حل جملة معادلتين خطيتين بيانيا

أوراق عمل

جبر-الوحدة الرابعة- الدرس الثالث

أتقن جيدا حلول المسائل الواردة

لتضمن ال100 درجة المخصصة للسؤال

* جميع الأسئلة الواردة هي دورات سابقة بـ 100 درجة.

* دورة 2021 المعدلة.

المستقيمان (d_2) ، (d_1) معادلتاهما

$$\begin{cases} d_1: 3y = -x - 4 \;\ldots(1) \\ d_2: y - x = -4 \;\ldots(2) \end{cases}$$

والمطلوب:

1) حل جملة المعادلتين جبرياً

جملة المعادلتين تكافئ:

$$\begin{cases} 3y + x = -4 \;\ldots(1) \\ y - x = -4 \;\ldots(2) \end{cases}$$

بالجمع نجد $4y = -8 \Rightarrow y = -2$

نعوض في نجد $-2 - x = -4 \Rightarrow x = +2$

وبالتالي الثنائية $(x,y) = (2,-2)$ هي حلاً مشتركاً لجملة المعادلتين.

2) تحقق من أن النقطة $A(-1,-1)$ تقع على المستقيم (d_1).

نعوض إحداثيات النقطة $A(-1,-1)$ في معادلة المستقيم (d_1) نجد:

$A(-1,-1)$ ، $d_1: 3y = -x - 4 \Rightarrow 3(-1) \stackrel{?}{=} -(-1) - 4$

$\Rightarrow -3 \stackrel{?}{=} +1 - 4 \Rightarrow -3 = -3 \Rightarrow A \in d_1$

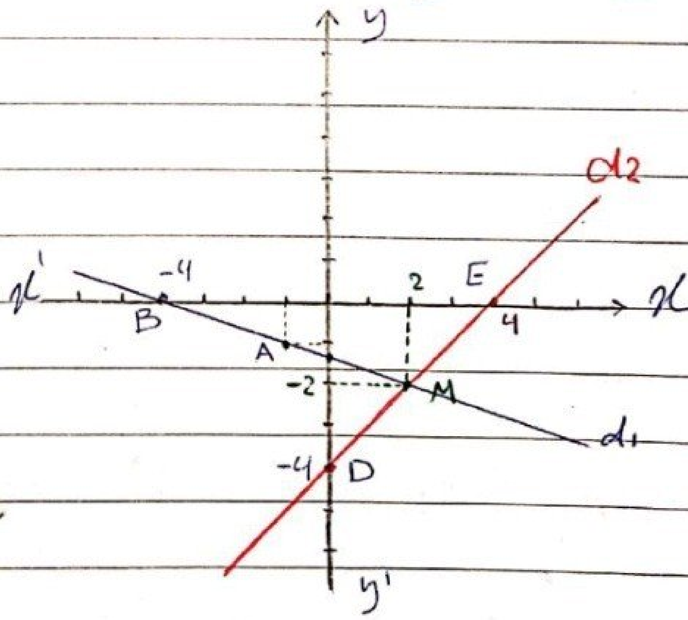
3) في معلم متجانس ارسم المستقيمين (d_1) ، (d_2) واكتب إحداثيي M نقطة التقاطع.

$d_1: 3y = -x - 4$

$\Leftrightarrow y = -\frac{x}{3} - \frac{4}{3}$

d_1	$C(0,-\frac{4}{3})$	$B(-4,0)$	$A(-1,-1)$
x	0	-4	-1
y	$-\frac{4}{3}$	0	-1

نقطة مساعدة معطاة فرضاً



$d_2: y - x = -4 \Leftrightarrow y = x - 4$

d_2	$D(0,-4)$	$E(4,0)$
x	0	4
y	-4	0

نلاحظ أن المستقيمان يتقاطعان في النقطة $M(x,y)$

وبالإسقاط على المحورين نجد $M(+2,-2)$ وهي الحل المشترك لجملة المعادلتين

* دورة 2020 الموحدة - أولاً:

ليكن المستقيمان (d) ، (Δ) ومعادلتهما على التوالي:

$$\begin{cases} d_1: x+2y=4 \quad \ldots(1) \\ \Delta: x-y=1 \quad \ldots(2) \end{cases}$$

والمطلوب:

a) حل جملة المعادلتين جبرياً

نضرب طرفي المعادلة الثانية بـ (-1) ثم نجمع مع المعادلة الأولى نجد

$3y=3 \Rightarrow y=1$

نعوض في (2) نجد $x=2$ وهي الثنائية $(x,y)=(2,1)$ الحل المشترك لجملة المعادلتين

b) في معلم متجانس ارسم المستقيمين (d_1) ، (d_2) وعين إحداثيات نقطة التقاطع.

