجال $[a,\infty[$ فيكون اطراد المتتالية مثل أطراد التابع

4- اذا كانت معطاة بالصيغة التدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$ نوجد حدود اولى منها ونأخذ فكرة عنها متزايدة أو متناقصة ثم نثبت اطرادها بالتدريج

متزايدة نثبت $u_{n+1} \geq u_n$

متناقصة نثبت $u_{n+1} \leq u_n$

// الإثبات بالتدريج //

لإثبات علاقة من أجل $n \geq n_0$ نستخدم الاثبات بالتدريج وفق :

1- العلاقة $E(n)$ هي ((نكتب العلاقة المطلوب اثباتها))

2- نثبت $E(n_0)$: نعوض في العلاقة n بـ n_0 فتكون محققة .

3- نفرض $E(n)$ صحيحة ونثبت صحة $E(n+1)$

ننطلق من $E(n)$ حتى نحصل على $E(n+1)$

	// المتتالية الحسابية //	// المتتالية الهندسية //
التعريف	نحصل على كل حد من الحد الذي يسبقه بإضافة عدد ثابت r أساس المتتالية $u_0, u_1, u_2 ------ u_n, u_{n+1} ----$	نحصل على كل حد من الحد الذي يسبقه بضربه بعدد ثابت q أساس المتتالية $u_0, u_1, u_2, ------ u_n, u_{n+1}, -----$
الشرط	$u_{n+1} - u_n = r \to$ عدد ثابت	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \to$ عدد ثابت
الحد العام u_n بدلالة u_0	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \cdot q^n$
العلاقة بين حدين u_m و u_p	$u_m - u_p = (m-p)r$ $u_m = u_p + (m-p)r$	$\frac{u_m}{u_p} = q^{m-p}$ $u_m = u_p \cdot q^{m-p}$
مجموع n حداً	$S = n \cdot \frac{a+l}{2}$ حيث: n: عدد الحدود a: الحد الأول l: الحد الأخير	$S = a \frac{1-q^n}{1-q}$ حيث a: الحد الأول n: عدد الحدود q: الأساس

مسائل a ، b ، c المتوالية من المتتالية

حسابية:

$a + c = 2b$

$b = a + r$

$c = a + 2r$

هندسية:

$a \cdot c = b^2$

$b = a \cdot q$

$c = a \cdot q^2$

التمرين الأول : (نموذج وزاري)

لتكن $(x_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق

$x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2$ و $x_0 = 4$

في حالة $n \geq 0$

نعرف $(y_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n - 8$

أثبت أن $(y_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية

و اكتب y_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} y_n$

الحل:

$y_{n+1} = x_{n+1} - 8 = \frac{3}{4}x_n + 2 - 8 = \frac{3}{4}x_n - 6$

$= \frac{3}{4}(x_n - 8) = \frac{3}{4}y_n$

وهي متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول $y_0 = x_0 - 8 = -4$ وبالتالي:

$y_n = y_0 \cdot q^n = -4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

ولأن $-1 < q < 1$ فإن:

$\lim\limits_{x \to +\infty} y_n = -4 \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

التمرين الثاني : (نموذج وزاري)

لتكن $(x_n)_{n \geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق:

$x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$ و $x_0 = 5$

1- احسب x_3 و x_2 و x_1 ثم ادرس اطراد المتتالية.

2- نعرف $(y_n)_{n \geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$

أثبت أن $(y_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية

3- اكتب y_n بدلالة n ثم احسب $y_2 + y_3 + \dots + y_{10}$ بدلالة قوة للعدد $\frac{6}{5}$

الحل:

1- $\boxed{x_1} = \frac{6}{5}x_0 + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}(5) + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$

$\boxed{x_3} = \frac{6}{5}\left(\frac{224}{25}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1344}{125} + \frac{100}{125} = \frac{1444}{125}$

$\boxed{x_2} = \frac{6}{5}\left(\frac{34}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{204}{25} + \frac{20}{25} = \frac{224}{25}$

يتبين لنا أن المتتالية متزايدة نبرهن الخاصة

$E(n): x_{n+1} > x_n$

ولنبرهن صحة $E(0)$: $\frac{34}{5} = x_1 > x_0$

والخاصة صحيحة

نفرض صحة $E(n)$ أي أن $x_{n+1} - x_n \geq 0$

ولنبرهن صحة $E(n+1)$ أي نبرهن أن $x_{n+2} > x_{n+1}$

من الفرض $x_{n+1} > x_n$ وبما أن f متزايد تماماً

فإن:

$f(x_{n+1}) > f(x_n) \Rightarrow$

$\frac{6}{5}x_{n+1} + \frac{4}{5} > \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} \Rightarrow$

$x_{n+2} > x_{n+1}$

والعلاقة $E(n+1)$ صحيحة:

وبالتالي مما سبق العلاقة $E(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ والمتتالية U_n متزايدة

2- والمتتالية y_n هندسية

$y_{n+1} = x_{n+1} + 4 = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4 =$

$\frac{6}{5}(x_n + 4) = \frac{6}{5}y_n$

3- $y_n = y_0 \cdot q^n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n$ أساسها $q = \frac{6}{5}$ وحدها الأول $y_0 = 9$

$$y_2+y_3+\dots+y_{10}=y_2\,\frac{1-q^9}{1-q}=9\left(\frac65\right)^2\frac{1-\left(\frac65\right)^9}{1-\frac65}=-45\left(\frac65\right)^2\left[1-\left(\frac65\right)^9\right]$$

التمرين الثالث: (نموذج وزاري)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التراجعية $u_0=\frac12$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n}{2-u_n}$

1- أثبت أن $0<u_n<1$ أياً كان $n\in N$

2- نعرف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=\frac{1}{u_n}-1$ أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج u_n بدلالة n

3- اكتب u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل:

1- لنفرض التابع $f(x)=\frac{x}{2-x}$ بحيث $u_{n+1}=f(u_n)$ بالتالي:

$$f'(x)=\frac{2-x+x}{(2-x)^2}=\frac{2}{(2-x)^2}>0$$

فالتابع f متزايد تماماً.

لنضع $E(n): 0\leq u_n\leq 1$

لنبرهن صحة $E(0)$: $0\leq u_0=\frac12\leq 1$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 0\leq u_n\leq 1$ ولنبرهن صحة $E(n+1): 0\leq u_{n+1}\leq 1$

من الفرض $0\leq u_n\leq 1$ وبما أن f متزايد تماماً فإن $f(0)<f(u_n)\leq f(1)$

$\Rightarrow 0\leq u_{n+1}\leq 1$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$

2- $$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}-1=\frac{2-u_n}{u_n}-1=\frac{2-2u_n}{u_n}=2\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right)=2\left(\frac{1}{u_n}-1\right)=2v_n$$

وهي متتالية هندسية أساسها $q=2$

و $v_0=2-1=1$ بالتالي $v_n=v_0q^n=2^n$

3- $$v_n=\frac{1}{u_n}-1\Rightarrow u_n=\frac{1}{v_n+1}=\frac{1}{2^n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^n+1}=0$$

التمرين الرابع: (نموذج وزاري)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالشكل $u_0=e^3$ و $u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$

$(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل $v_n=\ln(u_n)-2$

1- أثبت أن v_n هندسية وعين q و v_0

2- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3- أثبت أنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e^2$

الحل:

1- $$v_{n+1}=\ln(u_{n+1})-2=\ln(e\cdot\sqrt{u_n})-2=\ln e+\ln\sqrt{u_n}-2=\frac12\ln(u_n)=\frac12\left[\ln(u_n)-2\right]=\frac12 v_n$$

وهي متتالية هندسية أساسها $q=\frac12$ وحدها الأول:

$$v_0=\ln(u_0)-2=3-2=1$$

2- $z_n = z_0 . q^n = (\frac{1}{2})^n$

3- $z_n + 2 = \ln(u_n) \Rightarrow u_n = e^{z_n+2} = e^{(\frac{1}{2})^n+2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \ln(u_n) = \lim_{x\to+\infty} (e^{(\frac{1}{2})^n+2}) = e^{0+2} = e^2$

التمرين الخامس:

لتكن المتتالية $u_n = 4n+1$ أثبت أن المتتالية حسابية واحسب $u_0 + u_1 + ---- + u_{10}$

الحل:

$u_{n+1} = 4n+5 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 4$

وهي متتالية حسابية أساسها $r=4$ وحدها الأول $u_0 = 1$

$S = \frac{n(a+l)}{2}$ $\quad n = 10 - 0 + 1 = 11$

$a = u_0 = 1$ و $l = u_{10} = 41$

$u_0 + u_1 + u_2 + ---- + u_{10} = \frac{11.(1+41)}{2} = 11 \times 21 = 231$

التمرين السادس:

لتكن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق $x_n = \frac{4n+5}{n+1}$ و $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$

أثبت أن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان.

الحل:

$x_{n+1} - x_n = \frac{4n+9}{n+2} - \frac{4n+5}{n+1} = \frac{(4n^2+13n+9)-(4n^2+13n+10)}{(n+1)(n+2)}$

$x_{n+1} - x_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$ متتالية متناقصة x_n

$y_{n+1} - y_n = \frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+1}{n+2} = \frac{(4n^2+13n+10)-(4n^2+13n+3)}{(n+2)(n+3)}$

$y_{n+1} - y_n = \frac{7}{(n+1)(n+2)} > 0$ متتالية متزايدة y_n

$\lim(x_n - y_n) = \lim\left(\frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+5}{n+1}\right) = 4-4 = 0$

والمتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان

التمرين السابع: (نموذج وزاري)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة كما يأتي: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$

المطلوب:

1- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$

2- أثبت أن $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة

3- علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ واحسب نهايتها.

الحل:

1- لنفرض التابع $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ بحيث

$u_{n+1} = f(u_n)$

بالتالي $f'(x) = \frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$

فالتابع f متزايد تماماً لنضع $E(n): 0 \leq u_n \leq 1$

لنبرهن صحة $E(0)$: $0 \leq u_0 = 0 \leq 1$

والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 0 \leq u_n \leq 1$

ولنبرهن صحة $E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

من الفرض $0 \leq u_n \leq 1$ وبما أن f متزايد تماماً فإن

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي

2- $n \geq 0$ لنضع: $E(n): u_{n+1} > u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$ $u_1 = \frac{1}{2} > u_0 = 0$

إذاً $E(0)$ صحيحة.

لنفرض صحة $E(n): u_{n+1} > u_n$ ونبرهن صحة: $E(n+1): u_{n+2} > u_{n+1}$

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن f متزايد تماماً فإن: $f(u_{n+1}) > f(u_n) \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة.

