Pixel Team Channel

انقر / امسح الرمز للانتقال
الى قناة الفريق.

Saade files Channel

انقر / امسح الرمز للانتقال
الى قناة الملفات.

Pixel_Team_SAB

Pixel - بِكسل

PIXEL

القائمة

اضغط على الأزرار للانتقال إلى المطلوب

- ورقة عمل الجبر والأشعة
- حل ورقة عمل الجبر والأشعة
- ورقة عمل التحليل
- حل ورقة عمل التحليل

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

ورقة العمل الأولى في مادتي الجبر والأشعة

للصف الثالث الثانوي العلمي (شتاء 2025)

الاسم :.........

الدرجة: 300

فيما يأتي 30 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 10 درجة .

الجبر :

1) ليكن العدد العقدي : $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ عندئذٍ الشكل الجبري للعدد z^2 هو :

A	$2\sqrt{2}$	B	$2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$	C	$2+\sqrt{2}+i(2-\sqrt{2})$	D	$2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$

2) إذا كان $u=z-2\bar{z}+i$ كان $i\bar{u}$ يساوي

A	$i\bar{z}+2iz+1$	B	$i\bar{z}-2iz+1$	C	$i\bar{z}-2iz-1$	D	$i\bar{z}+2iz-1$

3) إحدى المساواة الآتية صحيحة :

A	$5=5e^{i2\pi}$	B	$2i=e^{i\pi}$	C	$i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$	D	$7i=5e^{i\frac{\pi}{2}}$

4) ليكن العدد العقدي $z=\left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^3-\left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^3$.

A	z عدد حقيقي	B	z تخيلي بحت	C	z ليس حقيقياً وليس تخيلياً بحتاً	D	$\lvert z\rvert=11$

5) في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$: مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق المساواة : $\arg(z)=\frac{\pi}{8}$ تمثّل

A	مستقيم يمر من O المحذوفة	B	دائرة مركزها O	C	نصف مستقيم مبدؤه O المحذوفة	D	نصف دائرة مركزها O

6) إنّ حل المعادلة الآتية في $\mathbb{C}$ بالمجهول z: $2z+\bar{z}=2+3i$ هو

A	$z=-2-i$	B	$z=2+3i$	C	$z=\frac{2}{3}+3i$	D	ليس لها أية حل

7) في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$: ليكن z عدد عقدي غير معدوم

مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق المساواة : $\bar{z}-\frac{5}{z}=0$ تمثّل :

A	محور الأعداد الحقيقية محذوف منه $z=0$	B	دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها يساوي 5	C	مستقيم معادلته $y=5$	D	دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها يساوي $\sqrt{5}$

8) إحدى العبارات الآتية تمثّل شكلاً مثلثياً لعدد عقدي هي :

A	$-3(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})$	B	$5(\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7})$
C	$\sqrt{3}(\cos(\frac{4\pi}{5})+i\sin(\frac{-4\pi}{5}))$	D	$\sqrt{10}(\cos(\frac{-2\pi}{9})+i\sin(\frac{-2\pi}{9}))$

9) ليكن العددان العقديان: $z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z' = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ فإنّ $\arg(z - z')$ تساوي

A	$\frac{\pi}{3}$	B	$\frac{5\pi}{3}$	C	$\frac{\pi}{2}$	D	$\frac{5\pi}{6}$

10) إذا كان z عدد عقدي مختلف عن $-i$ فإنّ $\left|\frac{iz-1}{\overline{z}-i}\right|$ تساوي

A	$\lvert z \rvert$	B	1	C	$\frac{1}{2}$	D	2

11) العدد $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{2025}$ يساوي

A	1	B	i	C	$-i$	D	-1

12) إذا كان $z = -2(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5})$ كان $\arg(\overline{z})$ يساوي

A	$\frac{7\pi}{10}$	B	$\frac{3\pi}{10}$	C	$\frac{-7\pi}{10}$	D	$\frac{-3\pi}{10}$

13) ليكن العدد العقدي $z = -1 + i$ واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو :

A	$\overline{z} = -1 - i$	B	$\frac{1}{z} = \frac{-1-i}{2}$	C	$z^2 = -2i$	D	$\arg(z^9) \neq \arg(z) \quad (2\pi)$

14) ليكن z عدد عقدي يحقّق : $\lvert z \rvert = 2$ و $\text{Re}(z) = -1$ فإنّ

A	$\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$ أو $\arg(z) = \frac{7\pi}{6}$	B	$\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$ أو $\arg(z) = \frac{4\pi}{3}$	C	$\text{Im}(z) = 2$ أو $\text{Im}(z) = -2$	D	النقطة M التي تمثّل z يمكن أن تقع في الربعين الأول والثاني

15) ليكن z_1 و z_2 يحقّق $\lvert z_1 \rvert = 1$ و $\lvert z_2 \rvert = 1$ وليكن $w = \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 \cdot z_2}$ عندئذٍ

A	$\text{Im}(w) \neq 0$	B	w تخيلي بحت	C	$\lvert w \rvert = 1$	D	$\lvert w \rvert = 2 + 2\,\text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$

الاسم :.........
الدرجة: 300

ورقة العمل الأولى في مادتي الجبر والأشعة
للصف الثالث الثانوي العلمي (شتاء 2025)

الأشعة:

16) لتكن الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ليست مرتبطة خطياً عندئذٍ الأشعة الثلاثة المرتبطة خطياً هي :

A	$\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{w}$ و $\vec{w}+\vec{v}$	B	$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
C	$\vec{w}-\vec{u}$ و $\vec{w}+\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}$	D	$\vec{u}$ و $\vec{w}+\vec{v}$ و $\vec{w}-\vec{v}$

17) الشعاع $\vec{u}(4,-6,2)$ مرتبط خطياً مع الشعاع

A	$\vec{v}_1(2,3,-1)$	B	$\vec{v}_2(3,-4.5,0.5)$	C	$\vec{v}_3(-2,3,1)$	D	$\vec{v}_4(-2.4,3.6,-1.2)$

18) لتكن الأشعة : $\vec{u}(1,-1,3)$ و $\vec{v}(2,7,-4)$ و $\vec{w}(1,17,-17)$

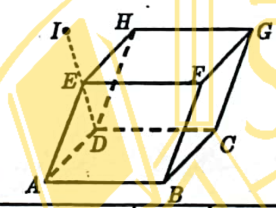
A	$\vec{v}=1.5\vec{u}+0.5\vec{w}$	B	$\vec{w}=-3\vec{u}+\vec{v}$	C	$3\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$	D	الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ليست مرتبطة خطياً

19) في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,8,5)$ و $B(2,15,2)$ و $C(2,14,-6)$

A	$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CO}$ مرتبطان خطياً	B	$\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان خطياً	C	A و B و C تقع على استقامة واحدة	D	$ABCO$ متوازي أضلاع

من أجل الأسئلة 21 و 22 و 23 و 24 و 25

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح



21) الشعاع $\overrightarrow{AF}$ يساوي

A	$\overrightarrow{BC}$	B	$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}$	C	$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{FG}$	D	$\overrightarrow{HC}$

22) الشعاع $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{DC}$

A	$\overrightarrow{AC}$	B	$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HG}$	C	$\overrightarrow{DG}$	D	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{FB}$

23) الشعاع $\overrightarrow{DE}$ مرتبط خطياً مع الشعاع

A	$-\overrightarrow{GB}$	B	$\overrightarrow{DB}$	C	$\overrightarrow{DH}$	D	$\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{GF}$

24) الأشعة الثلاثة : $\overrightarrow{DH}$ و $\overrightarrow{EF}$ و ......

A	$\overrightarrow{AG}$ مرتبطة خطياً	B	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}$ مرتبطة خطياً	C	$\overrightarrow{CG}$ ليست مرتبطة خطياً	D	$\overrightarrow{DF}$ مرتبطة خطياً

25) بفرض النقطة I نظيرة D بالنسبة إلى E عندئذٍ

A	المستقيمان (IF) و (CE) متوازيان	B	المستقيمان (IF) و (CE) متقاطعان	C	الأشعة $\overrightarrow{FI}$ و $\overrightarrow{FC}$ و $\overrightarrow{FD}$ ليست مرتبطة خطياً	D	النقاط F و C و H و I تقع في مستوٍ واحد

26) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: لتكن النقطتان $A(2,3,-5)$ و $B(2,5,-3)$

عدد النقط الموجودة على محور الفواصل والتي تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هو

A	لا يوجد أي نقطة	B	نقطة وحيدة	C	نقطتان فقط	D	عدد غير منتهٍ من النقط

27) نقول إنّ المستويين (ABC) و $(A'B'C')$ متوازيان إذا وفقط إذا

A	(AB) يوازي $(A'B')$	B	الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ مرتبطة خطياً	C	الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{A'C'}$ مرتبطة خطياً	D	تحقّق الخياران B و C معاً .

28) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: إنّ مجموعة قيم العدد الحقيقي k التي تجعل مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقّق المساواة : $x^2+y^2+z^2-2x+\ln(k+1)=0$ تمثّل كرة هي :

A	$k\in]-1,e-1[$	B	$k\in]e-1,+\infty[$	C	$k\in]0,+\infty[$	D	$k\in]-\infty,e-1[$

29) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: لدينا النقطتان $A(-1,2,3)$ و $B(1,4,-5)$

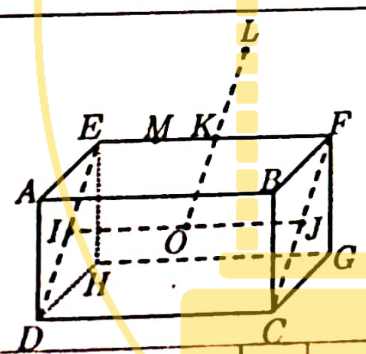
إنّ معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هي

A	$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=72$	B	$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$
C	$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=18$	D	$x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=18$

30) $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات . مركزه O .

I و J مركزي الوجهين $AEHD$ و $BFGC$

K منتصف $[EF]$ و M منتصف $[EK]$. L نظيرة O بالنسبة إلى K .



واحدٌ من الإجابات الآتية خاطئ :

A	النقاط I و M و L تقع على استقامة واحدة	B	الأشعة $\overrightarrow{CL}$ و $\overrightarrow{CI}$ و $\overrightarrow{JF}$ مرتبطة خطياً	C	$\overrightarrow{CL}=\frac{3}{2}\overrightarrow{JF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$	D	$\overrightarrow{CL}=\frac{5}{2}\overrightarrow{JF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$

..........................انتهت الأسئلة..........................

فيما يأتي 30 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 10 درجة .

الجبر :

1) ليكن العدد العقدي : $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ عندئذٍ الشكل الجبري للعدد z^2 هو :

A	$2\sqrt{2}$	B	$2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$	C	$2+\sqrt{2}+i(2-\sqrt{2})$	D	$2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$

التبرير:

$$z^2=(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}})^2$$
$$z^2=\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2-2\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}i-\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$
$$z^2=2+\sqrt{2}-2\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}i-(2-\sqrt{2})$$
$$z^2=2\sqrt{2}-2\sqrt{(2+\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{2})}\ i$$
$$z^2=2\sqrt{2}-2\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}\ i$$

$z^2=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i$. فالخيار الصحيح هو B .

2) إذا كان $u=z-2\bar{z}+i$ كان $i\bar{u}$ يساوي

A	$i\bar{z}+2iz+1$	B	$i\bar{z}-2iz+1$	C	$i\bar{z}-2iz-1$	D	$i\bar{z}+2iz-1$

التبرير:

$\bar{u}=\bar{z}-2z-i$

$i\bar{u}=i\bar{z}-2iz+1$. فالخيار الصحيح هو B .

3) إحدى المساواتيات الآتية صحيحة :

A	$5=5e^{i2\pi}$	B	$2i=e^{i\pi}$	C	$i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$	D	$7i=5e^{i\frac{\pi}{2}}$

التبرير:

من الواضح أنّ الخيار الصحيح هو A , حيث $5=5e^{i0}=5e^{i2\pi}$.

أمّا الخيار B : $2i=e^{i\pi}$ خاطئ حيث لم يتساويا بالطويلة ($|2i|=2$ أمّا $|e^{i\pi}|=1$)

أمّا الخيار C : $i=e^{i\frac{\pi}{2}}\neq e^{-i\frac{\pi}{2}}$ فالخيار C خاطئ .

أمّا الخيار D : $7i=5e^{i\frac{\pi}{2}}$ خاطئ حيث لم يتساويا بالطويلة ($|7i|=7$ أمّا $\left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right|=1$)

4) ليكن العدد العقدي $z = \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^3 - \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^3$.

A	z عدد حقيقي	B	z تخيلي بحت	C	z ليس حقيقياً وليس تخيّلياً بحتاً	D	$\lvert z\rvert = 11$

التبرير:

بفرض $u = \frac{19+7i}{9-i}$

لنضرب البسط والمقام بمرافق المقام : $u = \frac{(19+7i)(9+i)}{(9-i)(9+i)}$

$$u = \frac{171+19i+63i-7}{81+1}$$

$$u = \frac{164+82i}{82} = 2+i$$

بفرض $v = \frac{20+5i}{7+6i}$

لنضرب البسط والمقام بمرافق المقام : $v = \frac{(20+5i)(7-6i)}{(7+6i)(7-6i)}$

$$v = \frac{140-120i+35i+30}{49+36}$$

$$v = \frac{170-85i}{85} = 2-i$$

وبالتالي $z = (2+i)^3 - (2-i)^3 = w - \overline{w} = 2\operatorname{Im}(w)i$ ومنه z تخيلي بحت فالخيار الصحيح هو B .

ومنه الخياران A و C خاطئان .

أمّا الخيار D : $w = (2+i)^3 = (2+i)^2(2+i) = (4+4i-1)(2+i)$

ومنه $w = (3+4i)(2+i) = 6+3i+8i-4 = 2+11i$

وبالتالي $z = 2\operatorname{Im}(w)i = 22i$ و $\lvert z\rvert = 22$ فالخيار D خاطئ .

