رياضيات-الصف التاسع-نظامي+أحرار
شروحات كتاب الجبر

الوحدة الرابعة

الدرس الثالث

حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً

-المحتويات.
- تمهيد.
-حل جملة معادلتين خطيتين بيانيا.
- أمثلة داعمة وحل بعض الدورات.

الدرس الأهم في هذهِ الوحدة

جبر - الوحدة الرابعة - جملة المعادلات

3 - حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً.

سؤال 100 درجة

المحتويات:

- تمهيد
- حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً.
- أمثلة داعمة وحل بعض الدورات.

* تمهيد.

تعلمنا سابقاً إيجاد حل جملة معادلتين جبرياً (إيجاد الحل المشترك لجملة معادلتين باستخدام طريقة الحذف بالتعويض أو الحذف بالجمع)

وفي درسنا اليوم سنتعلم كيفية إيجاد الحل المشترك لجملة معادلتين بيانياً ومقارنة ذلك مع الحل الجبري.

* حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً.

لإيجاد حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً نتبع مايلي

- نرسم d_1 المستقيم الممثل للمعادلة الأولى
- نرسم d_2 المستقيم الممثل للمعادلة الثانية

على نفس المستوي الإحداثي

عندئذٍ نميز مايلي:

1) إذا تقاطع المستقيمان في نقطة واحدة عندئذٍ فإن الحل المشترك لجملة المعادلتين هو نقطة التقاطع (x,y) سيكون نفسه الحل الجبري

وهي الحالة الوحيدة المدروسة ضمن المنهاج.

2) حالة خاصة. إذا لم يتقاطع المستقيمان $(d_1 \parallel d_2)$ فإن الجملة مستحيلة الحل (لا يوجد نقطة تقاطع)

3) حالة خاصة. إذا كان المستقيم d_1 ينطبق على d_2 فإن للجملة عدد لانهائي من الحلول (يوجد عدد لانهائي من النقاط المشتركة)، في هذه الحالة ستكون المعادلة الأولى والمعادلة الثانية متكافئتان.

• أمثلة: جميع هذه الأمثلة هي مسائل امتحانية يرجى الانتباه جيداً.

* مثال (1).

• لتكن جملة المعادلتين
$$\begin{cases} d_1: 2x + y = 4 \quad \dots (1) \\ d_2: x - y = 2 \quad \dots (2) \end{cases}$$
• والمطلوب:

(1): حل بيانياً جملة المعادلتين السابقة

$d_1: 2x + y = 4$

$\Leftrightarrow y = -2x + 4$

$d_2: x - y = 2$

$\Leftrightarrow y = x - 2$

d_1	$A(0,4)$	$B(2,0)$
x	0	2
y	4	0

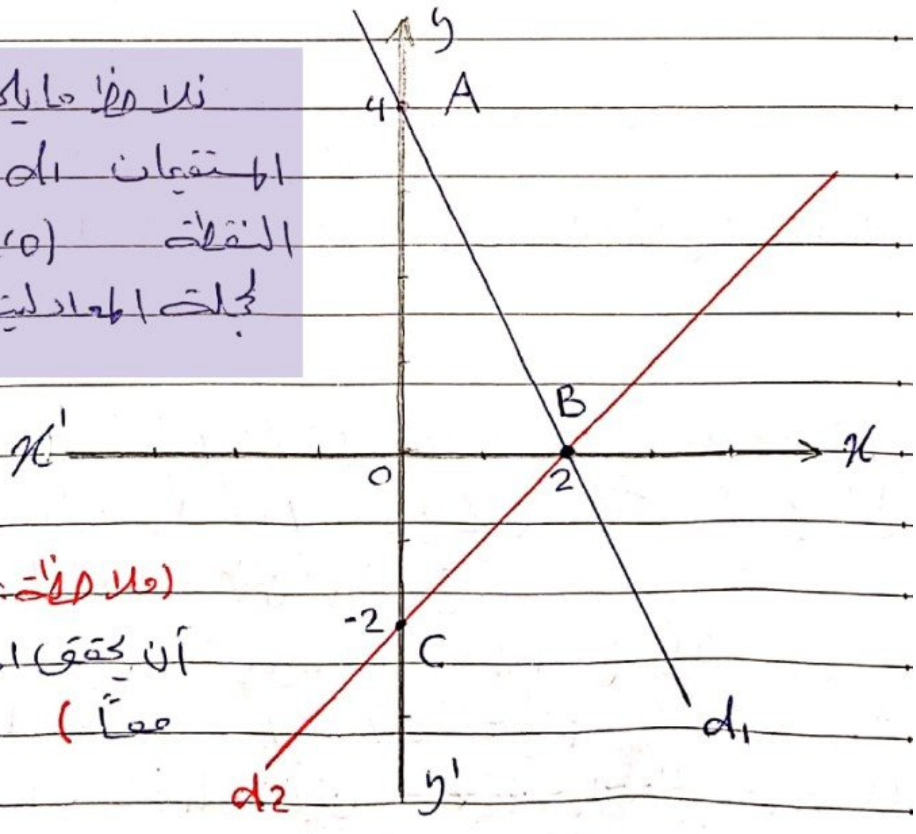
d_2	$C(0,-2)$	$B(2,0)$
x	0	2
y	-2	0

(هي نفس النقطة B (لا داعي تسمية جديدة) وستكون هي الحل المشترك)