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ فالمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً

3- مما سبق وجدنا أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فالمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة ولإيجاد النهاية،

نحل المعادلة $f(l) = l$

$$\frac{2l+1}{l+2} = l \Rightarrow l^2 + 2l = 2l + 1 \Rightarrow l^2 = 1$$

$$\Rightarrow l = 1 \;,\; l = -1$$

المتتالية متزايدة وحدها الأول 0 لا يمكن لمتتالية حدودها موجبة أن تكون نهايتها سالبة بالتالي: $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

التمرين الثامن:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

أثبت أن $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

أثبت أن $u_n < 2$ ثم استنتج أن u_n متقاربة

الحل:

1- لنضع الخاصة $E(n): \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

في حالة $n \geq 1$ من أجل $n = 1$ نجد: $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^1}$ فالخاصة $E(1)$ صحيحة،

نفرض صحة الخاصة $E(n): \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1): \frac{1}{(n+2)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

$$\frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)!} = \frac{1}{(n+2)} \times \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+2)} \times \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$n \geq 1 \Rightarrow n+2 \geq 3 \Rightarrow n+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل كل عدد $n \geq 1$

-2

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow$$

$$u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 1 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$u_n \leq 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq 2 - 2\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2$$

فالعدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

-3

$$u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً وهي محدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة

التمرين التاسع:

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n}$ و $u_0 = 2$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$

1. أثبت بالتدريج أن $u_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n
2. أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n
3. لتكن S_n المجموع المعرف بالشكل $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ اكتب S_n بدلالة n واستنتج $\lim_{n \to +\infty} S_n$

الحل:

1- نفرض الخاصة $E(n): u_n > 0$

لنرى صحة $E(0)$ أن $u_0 = 2 > 0$ والخاصة صحيحة

نفرض صحة الخاصة $E(n): u_n > 0$ ولنرى صحة الخاصة $E(n+1): u_{n+1} > 0$

من الفرض $u_n > 0$ وبالتالي: $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n}$

لأنها قسمة عددين موجبين تماماً

وبالتالي الخاصة $E(n+1)$ صحيحة مما سبق

نجد أن الخاصة $u_n > 0$ صحيحة أيا كان

n من N

2) نلاحظ أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$

معرفة على النحو:

$$v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1+4u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 4$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = v_n + 4 \Rightarrow$$

$$v_{n+1} - v_n = 4$$

وبالتالي v_n متتالية حسابية أساسها

$$v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad r = 4$$

وبالتالي: $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{2} + 4n = \frac{8n+1}{2}$

و $u_n = \frac{1}{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{2}{8n+1}$

3- $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$

$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{8n+1}{2}\right) = \frac{(n+1)(8n+2)}{4}$$

$$S_n = \frac{1}{4}(8n^2 + 10n + 2) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} S_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}(8n^2 + 10n + 2) = +\infty$$

التمرين العاشر: (دورة 2023 وزاري)

لتكن المتتاليتين $(u_n)_{\geq1}$ و $(v_n)_{\geq1}$ المعرفتين

وفق العلاقتين: $u_n = -\frac{1}{n}$ و $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

1. ادرس اطراد كل من $(u_n)_{\geq1}$ و $(v_n)_{\geq1}$

2. أثبت أن المتتاليتان $(u_n)_{\geq1}$ و $(v_n)_{\geq1}$ متجاورتان.

الحل:

1- بفرض $f(x) = -\frac{1}{x}$ حيث $u_n = f(n)$

بالتالي $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ والتابع

متزايد تماماً وبالتالي فالمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$

متزايدة تماماً.

2- بفرض $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ حيث $v_n = g(n)$ بالتالي

$$g'(x) = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0$$

$x \in [1, +\infty[$ ؛

والتابع متناقص تماماً على $[1, +\infty[$ وبالتالي

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة تماماً.

3- $\lim_{x\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{n}\right) =$

$0 + 0 = 0$

التمرين 11:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \quad ; \quad u_0 = 1$$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $v_n = u_n + 3$

1- أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية وأوجد أساسها:

2- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبارة u_n بدلالة n.

3- ليكن في حالة عدد طبيعي n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

عبّر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$

الحل:

1- $v_{n+1} = u_{n+1}+3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n+3) = \frac{1}{3}v_n$

فالمتتالية v_n هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

2- $q=\frac{1}{3}$ ، $v_0 = u_0+3 = 1+3 = 4 \Rightarrow$

$v_n = v_0 q^n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{3^n}$

$v_n = u_n+3 \Rightarrow u_n = v_n - 3 \Rightarrow$

ومنه: $u_n = \frac{4}{3^n} - 3$

3- $S_n = v_0+v_1+\dots+v_n = 4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$

$= 4\times\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$S_n = 6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 6 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$-1 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(6-2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 6-0 = 6$

التمرين 12:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق ما يأتي

$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة

2- أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

1- $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \Rightarrow$

$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

من أجل $n\geq0$ فإن $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$

ومنه $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

والمتتالية متناقصة

$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \Rightarrow u_{n+1} < u_n$

2- من أجل $n\geq0$ فإن:

① $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \geq 0 \Rightarrow u_n \geq 0$

أو من أجل $n\geq0$ فإن:

① $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geq 0 \Rightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq 0$

② $n\geq0 \Rightarrow n+1\geq1 \Rightarrow \sqrt{n+1}\geq1 \Rightarrow \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geq 1$

$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 1$

من ① و ② نجد $0 \leq u_n \leq 1$

المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

التمرين 13:

ليكن لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفتان وفق: $u_n=5-\frac{1}{n}$ و $v_n=5+\frac{1}{n^2}$

1- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة

2- أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متناقصة

3- هل المتتاليتان $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ متجاورتان؟ علل إجابتك.

الحل:

1- بفرض $u_n=f(n)$ حيث $f(x)=5-\frac{1}{x}$ بالتالي $f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$ والتابع متزايد تماماً وبالتالي فالمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً

2- بفرض $v_n=g(n)$ حيث $g(x)=5+\frac{1}{x^2}$ بالتالي $g'(x)=\frac{-2}{x^3}<0$ والتابع متناقص تماماً وبالتالي فالمتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماماً.

3- $\lim\limits_{x\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)=0+0=0$ والمتتاليتان متجاورتان.

التمرين 14:

$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية فيها $q=2$ و $u_0=1$ احسب u_3 ثم احسب المجموع

$S=u_3+u_4+u_5+u_6+$

الحل:

1- $u_m=u_n\cdot q^{m-n}\Rightarrow u_3=u_0\cdot q^{3-0}$

$\Rightarrow u_3=1(2)^3\Rightarrow u_3=8$

$n=5$ عدد الحدود

$S=u_3\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=8\times\frac{1-2^5}{1-2}=-8(1-32)=248$

التمرين 15:

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق

$S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}$

1- أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً

2- أثبت أن S_n يكتب بالشكل وفق $S_n=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)$ ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ وبين أنها متقاربة.

الحل:

1- $S_{n+1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}$

$=S_n+\frac{1}{3^{n+1}}\Rightarrow S_{n+1}-S_n=\frac{1}{3^{n+1}}>0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة تماماً.

2- نلاحظ أن S_n عبارة عن مجموع $n+1$ حد من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول 1

$S_n=a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=1\left(\frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)$

$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)$

$S_n = \frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\times 3^n} < \frac{3}{2}$

بالتالي $\frac{3}{2}$ عنصر راجحاً

المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التمرين 16:

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$:

$u_n = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{2^n}$

1- أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة

2- استنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان

3- أثبت أن $u_n = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$

ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$

الحل:

1- $u_{n+1} = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5^{n+1}} \Rightarrow$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5^{n+1}} > 0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً.

$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow$

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} - u_n - \frac{1}{2^n} =$

$\frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} \Rightarrow$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} < 0$

المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً

2- $v_n = u_n + \frac{1}{2^n} \Rightarrow v_n - u_n = \frac{1}{2^n}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) =$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

لأن $-1 < q = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

والمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً والمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً و

$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

فالمتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

3- $u_n = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{5^n} = \frac{1}{5}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}\right)$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{5}{4}\right)\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right) =$

$\frac{1}{4}(1-0) = \frac{1}{4}$

لأن $-1 < q = \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

وبما أن المتتاليتين متجاورتان فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = \frac{1}{4}$

التمرين 17:

$u_0 = \frac{1}{2}$ $\quad u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + 2u_n$

1. ادرس تغيرات f على R

$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

وأثبت أن f متزايد تماماً على $[0,3]$

2. أثبت بالتدريج $u \leq u_{n+1} \leq 3$

3. استنتج التقارب المتتالية واحسب نهايتها

الحل:

1. $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

f مستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$

$-\frac{2}{3}x + 2 = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}x = -2 \Rightarrow$

$x = \frac{-2}{\frac{-2}{3}} \Rightarrow x = \frac{-6}{-2} = 3 \Rightarrow$

$f(3) = -\frac{1}{3}(3)^2 + 2(3)$

$f(3) = -3 + 6 \Rightarrow f(3) = 3$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$		3	$-\infty$

f تابع متزايد تماماً على المجال $]-\infty, 3]$

f تابع متزايد تماماً على المجال $[0,3]$

2. $u_n \leq u_{n+1} \leq 3$

نرمز للخاصة بالرمز $E(n)$

نبرهن صحة العلاقة $E(0)$

$E(0): u_0 \leq u_1 \leq 3$

$n = 0 \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{3}u_0^2 + 2u_0$

$u_1 = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + 1$

$u_1 = -\frac{1}{12} + 1 \Rightarrow u_1 = \frac{11}{12} \Rightarrow$

$u_0 = \frac{1}{2} \leq u_1 = \frac{11}{12} \leq 3$

$E(n)$ محققة نفرض صحة العلاقة

$E(n+1)$ نبرهن على صحتها

$E(n+1) = u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$

$u_n \leq u_{n+1} \leq 3$

وبما أن f متزايد تماماً على المجال $[0,3]$

$f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(3)$

$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$

$E(n)$ صحيحة و $E(n+1)$ محققة

3) من الطلب الثاني $u_n \leq u_{n+1} \leq 3$

نجد أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 3 يعني متقاربة إلى L نهايتها:

$f(l) = L \Rightarrow -\frac{1}{3}l^2 + 2L = L$

$L^2 - 6L = -3L \Rightarrow L^2 - 6L + 3L = 0$

$L^2 - 3L = 0 \Rightarrow L(L-3) = 0$

إما $L = 0$ مرفوض

أو $L - 3 = 0 \Rightarrow L = 3$ مقبول

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$

إذاً المتتالية متقاربة من 3

التمرين 18:

لتكن f التابع المعرف على $R \setminus \{-1\}$ وفق

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

1- أثبت أن f متزايد تماماً

2- نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

$u_0 = 2 \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1}$

a) أثبت أن $1 < u_{n+1} < u_n$

b) علل تقارب المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$

الحل:

1- f اشتقاقي على $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(2)(x+1)-(1)(2x)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

إذاً f تابع متزايد تماماً على $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

2- $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1}$

a: $1 < u_{n+1} < u_n$

نرمز للمتراجحة بالرمز $E(n)$

نبرهن صحة العلاقة $E(0)$

$E(0): 1 < u_1 < u_0 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{2u_0}{u_0+1}$

$u_1 = \frac{2(2)}{2+1} = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{4}{3}}$

$1 < u_1 = \frac{4}{3} < u_0 = 2$

محققة

نفرض صحة العلاقة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$

$E(n+1): 1 < u_{n+2} < u_{n+1}$

$1 < u_{n+1} < u_n$

بما أن f تابع متزايد تماماً على $]-1, +\infty[$

$f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$

$1 < u_{n+2} < u_{n+1}$

$E(n+1)$ صحيحة ، $E(n)$ محققة

b: نستنتج مما سبق أن المتتالية متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى بالعدد 1 فهي متقاربة.