$d_1: x+2y=4$

$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+2$

$\Delta: x-y=1$

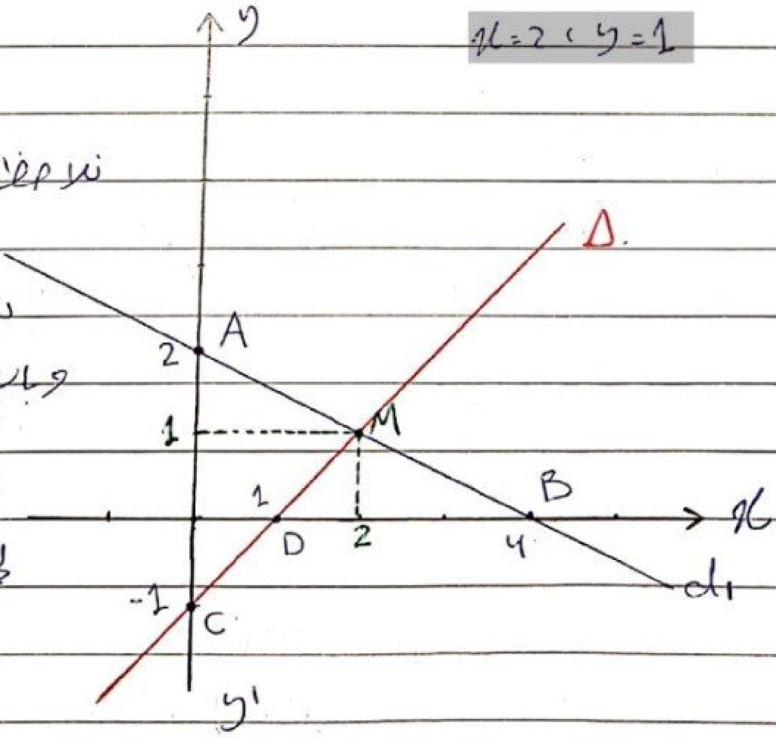
$\Leftrightarrow y=x-1$

d_1	$A(0,2)$	$B(4,0)$
x	0	4
y	2	0

Δ	$C(0,-1)$	$D(1,0)$
x	0	1
y	-1	0

$x=2,\ y=1$

$x=2,\ y=1$



نلاحظ ما يلي:

المستقيمان (d_1) ، (Δ)

يتقاطعان في النقطة $M(x,y)$

وبالإسقاط على المحورين نجد

$M(x,y)=M(2,1)$

وهي الحل المشترك لجملة المعادلتين

ثانياً: إذا كان مجموع العددين x, y يساوي 2، وكان ثلاثة أضعاف العدد x تزيد عن ضعفي العدد y بمقدار 1، المطلوب:

a) عبر عن الصيغة اللفظية بجملة معادلتين

$$\begin{cases} x+y=2 \quad \ldots(1) \\ 3x=2y+1 \quad \ldots(2) \end{cases}$$

b) تحقق أن الثنائية $(1,1)$ هي حل للجملة الناتجة من الطلب السابق.

- نعوض إحداثيات النقطة المفروضة في (1) نجد:
$1+1 \stackrel{?}{=} 2 \Rightarrow 2=2$ محققة
- نعوض إحداثيات النقطة المفروضة في (2) نجد:
$3 \stackrel{?}{=} 2+1 \Rightarrow 3=3$ محققة

وبالتالي الثنائية $(x,y)=(1,1)$ هي حل لجملة المعادلتين لأنها تحققهما معاً.

*** دورة عام 2018**

ليكن (d)، (Δ) مستقيمان معادلتاهما على التوالي:

$$\begin{cases} d: 2y=x+2 \quad \ldots(1) \\ \Delta: y+x=-2 \quad \ldots(2) \end{cases}$$

والمطلوب:

1) حل جملة المعادلتين جبرياً:

جملة المعادلتين تكافئ:

$$\begin{cases} 2y-x=2 \\ y+x=-2 \end{cases}$$ بالجمع نجد

$3y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=-2$

ومنه الثنائية $(x,y)=(-2,0)$ هي حل لجملة المعادلتين

2) المستقيم d يقطع محور الفواصل في A ($y=0$)، ويقطع محور التراتيب في B ($x=0$)

جد إحداثيات A, B

هنا انتبه إلى ضرورة الالتزام والتقيد بالنقاط وأسمائها.