5) في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$: مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق المساواة : $\arg(z) = \frac{\pi}{8}$ تمثّل

A	مستقيم يمر من O المحذوفة	B	دائرة مركزها O	C	نصف مستقيم مبدؤه O المحذوفة	D	نصف دائرة مركزها O

التبرير: مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق المساواة : $\arg(z) = \frac{\pi}{8}$ تمثّل نصف مستقيم مبدؤه O المحذوفة

حيث $(\vec{u},\overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{8}$. فالخيار الصحيح هو C .

6) إنّ حل المعادلة الآتية في $\mathbb{C}$ بالمجهول z : $2z+\bar{z}=2+3i$ هو

A	$z=-2-i$	B	$z=2+3i$	C	$z=\frac{2}{3}+3i$	D	ليس لها أية حل

التبرير :

بفرض $z=x+yi$ نعوّض $2(x+yi)+(x-yi)=2+3i$

ومنه $3x+yi=2+3i$

وبالتالي $\begin{cases}3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}\\ y=3\end{cases}$

ومنه $z=\frac{2}{3}+3i$. فالخيار الصحيح هو C .

طريقة ثانية : لنأخذ المرافق لطرفي المعادلة المعطاة : $2\bar{z}+z=2-3i$

أصبح لدينا المعادلتين الآتيتين :

$$\begin{cases}2z+\bar{z}=2+3i & (1)\\ z+2\bar{z}=2-3i & (2)\end{cases}$$

لنضرب المعادلة (1) بالعدد (-2) :

$$\begin{cases}-4z-2\bar{z}=-4-6i\\ z+2\bar{z}=2-3i\end{cases}$$

بالجمع نجد : $-3z=-2-9i$ ومنه $z=\frac{-2-9i}{-3}=\frac{2}{3}+3i$

---

7) في المستوي العقدي $(O;\vec{u},\vec{v})$: ليكن z عدد عقدي غير معدوم

مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق المساواة : $\bar{z}-\frac{5}{z}=0$ تمثّل :

A	محور الأعداد الحقيقية محذوف منه $z=0$	B	دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها يساوي 5	C	مستقيم معادلته $y=5$	D	دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها يساوي $\sqrt{5}$

التبرير : $\bar{z}-\frac{5}{z}=0$

$\frac{\bar{z}\cdot z-5}{z}=0$

ومنه $\bar{z}\cdot z-5=0$

وبالتالي $\bar{z}\cdot z=5$

ومنه $|z|^2=5$

أي $|z|=\sqrt{5}$ فمجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقّق المساواة المفروضة تمثّل دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها يساوي $\sqrt{5}$

فالخيار الصحيح هو D .

إحدى العبارات الآتية تمثّل شكلاً مثلثياً لعددٍ عقدي هي :

A	$-3(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})$	B	$5(\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7})$
C	$\sqrt{3}(\cos(\frac{4\pi}{5})+i\sin(\frac{-4\pi}{5}))$	D	$\sqrt{10}(\cos(\frac{-2\pi}{9})+i\sin(\frac{-2\pi}{9}))$

التبرير :

لندقّق في الخيار A : بفرض $z_1=-3(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})$ وهو ليس شكلاً مثلثياً لأنّ $r<0$ فالخيار A خاطئ .

ولكتابته بالشكل المثلثي : $z_1=3(-\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5})$

$$z_1=3(\cos(\pi+\frac{\pi}{5})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{5}))$$

$z_1=3(\cos(\frac{6\pi}{5})+i\sin(\frac{6\pi}{5}))$ وهذا هو الشكل المثلثي للعدد z_1 .

لندقّق في الخيار B : بفرض $z_2=5(\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7})$ وهو ليس شكلاً مثلثياً لوجود إشارة $(-)$ في المنتصف فالخيار B خاطئ .

ولكتابته بالشكل المثلثي : $z_2=5(\cos(-\frac{2\pi}{7})+i\sin(-\frac{2\pi}{7}))$ وهذا هو الشكل المثلثي للعدد z_2 .

لندقّق في الخيار C : بفرض $z_3=\sqrt{3}(\cos(\frac{4\pi}{5})+i\sin(\frac{-4\pi}{5}))$ وهو ليس شكلاً مثلثياً لعدم تساوي الزاويتين . فالخيار C خاطئ .

ولكتابته بالشكل المثلثي : $z_3=\sqrt{3}(\cos(\frac{-4\pi}{5})+i\sin(\frac{-4\pi}{5}))$ وهذا هو الشكل المثلثي للعدد z_3 .

لندقّق في الخيار D : $\sqrt{10}(\cos(\frac{-2\pi}{9})+i\sin(\frac{-2\pi}{9}))$ وهو شكل مثلثي . فالخيار الصحيح هو D .

---

9) ليكن العددان العقديان: $z=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z'=\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ فإنّ $\arg(z-z')$ تساوي

A	$\frac{\pi}{3}$	B	$\frac{5\pi}{3}$	C	$\frac{\pi}{2}$	D	$\frac{5\pi}{6}$

التبرير : $\arg(z-z')$

لنوجد $z-z'=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$$z-z'=1-\sqrt{3}i$$

وإذا أردنا أن نكتبه بالشكل المثلثي نجد : $z-z'=2(\cos(\frac{-\pi}{3})+i\sin(\frac{-\pi}{3}))$

ومنه $\arg(z-z')=\arg(1-\sqrt{3}\,i)=-\frac{\pi}{3}$

وبالتالي : $\arg(z-z')=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$ فالخيار الصحيح هو B .

---

10) إذا كان z عدد عقدي مختلف عن $-i$ فإنّ $\left|\dfrac{iz-1}{\overline{z}-i}\right|$ تساوي

A	$\lvert z\rvert$	B	1	C	$\dfrac{1}{2}$	D	2

__التبرير:__

$$\left|\frac{iz-1}{\overline{z}-i}\right| = \left|\frac{iz+i^2}{\overline{z}-i}\right| = \left|\frac{i(z+i)}{\overline{z}-i}\right| = |i|\left|\frac{z+i}{\overline{z}-i}\right|$$

ولمّا كانت $|i| = 1$ كان

$$\left|\frac{iz-1}{\overline{z}-i}\right| = \left|\frac{z+i}{\overline{z}-i}\right| = \frac{|z+i|}{|\overline{z}-i|}$$

ولمّا كان العدد والمرافق لهما نفس الطويلة كان $|z+i| = |\overline{(z+i)}| = |\overline{z}-i|$

ومنه $\left|\dfrac{iz-1}{\overline{z}-i}\right| = \dfrac{|\overline{z}-i|}{|\overline{z}-i|} = 1$. فالخيار الصحيح هو B .

11) العدد $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^{2025}$ يساوي

A	1	B	i	C	$-i$	D	-1

__التبرير:__ بفرض $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ لنكتب أولاً z بالشكل المثلثي :

$$z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

وبالتالي $z^{2025} = \cos\dfrac{2025\pi}{6} + i\sin\dfrac{2025\pi}{6}$

لنقسم البسط على ضعف المقام فنجد :

$$\begin{array}{r|l} 2025 & 12 \\ \hline 12 & 168 \\ 82 & \\ 72 & \\ 105 & \\ 96 & \\ 9 & \end{array}$$

$$z^{2025} = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

فالخيار الصحيح هو : C .

12) إذا كان $z = -2(\sin\dfrac{\pi}{5} + i\cos\dfrac{\pi}{5})$ كان $\arg(\overline{z})$ يساوي

A	$\dfrac{7\pi}{10}$	B	$\dfrac{3\pi}{10}$	C	$\dfrac{-7\pi}{10}$	D	$\dfrac{-3\pi}{10}$

__التبرير:__

$$z = -2(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}) = 2(-\sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5})$$

ومنه $z = 2(\cos(\dfrac{-\pi}{2}-\dfrac{\pi}{5}) + i\sin(\dfrac{-\pi}{2}-\dfrac{\pi}{5}))$

$$z = 2(\cos(\frac{-7\pi}{10}) + i\sin(\frac{-7\pi}{10}))$$

ومنه $\arg(z) = \dfrac{-7\pi}{10}$ وبالتالي $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) = \dfrac{7\pi}{10}$. فالخيار الصحيح هو A .

ليكن العدد العقدي $z=-1+i$ واحدٌ من الخيارات الآتية **خاطئ** هو :

A	$\overline{z}=-1-i$	B	$\frac{1}{z}=\frac{-1-i}{2}$	C	$z^2=-2i$	D	$\arg(z^9)\neq\arg(z)\quad(2\pi)$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : $\overline{z}=-1-i$ هو خيار صحيح حيث غيّرنا إشارة القسم التخيلي فقط .

لندقّق في الخيار B : $\frac{1}{z}=\frac{1}{-1+i}=\frac{(-1-i)}{(-1+i)\times(-1-i)}=\frac{-1-i}{1+1}=\frac{-1-i}{2}$ فالخيار B صحيح .

لندقّق في الخيار C : $z^2=(-1+i)^2=(1-i)^2=-2i$ فالخيار C صحيح .

لندقّق في الخيار D : من الواضح أنّ $\arg(z)=\frac{3\pi}{4}$

ومنه $\arg(z^9)=9\arg(z)=\frac{27\pi}{4}=\frac{24\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+6\pi$

ومنه $\arg(z^9)=\arg(z)\quad(2\pi)$ فالخيار D هو الوحيد الخاطئ والذي يجب أن نختاره .

14) ليكن z عدد عقدي يحقّق : $|z|=2$ و $\mathrm{Re}(z)=-1$ فإنّ

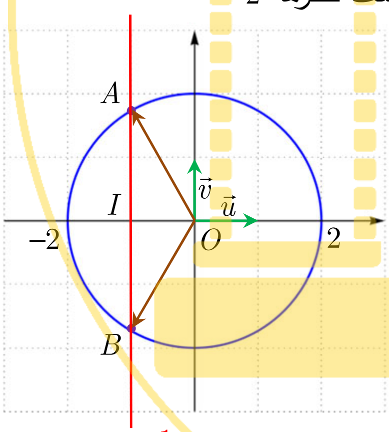
A	$\arg(z)=\frac{5\pi}{6}$ أو $\arg(z)=\frac{7\pi}{6}$	B	$\arg(z)=\frac{2\pi}{3}$ أو $\arg(z)=\frac{4\pi}{3}$	C	$\mathrm{Im}(z)=2$ أو $\mathrm{Im}(z)=-2$	D	النقطة M التي تمثّل z يمكن أن تقع في الربعين الأول أوالثاني

التبرير:

لنرسم شكلاً مناسباً يحقّق هذه المعطيات حيث $|z|=2$ تمثّل دائرة مركزها O ونصف قطرها 2

أمّا $\mathrm{Re}(z)=-1$ فتمثّل مستقيم معادلته $x=-1$ يوازي محور التراتيب .

(لاحظ: يجب أن يكون $|\mathrm{Re}(z)|\leq|z|$ وكذلك $|\mathrm{Im}(z)|\leq|z|$)



نلاحظ أنّ هناك نقطتين A و B يمكن أن تمثّلا العدد z .

وبالتالي الخياران C و D خاطئان .

نلاحظ أنّ المثلث OAI قائم في I فيه $OI=1$ و $OA=2$

ونحن نعلم أن الضلع المقابلة للزاوية 30° في مثلث قائم تساوي نصف طول الوتر

ومنه $OAI=\frac{\pi}{6}$ وبالتالي $OAI=\frac{\pi}{3}$

$(\vec{u},\overrightarrow{OA})=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ وبالتالي $\arg(z_A)=\frac{2\pi}{3}$

ومن الواضح أنّ $\arg(z_B)=\arg(\overline{z}_A)=-\frac{2\pi}{3}$ (لأنّ B نظيرة A بالنسبة إلى محور الأعداد الحقيقية)

أي $\arg(z_B)=\arg(\overline{z}_A)=-\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{4\pi}{3}$

فالخيار الصحيح هو B .

15) ليكن z_1 و z_2 يحقّقان $|z_1| = 1$ و $|z_2| = 1$ وليكن $w = \dfrac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 \cdot z_2}$ عندئذٍ

A		B		C		D	
A	$\mathrm{Im}(w) \neq 0$	B	w تخيلي بحت	C	$\lvert w\rvert = 1$	D	$\lvert w\rvert = 2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z}_2)$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : العبارة $\mathrm{Im}(w) \neq 0$ أي w ليس حقيقياً . لنتحقّق من ذلك عن طريق مقارنة $\overline{w}$ مع w .

$$\overline{w} = \frac{(\overline{z}_1 + \overline{z}_2)^2}{\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2}$$

لدينا فرضاً $|z_1| = 1$ ومنه $\overline{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$

و $|z_2| = 1$ ومنه $\overline{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$

لنعوّض في $\overline{w}$ فنجد : $\overline{w} = \dfrac{\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)^2}{\frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}}$

$$\overline{w} = \frac{\left(\dfrac{z_2 + z_1}{z_1 \cdot z_2}\right)^2}{\dfrac{1}{z_1 \cdot z_2}} = \frac{\dfrac{(z_2 + z_1)^2}{(z_1 \cdot z_2)^2}}{\dfrac{1}{z_1 \cdot z_2}} = \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 \cdot z_2} = w$$

ومنه $\overline{w} = w$ وبالتالي w حقيقي أي $\mathrm{Im}(w) = 0$ فالخيار A خاطئ وكذلك الخيار B خاطئ .