التمرين 19:

احسب بنهاية: $S_n = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{4}{3^n}$

الحل:

لدينا مجموع $n+1$ حداً من متتالية هندسية حدها الأول $a = 4$ وأساسها $q = \frac{1}{3}$

ومنه $S_n = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}$

$$S_n = \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{3}}$$

أي: $S_n = \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{\frac{2}{3}}$

ومنه: $S_n = 6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

وبما أن: $-1 < \frac{1}{3} < 1$

فإن: $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} S_n = 6(1-0) = 6$

التمرين 20 :

أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n كان :

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2.(n+1)^2}{4}$$

الحل :

لنسمي الخاصة $E(n)$ وهي :

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2.(n+1)^2}{4}$$

① لنثبت صحة $E(1)$

$$\left.\begin{array}{l} \ell_1 = 1^3 = 1 \\ \ell_2 = \frac{1^2.(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$$

② لنفرض صحة $E(n)$ أي أن :

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2.(n+1)^2}{4}$$

مهما كانت $n \geq 1$

③ برهن صحة $E(n+1)$ أي :

$$1^3+2^3+\dots+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2.(n+2)^2}{4}$$

$$E(n+1) : 1^3+2^3+\dots+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2.(n+2)^2}{4}$$

لنختار الطرف الأول :

$$\ell_1 = 1^3+2^3+\dots+(n+1)^3 = 1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3$$

$$= \frac{n^2.(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \Rightarrow$$

$$\frac{n^2.(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2.(n^2+4n+4)}{4} =$$

$$\frac{(n+1)^2.(n+2)^2}{4} = \ell_2$$

ملاحظة : نعلم أن $1+2+3+\dots+n = \frac{n.(n+1)}{2}$

بتربيع الطرفين $(1+2+3+\dots+n)^2 = \frac{n^2.(n+1)^2}{4}$

وقد برهنا أن $1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2.(n+1)^2}{4}$

ومنه نستنتج أن

$$1^3+2^3+\dots+n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$$

التمرين 21

أثبت بالتدريج صحة كل من الخواص الآتية أياً كان العدد الطبيعي n .

1) $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7

الحل :

لنسمي الخاصة $E(n)$ وهي : $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7

① لنثبت صحة $E(0)$: $2^0-1 = 1-1 = 0$ مضاعف للعدد 7

② لنفرض صحة $E(n)$ أي أن :

$2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 مهما كانت $n \geq 0$

لنثبت صحة $E(n+1)$ أي : $2^{3n+3}-1$ مضاعف للعدد 7

$E(n+1)$ $2^{3n+3}-1$ مضاعف للعدد 7

$$2^{3n+3}-1 = 2^3 \times 2^{3n}-1 = 8 \times 2^{3n}-1 =$$

$$8.(2^{3n}-1+1)-1 = 8.(2^{3n}-1)+7$$

وهو مضاعف للعدد 7

التمرين 22:

$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$

المعرف على $]0,+\infty[$

1- ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وارسم خطه البياني ومقارباته.

2- أثبت أنه إذا انتمى x إلى $[\sqrt{5},5]$ فإن $f(x)$ ينتمي $[\sqrt{5}.5]$

3- تعرف المتتالية $\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n) \\ u_0=5 \end{cases}$

باستخدام منصف الربع الأول مثل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ثم أثبت أن محقق $\sqrt{5}\leq u_{n+1}\leq u_n$ واستنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{0+5}{0^+}\right)=+\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

$x=0$ مقارب للخط البياني ينطبق على yy'

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

إذا ضمنا $y=\frac{1}{2}x$ مقارب مائل

$h(x)=f(x)-\frac{1}{2}x$

$=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2x}-\frac{1}{2}x$

$h(x)=\frac{5}{2x} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} h(x)=0$

$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{x^2}\right)$

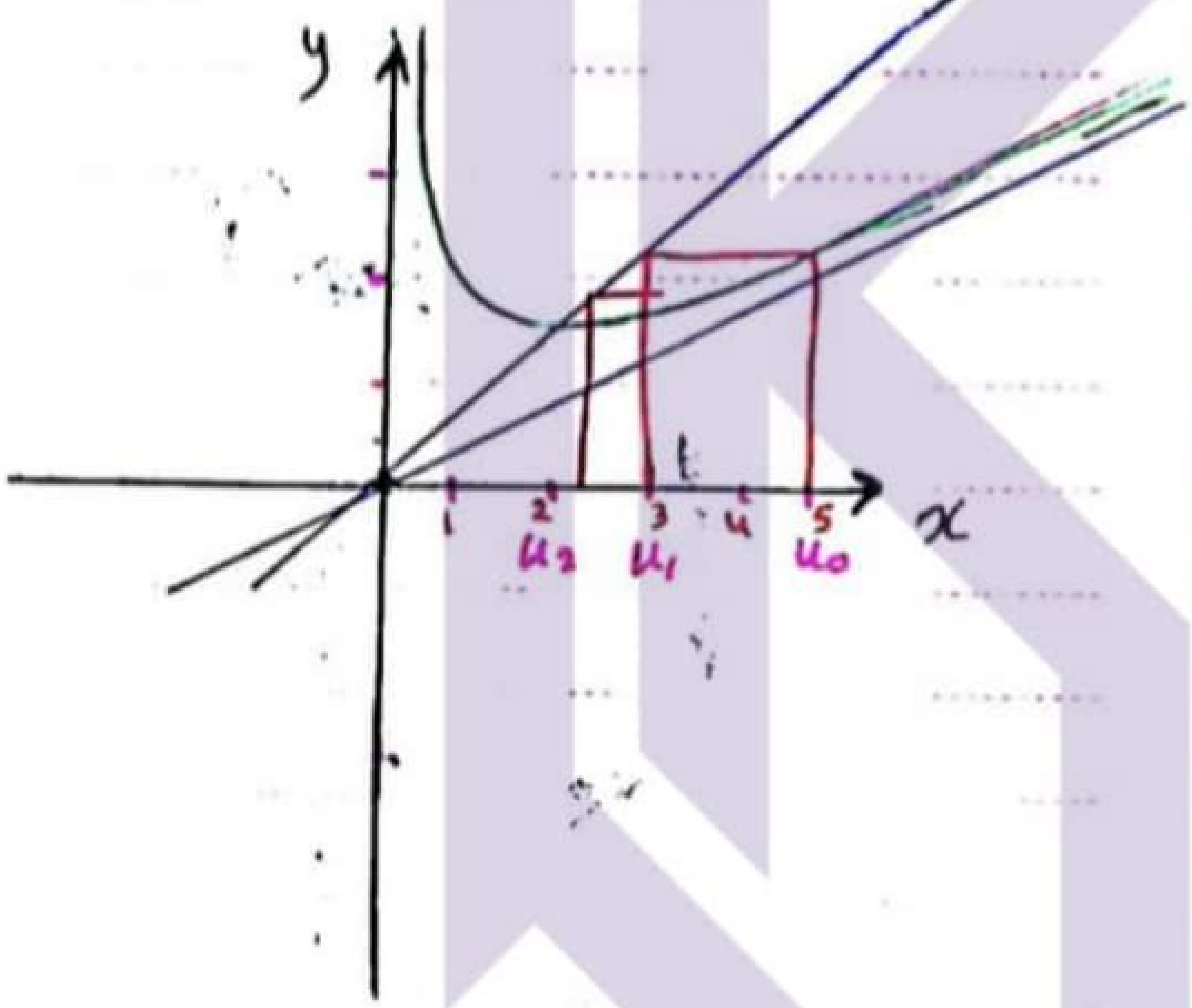
$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-5}{x^2}\right)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-5=0 \Rightarrow x^2=5$

$\Rightarrow x=\sqrt{5}$

$f(\sqrt{5})=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\frac{5}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{5}$

x	0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\sqrt{5}$	↗	$+\infty$



$f(x)$ مستمر ومتزايد تماماً على $[\sqrt{5},+\infty[$

فهو مستمر ومتزايد تماماً على $[\sqrt{5}.5]$

$f(\sqrt{5})=\sqrt{5} \Rightarrow f(5)=3$

$f([\sqrt{5},5])=[\sqrt{5},3]\subset[\sqrt{5},5]$

ملاحظة: تمثيل حدود متتالية على الرسم

1- نحدد u_0 على محور الفواصل.