أ.ماهر بربر

• لنرسم المستقيمين في جملة واحدة.

نلاحظ ما يلي:
المستقيمان d_1، d_2 يتقاطعان في النقطة $B(2,0)$ فالحل المشترك لجملة المعادلتين هو الثنائية $B(2,0)$



(ملاحظة: الحل المشترك يجب أن يحقق المعادلة الأولى والثانية معاً)

(2) حل جبرياً جملة المعادلتين وتأكد من صحة الحل الذي حصلت عليه في الطلب الأول.

بجمع المعادلتين نجد:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \quad \ldots (1) \\ x - y = 2 \quad \ldots (2) \end{cases}$$

$$3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

نعوض في إحدى المعادلتين (في 2 مثلاً) نجد $y = 0$

ومنه الحل المشترك لجملة المعادلتين هو الثنائية $(x,y) = (2,0)$

مما يؤكد صحة الحل البياني.

• ملاحظة:

إن الحل الجبري دقيق 100 % ، والحل البياني يجب أن يكون الرسم فيه سليماً حتى نحصل على حل صحيح ومن المهم التنويه على ضرورة أن يتطابق الحل الجبري مع الحل البياني دوماً، وإلا فإن أحد الحلين خاطئ.

* مثال (2) مثال محلول في الكتاب ص 81.

تأمل الجملة الآتية: $\begin{cases} d_1: 2x - y = 5 \ldots (1) \\ d_2: x + y = 4 \ldots (2) \end{cases}$ حل جملة المعادلتين جبرياً وتأكد من صحة الحل بيانياً.

• الحل: بجمع المعادلتين نجد:

$3x = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$ الثنائية $(x,y) = (3,1)$

هي حل مشترك لجملة المعادلتين.

• لنتأكد من ذلك بيانياً.

