ملاحظات الدرس:

- **التوابع الزمنية:**

1- تابع المطال:

الشكل العام للتابع الزمني للمطال:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

حيث أن:

$\bar{x}$ **المطال (موضع الجسم):** القياس الجبري لبعد مركز عطالة الجسم الصلب عن مركز الاهتزاز في اللحظة t ويقدر بالمتر m.

X_{max} **سعة الحركة:** أقصى إزاحة للجسم عن مركز الاهتزاز بشرط عدم تجاوز حد مرونة النابض وهي مقدار موجب دوماً وثابت وتقدر بالمتر m.

ω_0: النبض الخاص للحركة ويقدر $rad.s^{-1}$.

$\bar{\varphi}$: الطور الابتدائي في اللحظة $t = 0$ ويقدر بالراديان rad.

ملاحظات:

- **يكون المطال الأعظمي (طويلة):** في الموضعين الطرفيين أي $\bar{x} = |\pm X_{max}|$
- **يكون المطال معدوم:** في مركز الاهتزاز أي $x = 0$

ثوابت الحركة:

X_{max} , ω_0 , $\bar{\varphi}$

إيجاد قيمة ثوابت الحركة:

1. حساب X_{max}:

حالات حساب X_{max}:

A-تعطى مباشرة في نص المسألة.

مثال: تهتز كرة معدنية معلقة بنابض مرن بحركة توافقية بسيطة بسعة اهتزاز $0.1m$.

$$\Rightarrow X_{max} = 0.1m$$

B-اذا علمت المسافة المقطوعة للجسم المتحرك:

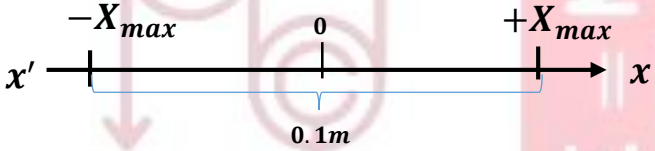
مثال: يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة بحيث ينطلق في مبدأ الزمن من نقطة مطالها $+X_{max}$ ليصل إلى المطال المناظر $-X_{max}$ قاطعاً مسافة $0.1m$.

$$\Rightarrow 2X_{max} = 10^{-1}$$

$$\Rightarrow X_{max} = \frac{1}{2} \times 10^{-1}$$

$$\Rightarrow X_{max} = 0.5 \times 10^{-1}$$

$$\Rightarrow X_{max} = 5 \times 10^{-2} m$$



C-إذا علم طول القطعة المستقيمة:

مثال: يتحرك جسم حركة جيبية توافقية بسيطة ويرسم في أثناء حركته قطعة مستقيمة طولها $0.16m$.

$$\Rightarrow X_{max} = \frac{\text{طول القطعة المستقيمة}}{2}$$

$$\Rightarrow X_{max} = \frac{16 \times 10^{-2}}{2}$$

$$\Rightarrow X_{max} = 8 \times 10^{-2} m$$

D- في نص المسألة عبارة:

نزيح الجسم عن وضع توازنه شاقولياً نحو الأسفل وضمن حدود مرونة النابض مسافة قدرها $0.05m$ ونتركة دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$.

$$\bar{x} = X_{max} , t = 0 , v = 0$$

$$X_{max} = 0.05m$$

E-من علاقة السرعة العظمى (طويلة):

$$v_{max} = \omega_0 X_{max} \Rightarrow X_{max} = \frac{v_{max}}{\omega_0}$$

F-من علاقة التسارع الأعظمي (طويلة):

$$a_{max} = \omega_0^2 X_{max} \Rightarrow X_{max} = \frac{a_{max}}{\omega_0^2}$$

G-من علاقة الطاقة الكلية:

$$E_{tot} = \frac{1}{2} k X_{max}^2 \Rightarrow X_{max} = \sqrt{\frac{2E_{tot}}{k}}$$

2- حساب ω_0:

من العلاقات الآتية وحسب معطيات المسألة:

a. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

T_0 الدور الخاص للحركة ووحدته الثانية s.

b. $\omega_0 = 2\pi f_0$

f_0 التواتر الخاص للحركة ووحدته الهرتز Hz.

c. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

k ثابت صلابة النابض ووحدته $N.m^{-1}$.

m كتلة الجسم ووحدتها kg

حساب $\overline{\varphi}$:

نحدد قيمة $\overline{\varphi}$ من شروط البدء:

نعوض بشروط البدء كما ترد بنص المسألة في التابع الزمني للمطال.