بقي لدينا الخياران C و D : لنوجد $|w|$

$$|w| = \left|\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 \cdot z_2}\right| = \frac{\left|(z_1 + z_2)^2\right|}{|z_1 \cdot z_2|} = \frac{|z_1 + z_2|^2}{|z_1| \cdot |z_2|}$$

لدينا فرضاً $|z_1| = 1$ و $|z_2| = 1$

ونحن نعلم أنّ $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ ومنه $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = z_1 \cdot \overline{z}_1 + z_1 \cdot \overline{z}_2 + z_2 \cdot \overline{z}_1 + z_2 \cdot \overline{z}_2$$

وبالتالي $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + z_1 \cdot \overline{z}_2 + z_2 \cdot \overline{z}_1 + |z_2|^2$

ومنه $|z_1 + z_2|^2 = 1 + z_1 \cdot \overline{z}_2 + z_2 \cdot \overline{z}_1 + 1$

إذن $|z_1 + z_2|^2 = 2 + (z_1 \cdot \overline{z}_2) + \overline{(z_1 \cdot \overline{z}_2)}$

وبالتالي $|z_1 + z_2|^2 = 2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z}_2)$

$$|w| = \frac{|z_1 + z_2|^2}{|z_1| \cdot |z_2|} = \frac{2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z}_2)}{1 \times 1} = 2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z}_2)$$

فالخيار C خاطئ والخيار الصحيح هو D .

...شعة:

16) لتكن الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ليست مرتبطة خطياً عندئذٍ الأشعّة الثلاثة المرتبطة خطياً هي :

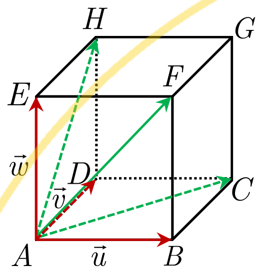
A	$\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{w}$ و $\vec{w}+\vec{v}$	B	$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
C	$\vec{w}-\vec{u}$ و $\vec{w}+\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}$	D	$\vec{u}$ و $\vec{w}+\vec{v}$ و $\vec{w}-\vec{v}$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : إذا أردنا الحل بشكل تخيّل فراغي :

يجب معرفة ماذا نعني بأنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ليست مرتبطة خطياً ؟

أي إذا اخترنا مبدأ A فإنّ $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ تشكّل معلماً كما في الشكل المجاور :



فنلاحظ أنّ $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و $\vec{u}+\vec{w}=\overrightarrow{AF}$ و $\vec{w}+\vec{v}=\overrightarrow{AH}$

حيث الشعاعان $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AF}$ يقعان في المستوي (AFC)

و $A\in(AFC)$ و $H\notin(AFC)$ فالأشعة $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AH}$

ليست مرتبطة خطياً كونها لا تقع في مستوٍ واحد .

فالخيار A خاطئ .

أمّا إذا أردنا الحل شعاعياً : نلاحظ أنّ الشعاعين $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{w}$ غير مرتبطين خطياً

حيث إذا فرضنا جدلاً أنّهما مرتبطين خطياً عندئذٍ يوجد عدد حقيقي k يحقّق : $\vec{u}+\vec{w}=k(\vec{u}+\vec{v})$

ومنه $\vec{w}=(k-1)\vec{u}+k\vec{v}$ وهذا يعني أنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً وهذا يناقض الفرض

فالشعاعان $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{w}$ غير مرتبطين خطياً .

لنحاول أن نكتب الشعاع $\vec{v}+\vec{w}$ بدلالتهما فنبحث عن عددين حقيقيين a و b يحقّقان :

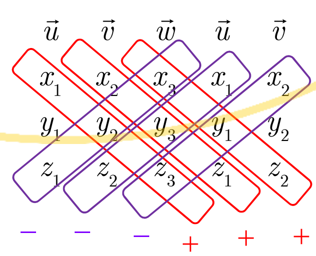
$$\vec{w}+\vec{v}=a(\vec{u}+\vec{v})+b(\vec{u}+\vec{w})$$

$$\vec{w}+\vec{v}=(a+b)\vec{u}+a\vec{v}+b\vec{w}$$

$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \\ b=1 \end{cases}$ مستحيلة الحل فالأشعة المفروضة ليست مرتبطة خطياً .

طريقة ثالثة : من أجل الأتمتة : لإثبات أنّ ثلاثة أشعة مرتبطة خطياً أم لا دون البحث عن العددين a و b

لتكن الأشعة : $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ و $\vec{w}(x_3,y_3,z_3)$



إذا تحقّق أنّ $x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_2y_1z_3-x_1y_3z_2-x_3y_2z_1=0$ قلنا بأنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً .

أمّا إذا كان $x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_2y_1z_3-x_1y_3z_2-x_3y_2z_1\neq0$ قلنا بأنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مرتبطة خطياً.

لنعود إلى مثالنا :

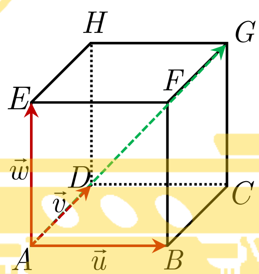
بفرض $\vec{u}(1,0,0)$ و $\vec{v}(0,1,0)$ و $\vec{w}(0,0,1)$

$\vec{w}_1=\vec{u}+\vec{v}=(1,1,0)$ و $\vec{w}_2=\vec{u}+\vec{w}=(1,0,1)$ و $\vec{w}_3=\vec{w}+\vec{v}=(0,1,1)$

$$\begin{array}{ccccc} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 & \vec{w}_1 & \vec{w}_2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ - & - & - & + & + & + \end{array}$$

$$(1)(0)(1)+(1)(1)(0)+(0)(1)(1)-(0)(0)(0)-(1)(1)(1)-(1)(1)(1)=$$
$$0+0+0-0-1-1=-2\neq 0$$

فالأشعة ليست مرتبطة خطياً .



لندقّق في الخيار B : إذا أردنا الحل بشكل تخيّل فراغي :

حسب الشكل نجد لأنّ : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ و $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{AG}$

الشعاعان $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ يقعان في المستوي $(ABCD)$

و $A\in(ABCD)$ و $G\notin(ABCD)$

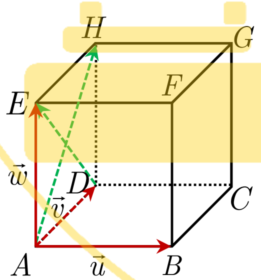
فالأشعة $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ و $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{AG}$ ليست مرتبطة خطياً .

فالخيار B خاطئ .

أمّا إذا أردنا الحل شعاعياً : من الواضح أنّ الشعاع $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ لا يمكن أن يكتب بدلالة الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أي لا يوجد عددان حقيقيان a و b يحقّقان $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$ حيث إذا تحققت المساواة السابقة كانت الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً وهذا يناقض الفرض. فالأشعة المفروضة ليست مرتبطة خطياً .

لندقّق في الخيار C : إذا أردنا الحل بشكل تخيّل فراغي :

فنلاحظ أنّ $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و $\vec{w}-\vec{u}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CH}$ و $\vec{w}+\vec{v}=\overrightarrow{AH}$

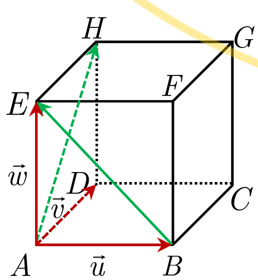


فالأشعة $\vec{w}-\vec{u}$ و $\vec{w}+\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}$ تقع في مستوٍ واحد هو (AHC)

فهي مرتبطة خطياً . فالخيار الصحيح هو C .

أمّا إذا أردنا الحل شعاعياً :

نلاحظ أنّ : $\vec{w}-\vec{v}=(\vec{w}+\vec{v})-(\vec{u}+\vec{v})$ فالأشعة المفروضة مرتبطة خطياً .



أمّا الخيار D : إذا أردنا الحل بشكل تخيّل فراغي :

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{w}+\vec{v}=\overrightarrow{AH}$ و $\vec{w}-\vec{v}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DE}$

الشعاعان $\vec{w}+\vec{v}=\overrightarrow{AH}$ و $\vec{w}-\vec{v}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DE}$

يقعان في المستوي $(ADHE)$

و $A\in(ADHE)$ و $B\notin(ADHE)$ فالشعاع $\overrightarrow{AB}$ لا يقع في المستوي $(ADHE)$

فالأشعة لا تقع في مستوٍ واحد فهي ليست مرتبطة خطياً . فالخيار D خاطئ .

أمّا إذا أردنا الحل شعاعياً : من الواضح أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}+\vec{w}$ غير مرتبطين خطياً لأنّه لو فرضنا جدلاً أنهما مرتبطين خطياً كان يوجد عدد حقيقي k يحقّق $\vec{u}=k(\vec{v}+\vec{w})$ وهذا يعني أنّ $\vec{u}=k\vec{v}+k\vec{w}$

ا يعني أنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً وهذا يناقض الفرض فالشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}+\vec{w}$ غير مرتبطين خطياً .

لنحاول أن نكتب الشعاع $\vec{w}-\vec{v}$ بدلالتهما : فنبحث عن عددين حقيقيين a و b يحقّقان : $\vec{w}-\vec{v}=a\,\vec{u}+b(\vec{v}+\vec{w})$

$$\vec{w}-\vec{v}=a\,\vec{u}+b\vec{v}+b\vec{w}$$

$\begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ b=1 \end{cases}$ مستحيلة الحل فالأشعة المفروضة ليست مرتبطة خطياً . فالخيار D خاطئ .

17) الشعاع $\vec{u}(4,-6,2)$ مرتبط خطياً مع الشعاع

A	$\vec{v}_1(2,3,-1)$	B	$\vec{v}_2(3,-4.5,0.5)$	C	$\vec{v}_3(-2,3,1)$	D	$\vec{v}_4(-2.4,3.6,-1.2)$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : $\frac{-6}{3}\neq\frac{4}{2}$ فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $\frac{2}{0.5}\neq\frac{4}{3}$ فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : $\frac{2}{1}\neq\frac{-6}{3}$ فالخيار C خاطئ .

لندقّق في الخيار D : نلاحظ أنّ

(1) $\frac{4}{-2.4}=-\frac{40}{24}=-\frac{5}{3}$

(2) $\frac{-6}{3.6}=-\frac{60}{36}=-\frac{5}{3}$

(3) $\frac{2}{-1.2}=-\frac{20}{12}=-\frac{5}{3}$

من (1) و (2) و (3) نجد : $\frac{4}{-2.4}=\frac{-6}{3.6}=\frac{2}{-1.2}=\frac{-5}{3}$ فالشعاعان $\vec{u}(4,-6,2)$ و $\vec{v}_4(-2.4,3.6,-1.2)$ مرتبطان خطياً فالخيار D هو الخيار الصحيح .

18) لتكن الأشعة : $\vec{u}(1,-1,3)$ و $\vec{v}(2,7,-4)$ و $\vec{w}(1,17,-17)$

A	$\vec{v}=1.5\vec{u}+0.5\vec{w}$	B	$\vec{w}=-3\vec{u}+\vec{v}$	C	$3\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$	D	الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ليست مرتبطة خطياً

التبرير:

لندقّق في الخيار A : $1.5\vec{u}+0.5\vec{w}=\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{w}=(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{9}{2})+(\frac{1}{2},\frac{17}{2},\frac{-17}{2})=(2,7,-4)=\vec{v}$

فالخيار A الصحيح .

19) في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,8,5)$ و $B(2,15,2)$ و $C(2,14,-6)$

A	$\overrightarrow{CO}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً	B	$\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AO}$ مرتبطان خطياً	C	A و B و C تقع على استقامة واحدة	D	$ABCO$ متوازي أضلاع

التبرير:

لندقّق في الخيار A :

$\overrightarrow{CO}(-2,-14,6)$

$\overrightarrow{AB}(1,7,-3)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{CO} = -2\overrightarrow{AB}$ فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CO}$ مرتبطان خطياً . فالخيار A صحيح .

ونلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{OC}$ فالشكل $ABCO$ ليس متوازي أضلاع . فالخيار D خاطئ .

أمّا الخيار B :

$\overrightarrow{AO}(-1,-8,-5)$

$\overrightarrow{BC}(0,-1,-8)$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة $(\frac{-1}{8} \neq \frac{0}{2})$. فالخيار B خاطئ .

أمّا الخيار C :

$\overrightarrow{AB}(1,7,-3)$

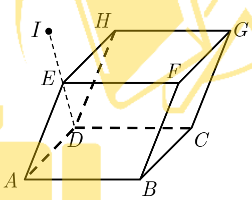
$\overrightarrow{AC}(1,6,-11)$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة $(\frac{7}{6} \neq \frac{1}{1})$.

فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً فالنقاط A و B و C لا تقع على استقامةٍ واحدة . فالخيار C خاطئ .

من أجل الأسئلة 21 و 22 و 23 و 24 و 25

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح



21) الشعاع $\overrightarrow{AF}$ يساوي

A	$\overrightarrow{BC}$	B	$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}$	C	$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{FG}$	D	$\overrightarrow{HC}$

التبرير:

من الواضح أنّ $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}$ فالخيار B صحيح .

22) الشعاع $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{DC}$

A	$\overrightarrow{AC}$	B	$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HG}$	C	$\overrightarrow{DG}$	D	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{FB}$

التبرير:

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG}$$

ونلاحظ أنّ الخيار B : $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AG}$ فالخيار B هو الخيار الصحيح .

) الشعاع $\overrightarrow{DE}$ مرتبط خطياً مع الشعاع

A	$-\overrightarrow{GB}$	B	$\overrightarrow{DB}$	C	$\overrightarrow{DH}$	D	$\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{GF}$

التبرير:

إذا دقّقنا في الخيار D : $\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DE}$ فالخيار الصحيح هو D .

24) الأشعة الثلاثة : $\overrightarrow{DH}$ و $\overrightarrow{EF}$ و ......

A	$\overrightarrow{AG}$ مرتبطة خطياً	B	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}$ مرتبطة خطياً	C	$\overrightarrow{CG}$ ليست مرتبطة خطياً	D	$\overrightarrow{DF}$ مرتبطة خطياً

التبرير: الشعاعان $\overrightarrow{DH}$ و $\overrightarrow{EF}$ يقعان في المستوي $(ABFE)$.

لندقّق في الخيار A : نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AG}$ لا يقع في المستوي $(ABFE)$ فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}$ فهو يقع في المستوي $(ABFE)$

ومنه الأشعة $\overrightarrow{DH}$ و $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CG}$ مرتبطة خطياً . فالخيار B صحيح .