2- نسقط من u_0 على C_f ومن C_f إلى $D: y=x$

ومن $x = y \,;\, \Delta$ الى محور التواصل منظوم u_1

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

الخاصة المطلوبة

$E(n): \sqrt{5} \leq u_{n+1} < u_n$

نثبت صحة $E(0)$ $\quad \sqrt{5} \leq u_1 \leq u_0$

$u_0 = 5 \quad , \quad u_1 = 3$

$\sqrt{5} \leq 3 \leq 5$

محققة

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$

$\sqrt{5} \leq u_{n+1} \leq u_n$

f متزايد $\quad f(\sqrt{5}) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

$\sqrt{5} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

و $E(n+1)$ محققة

المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي

متقاربة f مستمر نبحث عن نهاية

$f(x) = x$

$\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right) = x$

$\frac{x^2+5}{x} = \frac{2x}{1} \Rightarrow x^2 + 5 = 2x^2$

$x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{5}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{5}$

التمرين 23:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً بالعلاقة:

$u_{n+1}=(u_n-1)^2+1$ ، $u_0=a$

1. عين قيم العدد الحقيقي a حتى تكون u_n متتالية ثابتة.
2. من أجل $a=\frac{3}{2}$ أثبت أن $1<u_n<2$ أياً كان العدد الطبيعي n.
3. أثبت أن u_n متناقصة واستنتج أنها متقاربة ثم جد نهايتها.
4. لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالعلاقة $v_n=\ln(u_n-1)$ أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية. عين أساسها q وحدها الأول v_0.
5. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

الحل:

(1) حتى تكون المتتالية ثابتة يجب أن

$u_{n+1}=u_n=u_0$ $\quad n\in N$

$u_0=(u_0-1)^2+1 \Rightarrow u_0=u_0^2-2u_0+1+1 \Rightarrow$

$u_0^2-3u_0+2=0 \Rightarrow \boxed{u_0=a}$

$a^2-3a+2=0 \Rightarrow (a-2)(a-1)=0$

إما $a=2$ أو $a=1$

(2) نرمز للقضية بالرمز $E(n): 1<u_n<2$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $E(0)$: $1<u_0=\frac{3}{2}<2$ محققة

نفرض صحة العلاقة من $E(n)$ ونبرهن على صحتها من أجل $E(n+1): 1<u_{n+1}<2$

$1<u_n<2 \Rightarrow 0<u_n-1<1 \Rightarrow$

$0<(u_n-1)^2<1 \Rightarrow 1<(u_n-1)^2+1<2$

$\Rightarrow 1<u_{n+1}<2$ محققة

$E(n+1)$ صحيحة و $E(n)$ صحيحة $n\in N$

(3) حتى تكون المتتالية متناقصة $u_{n+1}\leq u_n$

نرمز للقضية بالرمز $E(n): u_{n+1}\leq u_n$

نبرهن صحة العلاقة من أجل $E(0)$

$I_1: u_1=(u_0-1)^2+1=(\frac{3}{2}-1)^2+1$

$=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4} \Rightarrow u_1=\frac{5}{4}$

$I_2: u_0=\frac{3}{2}$

$u_1\leq u_0$ محققة

نفرض صحة العلاقة من $E(n)$

ونبرهن على صحتها من أجل $E(n+1)$

$u_{n+2}\leq u_{n+1}$

$u_{n+1}\leq u_n$ من الفرض

$u_{n+1}-1\leq u_n-1$

$(u_{n+1}-1)^2\leq (u_n-1)^2$

$(u_{n+1}-1)^2+1\leq (u_n-1)^2+1$

$u_{n+2}\leq u_{n+1}$

نجد أن $E(n+1)$ صحيحة فإن $E(n)$ صحيحة

فالمتتالية متناقصة.

وبما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد (1) فهي متقاربة إلى L.

$f(L)=L \Rightarrow (L-1)^2+1=L \Rightarrow$

$L^2-2L+1+1=L \Rightarrow$

$L^2-3L+2=0 \Rightarrow (L-2)(L-1)=0$

إما $L=1$ مقبول أو $L=2$ مرفوض

فهي متقاربة إلى العدد (1) $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$

(4)

$v_n = \ln(u_n - 1)$

$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}-1) = \ln((u_n-1)^2+1-1)$

$= \ln((u_n-1)^2) = 2\ln(u_n-1)$

$v_{n+1} = 2v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 2 = q$

إذا المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=2$

$v_0 = \ln(u_0-1) = \ln(\frac{3}{2}-1) = \ln(\frac{1}{2})$

$v_0 = -\ln 2$

(5)

$v_n = v_0 . q^n \Rightarrow v_n = (-\ln 2)(2)^n \Rightarrow$

$v_n = \ln(u_n-1) \Rightarrow e^{v_n} = u_n - 1$

$u_n = e^{v_n}+1 \Rightarrow u_n = \boxed{e^{(-\ln 2)2^n}+1}$

التمرين 24: دورة 2023

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق $u_{n+1} = 3+\sqrt{u_n - 1}$, $u_0=2$ المطلوب:

1- أثبت أن $2\leq u_n \leq 5$ أياً كان $n\geq 0$

2- أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً واستنتج تقاربها واحسب نهايتها.

الحل:

1- لتكن القضية $E(n): 2\leq u_n\leq 5$

القضية $E(0)$ محققة وضوحاً لأن

$u_0 = 2 \Rightarrow 2\leq u_n \leq 5$

لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $2\leq u_n\leq 5$

ولنبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن صحة العلاقة $2\leq u_{n+1}\leq 5$

$2\leq u_n\leq 5 \Rightarrow 2-1\leq u_n - 1\leq 5-1$

$\Rightarrow 1\leq u_n-1\leq 4 \Rightarrow$

$1\leq\sqrt{u_n-1}\leq 2\Rightarrow$

$3+1\leq 3+\sqrt{u_n-1}\leq 3+2\Rightarrow$

$4\leq 3+\sqrt{u_n-1}\leq 5 \Rightarrow$

$\boxed{2\leq u_{n+1}\leq 5}$

والقضية $E(n+1)$ محققة أي أن $2\leq u_n\leq 5$ مهما كان العدد الطبيعي n

2- لإثبات أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً نبرهن صحة القضية $E(n): u_n < u_{n+1}$ مهما كان العدد الطبيعي n

من أجل $n=0$ لدينا

$u_0=2 , u_1 = 3\sqrt{u_0-1} = 3+\sqrt{2-1} = 3+\sqrt{1} =$

$3+1=4 \Rightarrow u_0<u_1$

أي أن القضية $E(0)$ محققة.

لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $u_n<u_{n+1}$ ولنبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي لنبرهن صحة العلاقة $u_{n+1}<u_{n+2}$

$u_n<u_{n+1}\Rightarrow u_n-1<u_{n+1}-1\Rightarrow$

$\sqrt{u_n-1}<\sqrt{u_{n+1}-1}\Rightarrow$

$3+\sqrt{u_n-1}<3+\sqrt{u_{n+1}-1}\Rightarrow$

$u_{n+1}<u_{n+2}$

أي أن القضية $E(n+1)$ محققة ومنه $u_n<u_{n+1}$ مهما كان العدد الطبيعي n أي أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

وبما أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد (5) فهي متقاربة من العدد ℓ حيث $\ell\leq 5$

وحدها البدء $u_0=2$ بالتالي $2\leq \ell\leq 5$

بما أن للتابع $f(x) = 3+\sqrt{x-1}$ مستمر على المجال $[1, \infty[$ فهو مستمر عند ℓ حيث ℓ هو حل المعادلة $f(x) = x$

$f(x) = x \Rightarrow 3+\sqrt{x-1} = x \Rightarrow$

$\sqrt{x-1} = x-3 \Rightarrow x^2-6x+9 = x-1$

$\Rightarrow x^2-7x+10 = 0 \Rightarrow$

$x-5 = 0 \Rightarrow x = 5$

مرفوض $x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$

بالتالي $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$

طريقة ثانية لإثبات أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً.

لإثبات أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً نبرهن صحة القضية $E(n) : u_{n+1} - u_n > 0$ مهما كان العدد الطبيعي n من أجل $n = 0$ لدينا

$u_0 = 2 \ , \ u_1 = 3+\sqrt{u_0-1} = 3+\sqrt{2-1} = 3+\sqrt{1}$

$= 3+1 = 4 \Rightarrow u_1 - u_0 > 0$

أي أن القضية $E(0)$ محققة.

لنفرض أن القضية $E(n)$ محققة أي نفرض صحة العلاقة $u_{n+1} - u_n > 0$

ونبرهن أن القضية $E(n+1)$ محققة أي نبرهن صحة العلاقة $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

$u_{n+2} - u_{n+1} = 3\sqrt{u_{n+1}-1} - (3-\sqrt{u_n-1}) =$

$\sqrt{u_{n+1}-1} - \sqrt{u_n-1} =$

$\dfrac{(\sqrt{u_{n+1}-1} - \sqrt{u_n-1})(\sqrt{u_{n+1}-1} + \sqrt{u_n-1})}{(\sqrt{u_{n+1}-1} + \sqrt{u_n-1})} =$

$\dfrac{u_{n+1} - u_n}{(\sqrt{u_{n+1}-1} + \sqrt{u_n-1})} > 0 \Rightarrow$

$u_{n+2} - u_{n+1} > 0$

أي أن القضية $E(n+1)$ محققة ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$ مهما كان العدد الطبيعي n أي أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً.

التمرين 25:

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

1- أثبت أن $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$

2- احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ واستنتج تقاربها.

الحل:

نلاحظ أن u_n هو مجموع n حداً أصغرها $\dfrac{n}{n^2+n}$ وأكبرها $\dfrac{n}{n^2+1}$

$u_n \leq n \times \dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{n^2}{n^2+1}$

$u_n \geq n \times \dfrac{n}{n^2+n} = \dfrac{n^2}{n^2+n}$

$\Rightarrow \dfrac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$

لما كانت $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = 1 \end{cases}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

حسب مبرهنة الإحاطة وهي متقاربة

تمرين 26: (التمرين دوري)

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق

$$S_n = 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$$

1- احسب كلاً من S_1 و S_2 و S_3

2- ادرس اطراد المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$

3- أثبت أنه أياً كان $n\geq 1$ فإن: $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

الحل:

1-

$S_1 = 1^3 = 1$

$S_2 = 1^3+2^3 = 1+8 = 9$

$S_3 = 1^3+2^3+3^3 = 1+8+27 = 36$

2- $S_{n+1} = 1^3+2^3+3^3+\dots+(n+1)^3$

$S_{n+1} - S_n = (n+1)^3 > 0$

متزايدة تماماً

3- $E(n):\ S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

من أجل $n=1$: $L_1 = S_1 = 1$

$L_2 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$

محققة

نفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة من أجل n لنثبت صحتها من أجل $(n+1)$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$L_1 = S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$

$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

$S_{n+1} = \frac{n^2+(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$

$= \frac{(n+1)^2\left[n^2+4(n+1)\right]}{4}$

$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = L_2$

$E(n+1)$ محققة فإن $E(n)$ محققة

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

التمرين 27:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$ و $u_0=0$

1 نعرف المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ وفق $x_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$ وأثبت أن $(x_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

2- جد x_n بدلالة n واحسب نهايتها.