$d_1: 2x - y = 5$

$\Leftrightarrow y = 2x - 5$

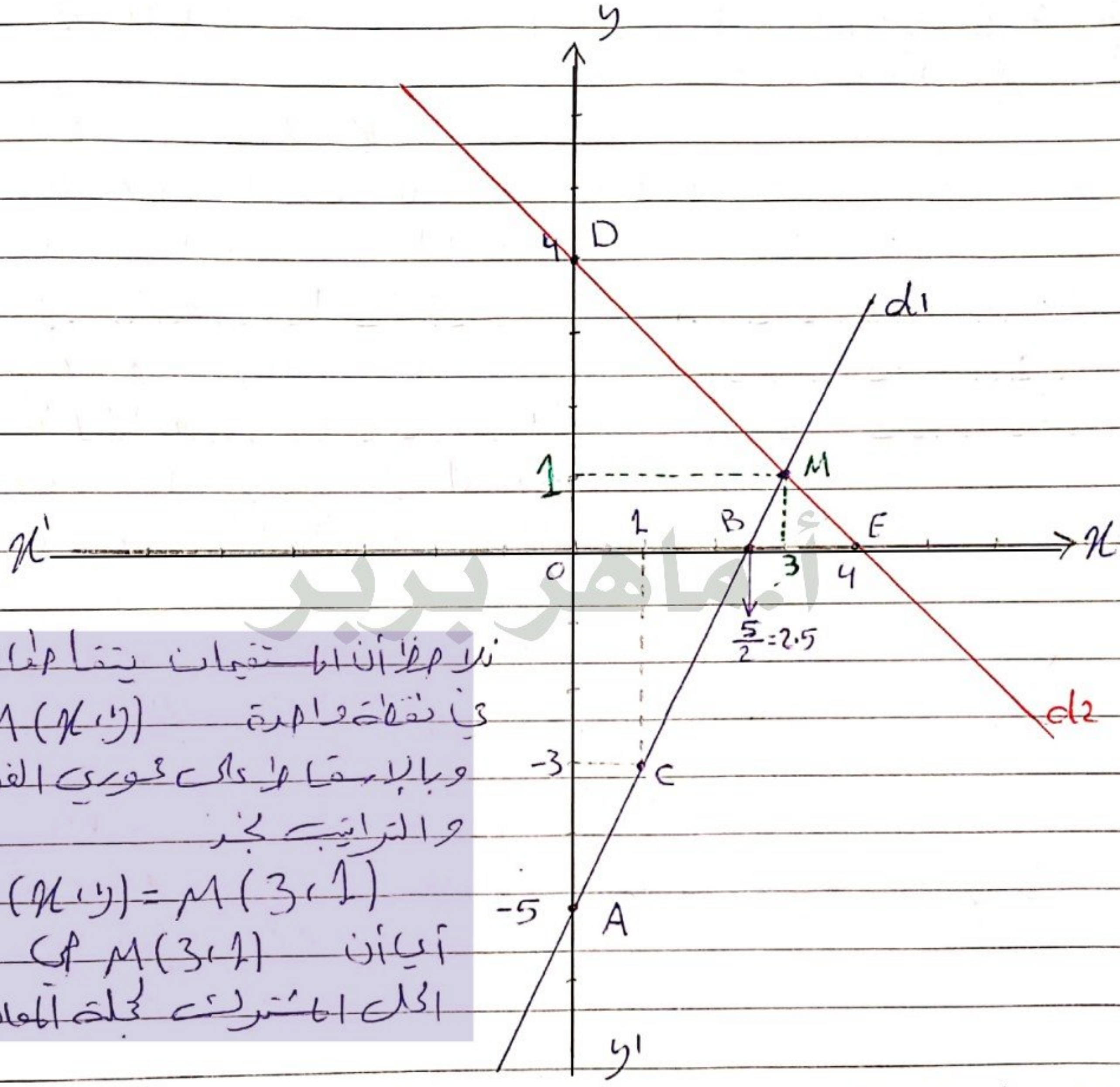
$d_2: x + y = 4$

$\Leftrightarrow y = -x + 4$

d_1	$A(0,-5)$	$B(2.5,0)$	$C(1,-3)$
x	0	$\frac{5}{2} = 2.5$	1
y	-5	0	-3

نقطة مساعدة لأجل دقة الرسم.

d_2	$D(0,4)$	$E(4,0)$
x	0	4
y	4	0



نلاحظ أن المستقيمان يتقاطعان
في نقطة واحدة $M(x,y)$
وبالإسقاط على محوري الفواصل
والتراتيب نجد
$M(x,y) = M(3,1)$
أي أن $M(3,1)$ هي
الحل المشترك لجملة المعادلتين

((لاحظ الحل الجبري مطابق للحل البياني
وهذا ما يجب أن نحصل عليه دوماً كما نوهت سابقاً))

* مثال (3) موجود على شكل نشاط ص 81 في الكتاب.
ولكن يوجد مثالاً وضعي في سنة 2017 ـ 2018 في الفصل الثالث
. فيه أمثال درسنه فطوعنا فقط ثلاثة أمثال طويلة والحل الموجود
في الكتاب سليم.

مثال (4) أيضاً هو مثال محلول في الكتاب ص 82

لتكن جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} d_1: 3x + y = 5 \quad \dots (1) \\ d_2: x + 2y = 0 \quad \dots (2) \end{cases}$$

والمطلوب:

(1) ارسم في معلم متجانس الخطين البيانيين للمعادلتين السابقتين

$d_1: 3x + y = 5$

$\Leftrightarrow y = -3x + 5$

$d_2: x + 2y = 0$

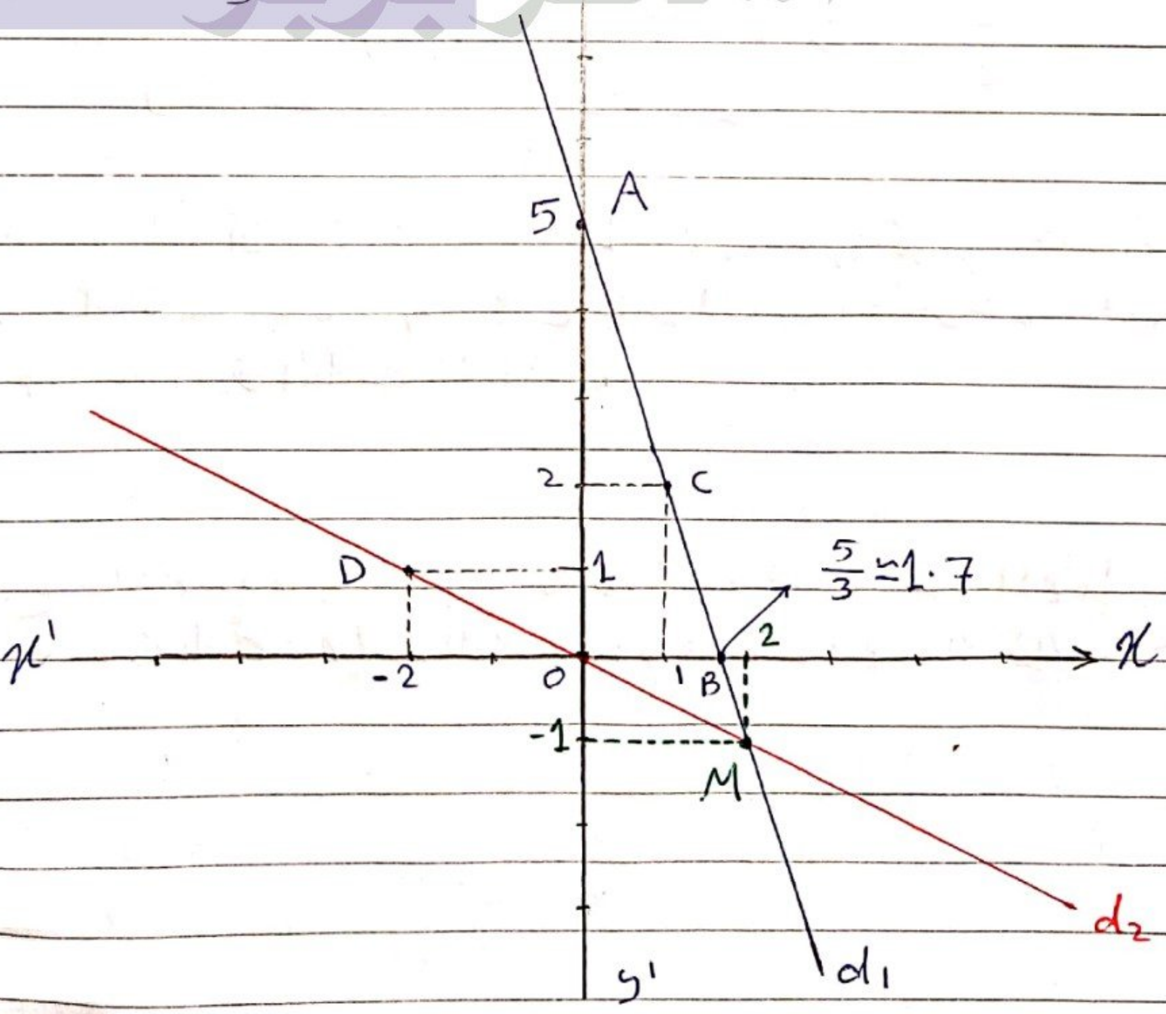
$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$

d_1	$A(0,5)$	$B(\frac{5}{3},0)$	$C(1,2)$
x	0	$\frac{5}{3}$ كسر دوري	1
y	5	0	2

نقطة مساعدة لا بأس منها بسبب وجود $\frac{5}{3}$ كسر دوري

d_2	$O(0,0)$	$D(-2,1)$
x	0	-2
y	0	1

نستطيع اختيار أي نقطة مرجعية



(2) اقرأ من الرسم حل الجملة ثم تحقق من الحل بتعويضه في المعادلتين:

. نلاحظ ما يلي: المستقيمان يتقاطعان في نقطة واحدة $M(x,y)$

وبالإسقاط على محوري الفواصل والتراتيب نجد:

$M(x,y) = M(2,-1)$

. أي أن $M(2,-1)$ هي الحل المشترك لجملة المعادلتين.

. انتباه!!!!: المطلوب ليس الحل الجبري بل التحقق عن طريق تعويض الحل في المعادلتين

. لنتأكد من صحة الحل بتعويض الثنائية $M(2,-1)$ في كلا المعادلتين:

$$d_1: y = -3x+5 \Rightarrow -1 \stackrel{?}{=} -3(2)+5$$
$$-1 = -1 \quad \text{محققة}$$

$$d_2: y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow -1 \stackrel{?}{=} -\frac{1}{2}(2)$$
$$-1 = -1 \quad \text{محققة}$$

$\Rightarrow$

. مما سبق نجد أن الثنائية $M(x,y) = M(2,-1)$ تحقق كلاً من معادلتي الجملة وهذا يعني بأن الحل المشترك لجملة المعادلتين هو نفسه ما يطابق الحل البياني.

. يُتبع بحل عدد لا بأس به من الدورات حتى يكون الطالب قادراً على تحصيل العلامة المخصصة لهذا السؤال بشكل كامل

دورة سابقة (سؤال بـ 100 درجة)

في مستوٍ منسوب إلى جملة محورين متعامدين لدينا المستقيم d_1 الممثل بالمعادلة $d_1: x-y+1=0$ والمستقيم d_2 الممثل بالمعادلة $d_2: y+\frac{1}{2}x-h=0$ حيث h عدد حقيقي والمطلوب:

(1) أثبت أن $h=4$ علماً بأن النقطة $N(2,3)$ تقع على المستقيم d_2.