أمّا الخيار C : $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BF}$ فهو يقع في المستوي $(ABFE)$فالأشعة $\overrightarrow{DH}$ و $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{CG}$ مرتبطة خطياً. فالخيار C خاطئ .

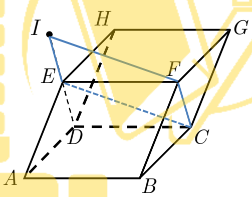
أمّا الخيار D : $F\in(ABFE)$ و $D\notin(ABFE)$ فالشعاع $\overrightarrow{DF}$ لا يقع في المستوي $(ABFE)$

فالأشعة $\overrightarrow{DH}$ و $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{DF}$ ليست مرتبطة خطياً . فالخيار D خاطئ .

25) بفرض النقطة I نظيرة D بالنسبة إلى E عندئذٍ

A	المستقيمان (IF) و (CE) متوازيان	B	المستقيمان (IF) و (CE) متقاطعان	C	الأشعة $\overrightarrow{FI}$ و $\overrightarrow{FC}$ و $\overrightarrow{FD}$ ليست مرتبطة خطياً	D	النقاط F و C و H و I تقع في مستوٍ واحد

التبرير: من الواضح أنّ $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DE}$



ومنه $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EI}$ فالشكل $CEIF$ متوازي أضلاع

فالمستقيمان (IF) و (CE) متوازيان

فالخيار A صحيح .

ومنه الخيار B خاطئ .

أمّا الخيار C : نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{FI}$ و $\overrightarrow{FC}$ يقعان في المستوي $(CEIF)$

و $F\in(CEIF)$ و D تقع على المستقيم (IE) ومنه فالشعاع $\overrightarrow{FD}$ يقع في المستوي $(CEIF)$

فالأشعة $\overrightarrow{FI}$ و $\overrightarrow{FC}$ و $\overrightarrow{FD}$ مرتبطة خطياً . فالخيار C خاطئ .

أمّا الخيار D : نلاحظ أنّ النقاط I و F و C تقع في المستوي $(CEIF)$ و النقطة $H\notin(CEIF)$ وضوحاً .

فالخيار D خاطئ .

26) في معلمٍ متجانس : $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطتان : $A(2,3,-5)$ و $B(2,5,-3)$

عدد النقط الموجودة على محور الفواصل والتي تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هو

A	لا يوجد أي نقطة	B	نقطة وحيدة	C	نقطتان فقط	D	عدد غير منتهٍ من النقط

التبرير: الخيار C مستحيل أن يكون صحيحاً حيث لأنّ محور الفواصل عبارة عن مستقيم

ومحور الفواصل إمّا أن يقطع المستوي المحوري بنقطةٍ واحدة .

أو محور الفواصل يوازي المستوي المحوري وغير محتوى فيه فلا يوجد أي نقطة تقاطع .

أو محور الفواصل محتوى في المستوي المحوري فيوجد عدد غير منتهٍ من النقط .

لنعود إلى التمرين :

بفرض C نقطة من محور الفواصل فإحداثياتها من الشكل: $C(x,0,0)$

$CA = CB$ وبالتالي $CA^2 = CB^2$

$$(x-2)^2+(0-3)^2+(-5-0)^2=(x-2)^2+(0-5)^2+(-3-0)^2$$

$9 = 9$ محقّق دوماً .

فأي نقطة من محور الفواصل تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

فيوجد عدد غير منتهٍ من النقط . فالخيار الصحيح هو D .

27) نقول إنّ المستويين (ABC) و $(A'B'C')$ متوازيان إذا وفقط إذا

A	(AB) يوازي $(A'B')$	B	الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ مرتبطة خطياً	C	الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{A'C'}$ مرتبطة خطياً	D	تحقّق الخياران B و C معاً .

التبرير:

نحن نعلم أنّنا نقول عن مستويين أنهما متوازيان إذا وُجِدَ مستقيمان متقاطعان في المستوي الأول يوازيان على التوالي مستقيمين متقاطعين في المستوي الثاني .

وهذا يكافئ شعاعياً : تحقّق الخياران B و C معاً . فالخيار الصحيح D .

28) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: إنّ مجموعة قيم العدد الحقيقي k التي تجعل مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقّق المساواة : $x^2+y^2+z^2-2x+\ln(k+1)=0$ تمثّل كرة هي :

A	$k\in]-1,e-1[$	B	$k\in]e-1,+\infty[$	C	$k\in]0,+\infty[$	D	$k\in]-\infty,e-1[$

التبرير: $x^2+y^2+z^2-2x+\ln(k+1)=0$

$$(x^2-2x+1)-1+y^2+z^2=-\ln(k+1)$$

$$(x-1)^2+y^2+z^2=-\ln(k+1)+1$$

المعادلة تمثّل كرة عندما $-\ln(k+1)+1>0$

$$1>\ln(k+1)$$

$$\ln e>\ln(k+1)$$

❒ شرط الحل : $k+1>0$

ومنه $k>-1$

وبالتالي $k \in]-1,+\infty[= D_1$

❐ $e > k+1$

ومنه $e-1>k$

أي $k<e-1$

$k \in]-\infty, e-1[= D_2$

❐ فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي : $k \in D_1 \cap D_2 =]-1,+\infty[\cap]-\infty,e-1[=]-1,e-1[$.

فالخيار A هو الخيار الصحيح .

29) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: لدينا النقطتان $A(-1,2,3)$ و $B(1,4,-5)$

إنّ معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هي

A	$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=72$	B	$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$
C	$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=18$	D	$x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=18$

التبرير: لكتابة معادلة كرة نحتاج إلى معرفة مركزها ونصف قطرها

مركز الكرة هو A وبما أنّ الكرة تمس المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ فهي تمر بالنقطة I منتصف $[AB]$

فتكون $I(0,3-1)$ ومنه $R = IA = \sqrt{(-1-0)^2+(2-3)^2+(3+1)^2} = \sqrt{18}$

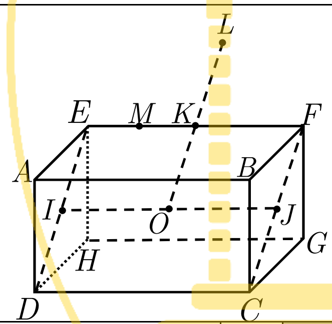
فمعادلة الكرة المطلوبة : $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=18$. فالخيار الصحيح هو C .

30) $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات . مركزه O .

I و J مركزي الوجهين $AEHD$ و $BFGC$

K منتصف $[EF]$ و M منتصف $[EK]$. L نظيرة O بالنسبة إلى K .

واحدٌ من الإجابات الآتية خاطئ :



A	النقاط I و M و L تقع على استقامةٍ واحدة	B	الأشعة $\overrightarrow{CL}$ و $\overrightarrow{CI}$ و $\overrightarrow{JF}$ مرتبطة خطياً
C	$\overrightarrow{CL}=\frac{3}{2}\overrightarrow{JF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$	D	$\overrightarrow{CL}=\frac{5}{2}\overrightarrow{JF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : من الواضح أنّ $\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{KL}$ فالشكل $IELK$ متوازي أضلاع

فيه M منتصف $[EK]$ وبالتالي M هي نقطة تقاطع قطريه . فالنقاط I و M و L على استقامةٍ واحدة .

حيث M منتصف $[IL]$. فالخيار A صحيح .

لندقّق في الخيار B : إذا ناقشناه بشكل منطقي بفرض أنّه هو الخيار الوحيد الخاطئ

أي الأشعة $\overrightarrow{CL}$ و $\overrightarrow{CI}$ و $\overrightarrow{JF}$ غير مرتبطة خطياً فيصبح الخياران C و D خاطئين وهذا يناقض طبيعة السؤال أنّ هناك فقط إجابة واحدة خاطئة . فحتماً الخيار B الصحيح .

أمّا الحل عن طريق التخيّل الفراغي : نجد الأشعة $\overrightarrow{CL}$ و $\overrightarrow{CI}$ و $\overrightarrow{JF}$ تقع في المستوي $(CDEF)$ فهي مرتبطة خطياً .

لندقّق في الخيار C : إذا وضعنا P منتصف $[CI]$

فيكون $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PL}$

إنّ $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$ ولكن $\overrightarrow{PL} = \alpha\overrightarrow{JF}$ حيث وضوحاً $\alpha > \frac{3}{2}$. فالخيار C هو الخيار الخاطئ الوحيد .

وبدقّة $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JF}$ و $\overrightarrow{OL} = 2\overrightarrow{JF}$ ومنه $\overrightarrow{PL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{JF}$

فأصبح لدينا $\overrightarrow{CL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{JF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$ فالخيار D صحيح .

طريقة ثانية : لمعرفة الخيار D أنّه صحيح :

$$\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OL}$$

ومن جهة أخرى : $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OL}$

بجمع العلاقتين : نجد $2\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{JF} + 2\overrightarrow{OL}$

ومنه $2\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{JF} + 2(2\overrightarrow{JF})$

$$2\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CI} + 5\overrightarrow{JF}$$

وبالتالي $\overrightarrow{CL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{JF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$. فالخيار D صحيح .

.... انتهت الأسئلة ....

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

ورقة العمل الأولى في مادة التحليل
للصف الثالث الثانوي العلمي (شتاء 2025)

الاسم: ....
الدرجة: 300

فيما يأتي 30 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثم ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 10 درجة .

التحليل 1:

1) f و g تابعان معرّفان على $\mathbb{R}$ ويحقّقان : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$. عندئذٍ

A	$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))=0$	B	$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-1$	C	$\lim_{x\to+\infty} f(g(x))=-\infty$	D	$\lim_{x\to+\infty}(2f(x)-3g(x))=+\infty$

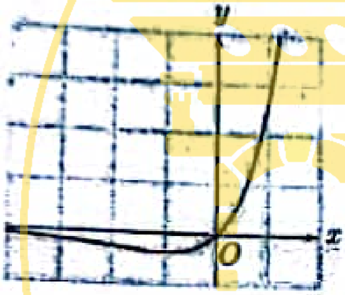
2) f و g تابعان معرّفان على $\mathbb{R}$ ويحقّقان : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ و $g(x)<0$ أيا كان $x\in\mathbb{R}$. عندئذٍ

A	$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))=0$	B	$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$	C	$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=-\infty$	D	$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}$ هي حالة عدم تعيين

3) f و g تابعان معرّفان على $\mathbb{R}$ ويحقّقان : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-2$. عندئذٍ

A	$\lim_{x\to+\infty} f(g(x))=-2$	B	$\lim_{x\to+\infty} f(g(x))=+\infty$	C	$\lim_{x\to+\infty} g(f(x))=-2$	D	$\lim_{x\to+\infty} g(f(x))=+\infty$

4) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$. والمرسوم في الشكل المجاور :



A	$\lim_{x\to+\infty} f(\frac{1}{x})=+\infty$	B	$\lim_{x\to-\infty} f(\frac{1}{x})=0$
C	$\lim_{x\to-\infty} f(x^2)=0$	D	$\lim_{x\to-\infty}(f(x))^2=+\infty$

5) ليكن f التابع المعرّف على المجال $]-2,2[$ وفق العلاقة : $f(x)=\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}$

A	$\lim_{x\to-2} f(x)=-\infty$	B	$\lim_{x\to-2} f(x)=+\infty$	C	$\lim_{x\to2} f(x)=+\infty$	D	$\lim_{x\to2} f(x)=\frac{1}{4}$

6) ليكن f التابع المعرّف وفق العلاقة : $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$

من الملاحظ أنّ $\lim_{x\to-2} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لإزالتها نكتب $f(x)$ بالصيغة :

A	$f(x)=\frac{x+2}{x-2}$	B	$f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x+2}\times\sqrt{x-2}}$ ثمّ نتابع بخطوة واحدة ونستطيع إيجاد النهاية	C	$f(x)=\frac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{x^2-4}$ ثمّ نتابع بخطوة واحدة ونستطيع إيجاد النهاية	D	$f(x)=\frac{x(1+\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x^2})}}$ ثمّ نتابع بخطوة واحدة ونستطيع إيجاد النهاية

7) ليكن f التابع المعرّف وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x}+2}$

من الملاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{+\infty-\infty}{+\infty}$ لإزالتها نكتب $f(x)$ بالصيغة :

A	$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-x}{\sqrt{x}(1+\frac{2}{x})}$ ثم نتابع بخطوة واحدة ونستطيع إيجاد النهاية	B	$f(x)=\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)\times(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x}+2)\times(\sqrt{x^2+1}+x)}$ ثم نتابع بخطوة واحدة ونستطيع إيجاد النهاية
C	$f(x)=\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)\times(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)\times(\sqrt{x}-2)}$ ثم نتابع بخطوة واحدة ونستطيع إيجاد النهاية	D	نوجد نهاية البسط ثم نهاية المقام ونوجد نهاية خارج قسمتهما فيكون الناتج $+\infty$

8) $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2-25}}$ تساوي

A	$\dfrac{-1}{\sqrt{10}}$	B	$\dfrac{1}{\sqrt{10}}$	C	0	D	$-\infty$

9) f تابع معرّف على المجال $\mathbb{R}^*$ وفق : $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. لإيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ نكتب

A	$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=L : L\in[-1,1]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{L}{+\infty}=0$	B	$\dfrac{1}{x}\le f(x)\le\dfrac{-1}{x}$ ثم نطبق مبرهنة الإحاطة
C	$\dfrac{-1}{x}\le f(x)\le\dfrac{1}{x}$ ثم نطبق مبرهنة الإحاطة	D	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (مبرهنة)

10) f و g تابعان معرّفان على $\mathbb{R}$ ويحققان : $0\le f(x)\le g(x)$ أيّاً تكن $x\in\mathbb{R}$ عندئذٍ

A	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	B	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$
C	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$	D	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

11) ليكن f التابع المعرّف وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x+\cos x)^2}$ لإيجاد $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ نحصر $f(x)$ بالشكل الآتي :

A	$\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}\le f(x)\le\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$	B	$\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}\le f(x)\le\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$
C	$1\le f(x)\le\dfrac{x^2+1}{x^2}$	D	$\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}\le f(x)\le\dfrac{x^2+1}{x^2-2x}$