3 اكتب u_n بدلالة n واستنتج $u_n = \frac{3^n-1}{3^n+1}$ وجد نهايتها

الحل:

1- $x_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{2u_n+1}{u_n+2}-1}{\frac{2u_n+1}{u_n+2}+1} =$

$\frac{2u_n+1-u_n-2}{2u_n+1+u_n+1} = \frac{u_n-1}{3u_n+3} =$

$\frac{1}{3}\left(\frac{u_n-1}{u_n+1}\right) = \frac{1}{3}x_n$

بالتالي المتتالية x_n هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول

$x_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = -1$

2- حدها العام $x_n = x_0 \cdot q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{3^n}$

بما أن $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = 0$

3- من العلاقة $x_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ نجد

$x_n(u_n+1) = u_n - 1$ أي $x_n u_n - u_n = -x_n - 1$

وبالتالي: $u_n = \frac{-x_n - 1}{x_n - 1}$

$$u_n = \frac{\frac{1}{3^n} - 1}{-\frac{1}{3^n} - 1} = \frac{\frac{1-3^n}{3^n}}{\frac{-1-3^n}{3^n}} = \frac{1-3^n}{-1-3^n} = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} u_n = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x_n - 1}{x_n - 1} = 1$

بما أن $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$

التمرين 28:

$$\begin{cases} u_0 = -1 \quad u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \end{cases}$$

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق العلاقة التدريجية:

1- لنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقة: $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$ أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

2- لنعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقة: $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ بملاحظة أن $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} u_n$ و $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

أثبت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $r = 2$ ثم اكتب عبارة w_n بدلالة n

3- استنتج أن عبارة u_n بدلالة n هي $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$ ثم ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

4- المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ أثبت بالتدريج أنه أياً كان $n \in \mathbb{N}$ كان $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

الحل:

1- $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n - \frac{1}{2} u_{n+1}}{u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n} = \frac{\frac{1}{2} u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n}{u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n\right)}{u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n} = \frac{1}{2}$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأول:

$v_0 = u_1 - \frac{1}{2} u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1) = 1$

ومنه $v_n = v_0 q^n$ $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

2- $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{v_n + \frac{1}{2} u_n}{\frac{1}{2} v_n} - \frac{u_n}{v_n} = \frac{2v_n + u_n - u_n}{v_n} = 2$$

فالمتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ حسابية أساسها $r=2$ ومنه $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$

$w_n = w_0 + rn = -1+2n$

3- لدينا $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ ومنه $u_n = v_n \times w_n$

بالتالي: $u_n = \frac{1}{2^n}\times(-1+2n) = \frac{2n-1}{2^n}$

لدراسة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$:

$u_{n+1}-u_n = \frac{2n+1}{2^{n+1}} - \frac{2n-1}{2^n} = \frac{2n+1-4n+2}{2^{n+1}}$

ومنه: $u_{n+1}-u_n = \frac{-2n+3}{2^{n+1}}$

نلاحظ أن إشارة $u_{n+1}-u_n$ من إشارة $-2n+3$ فندرس إشارة المقدار $-2x+3$ فنعدمه حيث نلاحظ أن $-2x+3=0$ عندما $x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-2x+3$	$+$	0	$-$

نلاحظ أنه عندما $n\geq 2$ يكون $-2n+3<0$ أي $u_{n+1}-u_n<0$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0=2$

4) $S_n = u_0+u_1+\dots+u_n$

الخاصة المطلوب اثباتها هي: $E(n): S_n = 2-\frac{2n+3}{2^n}$

ونريد إثبات صحة هذه الخاصة أياً كان العدد الطبيعي $n\geq0$

(I) الخاصة $E(0)$ صحيحة.

لأن $S_0=u_0=-1=2-\frac{0+3}{1}=-1$ محققة

(II) لنفرض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$:

$E(n+1): S_{n+1} = 2-\frac{2n+5}{2^{n+1}}$

$S_{n+1}=S_n+u_{n+1} = 2-\frac{2n+3}{2^n}+\frac{2n+1}{2^{n+1}}$

ومنه $S_{n+1} = 2+\frac{-4n-6+2n+1}{2^{n+1}}$ بالتالي

$S_{n+1} = 2+\frac{-2n-5}{2^{n+1}} = 2-\frac{2n+5}{2^{n+1}}$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على الخاصة $E(n)$ فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n\geq0$.

التمرين 29:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3$

ولنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ وفق: $v_n = u_n+6$

1- أثبت أن $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية عين أساسها واحسب v_0 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

2- نعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ وفق: $w_n = \ln(v_n)$

أثبت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ حسابية واحسب w_0 ثم احسب المجموع $S=w_0+w_1+w_2+w_3+w_4+w_5$

الحل:

$v_n = u_n + 6 \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 6$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 3}{u_n + 6} = \frac{\frac{1}{2}(u_n+6)}{u_n+6} = \frac{1}{2} = q$

إذاً v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$v_0 = ?$ $\quad v_0 = u_0 + 6 \Rightarrow v_0 = 2 + 6$

$\Rightarrow v_0 = 8 \Rightarrow v_n = v_0 \cdot q^{n-0} \Rightarrow$

$v_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$w_n = \ln(v_n) \Rightarrow w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$

$w_{n+1} = w_n \Rightarrow$

$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$

$w_{n+1} - w_n = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 = r$

إذاً المتتالية حسابية أساسها

$r = -\ln(2)$

$w_0 = ?$ $\quad w_0 = \ln(v_0)$

$w_0 = \ln 8 = \ln(2)^3 = 3\ln(2)$

$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$

$a = w_0 = 3\ln(2)$

$l = w_5 = ? \Rightarrow w_5 = \ln(v_5)$

$w_5 = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)$

$w_5 = \ln\left(8\left(\frac{1}{32}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4$

$-\ln(2)^2 = -2\ln(2)$

عدد الحدود $n = \frac{5-0}{1} + 1 = 6$

$S = \frac{a+l}{2} \cdot n$

$S = \frac{3\ln 2 - 2\ln 2}{2} \cdot 6^3$

$S = 3\ln 2$

- ليكن لدينا التابع f

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

المعرف على $]1,+\infty[$

1) ادرس اطراد التابع f

2) لنعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

$$U_n = \begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) $e \leq U_n \leq 5$

b) أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

c) استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل: 1) f اشتقاقي على $]1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{(1)\ln x - (\frac{1}{x})(x)}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$

$$\boxed{x = e}$$

$$f(e) = \frac{e}{\ln e} = e$$

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	e	$\nearrow$	

2)

a) $e \leq U_n \leq 5$

نرمز للقضية بالرمز $E(n)$

نبرهن صحة العلاقة من أجل

$E(0): \quad e \leq U_0 = 5 \leq 5$

محققة

نفرض صحة العلاقة من أجل $E(n)$

لنبرهن صحتها من أجل

$E(n+1): \quad e \leq U_{n+1} \leq 5$

من الفرض

$$e \leq U_n \leq 5$$

وبما كان f متزايد تماماً على $[e,+\infty[$ كان

$$f(e) \leq f(U_n) \leq f(5)$$

$$e \leq U_{n+1} \leq \frac{5}{\ln 5} \leq 5$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على $E(n)$ فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 0$

b) $U_{n+1} \le U_n$

نرمز للقضية بالرمز $E(n)$

نبرهن صحة العلاقة من أجل

$E(0):\ U_1 = \frac{5}{\ln 5} \le U_0 = 5$

محققة

نفرض صحة العلاقة من أجل

$E(n)$

لنبرهن على صحتها من أجل

$E(n+1):\ U_{n+2} \le U_{n+1}$

من الفرض

$U_{n+1} \le U_n$

وبما أن f تابع متزايد تماماً

على $[e,+\infty[$

$f(U_{n+1}) \le f(U_n)$

$U_{n+2} \le U_{n+1}$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة

فـ $E(n)$ محققة

$\forall n \in \mathbb{N}$

إذاً المتتالية U_n متناقصة

c) بما أن المتتالية U_n متناقصة

لأن $U_{n+1} \le U_n$

ومحدودة من الأدنى بالعدد

e فهي متقاربة إلى

ℓ

حيث

$\ell \in [m, U_0]$

$\ell \in [e, 5]$

ونهايتها هي حل المعادلة

$f(\ell) = \ell$

$\frac{\ell}{\ln(\ell)} = \ell$

$\frac{1}{\ln(\ell)} = 1$

$\ln(\ell) = 1$

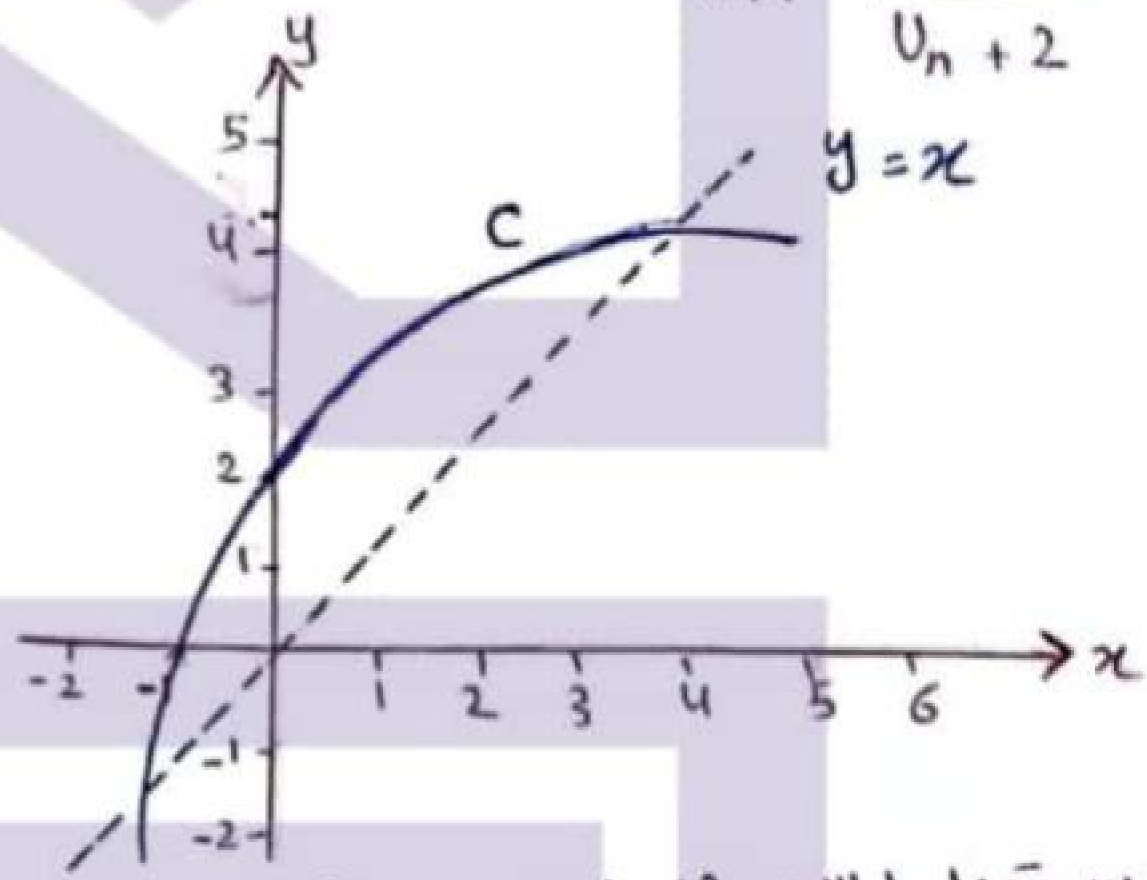
$\boxed{\ell = e}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = e$