مثال1: الجسم في بدء الزمن موجود في مطاله الأعظمي الموجب.

$$t = 0 , \overline{x} = +X_{max} , v = 0$$

نعوض شروط البدء في تابع المطال:

$$\overline{x} = +X_{max} cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$

$$+X_{max} = X_{max} cos(\omega_0 \times 0 + \overline{\varphi})$$

$$+1 = cos\overline{\varphi}$$

$$\Rightarrow \overline{\varphi} = 0\ rad$$

مثال2: الجسم في بدء الزمن موجود في مطاله الأعظمي السالب.

$$t = 0 , \overline{x} = -X_{max} , v = 0$$

نعوض شروط البدء في تابع المطال:

$$\overline{x} = X_{max} cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$

$$-X_{max} = X_{max} cos(\omega_0 \times 0 + \overline{\varphi})$$

$$-1 = cos\overline{\varphi}$$

$$\Rightarrow \overline{\varphi} = \pi\ rad$$

مثال3: الجسم في بدء الزمن يمر في نقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ وهو يتحرك بالاتجاه الموجب:

$$t = 0 , \overline{x} = \frac{X_{max}}{2} , v > 0$$

نعوض شروط البدء في تابع المطال:

$$\overline{x} = X_{max} cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max} cos(\omega_0 \times 0 + \overline{\varphi})$$

$$\frac{1}{2} = cos(\overline{\varphi})$$

اما $\Rightarrow \overline{\varphi} = \frac{\pi}{3}\ rad$

او $\Rightarrow \overline{\varphi} = \frac{5\pi}{3}\ rad$

نختار قيمة لِ $\overline{\varphi}$ تجعل السرعة موجبة وذلك بالتعويض في تابع السرعة.

$$\overline{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \overline{\varphi})$$

من أجل $t = 0 , \overline{\varphi} = \frac{\pi}{3}$:

$$\overline{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\frac{\pi}{3})$$

ولكن

$$v < 0 \Leftarrow \sin\frac{\pi}{3} > 0$$

مرفوض يخالف شروط البدء. (تجعل السرعة سالبة).

من أجل $t=0\ ,\bar{\varphi}=\frac{5\pi}{3}$:

$$\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin(\frac{5\pi}{3})$$

ولكن

$$\bar{v}>0 \Leftarrow \sin\frac{5\pi}{3}<0$$

مقبول يوافق شروط البدء (تجعل السرعة موجبة)

$$\Rightarrow \bar{\varphi}=\frac{5\pi}{3}\ rad$$

مثال4: الجسم في بدء الزمن موجود في المطال $\frac{X_{max}}{2}$ وهو يتحرك بالاتجاه السالب.

$$t=0\ ,\bar{x}=\frac{X_{max}}{2}\ ,v<0$$

نعوض شروط البدء في تابع المطال:

$$\bar{x}=X_{max}cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

$$\frac{X_{max}}{2}=X_{max}cos(\omega_0(0)+\bar{\varphi})$$

$$\frac{1}{2}=cos\bar{\varphi}$$

اما $\Rightarrow \bar{\varphi}=\frac{\pi}{3}\ rad$

او $\Rightarrow \bar{\varphi}=\frac{5\pi}{3}\ rad$

نختار قيمة لِ $\bar{\varphi}$ تجعل السرعة سالبة وذلك بالتعويض في تابع السرعة

$$\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

من أجل $t=0\ ,\bar{\varphi}=\frac{\pi}{3}$:

$$\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin(\frac{\pi}{3})$$

ولكن

$$\bar{v}<0 \Leftarrow \sin\frac{\pi}{3}>0$$

مقبول يوافق شروط البدء (تجعل السرعة سالبة)

$$\Rightarrow \bar{\varphi}=\frac{\pi}{3}\ rad$$

من أجل $t=0\ ,\bar{\varphi}=\frac{5\pi}{3}$:

$$\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin(\frac{5\pi}{3})$$

ولكن

$$\bar{v}>0 \Leftarrow \sin\frac{5\pi}{3}<0$$

مرفوض يخالف شروط البدء. (تجعل السرعة موجبة).