12) بفرض n عدد طبيعي أكبر أو يساوي الواحد . من الواضح أنّ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+n}-\sqrt{x})=0$

عندئذٍ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\dots+\sqrt{x+n}-n\sqrt{x})$ تساوي

A	0	B	$+\infty$	C	n	D	$-\frac{1}{12}$

13) ليكن f التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ عندئذٍ f يحقق المتراجحة :

A	$\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\le f(x)\le\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
C	$\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\le f(x)\le 0$	D	$0\le f(x)\le\frac{1}{4}$

14) ليكن f تابعاً سالباً تماماً على $\mathbb{R}$ ويحقق المتراجحة : $|f(x)-2|\ge 2\sqrt{x^2+1}-x$ عندئذٍ $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ تساوي

A	لا يمكن تحديد جواب النهاية	B	2	C	$+\infty$	D	$-\infty$

15) ليكن f التابع المعرّف وفق العلاقة : $f(x)=\frac{x+\sin x}{3x-\cos x}$ لإيجاد $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ نحصر $f(x)$ بالشكل الآتي :

A	$\frac{x-1}{3x-1}\le f(x)\le\frac{x+1}{3x+1}$	B	$\frac{x-1}{3x+1}\le f(x)\le\frac{x+1}{3x-1}$
C	$\frac{x+1}{3x-1}\le f(x)\le\frac{x-1}{3x+1}$	D	$\frac{x+1}{3x+1}\le f(x)\le\frac{x-1}{3x-1}$

التحليل 2:

16) مجموعة حلول المعادلة : $2\ln(-x)=\ln 25$ هي

A	$\{5\}$	B	$\{-5\}$	C	$\{-5,5\}$	D	$-\frac{25}{2}$

17) ليكن f التابع المعرّف على $]\frac{1}{3},+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\ln(6x+2)+\ln(6x-2)-2\ln 2$

عندئذٍ $f(x)$ يساوي :

A	$2\ln 6x-2\ln 2$	B	$\ln(12x-4)$	C	$\ln(9x^2-1)$	D	$\ln(36x^2-1)$

18) إنّ المقدار $\ln(10e^2)$ يساوي

A	$2\ln 10+2$	B	$\ln 10+2$	C	$2\ln(10e)$	D	$\ln 10+e\ln 2$

19) أياً تكن $x\in]0,+\infty[$ المعادلة $\ln x+\ln(x+3)=3\ln 2$ تكافئ المعادلة

A	$2x+3=6$	B	$2x+3=8$	C	$x^2+3x=6$	D	$x^2+3x=8$

20) إنّ مجموعة حلول المتراجحة : $\ln(x^2-2x+2)\le 0$ هي

A	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	B	$]1,+\infty[$	C	$\varnothing$	D	$\{1\}$

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

ورقة العمل الأولى في مادة التحليل

للصف الثالث الثانوي العلمي (شتاء 2025)

الاسم: ....

الدرجة: 300

21) إنّ مجموعة حلول المتراجحة: $\ln x + \ln 2 \ge \ln(3x-6)$

A	$]2,6]$	B	$[6,+\infty[$	C	$]0,6]$	D	$]2,4]$

22) إنّ مجموعة حلول المتراجحة: $\ln(1-\frac{2}{x}) \ge \ln(-x)$

A	$]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[$	B	$[-2,0[$	C	$[-2,1]$	D	$]-\infty,0[$

23) إنّ مجموعة قيم x التي تحقق المساواة الآتية: $\ln(x-3)^2 = 2\ln(3-x)$ هي

A	$x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$	B	$x\in]-\infty,3[$	C	$x\in]3,+\infty[$	D	$]-3,3[$

24) مجموعة حلول المعادلة: $\ln x^2 - \ln(\frac{x^3}{e}) + \ln 2 = \ln 2x + 5$ هي

A	$\{\frac{1}{e}\}$	B	$\{e\}$	C	$\{\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\}$	D	$\{e,\frac{1}{e}\}$

25) لتكن المعادلة (E) الآتية: $\ln(x-1)-\ln(2-x)=\ln 2+\ln x$

A	المعادلة (E) تكافئ $\frac{x-1}{2-x}=2x$	B	لا تقبل أية حلول	C	تقبل حلاً وحيداً	D	تقبل حلين

26) إذا علمت أنّ حلول المتراجحة: $2x^3+5x^2+x-2\le 0$ هي $x\in]-\infty,-2]\cup[-1,\frac{1}{2}]$

فإنّ حلول المتراجحة: $2\ln x+\ln(2x+5)\le\ln(2-x)$ هي:

A	$]-\infty,-2]\cup[-1,\frac{1}{2}]$	B	$]0,+\infty[$	C	$]0,2]$	D	$]0,\frac{1}{2}]$

27) إنّ مجموعة حلول المعادلة: $\ln x^2 - \ln x - 2 = 0$ هي:

A	$\{e^2,\frac{1}{e}\}$	B	$\{\frac{1}{e}\}$	C	$\{e^2\}$	D	$\{e\}$

28) إنّ مجموعة حلول المتراجحة: $\ln^2 x - \ln 6 \ln x + \ln 2\cdot\ln 3 \le 0$ هي:

A	$[2,3]$	B	$[e^2,e^3]$	C	$]0,e^2]\cup[e^3,+\infty[$	D	$\varnothing$

29) المتراجحة: $\ln(x^2-2)\le\ln(x)$ تكافئ

A	$x^2-2\le x$	B	$x^2-2\le x$ و $x^2-2>0$	C	$x^2-2\le x$ و $x>0$	D	$x^2-2<x$ و $x^2-2>0$

30) إنّ مجموعة حلول المعادلة $\ln x - 2\sqrt{\ln x} - 3 = 0$ هي

A	$\{e\}$	B	$\{e,e^9\}$	C	$\{e^9\}$	D	$\varnothing$

.................................انتهت الأسئلة.................................

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

حل ورقة العمل الأولى في مادة التحليل الاسم :.........

للصف الثالث الثانوي العلمي (شتاء 2025) الدرجة: 300

فيما يأتي 30 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 10 درجة .

التحليل 1:

1) f و g تابعان معرّفان على $\mathbb{R}$ ويحققّان : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$. عندئذٍ

A	$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))=0$	B	$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-1$	C	$\lim_{x\to+\infty} f(g(x))=-\infty$	D	$\lim_{x\to+\infty}(2f(x)-3g(x))=+\infty$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : نلاحظ أنّ $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty+$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : نلاحظ أنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{+\infty}{-\infty}$. فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

$\lim_{X\to-\infty} f(g(x))=\lim_{X\to-\infty} f(X)=?$

أي معطيات المسألة غير كافية . فالخيار C خاطئ .

مما سبق نستنتج أنّ الخيار الصحيح هو D .

2) f و g تابعان معرّفان على $\mathbb{R}$ ويحققّان : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ و $g(x)<0$ أياً تكن $x\in\mathbb{R}$. عندئذٍ

A	$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))=0$	B	$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$	C	$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=-\infty$	D	$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}$ هي حالة عدم تعيين

التبرير:

لندقّق في الخيار A : نلاحظ أنّ $\lim_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $0\times+\infty$. فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\boxed{\frac{+\infty}{0^-}}=-\infty$. فالخيار B هو الخيار الصحيح .

لندقّق في الخيار C: $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\boxed{\frac{0}{+\infty}}=0$. فالخيار C خاطئ . و أيضاً الخيار D خاطئ .

3) f و g تابعان معرّفان على $\mathbb{R}$ ويحققّان : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-2$. عندئذٍ

A	$\lim_{x\to+\infty} f(g(x))=-2$	B	$\lim_{x\to+\infty} f(g(x))=+\infty$	C	$\lim_{x\to+\infty} g(f(x))=-2$	D	$\lim_{x\to+\infty} g(f(x))=+\infty$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-2$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(g(x))=\lim_{X\to-2} f(X)=?$

أي معطيات المسألة غير كافية . فالخيار A خاطئ .وأيضاً الخيار B خاطئ

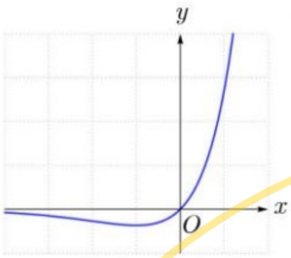
لندقّق في الخيار C: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(f(x)) = \lim\limits_{X\to+\infty} g(X) = -2$

فالخيار C هو الخيار الصحيح و الخيار D خاطئ .

---

4) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$. والمرسوم في الشكل المجاور :



A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{1}{x}) = +\infty$	B	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(\frac{1}{x}) = 0$
C	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x^2) = 0$	D	$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x))^2 = +\infty$

التبرير:

لندقّق في الخيار A: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{X\to0} f(X) = 0$ فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{X\to0} f(X) = 0$ فالخيار B صحيح .

لندقّق في الخيار C: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x^2) = \lim\limits_{X\to+\infty} f(X) = +\infty$ فالخيار C خاطئ .

لندقّق في الخيار D: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x))^2 = \lim\limits_{X\to0} X^2 = 0$ فالخيار D خاطئ .

---

5) ليكن f التابع المعرّف على المجال $]-2,2[$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x+2}$

A	$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = -\infty$	B	$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = +\infty$	C	$\lim\limits_{x\to2} f(x) = +\infty$	D	$\lim\limits_{x\to2} f(x) = \frac{1}{4}$

التبرير: $f(x) = \frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x+2}$

كونه يوجد عامل مشترك بين المقامين لنوحّد المقامات قبل مناقشة الخيارات .

$f(x) = \frac{1+x-2}{x^2-4} = \frac{x-1}{x^2-4}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

يرجى الانتباه أنّ f معرّف على $]-2,2[$.

لندقّق في الخيار A: $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \boxed{\frac{-3}{0^-}} = +\infty$. فالخيار A خاطئ . والخيار B هو الخيار الصحيح .

أمّا الخيار C : $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \boxed{\frac{1}{0^-}} = -\infty$ فالخيار C خاطئ وكذلك الخيار D خاطئ .

---

6) ليكن f التابع المعرّف وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$

من الملاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$ لإزالتها نكتب $f(x)$ بالصيغة :

A	$f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$	B	$f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+2}\times\sqrt{x-2}}$ ثمّ نتابع بخطوة واحدة ونستطيع إيجاد النهاية	C	$f(x)=\dfrac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{x^2-4}$ ثمّ نتابع بخطوة واحدة ونستطيع إيجاد النهاية	D	$f(x)=\dfrac{x(1+\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x^2})}}$ ثمّ نتابع بخطوة واحدة ونستطيع إيجاد النهاية

التبرير:

لندقّق في الخيار A : نحن نعلم $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (لاحظ أنّ $\sqrt{9+16}\neq\sqrt{9}+\sqrt{16}$ لأنّ $5\neq 3+4$)

$\sqrt{x^2-4}\neq x-2$ وبالتالي $f(x)\neq\dfrac{x+2}{x-2}$ فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : نحن نعلم أنّ $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ في حالة $a\geq 0$ و $b\geq 0$

أمّا في حالة $a\leq 0$ و $b\leq 0$ يكون $\sqrt{\underbrace{a}_{\leq 0}\times\underbrace{b}_{\leq 0}}=\sqrt{\underbrace{(-a)}_{\geq 0}\times\underbrace{(-b)}_{\geq 0}}=\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$

ونلاحظ أنّ f معرّف عندما $x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

وعندما نريد إيجاد نهاية f عند -2 يكون f في جوار -2 أي في المجال $]-\infty,-2[$

وعندها يكون $x-2<0$ و $x+2<0$ أي $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{(x-2)(x+2)}\neq\sqrt{x-2}\times\sqrt{x+2}$

وبالتالي $f(x)\neq\dfrac{x+2}{\sqrt{x+2}\times\sqrt{x-2}}$ فالخيار B خاطئ .

أمّا إذا أردنا الحل بهذا الأسلوب نضع :

$$f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{-x-2}\times\sqrt{-x+2}}$$

$$f(x)=\frac{-(-x-2)}{\sqrt{-x-2}\times\sqrt{-x+2}}=\frac{-\sqrt{-x-2}\times\sqrt{-x-2}}{\sqrt{-x-2}\times\sqrt{-x+2}}=\frac{-\sqrt{-x-2}}{\sqrt{-x+2}}$$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-\sqrt{-x-2}}{\sqrt{-x+2}}=0$.

لندقّق في الخيار C : نحن نعلم لإزالة حالة عدم التعيين $\dfrac{0}{0}$ لتابع يحوي جذر تربيعي نضرب بمرافق الجذر ونقسّم عليه

وبالتالي $f(x)=\dfrac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}\times\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{x^2-4}$

فالخيار C صحيح .

وإذا أردنا أن نكمل الحل $f(x)=\dfrac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{x^2-4}=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$.

ومنه $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=0$.