التمرين الثالث:

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي $U_0=\frac{1}{2}$

$$U_{n+1}=\frac{5U_n+4}{U_n+2}$$



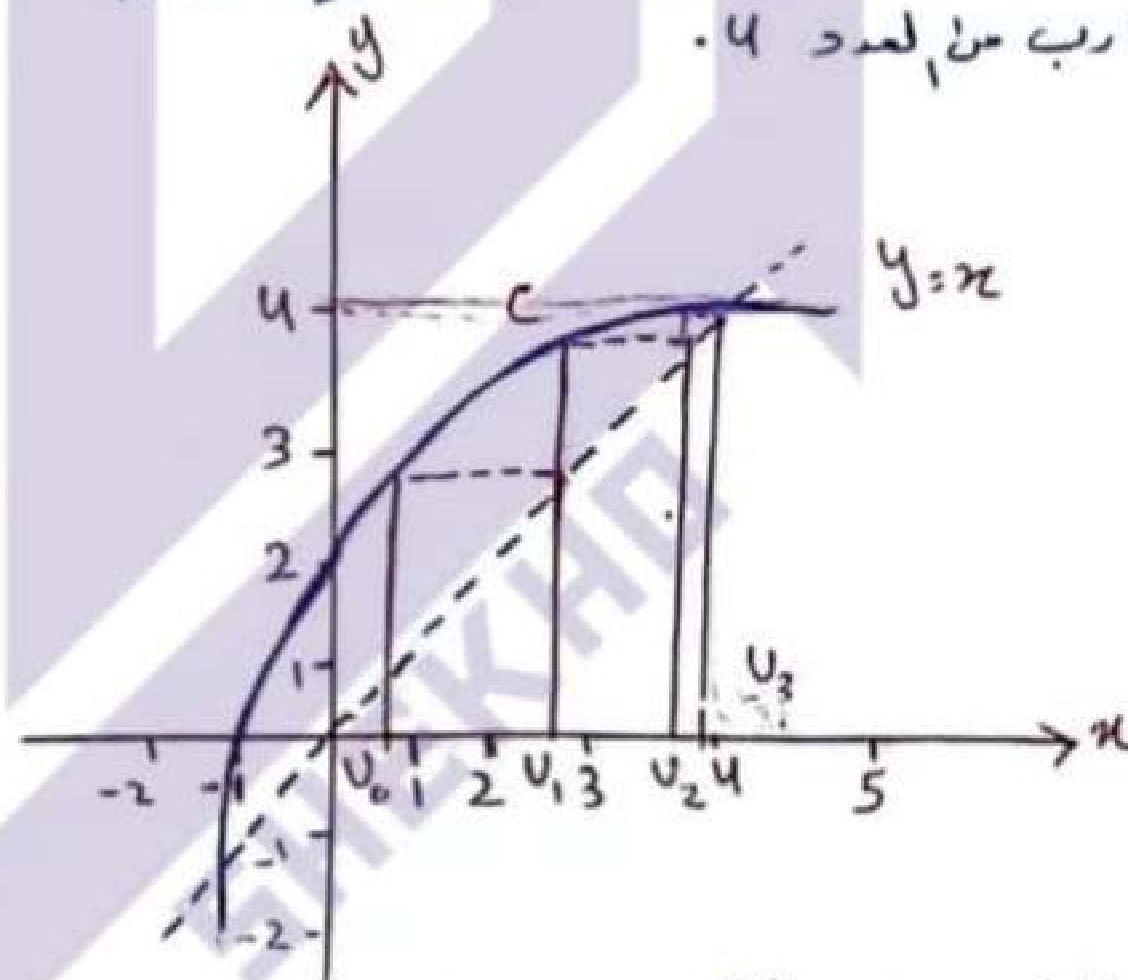
1. باستعمال الرسم مثل على محور الفواصل ودون حساب الحدود U_0, U_1, U_2, U_3.
2. ضع تخمينا حول اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ وتقاربها
3. لتكن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $V_n=\frac{U_n-4}{U_n+1}$

a) أثبت أن $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

b) اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

الحل:

من ملاحظة الشكل نخمن أن المتتالية متزايدة وتتقارب من العدد 4.



$$V_{n+1}=\frac{\frac{5U_n+4}{U_n+2}-4}{\frac{5U_n+4}{U_n+2}+1}=\frac{\frac{5U_n+4}{U_n+2}-\frac{4U_n+8}{U_n+2}}{\frac{5U_n+4}{U_n+2}+\frac{U_n+2}{U_n+2}}$$

$$\frac{U_n-4}{6U_n+6}=\frac{U_n-4}{6(U_n+1)}=\frac{1}{6}\times\frac{U_n-4}{U_n+1}$$

$$\Rightarrow V_{n+1}=\frac{1}{6}V_n$$

أي أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{6}$ وحدها الأول

$$V_0=\frac{U_0-4}{U_0+1}=\frac{\frac{1}{2}-4}{\frac{1}{2}+1}=\frac{-\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{7}{2}\times\frac{2}{3}$$

$V_0=-\frac{7}{3}$ حدها الأول

وبالتالي يكون:

$$V_n=V_0q^n\Rightarrow V_n=-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

لدينا $V_n=\frac{U_n-4}{U_n+1}$ وبالتالي نجد:

$$V_n\cdot U_n+V_n=U_n-4$$

$$\Rightarrow V_n\cdot U_n-U_n=-V_n-4$$

$$\Rightarrow U_n(V_n-1)=-V_n-4$$

$$\Rightarrow U_n=\frac{-V_n-4}{V_n-1}=\frac{V_n+4}{1-V_n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{0+4}{1-0}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}U_n=4$$

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

① اكتب $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

② أثبت أن $0 \leq U_n \leq 1$

③ أثبت أن U_n متناقصة

④ استنتج تقارب المتتالية وماهي نهايتها.

⑤ استخدم عبارة U_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد V_n بدلالة n

$$V_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$$

⑥ استنتج نهاية $(V_n)_{n\geq 1}$

الحل:

ج1:

$$U_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

ج2:

$$0 \leq U_n \leq 1$$

$$U_n \geq 0$$

$$n+1 \geq n$$

$$\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0$$

$$\boxed{U_n \geq 0} \dots ①$$

$$n \geq 0$$

نضيف واحد للطرفين:

$$n+1 \geq 1$$

$$\sqrt{n+1} \geq 1$$

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 1$$

$$\boxed{U_n \leq 1} \dots ②$$

$$0 \leq U_n \leq 1$$

ج3:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x}} < 0$$

f تابع متناقص تماماً U_n متتالية متناقصة.

لأن:

$$x+1 > x$$

$$\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+1} < 0$$

ج4: بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد صفر فهي متقاربة.

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{+\infty} = 0$$

ج5:

$$U_n = \cancel{1} + \cancel{\sqrt{2}} - \cancel{1} + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}} + \cdots\cdots + \sqrt{n} - \cancel{\sqrt{n-1}}$$

$$V_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$$

$$V_n = \sqrt{n}$$

ج6:

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$$

<u>التمرين الأول</u>: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $I =]-\infty,3]$ وفق: $f(x) = x\sqrt{3-x}$.

1) ادرس قابلية اشتقاق التابع f عند $x = 3$ ، واستنتج معادلة لمماس الخط C في النقطة $A(3,0)$.

2) ادرس اطراد التابع f على I .

3) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ ، أثبت أنّ $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ ، أيّاً كان العدد الطبيعي n .

4) استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها.

(2

$f(x) = x\sqrt{3-x}$

$]-\infty, 3[$

$f'(x) = (1)\sqrt{3-x} + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}} \cdot x$

$= \frac{2(3-x) - x}{2\sqrt{3-x}}$

$= \frac{6 - 2x - x}{2\sqrt{3-x}}$

$f'(x) = \frac{6 - 3x}{2\sqrt{3-x}}$

$f'(x) = 0$

$6 - 3x = 0$

$-3x = -6$

$x = 2$

x	$-\infty$		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

من جدول نلاحظ أنّ

f تابع متزايد $]-\infty, 2]$

ومتناقص على $]2, 3[$

(3

$u_{n+1} = f(u_n)$ $\quad u_0 = 1$

$u_{n+1} = u_n\sqrt{3-u_n}$

$u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

$E(n)$ ———— نفرض

———— نبرهن

$E(0) : u_0 = 1 \leq u_1 = \sqrt{2} \leq 2$

محققة

$E(n)$ ————

$E(n+1) : u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$

$u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

بما أن f تابع متزايد تماماً على $[0, 2]$

$f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$

$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$

———— $E(n+1)$

محققة $E(n)$

(4

بما أن المتتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة

ونهايتها ℓ هي حل المعادلة حيث f مستمر عند ℓ

$f(x) = x$

$x\sqrt{3-x} = x$

$\sqrt{3-x} = 1$

$3 - x = 1$

$x = 2$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

تمرين متتالية ونهايتها

• لنتأمل المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $U_n=\frac{2n+3}{n+5}$

هذه المتتالية من النمط $U_n=f(n)$

و f التابع الكسري المعرف على $]0,+\infty[$ بالصيغة

$$f(x)=\frac{2x+3}{x+5}$$

1) اثبت أن f تابع متزايد تماماً على $]0,+\infty[$

2) ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

3) أوجد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

4) اثبت أن $U_n<2$

الحل:

1) f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{(2)(x+5)-(1)(2x+3)}{(x+5)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{2x}+10-\cancel{2x}-3}{(x+5)^2}$$

$$f'(x)=\frac{7}{(x+5)^2}>0$$

إذاً f تابع متزايد تماماً على $]0,+\infty[$

2) بما أن $U_n=f(n)$ والتابع f متزايد تماماً على $]0,+\infty[$ فالمتتالية U_n متزايدة تماماً على $]0,+\infty[$

3) $$\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3}{n+5}\right)$$

④ اثبات أن $U_n < 2$

$$U_n - 2 = \frac{2n+3}{n+5} - 2$$

$$= \frac{\cancel{2n}+3-\cancel{2n}-10}{n+5}$$

$$= \frac{-7}{n+5} < 0$$

أي أن

$$U_n - 2 < 0$$

$$U_n < 2$$

تمـــرين

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad , \quad u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \dfrac{3u_{n+1} - u_n}{2} \end{cases}$$

والمتتاليـة $(w_n)_{n\geq 0}$ المعـرفة وفق : $w_n = u_{n+1} - u_n$

والمطلوب:

① بين أنّ $(w_n)_{n\geq 0}$ متتاليـة هندسية وعين أساسها q واكتب w_n بدلالة n .