بما أن النقطة $N(2,3)$ تقع على المستقيم فهي تحقق معادلته ومنه:

$$N(2,3)\in d_2 \Rightarrow 3+\frac{1}{2}(2)-h=0 \Rightarrow h=4$$

وبالتالي تصبح معادلة المستقيم d_2: $d_2: y+\frac{1}{2}x-4=0$

(2) ارسم كلاً من d_1 و d_2 وعين نقطة تقاطعهما.

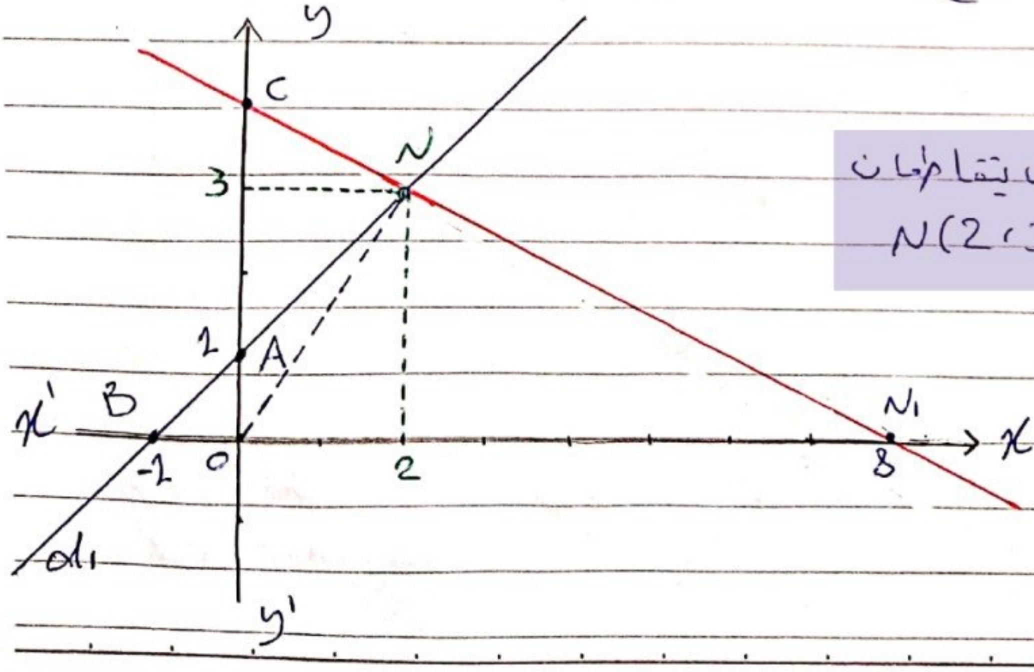
$d_1: x-y+1=0 \iff y=x+1$

$d_2: y+\frac{1}{2}x-4=0 \iff y=-\frac{1}{2}x+4$

d_1	$A(0,1)$	$B(-1,0)$
x	0	-1
y	1	0

d_2	$C(0,4)$	$N_1(8,0)$	$N(2,3)$
x	0	8	2
y	4	0	3

هي نقطة مفروضة نستطيع الاستفادة منها.
$x=2,\ y=3$



نلاحظ أن المستقيمان يتقاطعان في النقطة $N(2,3)$

3) إذا كانت M نقطة تقاطع d2 مع محور الفواصل، احسب مساحة المثلث OMN.

لاحظ أن ارتفاع المثلث (مسقط N على OM) هو 3 وحدة

$$S(OMN) = \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2} = \frac{3 \times 8}{2} = 12$$ وحدة مربعة

4) أوجد معادلة المستقيم المار من النقطتين O، N

المستقيم يمر من النقطة $O(0,0)$ / مار من المبدأ / فمعادلته من الشكل: $y = mx$، وبما أنه يمر من النقطة $N(2,3)$ وفق

نحقق معادلته ومنه: **يجب حساب قيمة العدد m**

$$N(2,3) \in y = mx \Rightarrow 3 = 2m \Rightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

ومنه معادلة المستقيم هي $d: y = \frac{3}{2}x$

سؤال دورة أيضاً 100 درجة:

في مستوٍ منسوب إلى جملة محورين إحداثيين لدينا:

$d_1: x+y+1=0$

$d_2: 2x+y=0$

1) ارسم كلاً من المستقيمين d_1، d_2

$d_1: x+y+1=0$

$\Leftrightarrow y=-x-1$

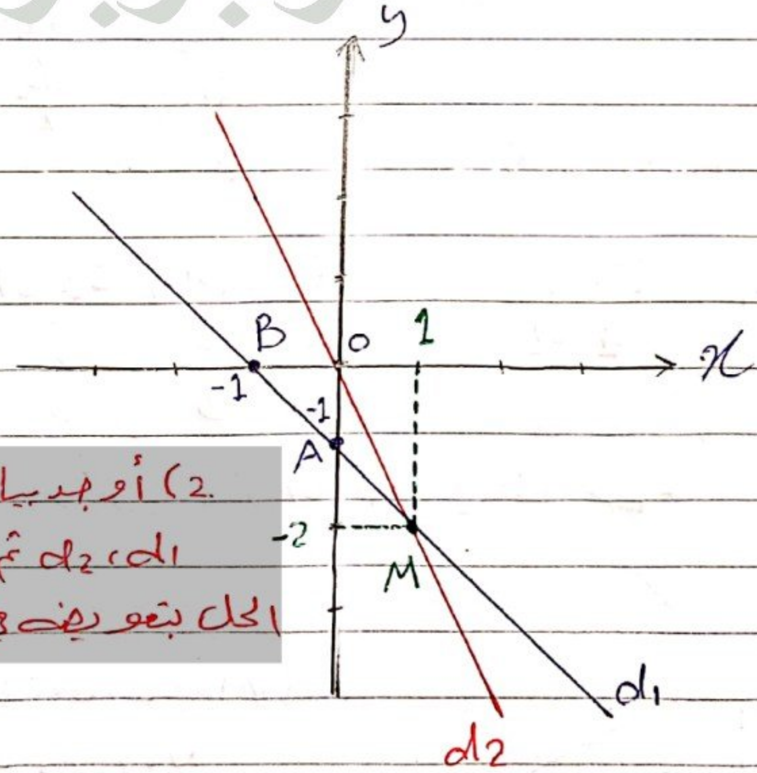
$d_2: 2x+y=0$

$\Leftrightarrow y=-2x$

d_1	$A(0,-1)$	$B(-1,0)$
x	0	-1
y	-1	0

d_2	$O(0,0)$	$M(1,-2)$
x	0	1
y	0	-2

$x=1 \ , \ y=-2$



2) أوجد بيانياً نقطة تقاطع d_1، d_2 ثم تحقق من صحة الحل بتعويضه في المعادلتين.

نلاحظ أن المستقيمان يتقاطعان في النقطة $M(1,-2)$ وهي الحل المشترك لجملة المعادلتين، نترك التعويض في المعادلتين للطالب.

• سؤال دورة 100 درجة

لتكن جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} d_1: y - bx = 0 \quad \dots (1) \\ d_2: y + ax - 3 = 0 \quad \dots (2) \end{cases}$$

والمطلوب:

(1) إذا علمت أن الحل المشترك لجملة المعادلتين هو $N(2,2)$ فاحسب كلاً من a, b

لدينا النقطة $N(2,2)$ هي الحل المشترك لجملة المعادلتين فهي تحقق كلاً من معادلتي الجملة ومنه:

• $2 - 2b = 0 \Rightarrow b = 1$ ← نعوض في (1)

• $2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ ← نعوض في (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ y + \frac{x}{2} - 3 = 0 \end{cases}$$

(2) بفرض $b = 1$ ، $a = \frac{1}{2}$ أوجد بيانياً الحل المشترك لجملة المعادلتين السابقتين.

• لنتأكد أن الحل المشترك لجملة المعادلتين هو الثنائية $N(2,2)$ لنتحقق من ذلك بيانياً:

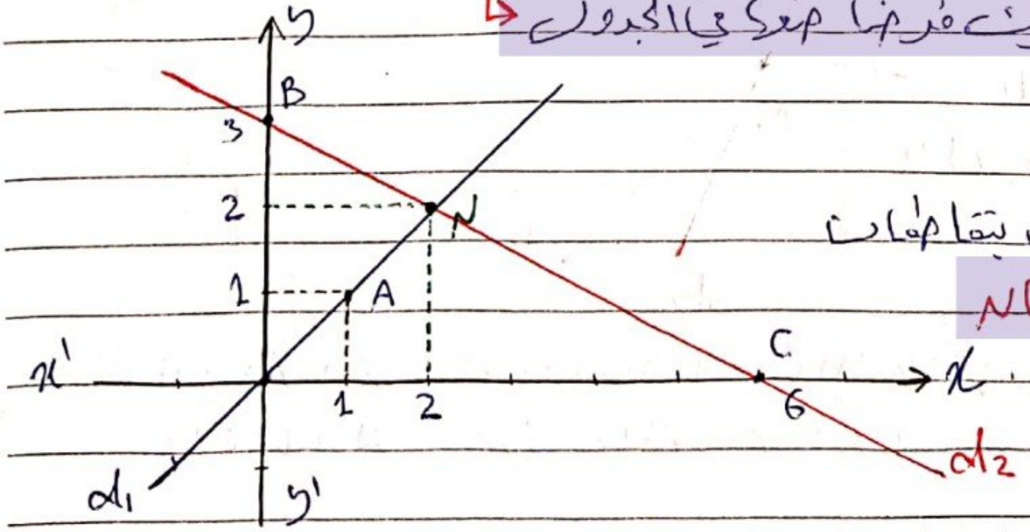
$d_1: y - x = 0$ $\quad\quad$ $d_2: y + \frac{x}{2} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow y = x$ (منصف الربعين 1، 3) $\quad\quad$ $\Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + 3$