أمّا الخيار D : نحن نعلم بشكل عام لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

نخرج الحد المسيطر من البسط عامل مشترك بدون أمثال و نخرج الحد المسيطر من المقام عامل مشترك بدون أمثال

وهذا ما قمنا به في الخيار D وهذا الأمر بشكل عام غير مناسب حيث أننا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

وإذا أردنا أن نكمل الحل بأكثر من خطوة :

$$f(x)=\frac{x(1+\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x^2})}}=\frac{\cancel{x}(1+\frac{2}{x})}{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\frac{(1+\frac{2}{x})}{-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$$

لنضرب البسط والمقام بمرافق المقام : $f(x)=\frac{(1+\frac{2}{x})\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{-(1-\frac{4}{x^2})}=\frac{(1+\frac{2}{x})\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{-(1-\frac{2}{x})(1+\frac{2}{x})}$

وبالتالي $f(x)=\frac{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{-(1-\frac{2}{x})}$

ومنه $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{-(1-\frac{2}{x})}=0$

---

7) ليكن f التابع المعرّف وفق العلاقة : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x}+2}$

من الملاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{+\infty-\infty}{+\infty}$ لإزالتها نكتب $f(x)$ بالصيغة :

A	$f(x)=\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-x}{\sqrt{x}(1+\frac{2}{\sqrt{x}})}$ ثمّ نتابع بخطوة واحدة ونستطيع إيجاد النهاية	B	$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)\times(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x}+2)\times(\sqrt{x^2+1}+x)}$ ثمّ نتابع بخطوة واحدة ونستطيع إيجاد النهاية
C	$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)\times(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)\times(\sqrt{x}-2)}$ ثمّ نتابع بخطوة واحدة ونستطيع إيجاد النهاية	D	نوجد نهاية البسط ثم نهاية المقام ونوجد نهاية خارج قسمتهما فيكون الناتج $+\infty$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : نحن نعلم أنّه لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{+\infty-\infty}{+\infty}$

إذا كان المكان الذي فيه $+\infty-\infty$ لم يتساوى الحدان بالدرجة أو الأمثال فإنّ $\frac{+\infty-\infty}{+\infty}$ تُعامل معاملة $\frac{\infty}{\infty}$

أمّا إذا كان المكان الذي فيه $+\infty-\infty$ تساوى الحدّان بالدرجة والأمثال نضرب بالمرافق ونقسّم عليه

فنلاحظ أنّه في الخيار A قد عاملنا حالة عدم التعيين معاملة $\frac{\infty}{\infty}$ حيث نحاول أن نخرج الحد المسيطر من البسط عامل مشترك ونخرج الحد المسيطر من المقام عامل مشترك وهذا الأمر غالباً غير فعّال حيث تساوى الحدان بالدرجة والأمثال في البسط حيث إذا أكملنا ما بدأ به $f(x)=\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-x}{\sqrt{x}(1+\frac{2}{\sqrt{x}})}$

$$f(x)=\frac{x\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}-x}{\sqrt{x}(1+\frac{2}{\sqrt{x}})}=\frac{x(\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}-1)}{\sqrt{x}(1+\frac{2}{\sqrt{x}})}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}-1)}{(1+\frac{2}{\sqrt{x}})}$$

فنلاحظ أنّنا أمام حالة عدم تعيين من الشكل $0\times+\infty$.

أمّا الخيار B : ضربنا البسط والمقام بمرافق البسط فنجد

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)\times(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x}+2)\times(\sqrt{x^2+1}+x)}=\frac{1}{(\sqrt{x}+2)\times(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

فيكون $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ والخيار B هو الخيار الصحيح .

لندقّق في الخيار C : نلاحظ أننا ضربنا بمرافق المقام وليس بمرافق البسط

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)\times(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)\times(\sqrt{x}-2)}=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)\times(\sqrt{x}-2)}{x-4}$$

فنلاحظ أنها بقيت حالة عدم التعيين فالخيار C خاطئ .

أمّا الخيار D : نوجد نهاية البسط ثم نهاية المقام ونوجد نهاية خارج قسمتها ولكن يكون الناتج هو صفر وليس $+\infty$. فالخيار D خاطئ .

حيث $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

و $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}+2)=+\infty$

وبالتالي $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

---

8) $\lim_{x\to5^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2-25}}$ تساوي

A	$\frac{-1}{\sqrt{10}}$	B	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	C	0	D	$-\infty$

التبرير:

نلاحظ أنّ $\lim_{x\to5^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2-25}}$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لإزالتها

بفرض $f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2-25}}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-25}}-\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2-25}}$$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})\times(\sqrt{x}+\sqrt{5})\times(\sqrt{x^2-25})}{(\sqrt{x^2-25})\times(\sqrt{x^2-25})\times(\sqrt{x}+\sqrt{5})}-\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}$$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})\times(\sqrt{x}+\sqrt{5})\times(\sqrt{x^2-25})}{(\sqrt{x^2-25})\times(\sqrt{x^2-25})\times(\sqrt{x}+\sqrt{5})}-\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}$$

$$f(x)=\frac{(x-5)\times(\sqrt{x^2-25})}{(x^2-25)\times(\sqrt{x}+\sqrt{5})}-\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}\times\sqrt{x+5}}$$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2-25})}{(x+5)\times(\sqrt{x}+\sqrt{5})}-\frac{1}{\sqrt{x+5}}$$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2-25})}{(x+5)\times(\sqrt{x}+\sqrt{5})}-\frac{1}{\sqrt{x+5}}$$

ومنه $\lim_{x\to5^+}f(x)=0-\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{-1}{\sqrt{10}}$ فالخيار الصحيح هو A .

---

9) f تابع معرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق : $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. لإيجاد $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ نكتب

A	$\lim_{x\to+\infty}\sin x=L : L\in[-1,1]$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ وبالتالي $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{L}{+\infty}=0$	B	$\frac{-1}{x}\le f(x)\le\frac{1}{x}$ ثمّ نطبق مبرهنة الإحاطة
C	$\frac{1}{x}\le f(x)\le\frac{-1}{x}$ ثمّ نطبق مبرهنة الإحاطة	D	$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=1$ (مبرهنة)

التبرير: لندقق في الخيار A : الكتابة المذكورة في الخيار A فيها خطأ وهو $\lim_{x\to+\infty}\sin x=L : L\in[-1,1]$ لأنّ تابع $x\mapsto\sin x$ ليس له نهاية عند $+\infty$ لذلك ليس أمامنا في التعبير عن الإجابة سوى مبرهنة الإحاطة .

لندقّق في الخيار B : $-1\le\sin x\le1$

وبما أنّ x في جوار $+\infty$ فإذا قسّمنا المتراجحة على x لا تتغيّر جهة التراجح .

وبالتالي $\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{-1}{x}$ فالخيار B خاطئ والخيار الصحيح هو C .

أمّا الخيار D : فنحن نعلم أنّ $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ وليس عندما $x\to+\infty$. فالخيار D خاطئ .

---

10) f و g تابعان معرّفان على $\mathbb{R}$ ويحققّان : $0 \le f(x) \le g(x)$ أياً تكن $x \in \mathbb{R}$ عندئذٍ

A	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	B	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$
C	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$	D	إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

التبرير:

لندقّق في الخيار A : $0 \le f(x) \le g(x)$ نلاحظ أنّه إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ فليس بالضرورة التابع الأصغر منه وهو f أن يسعى نحو $+\infty$ فيمكن أن يسعى نحو 1 مثلاً . فالخيار A خاطئ .

لندقّق في الخيار B : $0 \le f(x) \le g(x)$ نلاحظ أنّه إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ فليس بالضرورة التابع الأكبر منه وهو g أن يسعى نحو 2 فيمكن أن يسعى نحو 3 مثلاً. فالخيار B خاطئ .

لندقّق في الخيار C : $0 \le f(x) \le g(x)$ نلاحظ أنّه إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ فليس بالضرورة التابع الأكبر منه وهو g أن يسعى نحو 0 فيمكن أن يسعى نحو 1 مثلاً. فالخيار C خاطئ .

لندقّق في الخيار D : $0 \le f(x) \le g(x)$

نلاحظ أنّه : إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ و من الواضح $\lim\limits_{x\to+\infty}(0) = 0$ كان استناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

فالخيار D هو الخيار الصحيح .

---

11) ليكن f التابع المعرّف وفق العلاقة : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+\cos x)^2}$ لإيجاد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ نحصر $f(x)$ بالشكل الآتي :

A	$\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2} \le f(x) \le \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$	B	$\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2} \le f(x) \le \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$
C	$1 \le f(x) \le \dfrac{x^2+1}{x^2}$	D	$\dfrac{x^2-2x}{x^2+1} \le f(x) \le \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$

التبرير: لإيجاد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ نطبّق الإحاطة :

$-1 \le \cos x \le 1$ نضيف x

$x-1 \le x+\cos x \le x+1$

بما أنّ x في جوار $-\infty$ فإنّ أطراف المتراجحتين سالبة تماماً فإذا ربّعنا تتغير جهة التراجح

$(x-1)^2 \ge (x+\cos x)^2 \ge (x+1)^2$

نقلب أطراف المتراجحة : فتتغيّر جهة التراجح : $\dfrac{1}{(x+1)^2} \le \dfrac{1}{(x+\cos x)^2} \le \dfrac{1}{(x-1)^2}$

نضرب بـ $(x^2+1) > 0$: $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2} \le \dfrac{x^2+1}{(x+\cos x)^2} \le \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$

وبالتالي : $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2} \le f(x) \le \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$ فالخيار الصحيح هو الخيار B .

وإذا أردنا أن نكمل الحل لإيجاد النهاية :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2} = 1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2} = 1$ فحسب الإحاطة (1) نجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

---

12) بفرض n عددٌ طبيعي أكبر أو يساوي الواحد . من الواضح أنّ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+n}-\sqrt{x})=0$

عندئذٍ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\cdots+\sqrt{x+n}-n\sqrt{x})$ تساوي

A	0	B	$+\infty$	C	n	D	$-\frac{1}{12}$

التبرير: من الواضح أنّ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+n}-\sqrt{x})=0$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\cdots+\sqrt{x+n}-n\sqrt{x})=$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\underbrace{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}_{\downarrow\,0}+\underbrace{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}_{\downarrow\,0}+\underbrace{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}_{\downarrow\,0}+\cdots+\underbrace{\sqrt{x+n}-\sqrt{x}}_{\downarrow\,0})=0\times n=0$$

فالخيار الصحيح هو A .

---

13) ليكن f التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ عندئذٍ f يحقّق المتراجحة :

A	$\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\le f(x)\le\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
C	$\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\le f(x)\le 0$	D	$0\le f(x)\le\frac{1}{4}$

التبرير: $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

نضرب أولاً بالمرافق ونقسّم عليه : $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})\times(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}$

ومنه $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}-x}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}=\dfrac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}$

لنبدأ بالإحاطة الآن : $\sqrt{x}+\sqrt{x}\le\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\le\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x+\sqrt{x}}$

$$2\sqrt{x}\le\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\le 2\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

نقلب أطراف المتراجحة: فتتغيّر جهة التراجح : $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\ge\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

نضرب بِ $\sqrt{x}$ فنجد : $\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\ge\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\ge\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

ومنه $\frac{1}{2}\ge f(x)\ge\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ أي $\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\le f(x)\le\frac{1}{2}$ فالخيار الصحيح هو A .

وإذا أردنا أن نكمل لإيجاد النهاية بفرض $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$$g(x)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}}=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

نلاحظ أنّ $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{1}{2}$ فحسب مبرهنة الإحاطة (1) نجد $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$

14) ليكن f تابعاً سالباً تماماً على $\mathbb{R}$ ويحقّق المتراجحة : $|f(x)-2| \geq 2\sqrt{x^2+1}-x$ عندئذٍ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ تساوي

A	لا يمكن تحديد جواب النهاية	B	2	C	$+\infty$	D	$-\infty$

التبرير: $|f(x)-2| \geq 2\sqrt{x^2+1}-x$

بفرض $g(x)=2\sqrt{x^2+1}-x$

نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty+$ لإزالتها .

$$g(x)=2\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-x$$

ومنه $g(x)=2\sqrt{x^2}\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}-x$

$$g(x)=2|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}-x$$

بما أنّ x في جوار $+\infty$ فإنّ $|x|=x$ ومنه

$$g(x)=2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x$$

وبالتالي $g(x)=x(2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1)$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

ملاحظة من أجل الأتمتة : في جوار $+\infty$ يكون $g(x)\approx 2|x|-x=2x-x=x$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

وبالتالي التابع الأكبر منه وهو $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-2|=+\infty$

ولمّا كان f تابعاً سالباً تماماً على $\mathbb{R}$ كان $f(x)-2<0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2)=-\infty$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ فالخيار الصحيح هو D .

---

15) ليكن f التابع المعرّف وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{3x-\cos x}$ لإيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ نحصر $f(x)$ بالشكل الآتي :

A	$\frac{x-1}{3x-1}\leq f(x)\leq\frac{x+1}{3x+1}$	B	$\frac{x-1}{3x+1}\leq f(x)\leq\frac{x+1}{3x-1}$
C	$\frac{x+1}{3x-1}\leq f(x)\leq\frac{x-1}{3x+1}$	D	$\frac{x+1}{3x+1}\leq f(x)\leq\frac{x-1}{3x-1}$

التبرير: $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{3x-\cos x}$

لنحصر البسط أولاً $-1\leq\sin x\leq 1$ لنضيف x فنجد :

$$\boxed{x-1\leq x+\sin x\leq x+1}\cdots\cdots(I)$$

لنحصر المقام $-1\leq\cos x\leq 1$

ومنه $1\geq-\cos x\geq-1$ لنضيف $3x$

$$\boxed{3x+1\geq 3x-\cos x\geq 3x-1}$$

لا نستطيع أن نقسّم متراجحتين طرفاً إلى طرف ولقسمتهما نقلب المقام ثم نضرب المتراجحتين بعد التيقّن أنّ أطراف المتراجحتين موجبتان تماماً

$$\boxed{\frac{1}{3x+1} \le \frac{1}{3x-\cos x} \le \frac{1}{3x-1}} \cdots\cdots(II)$$

بما أنّ x في جوار $+\infty$ فإنّ أطراف المتراجحتين (I) و (II) موجبتان تماماً .

فنستطيع ضرب المتراجحتين (I) و (II) طرفاً إلى طرف .

$$\frac{x-1}{3x+1} \le \frac{x+\sin x}{3x-\cos x} \le \frac{x+1}{3x-1}$$

ومنه $\frac{x-1}{3x+1} \le f(x) \le \frac{x+1}{3x-1}$ فالخيار الصحيح هو B .

التحليل 2:

16) مجموعة حلول المعادلة : $2\ln(-x) = \ln 25$ هي

A	$\{5\}$	B	$\{-5\}$	C	$\{-5,5\}$	D	$-\frac{25}{2}$

التبرير: $2\ln(-x) = \ln 25$

❏ نوجد مجموعة تعريف المعادلة اللوغارتمية

$-x > 0$ ومنه $x < 0$ أي $x \in]-\infty, 0[= D_1$.