② أثبت أنّ : $u_n = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ مستخدماً الإثبات بالتدريج.

③ ادرس اطراد $(u_n)_{n\geq 0}$ ثم عين حداً راجحاً لها .

④ جد عدداً طبيعياً m يحقق : إذا كانت $n \geq m$ كان

$$\left| u_{n+1} - 3 \right| < 2^{-5}$$

① $w_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$

$= \frac{3u_{n+1} - u_n}{2} - u_{n+1}$

$= \frac{3u_{n+1} - u_n - 2u_{n+1}}{2}$

$= \frac{u_{n+1} - u_n}{2} = \frac{1}{2} w_n$

ومنه $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$w_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$

$w_n = w_0 \times q^n \Rightarrow w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

② نضع الخاصة $E(n)$ تنص: $\boxed{u_n = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ:

$L = u_0 = 1$, $R = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

- نفرض صحة $E(n)$ ولنبرهن صحة $E(n+1)$ أي

نبرهن أنّ: $u_{n+1} = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

البرهان:

$u_{n+1} = u_n + w_n$

$= 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$= 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$= 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$= 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة.

"car": $E(n)$ صحيحة مهما كان العدد الطبيعي $n \geq 0$

③ $u_n = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$u_{n+1} = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$u_{n+1} - u_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$= -\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$= -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً بدءاً من u_0

ولما كانت: $u_n = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 3$

"car": 3 حدّاً راجحاً عن $(u_n)_{n\geq 0}$

④ $|u_{n+1} - 3| = \left|3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 3\right| < 2^{-5}$

$\left|-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right| < 2^{-5}$

$\left|-\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| < 2^{-5}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 2^{-5}$

$2^{-n} < 2^{-5}$

$2^n > 2^5 \Rightarrow n > 5$

تمرين: $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق: $(\star)$ $0 \leq U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(U_n - 3)$ و $U_0 = 4$

① برهن أنه: $0 \leq U_n - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ مهما كان العدد الطبيعي n.

② علل تقارب المتتالية.

③ جد عدداً طبيعياً N يحقق: إذا كانت $n > N$ كان $U_n \in \left]2.99, 3.01\right[$

---

① نضع القضية $E(n)$: $0 \leq U_n - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$E(0)$ محققة لأنّ: $0 \leq U_0 - 3 = 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

نفرض صحة $E(n)$ ولنبرهن صحة $E(n+1)$

أي: $\boxed{0 \leq U_{n+1} - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

من العلاقة $(\star)$

$$0 \leq U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(U_n - 3) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

ومنه $E(n+1)$ محققة.

مما سبق نجد أنه $E(n)$ صحيحة مهما كان $n \in \mathbb{N}$

---

② $3 \leq U_n \leq 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ولأنّ: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأنّه $-1 < \frac{1}{2} < 1$

فإنّ: $\lim_{n\to+\infty} 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3$

and $\lim_{n\to+\infty}(3) = 3$

إذاً: $\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$

حسب مبرهنة المتتاليات الثلاثة.

---

③ $U_n \in \left]2.99, 3.01\right[\Leftrightarrow |U_n - 3| < 10^{-2}$

حسب $(\star)$: $0 \leq U_n - 3$

$\Rightarrow U_n - 3 < 10^{-2}$

إنّ الشرط: $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-2}$ يقتضي $U_n - 3 < 10^{-2}$

$n \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) < -2\ln(10)$

نقسم على $\ln\frac{1}{2} < 0$:

$n > \frac{-2\ln 10}{\ln\frac{1}{2}}$

$n > \frac{-2\ln 10}{-\ln 2} = \frac{2\ln 10}{\ln 2}$

$\ln 10 \simeq 2.3$ $\ln 2 \simeq 0.7$

$n > \frac{4.6}{0.7} \simeq 6.5 \Rightarrow N = 7$

أو أي عدد أكبر من 7 .

المدرس: عطاء ابراهيم

ليكن a و b عددان حقيقيان يحققان $0<a<b$ ولنتأمل المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = b \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \end{cases}$$

① بين أن المتتالية $(y_n x_n)_{n\geq 0}$ ثابتة ثم اكتب $y_n x_n$ بدلالة a و b

② برهن صحة الخاصة $E(n)$ « $x_n > 0$ و $y_n > 0$ »

③ برهن أن : $y_n - x_n \geq 0$ مستخدماً الإثبات بالتدريج

④ ادرس اطراد المتتاليتان $(y_n)_{n\geq 0}$ و $(x_n)_{n\geq 0}$

⑤ برهن أن : $y_n - x_n \leq \dfrac{b-a}{2^n}$ مستخدماً الإثبات بالتدريج.

تنويه : { هذا الطلب سأحله بطريقة مختلفة عمّا عُرِضَ في الدليل.

⑥ استنتج أن المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان .

⑦ استفد من ① و ⑥ في حساب نهاية المتتاليتان .

① $y_{n+1} \cdot x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \cdot \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} = y_n \cdot x_n$

إذن المتتالية ثابتة وقانونها:

$y_n \cdot x_n = y_0 \cdot x_0 = ba$

② أولاً: نبرهن صحة $E(0)$: $y_0 = b > 0$ وَ $x_0 = a > 0$

أي $E(0)$ صحيحة.

ثانياً: لنفرض أن $E(n)$ صحيحة ولنبرهن صحة $E(n+1)$:

صحة $E(n)$ تعني : $x_n > 0$ و $y_n > 0$ وبالتالي $x_n y_n > 0$

ومنه $x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} > 0$ و $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} > 0$

وبالتالي $E(n+1)$ صحيحة.

مما سبق نجد أن $E(n)$ صحيحة.

③ نضع الخاصة $Q(n)$ التي تنص أن : $y_n - x_n \geqslant 0$

أولاً: نبرهن صحة $Q(0)$: $y_0 - x_0 = b - a \geqslant 0$ ومنه $Q(0)$ صحيحة

ثانياً: نفرض صحة $Q(n)$ ولنبرهن صحة $Q(n+1)$:

$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} = \frac{(x_n + y_n)^2 - 4x_n y_n}{2(x_n + y_n)}$

$= \frac{(y_n - x_n)^2}{2(x_n + y_n)} \geqslant 0$

وبالتالي $Q(n+1)$ صحيحة.

من ذلك نستنتج أن

4)

$$y_{n+1} - y_n = \frac{x_n + y_n}{2} - y_n = \frac{x_n - y_n}{2} \leq 0$$

وبالتالي $(y_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} - x_n = \frac{x_n y_n - x_n^2}{x_n + y_n} = x_n\left(\frac{y_n - x_n}{x_n + y_n}\right) \geq 0$$

وبالتالي $(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

5) نضع الخاصة $p(n)$: $y_n - x_n \leq \frac{b-a}{2^n}$

أولاً : نبرهن صحة $p(0)$:

$$\left.\begin{aligned} L &= y_0 - x_0 = b-a \\ R &= \frac{b-a}{2^0} = b-a \end{aligned}\right\} L = R$$

ثانياً : نفرض صحة $p(n)$ ولنبرهن صحة $p(n+1)$ أي لنبرهن أن :

$$y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

البرهان :

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{(y_n - x_n)^2}{2(x_n + y_n)} = \frac{y_n - x_n}{x_n + y_n} \cdot \frac{1}{2}(y_n - x_n)$$

$$\leq \frac{1}{2}(y_n - x_n) \quad : \boxed{\frac{y_n - x_n}{x_n + y_n} \leq 1}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2^n}\right)$$

$$\leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

الخاصة $p(n+1)$ صحيحة .

مما سبق نجد أن $p(n)$ صحيحة .

6. $0 \leq y_n - x_n \leq \frac{b-a}{2^n}$

$2>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ وبالتالي نجد : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$

وحسب مبرهنة الإحاطة نجد : $\lim\limits_{n\to+\infty} (y_n - x_n) = 0$

فالمتتاليتان متجاورتان لأنه :

$(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة و $(y_n)_{n\geq 0}$ متناقصة و تقارب المتتالية $(y_n - x_n)_{n\geq 0}$ من الصفر.

7. بما أن المتتاليتان (y_n) و (x_n) متجاورتان فكلاهما متقاربة من العدد الحقيقي l ومنه :

$$\lim_{n\to+\infty} (y_n x_n) = l.l = l^2$$

ومن جهة ثانية :

$$\lim_{n\to+\infty} (y_n x_n) = ab$$

إذن $ab = l^2$ وحيث a و b موجبان تماماً فإن

$$l = \sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(x_n) = \lim_{n\to+\infty}(y_n) = \sqrt{ab}$$

لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $U_0=\frac{1}{2}$

$$U_{n+1}=\sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$$

1) أثبت بالتدريج أن

$$U_n < U_{n+1} < 1$$

$\forall\, n\in \mathbb{N}$

2) استنتج تقارب المتتالية واحسب نهايتها.