d_1	$O(0,0)$	$A(1,1)$	$N(2,2)$
x	0	1	2
y	0	1	2

d_2	$B(0,3)$	$C(6,0)$	$N(2,2)$
x	0	6	2
y	3	0	2

هي الحل المشترك فرضناه في الجدول



نلاحظ أن المستقيمان يتقاطعان في النقطة $N(2,2)$ وهي الحل المشترك لجملة المعادلتين.

ملاحظات مهمة جدا

كل معادلة خطية

$$ax + by = 0 \Longleftrightarrow y = mx$$

$$ax + by = c \Longleftrightarrow y = mx + b$$

لها عدد غير نهائي من الحلول وكل حل هو عبارة

عن ثنائية (x,y)

هذه الثنائيات تنتج بإعطاء قيمة ل x واستنتاج y

او بالعكس كما رأينا في درس معادلة مستقيم

وبالتالي يوجد عدد لانهائي من الحلول (كل قيمه تعطي حل)

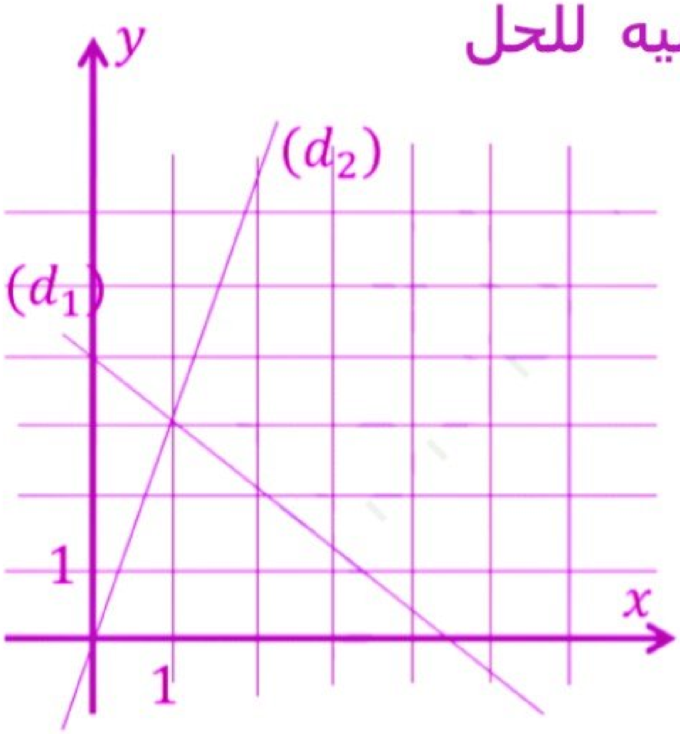
أما بالنسبة لجملة معادلتين خطيتين

ضمن منهاجكم ستتعاملون فقط مع حاله واحده

وهي ان تكون الجمله لها حل وحيد (ثنائية تحقق كلا من معادلتي الجمله)

إياكم الخلط بين الحالتين

سأعرض الخطوات الرئيسيه للحل



تحقق من فهمك

لحل الجملة:

$$x + y = 4$$
$$3x - y = 0$$

رسمت لينا مستقيمين في المعلم المرافق

ما هي عبارة y بدلالة x التي استخدمتها لينا لرسم المستقيم d_1؟

$$y = 4 - x$$

لرسم المستقيم d_2؟

$$y = 3x$$

اقرأ على الشكل حل الجملة

هو $(1,3)$

ثم تحقق من الحل.