❏ $2\ln(-x) = \ln 25$

$\ln(-x)^2 = \ln 25$

$x^2 = 25$

إمّا مقبول $x = -5 \in D_1$ أو مرفوض $x = 5 \notin D_1$

فالخيار الصحيح هو B .

---

17) ليكن f التابع المعرّف على $]\frac{1}{3}, +\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \ln(6x+2) + \ln(6x-2) - 2\ln 2$

عندئذٍ $f(x)$ يساوي :

A	$2\ln 6x - 2\ln 2$	B	$\ln(12x-4)$	C	$\ln(9x^2-1)$	D	$\ln(36x^2-1)$

التبرير: $f(x) = \ln(6x+2) + \ln(6x-2) - 2\ln 2$

$f(x) = \ln((6x+2)\times(6x-2)) - \ln 4$

$f(x) = \ln(36x^2-4) - \ln 4$

$f(x) = \ln(\frac{36x^2-4}{4}) = \ln(9x^2-1)$ فالخيار الصحيح هو C .

---

18) إنّ المقدار $\ln(10e^2)$ يساوي

$\ln 10 + e\ln 2$	D	$2\ln(10e)$	C	$\ln 10 + 2$	B	$2\ln 10 + 2$	A

التبرير:

$\ln(10e^2) = \ln 10 + \ln e^2 = \ln 10 + 2\ln e = \ln 10 + 2$.

فالخيار الصحيح هو B .

19) أياً تكن $x \in]0,+\infty[$ المعادلة $\ln x + \ln(x+3) = 3\ln 2$ تكافئ المعادلة

$x^2 + 3x = 8$	D	$x^2 + 3x = 6$	C	$2x + 3 = 8$	B	$2x + 3 = 6$	A

التبرير: أياً تكن $x \in]0,+\infty[$ المعادلة $\ln x + \ln(x+3) = 3\ln 2$ تكافئ المعادلة

$\ln(x(x+3)) = \ln 2^3$

ومنه $x(x+3) = 8$

أي $x^2 + 3x = 8$ فالخيار الصحيح هو D .

20) إنّ مجموعة حلول المتراجحة : $\ln(x^2 - 2x + 2) \le 0$ هي

$\{1\}$	D	$\varnothing$	C	$]1,+\infty[$	B	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	A

التبرير: $\ln(x^2 - 2x + 2) \le 0$

$\ln(x^2 - 2x + 2) \le \ln 1$

❐ شرط الحل : $x^2 - 2x + 2 > 0$

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 4(1)(2) = -4 < 0$

مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$.

فإشارة $x^2 - 2x + 2$ من إشارة أمثال x^2 ومنه $x^2 - 2x + 2 > 0$ أياً تكن $x \in \mathbb{R}$

ومنه $D_1 = \mathbb{R}$

طريقة ثانية : $x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1 > 0$ محقّق وضوحاً أياً تكن $x \in \mathbb{R}$.

❐ $x^2 - 2x + 2 \le 1$

أي $x^2 - 2x + 1 \le 0$

ومنه $(x-1)^2 \le 0$

وهذه المتراجحة محقّقة عندما $x = 1$ أي $x \in \{1\} = D_2$

فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي $S = \{1\} = x \in D_1 \cap D_2$. فالجواب الصحيح هو D .

21) إنّ مجموعة حلول المتراجحة : $\ln x + \ln 2 \geq \ln(3x-6)$

A	$]2,6]$	B	$[6,+\infty[$	C	$]0,6]$	D	$]2,4]$

التبرير: $\ln x + \ln 2 \geq \ln(3x-6)$

❐ نوجد مجموعة تعريف المتراجحة اللوغارتمية :

$3x-6>0$ و $x>0$

ومنه $x>2$ و $x>0$

أي $x \in]2,+\infty[\cap]0,+\infty[=]2,+\infty[=D_1$.

❐ نطبق خواص اللوغاريتم :

$\ln 2x \geq \ln(3x-6)$

$2x \geq 3x-6$

ومنه $6 \geq x$

أي $x \leq 6$ ومنه $x \in]-\infty,6]=D_2$

❐ فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي : $x \in D_1 \cap D_2 =]2,+\infty[\cap]-\infty,6]=]2,6]=S$

فالخيار الصحيح هو A .

---

22) إنّ مجموعة حلول المتراجحة : $\ln(1-\frac{2}{x}) \geq \ln(-x)$

A	$]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[$	B	$[-2,0[$	C	$[-2,1]$	D	$]-\infty,0[$

التبرير: $\ln(1-\frac{2}{x}) \geq \ln(-x)$

❐ شرط الحل : $-x>0$ ومنه $x<0$

أي $x \in]-\infty,0[=D_1$.

❐ $1-\frac{2}{x} \geq -x$

ومنه $x+1-\frac{2}{x} \geq 0$.

$\frac{x^2+x-2}{x} \geq 0$

ندرس إشارة كل من البسط والمقام :

$x^2+x-2=0$

ومنه $(x+2)(x-1)=0$

إمّا $x=-2$ أو $x=1$.

والمقام ينعدم عندما $x=0$.

x	$-\infty$	-2		0		1	$+\infty$
x^2+x-2	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^2+x-2}{x}$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$
المتراجحة	غير محققة	محققة	محققة	$\Vert$	غير محققة	محققة	محققة

$x \in [-2,0[\cup[1,+\infty[= D_2$

❐ فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي : $x \in D_1 \cap D_2 = [-2,0[= S$.

فالخيار الصحيح هو B .

طريقة ثانية : إيجاد الحل من خلال استبعاد الخيارات الخاطئة بشكل منطقي

نلاحظ أن أي حل موجب يجعل المقدار في الطرف الأيسر غير معرّف فهو مرفوض

فالخياران A و C خاطئان .

بقي لدينا الخيارين B و D : لنعطي قيمة موجودة في الخيار D وغير موجودة في B مثل $x=-3$

ونعوضها في المتراجحة المعطاة فنجد $\ln(\frac{5}{3})\not\geq \ln(3)$ غير محققة فالخيار D خاطئ والخيار الصحيح هو الخيار B .

---

23) إنّ مجموعة قيم x التي تحقّق المساواة الآتية : $\ln(x-3)^2 = 2\ln(3-x)$ هي

A	$x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$	B	$x \in]-\infty,3[$	C	$x \in]3,+\infty[$	D	$]-3,3[$

التبرير: $\ln(x-3)^2 = 2\ln(3-x)$

إنّ مجموعة قيم x التي تحقّق المساواة السابقة هي $3-x>0$

ومنه $3>x$ أي $x \in]-\infty,3[$.فالخيار الصحيح هو B .

---

24) مجموعة حلول المعادلة : $\ln x^2 - \ln(\frac{x^5}{e}) + \ln 2 = \ln 2x + 5$ هي

A	$\{\frac{1}{e}\}$	B	$\{e\}$	C	$\{\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\}$	D	$\{e,\frac{1}{e}\}$

التبرير: $\ln x^2 - \ln(\frac{x^5}{e}) + \ln 2 = \ln 2x + 5$

❐ نوجد مجموعة تعريف المعادلة اللوغارتمية : $2x>0$ و $\frac{x^5}{e}>0$ و $x^2>0$.

أي $x>0$ و $x^5>0$ و $x \neq 0$ وهذا محقّق عندما $x \in]0,+\infty[= D_1$

❐ نطبّق خواص اللوغاريتم :

ولكن هنا سأطبّق الخواص بالعكس لأننا نلاحظ نستطيع أن نصل إلى $\ln x = m$ بشكل أسهل من الوصول إلى $\ln\square = \ln\square$.

$$2\ln x - (\ln x^5 - \ln e) + \ln 2 = \ln 2 + \ln x + 5$$

ومنه $2\ln x - 5\ln x + 1 = \ln x + 5$

$-4\ln x = 4$ وبالتالي $\ln x = -1$ أي $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. فالخيار الصحيح هو A .

---

25) لتكن المعادلة (E) الآتية : $\ln(x-1)-\ln(2-x)=\ln 2+\ln x$

A	المعادلة (E) تكافئ $\frac{x-1}{2-x}=2x$	B	لا تقبل أية حلول	C	تقبل حلاً وحيداً	D	تقبل حلين

التبرير:

لندقّق في الخيار A : نلاحظ أنّ المعادلة (E) تكافئ :

$\frac{x-1}{2-x}=2x$ و $x-1>0$ و $2-x>0$

أي تكافئ $\frac{x-1}{2-x}=2x$ و $x\in]1,2[$ فالخيار A خاطئ .

أمّا باقي الخيارات تحتاج إلى حل المعادلة :

- نوجد مجموعة تعريف المعادلة اللوغارتمية : $x-1>0$ و $2-x>0$

أي $x>1$ و $x<2$ وبالتالي $D_1=]1,2[=]-\infty,2[\cap]1,+\infty[$ $x\in$.

- نطبّق خواص اللوغاريتم :

$$\ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)=\ln 2x$$

ومنه $\frac{x-1}{2-x}=2x$

وبالتالي $x-1=2x\times(2-x)$

$$x-1=4x-2x^2$$

$$x-1=4x-2x^2$$

$$2x^2-3x-1=0$$

$$\Delta=(-3)^2-4(2)(-1)$$
$$=9+8=17$$

إمّا $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-\sqrt{17}}{4}<0$ مرفوض

أو $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+\sqrt{17}}{4}\in]1,2[$ مقبول

فللمعادلة المفروضة حل وحيد . والخيار الصحيح هو C .

26) إذا علمتَ أنّ حلول المتراجحة : $2x^3+5x^2+x-2\le 0$ هي $x\in]-\infty,-2]\cup[-1,\frac{1}{2}]$

فإنّ حلول المتراجحة : $2\ln x+\ln(2x+5)\le\ln(2-x)$ هي :

A	$]-\infty,-2]\cup[-1,\frac{1}{2}]$	B	$]0,+\infty[$	C	$]0,2]$	D	$]0,\frac{1}{2}]$

التبرير : $2\ln x+\ln(2x+5)\le\ln(2-x)$

❒ نوجد مجموعة تعريف المتراجحة اللوغارتمية :

$2-x>0$ و $2x+5>0$ و $x>0$.

أي $x<2$ و $x>\frac{-5}{2}$ و $x>0$.

وبالتالي : $x\in]0,+\infty[\cap]\frac{-5}{2},+\infty[\cap]-\infty,2[=]0,2[=D_1$

❒ نطبّق خواص اللوغاريتم :

$\ln(x^2\times(2x+5))\le\ln(2-x)$

$\ln(2x^3+5x^2)\le\ln(2-x)$

و بالتالي : $2x^3+5x^2\le 2-x$

ومنه $2x^3+5x^2+x-2\le 0$

وحلول هذه المتراجحة فرضاً هو $x\in]-\infty,-2]\cup[-1,\frac{1}{2}]=D_2$.

❒ فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي $x\in D_1\cap D_2=(]0,2[)\cap(]-\infty,-2]\cup[-1,\frac{1}{2}])=]0,\frac{1}{2}]=S$

فالخيار الصحيح هو D .

---

27) إنّ مجموعة حلول المعادلة : $\ln x^2-\ln x-2=0$ هي :

A	$\{e^2,\frac{1}{e}\}$	B	$\{\frac{1}{e}\}$	C	$\{e^2\}$	D	$\{e\}$

التبرير : $\ln x^2-\ln x-2=0$

❒ المعادلة معرّفة عندما $x>0$ و $x^2>0$

أي $x>0$ و $x\neq 0$

ومنه $x\in]0,+\infty[=D_1$.

انتبه : هذه ليست معادلة من الدرجة الثانية بالمجهول $\ln x$ لأنّ $\ln x^2\neq(\ln x)^2$

❒ $2\ln|x|-\ln x-2=0$

وبما أنّ $x>0$ فإنّ $|x|=x$ و بالتالي

$2\ln x-\ln x-2=0$

ومنه $\ln x=2$ وبالتالي $x=e^2\in D_1$ مقبول . فالخيار الصحيح هو C .

---

28) إنّ مجموعة حلول المتراجحة : $\ln^2 x - \ln 6 \ln x + \ln 2 \cdot \ln 3 \le 0$ هي :

A	$[2,3]$	B	$[e^2, e^3]$	C	$]0,e^2] \cup [e^3,+\infty[$	D	$\varnothing$

التبرير: $\ln^2 x - \ln 6 \ln x + \ln 2 \cdot \ln 3 \le 0$

المتراجحة معرّفة عندما $x > 0$

هذه متراجحة من الدرجة الثانية بالمجهول $\ln x$. نعدمها ثمّ ندرس إشارتها (لنضع $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$)

$$\ln^2 x - (\ln 2 + \ln 3)\ln x + \ln 2 \cdot \ln 3 = 0$$

$$(\ln x - \ln 3)(\ln x - \ln 2) = 0$$

إمّا $\ln x = \ln 3$ ومنه $x = 3$

أو $\ln x = \ln 2$ ومنه $x = 2$

x	0 2 3 $+\infty$
$(\ln x)^2 - \ln 6(\ln x) + \ln 2 \cdot \ln 3 = 0$	$+$ 0 $-$ 0 $+$
المتراجحة	غ م غ

م   م

ومنه $S = [2,3] \ni x$. فالخيار الصحيح هو A .

29) المتراجحة : $\ln(x^2 - 2) \le \ln(x)$ تكافئ

A	$x^2 - 2 \le x$	B	$x^2 - 2 \le x$ و $x^2 - 2 > 0$	C	$x^2 - 2 \le x$ و $x > 0$	D	$x^2 - 2 < x$ و $x^2 - 2 > 0$

التبرير:

نلاحظ أنّ $\ln(x^2 - 2) \le \ln(x)$ تكافئ

$x^2 - 2 \le x$ و $x^2 - 2 > 0$

(لأنّه عندما يكون $x^2 - 2 > 0$ والمقدار x أكبر أو يساويه فحتماً سيكون $x > 0$ وهذا الشرط الذي لم يذكر محقّق ضمناً)

فالخيار الصحيح هو الخيار B .