الحل: نرمز للقضية

$E(n)$ بالرمز $U_n < U_{n+1} < 1$

نبرهن صحة العلاقة من أجل

$E(0):\ U_0=\frac{1}{2} < U_1 = ? < 1$

$n=0 \Rightarrow U_1=\sqrt{\frac{1+U_0}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$

محققة

- نفرض صحة العلاقة من $E(n)$

- لنبرهن على صحتها من أجل

$E(n+1):\ U_{n+1} < U_{n+2} < 1$

التابع

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}}=\frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}}>0$$

إذاً f تابع متزايد تماماً

وبما أن $U_n < U_{n+1} < 1$

والتابع f متزايد تماماً

$$f(U_n) < f(U_{n+1}) < f(1)$$

$$U_{n+1} < U_{n+2} < 1$$

$E(n+1)$ صحيحة

$E(n)$ محققة $\forall\, n\in \mathbb{N}$

2) بما أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة إلى ℓ

ونهايتها هي حل المعادلة

$$f(\ell)=\ell$$

$$\sqrt{\frac{1+\ell}{2}}=\ell \qquad L=>0$$

$$\frac{1+\ell}{2}=\ell^2$$

$$2\ell^2=\ell+1$$

$$2\ell^2-\ell-1=0$$

$$\Delta=1-4(2)(-1)$$

$$\Delta=9>0$$

لها حلان مختلفان

$$\sqrt{\Delta}=3$$

$$\ell_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+3}{2(2)}=1>0$$ مقبول

$$\ell_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-3}{2(2)}=\frac{-1}{2}<0$$ مرفوض

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=1$$

- مسألة 100 درجة

نهايات واشتقاقات ومتتالية ونهايتها

- ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها واستنتج معادلة كل مستقيم مقارب أفقي لخطه البياني C_f

2) ارسم C واستنتج رسم الخط البياني C_1 للتابع f_1 المعين بالعلاقة

$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1$$

3) لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}$$

أثبت أن

$$0 \leq U_{n+1} \leq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) استنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها ؟

الحل: 1) f معرّف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-\infty}{+\infty}$$

حالة عدم تعين نزيلها

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$|x| = -x$ في جوار $-\infty$

$$f(x) = \frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

$y=-1$ مقارب أفقي لـ cf

يوازي المحور $x'x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty}$$

ح.ع.ت

$$f(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$|x| = +x$ في جوار $+\infty$

$$f(x) = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$y=1$ مقارب أفقي لـ cf

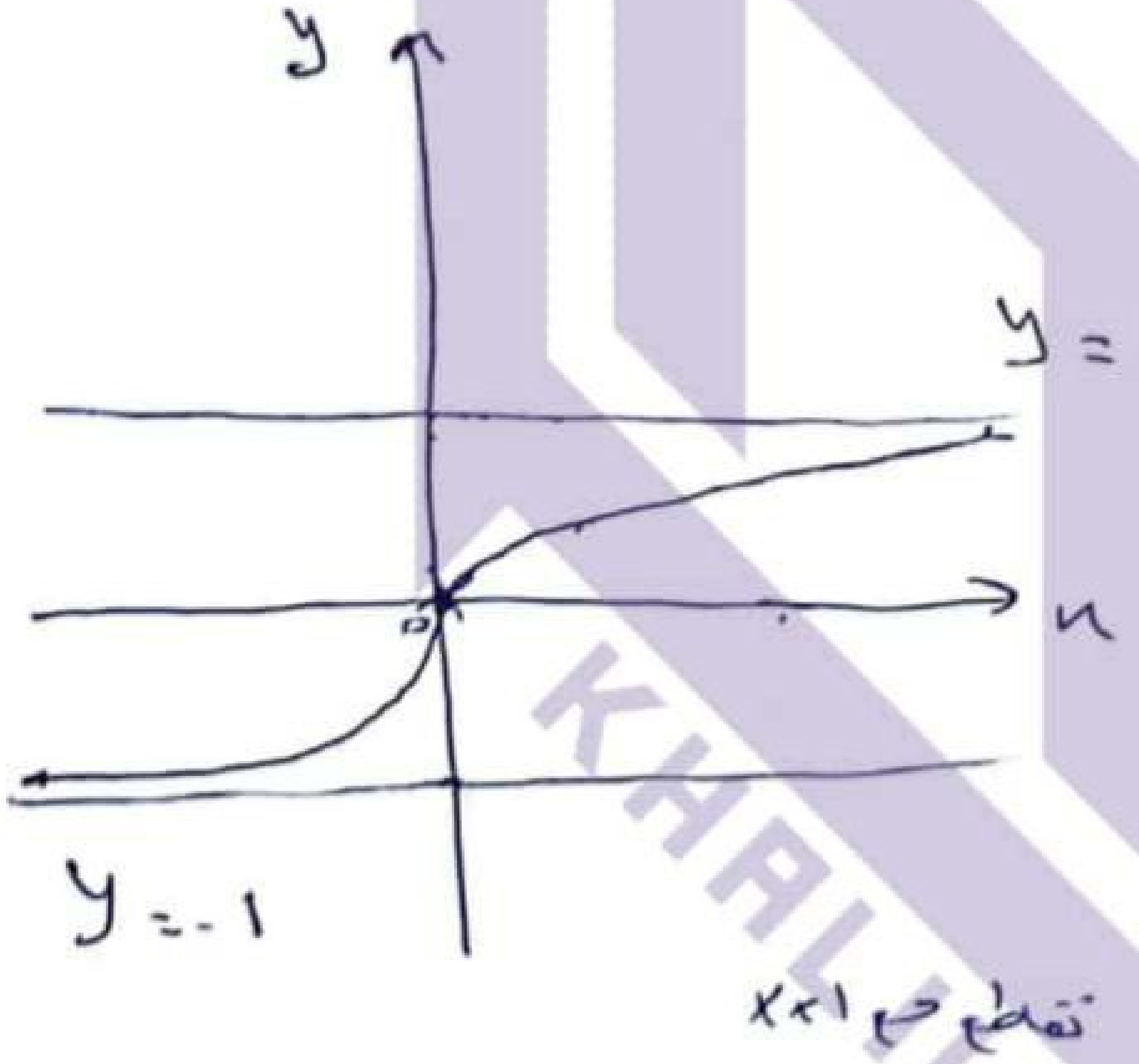
يوازي $x'x$

$$f'(x) = \frac{(1)\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,x}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

إذاً f تابع متزايد تماماً على R

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1



تقاطع مع $x'x$

$f(x) = 0$

$x = 0$

$(0,0)$

تكملة 2)

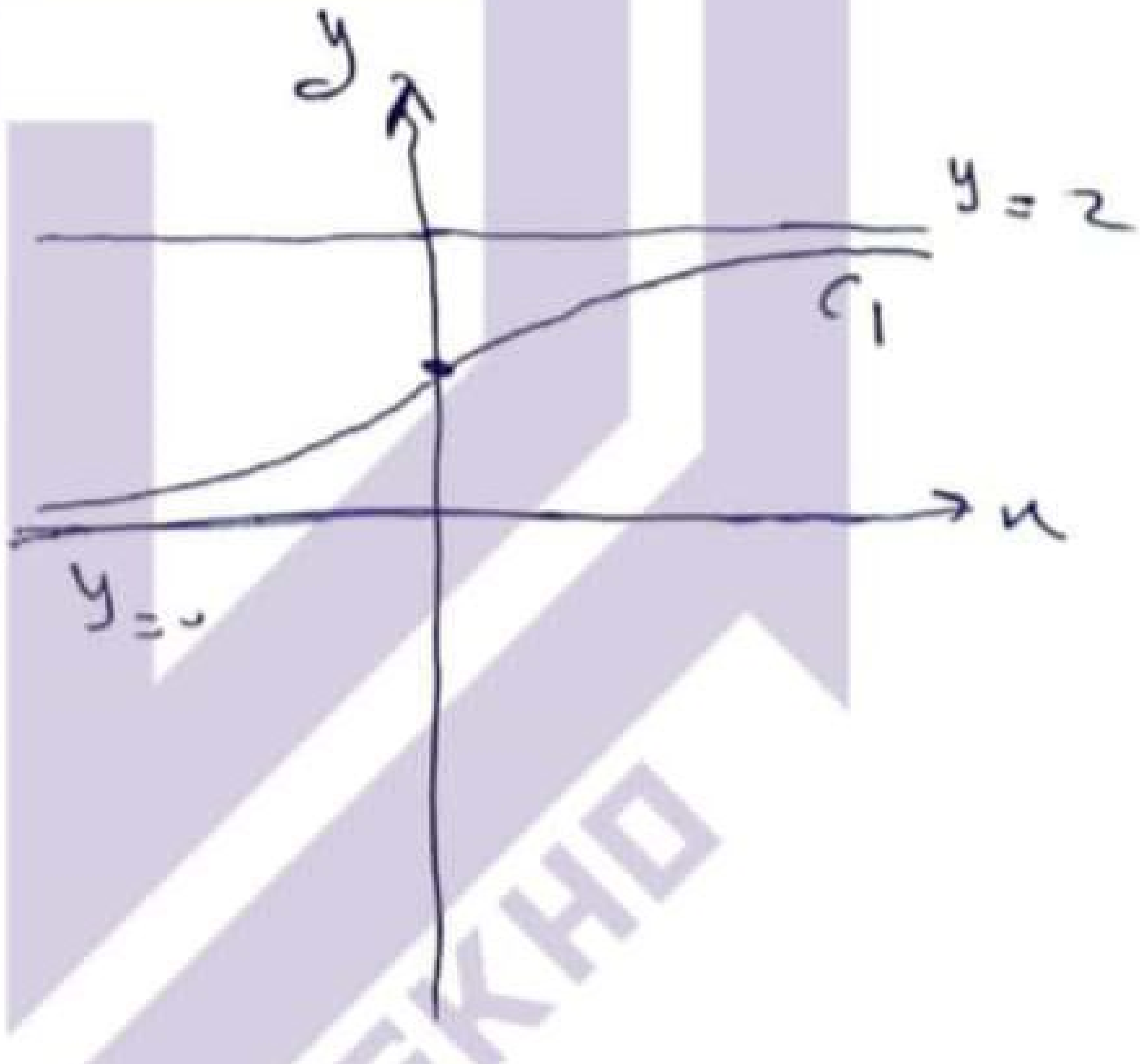
$$f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1$$

$$f_1(x) = f(x) + 1$$

$$(x, y) \longrightarrow (x, y+1)$$

C_1 ينتج عن C_f وفق انسحاب بمقدار 1 نحو الأعلى

$$\vec{u} = +1\vec{j}$$



3) $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}$ و $U_0 = 1$

$$\boxed{0 \leq U_{n+1} \leq U_n}$$

نرمز للقضية بالرمز $E(n)$

لنبرهن صحة العلاقة من

$E(0)$; $0 \leq U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \leq U_0 = 1$

محققة

نفرض صحة العلاقة من أجل $E(n)$

لنبرهن على صحتها من

$E(n+1)$; $0 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

من الفرض

$$0 \leq U_{n+1} \leq U_n$$

وبما أن f تابع متزايد تماماً على $[0, +\infty[$

$$f(0) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$$

$$0 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$$

$E(n+1)$ صحيحة

$E(n)$ محققة .

$\boxed{\text{استنتاج تقارب}}$

بما أن المتتالية U_n متناقصة

ومحدودة من الأدنى

بالعدد 0 فهي

متقاربة من ℓ

حيث

$\ell \in [m, U_0]$ أي

$\ell \in [0,1]$

و f مستمر عند ℓ فيكون

هو حل المعادلة

$f(x) = x$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x$$

$$x = x\sqrt{x^2+1}$$

$$x - x\sqrt{x^2+1} = 0$$

$$x\left(1 - \sqrt{x^2+1}\right) = 0$$

إما $\boxed{x=0} \in [0,1]$ مقبول

أو $1 - \sqrt{x^2+1} = 0$

$$\sqrt{x^2+1} = 1$$

$$x^2+1 = 1$$

$$x^2 = 0$$

$\boxed{x=0}$ مقبول

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$