مثال5: الجسم في بدء الزمن يمر بمركز الاهتزاز وهو يتحرك بالاتجاه السالب.

$$t=0\ ,\bar{x}=0\ ,v<0$$

نعوض شروط البدء في تابع المطال:

$$\bar{x}=X_{max}cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

$$0=X_{max}cos(\omega_0(0)+\bar{\varphi})$$

مستحيل $0\neq X_{max}$

$$0=cos\bar{\varphi}$$

اما $\Rightarrow \bar{\varphi}=\frac{\pi}{2}\ rad$

او $\Rightarrow \bar{\varphi}=\frac{3\pi}{2}\ rad$

نختار قيمة لِ $\bar{\varphi}$ تجعل السرعة موجبة وذلك بالتعويض في تابع السرعة

$$\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

من أجل $t=0\ ,\bar{\varphi}=\frac{\pi}{2}$:

$$\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin(\frac{\pi}{2})$$

ولكن

$$\bar{v}<0 \Leftarrow \sin\frac{\pi}{2}>0$$

مقبول يوافق شروط البدء (تجعل السرعة سالبة).

$$\Rightarrow \bar{\varphi}=\frac{\pi}{2}\ rad$$

من أجل $t=0\ ,\bar{\varphi}=\frac{3\pi}{2}$:

$$\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin(\frac{3\pi}{2})$$

ولكن

$$\bar{v}>0 \Leftarrow \sin\frac{3\pi}{2}<0$$

مرفوض يخالف شروط البدء (تجعل السرعة موجبة).

مثال6: الجسم في بدء الزمن يمر من مركز الاهتزاز وهو يتحرك بالاتجاه الموجب.

$$t=0\ ,\bar{x}=0\ ,v>0$$

نعوض شروط البدء في تابع المطال:

$$\bar{x}=X_{max}cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

$$0=X_{max}cos(\omega_0\times 0+\bar{\varphi})$$

مستحيل $X_{max}\neq 0$

$$0=cos\bar{\varphi}$$

اما $\Rightarrow \bar{\varphi}=\frac{\pi}{2}\ rad$

او $\Rightarrow \bar{\varphi}=\frac{3\pi}{2}\ rad$

نختار قيمة لِ $\bar{\varphi}$ تجعل السرعة موجبة وذلك بالتعويض في تابع السرعة

$$\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

من أجل $t=0\ ,\bar{\varphi}=\frac{\pi}{2}$:

$$\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin(\frac{\pi}{2})$$

ولكن

$$\bar{v}<0 \Leftarrow \sin\frac{\pi}{2}>0$$

مرفوض يخالف شروط البدء (تجعل السرعة سالبة)

من أجل $t=0\ ,\bar{\varphi}=\frac{3\pi}{2}$:

$$\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin(\frac{3\pi}{2})$$

ولكن

$$\bar{v}>0 \Leftarrow \sin\frac{3\pi}{2}<0$$

مقبول يوافق شروط البدء (تجعل السرعة موجبة).

2- تابع السرعة:

$$\bar{v}=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

ملاحظات:

- تكون السرعة عظمى (طويلة): لحظة المرور في مركز الاهتزاز

  أي $v_{max}=|\pm\omega_0 X_{max}|$

- تكون السرعة معدومة: لحظة الوجود في المطاليين الأعظميين (الموضعين الطرفيين).

  أي $v=0$.

- العلاقة الذهبية:

  يمكن استخدامها مباشرة لحساب السرعة

$$v=\omega_0\sqrt{X_{max}^2-x^2}$$

- جهة $(\vec{v})$ تحددها جهة الحركة.

3-تابع التسارع:

$$\bar{a}=-\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t+\bar{\varphi})$$

علاقة التسارع بالمطال:

$$\bar{a}=-\omega_0^2\bar{x}$$

ملاحظات:

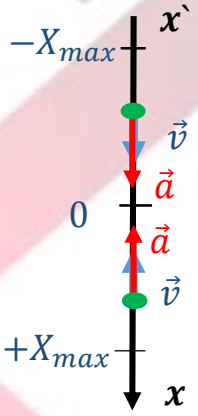
- يكون التسارع أعظمي (طويلة): لحظة الوجود في المطاليين الأعظميين (الموضعين الطرفيين)

  أي $a_{max}=|\pm\omega_0^2 X_{max}|$

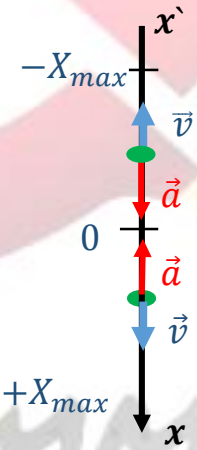
- يكون التسارع معدوم: عند المرور في مركز الاهتزاز.

أي $a = 0$

- التسارع غير ثابت تتغير قيمته بتغير قيمة المطال.
- تكون الحركة متسارعة عند الانتقال من الموضعيين الطرفيين $(\pm X_{max})$ نحو مركز الاهتزاز (O) لأن $(\vec{a}, \vec{v})$ لهما نفس الجهة.