30) إنّ مجموعة حلول المعادلة : $\ln x - 2\sqrt{\ln x} - 3 = 0$ هي

A	$\{e\}$	B	$\{e, e^9\}$	C	$\{e^9\}$	D	$\varnothing$

التبرير: $\ln x - 2\sqrt{\ln x} - 3 = 0$

المعادلة معرّفة عندما $\ln x \ge 0$ و $x > 0$

أي $x \ge 1$ و $x > 0$ ومنه $x \in [1,+\infty[$

هذه معادلة من الدرجة الثانية بالمجهول $\sqrt{\ln x}$.

$$(\sqrt{\ln x} - 3)(\sqrt{\ln x} + 1) = 0$$

إمّا $\sqrt{\ln x} - 3 = 0$ ومنه $\sqrt{\ln x} = 3$ وبالتالي $\ln x = 9$ ومنه $x = e^9$ مقبول

أو $\sqrt{\ln x} + 1 = 0$ أي $\sqrt{\ln x} = -1$ مستحيلة الحل . فالخيار الصحيح هو C .

....انتهت الأسئلة...

ص 3 (درجة العمل):

رقم 12 بفرض n عدد طبيعي $n \geq 1$ ، نعلم أن:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+n} - \sqrt{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \cdots + \sqrt{x+n} - n\sqrt{x}\right) = ?$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \cdots + \sqrt{x+n} - n\sqrt{x}$$

$$n \cdot \sqrt{x+1} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \cdots + \sqrt{x+n} \leq n \cdot \sqrt{x+n}$$

$$n\sqrt{x+1} - n\sqrt{x} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \cdots + \sqrt{x+n} - n\sqrt{x} \leq n\sqrt{x+n} - n\sqrt{x}$$

$$n\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \leq f(x) \leq n\left(\sqrt{x+n} - \sqrt{x}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$0$$

لأن:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[n\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\right] = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[n\left(\sqrt{x+n} - \sqrt{x}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

وذلك حسب مبرهنة الإحاطة أو الحصر.

الإجابة الصحيحة (1)

رقم (13

$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

$]0,+\infty[$

نضرب ونقسم بالمرافق :

$$f(x)=\frac{\cancel{x}+\sqrt{x}-\cancel{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$

$$2\cdot\sqrt{x}\le\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\le 2\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\geq\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\geq\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

نضرب بـ : $\sqrt{x}>0$

$$\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{2\cancel{\sqrt{x}}}\geq f(x)\geq\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\le f(x)\le\frac{1}{2}}$$

الإجابة الصحيحة (A) (*)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)=?\ \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{2\cancel{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

من (*) نجد أن :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

رقم (12) (هام جداً)

f دالة سالبة تماماً على $\mathbb{R}$: $\left(f(x) < 0 \text{ أي كان } x\in\mathbb{R}\right)$

f يحقق المتراجحة :

$$|f(x)-2| \geq 2\sqrt{x^2+1} - x$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)) = ?$$

$$g(x)=2\sqrt{x^2+1}-x \qquad |f(x)-2|$$

$\lim_{x\to+\infty}(g(x)) = ?\ +\infty-\infty$

$$g(x)=2\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x$$

$$g(x)=2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x$$

$$g(x)=\underset{+\infty}{x}\cdot\left[2\sqrt{1+\underset{\to 0}{\left(\frac{1}{x^2}\right)}}-1\right],\quad \lim_{x\to+\infty}(g(x))=+\infty$$

6

+1

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)-2|=+\infty$$

$$\left|\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2)\right|=+\infty$$

$$\left|\lim_{x\to+\infty}(f(x))-2\right|=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x))-2=-\infty \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x))-2=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x))=-\infty \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x))=+\infty$$

الإجابة

D

$\boxed{\text{نقبل}}$

نرفض

ملاحظة :

$$a \le f(x) \le b$$
$$c \le g(x) \le d$$
$$a, b, c, d > 0$$

$$\frac{a}{d} \le \frac{f(x)}{g(x)} \le \frac{b}{c}$$

رقم 15

$$f(x) = \frac{x + \sin x}{3x - \cos x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = ?$$

$$-1 \le \cos x \le 1$$
$$1 \ge -\cos x \ge -1$$
$$-1 \le -\cos x \le 1$$
$$3x-1 \le 3x - \cos x \le 3x+1$$

$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$x-1 \le x + \sin x \le x+1$$

$$\left(\frac{x-1}{3x+1}\right) \le \frac{x + \sin x}{3x - \cos x} \le \left(\frac{x+1}{3x-1}\right)$$

$$\left(\frac{x-1}{3x+1}\right) \le f(x) \le \left(\frac{x+1}{3x-1}\right)$$

B الإثبات أسهل

ملاحظة:

1) مجالها ل $]-\infty,0]$:

$a \leq b \Rightarrow a^2 \geq b^2$

2) مجالها ل $[0,+\infty[$:

$a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$

مسألة $\boxed{11}$ دراسة العمل ص 2

$$f(x)=\frac{x^2+1}{(x+\cos x)^2}\ ,\ \lim_{x\to-\infty}(f(x))=?$$

$$-1\le\cos x\le 1$$

$$\underbrace{x-1}_{<0}\le\underbrace{x+\cos x}_{<0}\le\underbrace{x+1}_{<0}$$

في جوار $-\infty$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

$$(x-1)^2\ge(x+\cos x)^2\ge(x+1)^2$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}\le\frac{1}{(x+\cos x)^2}\le\frac{1}{(x+1)^2}$$

نضرب بـ $x^2+1>0$:

$$\boxed{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}\le f(x)\le\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}$$

الإجابة الصحيحة B

$$\to 1 \leftarrow$$

وحسب مبرهنة الإحاطة الأولى :

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x))=\boxed{1}$$

سؤال 10

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (0) = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} (g(x)) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (f(x)) = 0$$

الإجابة الصحيحة D

سؤال 9

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نقسم على x حيث تكون $x > 0$:

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

الإجابة الصحيحة C

سؤال 8

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5} - \sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2 - 25}}$$

$$D_f =]5, +\infty[$$

$$\lim_{x \to 5^+} (f(x)) = ? \quad \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \underbrace{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2-25}}}_{g(x)} - \underbrace{\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2-25}}}_{h(x)}$$

$$g(x) = \frac{\cancel{(x-5)} \cdot \sqrt{x^2-25}}{(\sqrt{x}+\sqrt{5}) \cdot \underbrace{\cancel{(x^2-25)}}_{(x+5)}}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2-25}}{(\sqrt{x}+\sqrt{5}) \cdot (x+5)}$$

$$\lim_{x \to 5^+} (g(x)) = \frac{0}{2\sqrt{5} \cdot (10)} = 0$$

$$h(x) = -\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x^2-25}}$$

$$h(x) = -\sqrt{\frac{\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x+5)}}$$

$$h(x) = -\sqrt{\frac{1}{x+5}}$$

$$\lim_{x \to 5^+} (h(x)) = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 5^+} (f(x)) = -\frac{1}{\sqrt{10}}}$$

طلب إثبات :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\boxed{\sqrt{x}-\sqrt{x-5}} - \sqrt{5}}{\sqrt{x^2-25}} \right]$$

0

$$\frac{-\sqrt{5}}{\infty} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b} \right) = 0}$$

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسألة 5

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x} + 2} , \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x)) = ?$$

$$\frac{\infty - \infty}{\infty}$$

$$f(x) = \frac{[\sqrt{x^2+1} - x][\sqrt{x^2+1} + x]}{[\sqrt{x} + 2][\sqrt{x^2+1} + x]}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x^2+1} + x)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\underbrace{(\sqrt{x} + 2)}_{+\infty}\underbrace{(\sqrt{x^2+1} + x)}_{+\infty}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = 0$$

$$\left[\sqrt{(\boxed{\;})^2 + \underset{\text{عدد}}{\alpha}} \mp \boxed{\;} \to 0 \right]$$

مرتين

حل رقم 6

$$f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$\lim_{x\to -2}(f(x))=?\quad \frac{0}{0}$$

$$f(x)=\frac{(x+2)\cdot\sqrt{x^2-4}}{(x^2-4)}$$

$$=\frac{\cancel{(x+2)}\cdot\sqrt{x^2-4}}{\cancel{(x+2)}\cdot(x-2)}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to -2}(f(x))=\boxed{0}\quad / \frac{0}{-4}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{\underset{(x-2)}{x+2}}\qquad \boxed{5}$$

$$I=]-2,2[$$

$$f(x)=\frac{1+x-2}{x^2-4}$$

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

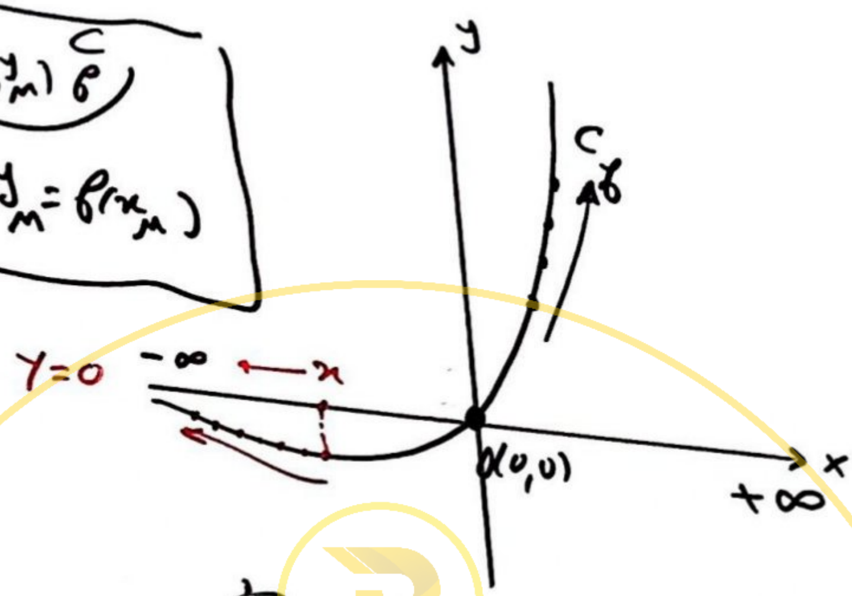
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \qquad \frac{-3}{-0}$$

الإجابة الصحيحة (B)

4

$M(x_M, y_M)$ C_f

$M \in C_f : y_M = f(x_M)$



$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, $X(x) = \frac{1}{x}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$
- $\lim\limits_{X\to 0} (f(X)) = f(0) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$

الإجابة (A) غير صحيحة

$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, $X(x) = \frac{1}{x}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$
- $\lim\limits_{X\to 0} (f(X)) = f(0) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$$\begin{cases} K(x) = f(x^2) \ , \ X(x) = x^2 \\ \bullet \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2) = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{x \to +\infty} (f(X)) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x^2)) = +\infty$$

١ ≤ ٤ ب ∈ فرضية

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x))^2 = \left(\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x))\right)^2 = (0)^2 = 0 \end{cases}$$

خيد رياضي:

$$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(f(x))) = ?$$

$$g(x) = f(f(x)) \ , \ g(x) = f(X(x))$$

$$X(x) = f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x \to -\infty} (X(x)) = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x)) = 0 \\ \bullet \lim\limits_{X \to 0} (f(X)) = f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(f(x))) = 0$$

التمرين الثالث :

$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} (g(x)) = -2$

① $\lim_{x \to +\infty} f(g(x)) = \lim_{X \to -2} f(X) = -2$? الإجابة A غير صحيحة

② $\lim_{x \to +\infty} f(g(x)) = \lim_{X \to -2} (f(X)) =$ ~~نيصف~~ ? الإجابة B غير صحيحة

الإجابة C صحيحة

③ $\lim_{x \to +\infty} g(f(x)) = \lim_{X \to +\infty} (g(X)) = -2$ الإجابة غير صحيحة

④ $\lim_{x \to +\infty} g(f(x)) = \lim_{X \to +\infty} (g(X)) = +\infty$

التمرين الثاني : (٢٥)

$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (g(x)) = 0$, $g(x) < 0$

• $\lim_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = 0$ ✗

• $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = -\infty$ $\Big/ \frac{+\infty}{-0}$ (الإجابة صحيحة)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = 0$ / $\frac{0}{+\infty}$ غير صحيح

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = 0$ / $\frac{0}{+\infty}$ ✗ عدم تعيين

الإجابة الصحيحة $\boxed{B}$

السؤال الأول:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x)) = -\infty$

الإجابة A دوائية B خاطئة:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(g(x))) = \lim\limits_{X \to -\infty} (f(X)) \overset{?}{=} -\infty$

الإجابة C غير صحيحة:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2 \cdot f(x) - 3 \cdot g(x)) = +\infty$ / $+\infty + \infty$

الإجابة الصحيحة D

$\ln^2 x - \ln(6).\ln(x) + \ln(2).\ln(3) \leq 0$

$(\ln(x))^2 - \ln(6).(\ln(x)) + \ln(2).\ln(3) \leq 0$

$x > 0$

$D =]0, +\infty[$

نفرض : $t = \ln(x)$

$t^2 - \ln(6).t + \ln(2).\ln(3) \leq 0$

3	$+\infty$
-0	+
$+0$	

$+t^2 - \underbrace{\ln(6)}_{}.t + \underbrace{\ln(2).\ln(3)}_{} = 0$

الجمع ، الجداء

$(t - \ln(2)).(t - \ln(3)) = 0$

$\boxed{-\ln(2) , -\ln(3)}$

$-\ln(2) - \ln(3) = -(\ln(2) + \ln(3))$

$= -\ln(6)$

$(-\ln(2)).(-\ln(3)) = +\ln(2).\ln(3)$

$t = \ln(2)$

$\ln(x) = \ln(2)$

$\boxed{x = 2}$

$t = \ln(3)$

$\ln(x) = \ln(3)$

$\boxed{x = 3}$

x		2		3	
$(\ln(x))^2 - \ln(6)\cdot\ln(x) + \ln(2)\cdot\ln(3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

≤ 0

مجموعة حلول المتراجحة :

$\boxed{[2,3]}$

$\ln^2 x$

$(\ln(x$