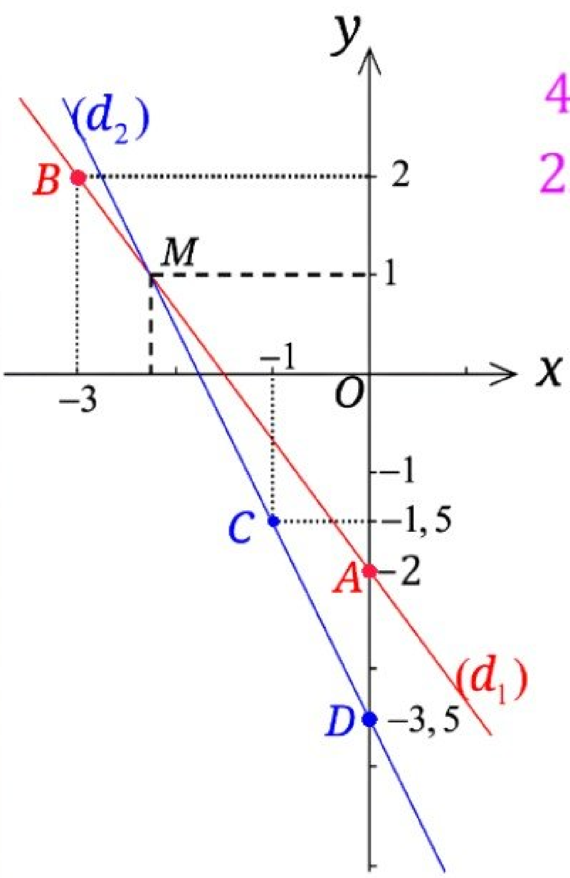
$$x + y = 1 + 3 = 4$$
$$3x - y = 3 - 3 = 0$$

تدرب

- لدينا الجملة:

$$4x + 3y = -6$$
$$2x + y = -3.5$$

مثل هذه الجملة بيانياً



بالنسبة للمعادلة الأولى (المستقيم الأول)

x	0	-3
y	-2	2

بالنسبة للمعادلة الثانية (المستقيم الثاني)

x	-1	0
y	-1.5	-3.5

اقرأ على الشكل حلاً تقريبياً لهذه الجملة.

من الشكل الحل المشترك هو :

$$(-2.25, 1)$$

حل الجملة جبرياً و قارن الحل الجبري بالحل الذي قرأته على الشكل.

$$4x + 3y = -6$$
$$2x + y = -3.5$$

نضرب طرفي المعادلة الثانية بالرقم 2− فتصبح جملة المعادلتين:

$$4x + 3y = -6$$
$$-4x - 2y = 7$$

و بجمع هاتين المعادلتين:

$$y = 1$$

و حسب المعادلة الثانية:

$$2x + 1 = -3.5$$
$$2x = -4.5$$
$$x = -2.25$$

و الحل البياني و الجبري متطابقان.

(عندما يطلب الحل البياني فالرسم يجب أن يكون دقيقاً إلى حد كبير)

في الإمتحان لايأتي احداثيات للنقاط بهذا الشكل

- لدينا الجملة:

$$5x + 2y = 12$$
$$x + 2y = 8$$

اكتب y بدلالة x في كل من معادلتي الجملة

من المعادلة الأولى نجد:

$$y = \frac{12 - 5x}{2}$$

و من المعادلة الثانية نجد:

$$y = \frac{8 - x}{2}$$

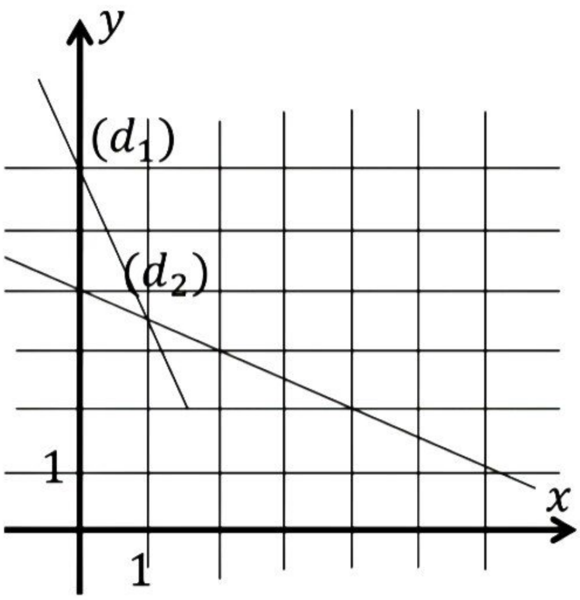
في معلم ديكارتي ، مثل بيانياً كلاً من المعادلتين اللتين وجدتهما في السؤال السابق.

بالنسبة للمعادلة الأولى (المستقيم الأول):

x	0	1
y	6	3.5

بالنسبة للمعادلة الثانية (المستقيم الثاني):

x	0	4
y	4	2



اقرأ من الشكل حل الجملة

$(1,3.5)$

ثم تحقق مما قرأت حسابياً.

$$5x + 2y = 5 + 7 = 12$$
$$x + 2y = 1 + 7 = 8$$

و الحل صحيح.