- تكون الحركة متباطئة عند الانتقال من مركز الاهتزاز (O) إلى الموضعين الطرفيين $(\pm X_{max})$ لأن $(\vec{a}, \vec{v})$ لهما جهتان متعاكستان.



- حساب زمن المرور بموضع التوازن:

الطريقة العامة:

تستخدم من أجل أي نقطة على القطعة المستقيمة.

عندما يمر الجسم بموضع التوازن ينعدم المطال أي $\bar{x} = 0$

$$\Rightarrow \bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$0 = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$X_{max} \neq 0$ مستحيل

$$\Rightarrow \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 t + \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$k = 0,1,2,3, \ldots$

زمن المرور الأول بموضع التوازن :

$k = 0$

$$\Rightarrow \omega_0 t_1 + \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow t_1 = \cdots$$

زمن المرور الثاني بموضع التوازن :

$k = 1$

$$\Rightarrow \omega_0 t_2 + \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} + \pi$$

$$\Rightarrow t_2 = \cdots$$

زمن المرور الثالث بموضع التوازن:

$k = 2$

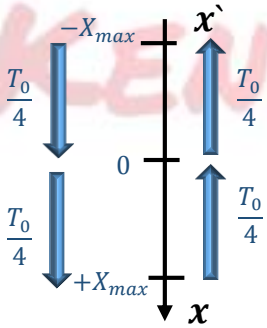
$$\Rightarrow \omega_0 t_3 + \bar{\varphi} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

$$\Rightarrow t_3 = \cdots$$

وهكذا..... ☺

الطريقة الخاصة:

تستخدم عندما يكون الجسم في بدء الزمن موجود في أحد الموضعيين الطرفيين.



زمن المرور الأول بموضع التوازن: $t_1 = \frac{T_0}{4}$

زمن المرور الثاني بموضع التوازن:

$$t_2 = t_1 + \frac{T_0}{2}$$

$$t_2 = \frac{T_0}{4} + \frac{T_0}{2}$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{3T_0}{4}$$

زمن المرور الثالث بموضع التوازن:

$$t_3 = t_2 + \frac{T_0}{2}$$

$$t_2 = \frac{3T_0}{4} + \frac{T_0}{2}$$

$$\Rightarrow t_3 = \frac{5T_0}{4}$$

وهكذا..... ☺

- **حساب الاستطالة السكونية:**
- **حالة السكون:**

القوة الخارجية المؤثرة:

a)مركز عطالة الجسم:

$\vec{W}$: قوة ثقل الجسم شاقولية نحو الأسفل.

$\vec{F_{s_0}}$: قوة توتر النابض شاقولية نحو الأعلى.

بالاسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$W - F_{s_0} = 0$$

$$\Rightarrow W = F_{s_0}$$

b)النابض: $\vec{F'_{s_0}}$ تؤثر في النابض وتسبب له استطالة سكونية x_0

$$F'_{s_0} = kx_0$$

ولكن $F_{s_0} = F'_{s_0} = kx_0$

$$\Rightarrow W = kx_0$$

$$\Rightarrow m.g = kx_0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{k}{m.g}$$

$W = mg$

ملاحظة:

إذا كان k, m **مجهولين في نص المسألة:**

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

من $(*)$

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{x_0}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{x_0}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{g}{\omega_0^2}$$

حيث أن وحدة x_0 **هي المتر** (m).

- **حساب قوة الارجاع:**

$$\bar{F} = -k\bar{x}$$

ملاحظة:

عندما يطلب حساب شدة قوة الارجاع لانضع إشارة(-)، أي

$$F = |-kx| \Rightarrow F = kx$$

- **حساب ثابت صلابة النابض:**

(a

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega_0^2.m$$

(b

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

نربع الطرفين:

$$T_0^2 = 4\pi^2\frac{m}{k} \Rightarrow T_0^2 = \frac{40m}{k}$$

$$\Rightarrow k = \frac{40m}{T_0^2}$$

ملاحظة: تتعلق قيمة ثابت صلابة النابض k بالعوامل الآتية:

a. نوع المادة التي صنع منها.
b. طوله.
c. عدد حلقاته.
d. نصف قطر الحلقة.

- حساب الدور الخاص:

حالات حساب T_0:

a-يذكر صراحة في نص المسألة:

مثال: يهتز الجسم المعلق بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة بدور خاص $5s$

$$\Rightarrow T_0 = 5s$$

b-عندما يعطى زمن الانتقال من أحد الموضعيين الطرفيين إلى الموضع الطرفي الثاني (t) يكون الدور $T_0 = 2t$

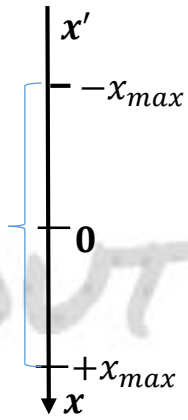
مثال: ينطلق الجسم من $+X_{max}$ إلى المطال المناظر $-X_{max}$ فيستغرق $20s$

$$T_0 = 2t = 2 \times 20$$

$$\Rightarrow T_0 = 40s$$

الزمن t من $+X_{max}$ إلى $-X_{max}$ هو نصف دور $\frac{T_0}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{T_0}{2} = t$$



c-تجريبياً:

$$T_0 = \frac{t}{N}$$

حيث t : زمن الهزات.

N : عدد الهزات.

مثال: ينجز الجسم 10هزات في $2s$

$$T_0 = \frac{t}{N} = \frac{2}{10} = 0.2s$$

d)من العلاقة:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

e)من العلاقة:

$$T_0 = \frac{1}{f_0}$$

f)من العلاقة:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- حساب الطاقة:

1-الطاقة الكلية (الميكانيكية):

(a $E_{tot} = E_k + E_p$

(b $E_{tot} = \frac{1}{2}kX_{max}^2$

2-الطاقة الحركية:

(a $E_k = E_{tot} - E_p$

(b $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

(c $E_k = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}^2 sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$k = m\omega_0^2$

3-الطاقة الكامنة المرونية:

(a $E_p = E_{tot} - E_k$

(b $E_k = \frac{1}{2}kx^2$

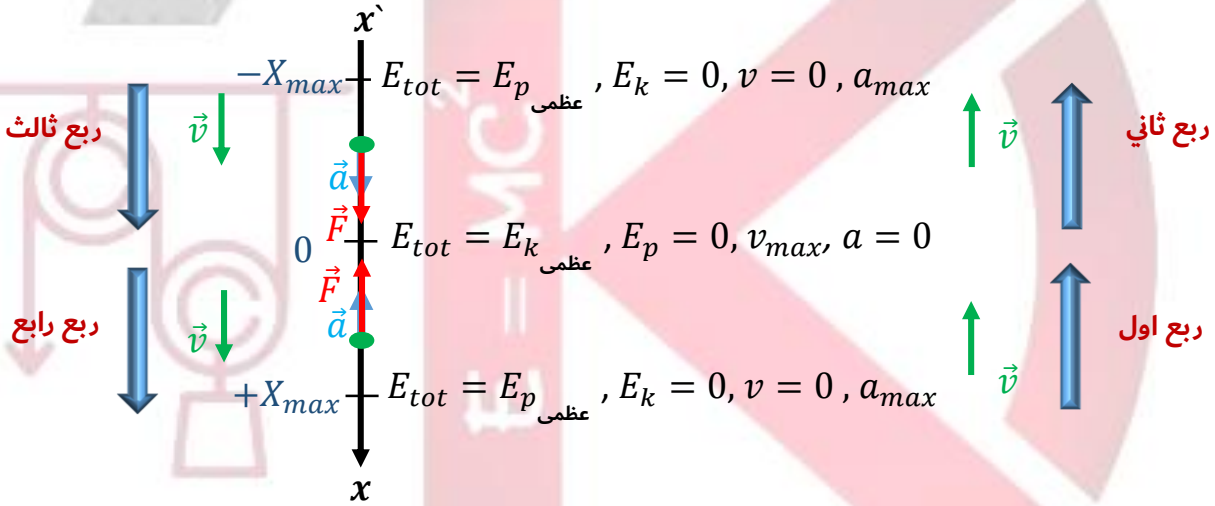
(c $E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

KENANA SHAMOUT

ملاحظات هامة:

a-في النواس المرن تكون الاهتزازات حرة أي لدينا الدور الخاص T_0 , النبض الخاص ω_0 , التواتر الخاص f_0 .

-b



-c

a. $cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \pi k$

b. $sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi k$

حيث :

$k = 0,1,2,3,4 \ldots \ldots \ldots$

d- التابع الزمني للسرعة:

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

اتجاه سالب.

$\bar{v} < 0 \Leftarrow sin\theta > 0$ **بالربع(1)و(2)**

اتجاه موجب.

$\bar{v} > 0 \Leftarrow sin\theta < 0$ **بالربع(3)و(4)**

KENANA SHAMOUT