$d: 2y=x+2 \Leftrightarrow y=\frac{x}{2}+1$

d	$B(0,1)$	$A(-2,0)$
x	0	-2
y	1	0

$B(0,1)$ هي نقطة تقاطع المستقيم d مع محور التراتيب.

$A(-2,0)$ هي نقطة تقاطع المستقيم d مع محور الفواصل.

3) تحقق أن النقطة $D(0,-2)$ تحقق المعادلة $\Delta: \; y+x=-2$

نعوض إحداثيات النقطة $D(0,-2)$ في المعادلة Δ نجد:

$-2+0 \overset{?}{=} -2 \Rightarrow -2=-2$ محققة $\Rightarrow D\in\Delta$

أي أن النقطة $D(0,-2)$ هي نقطة من المستقيم Δ (لاحظ أنها نقطة تقاطعه مع المحور $y'y$)

4) في معلم متجانس ارسم كلاً من (d) و (Δ) ثم احسب مساحة المثلث ABD

وجدنا سابقاً:

$d: 2y = x+2$ $\Leftrightarrow y=\frac{x}{2}+1$

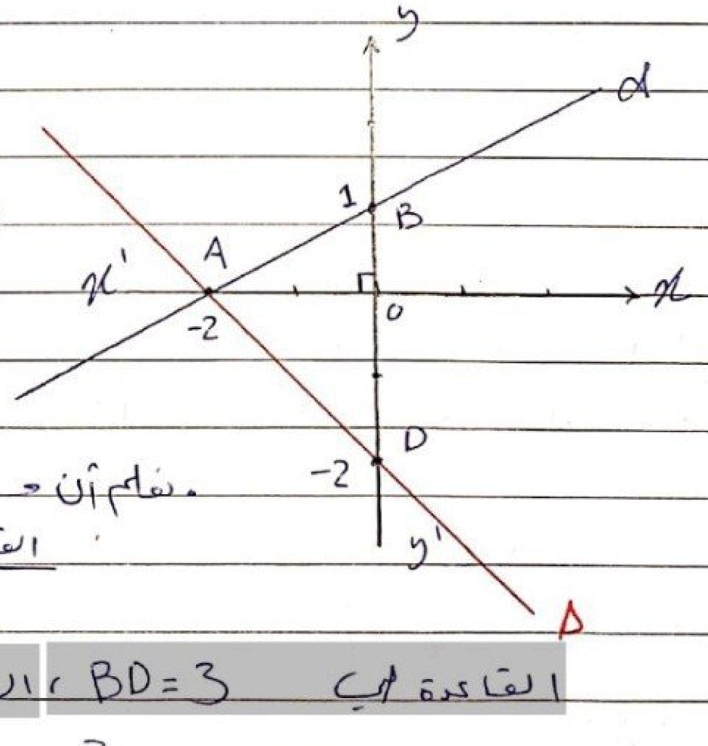
$\Delta: y+x=-2$ $\Leftrightarrow y=-x-2$

d	$B(0,1)$	$A(-2,0)$
x	0	-2
y	1	0

Δ	$D(0,-2)$	$A(-2,0)$
x	0	-2
y	-2	0

هي نفس النقطة A (لا تكتب مرتين بل مرة واحدة) وستكون هي الحل المشترك.

(لاحظ أن المستقيمان يتقاطعان في النقطة $A(-2,0)$ وهي الحل المشترك لكلا المعادلتين)



نعلم أن مساحة المثلث تعطى بالقانون:

$$S(ABD)=\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$$

القاعدة هي $BD=3$ ، الارتفاع هو $AO=2$ ومنه

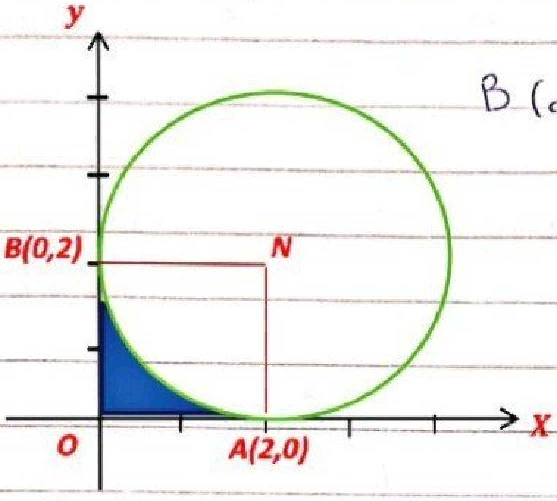
$$S(ABD)=\frac{2\times 3}{2}=3$$ وحدة مربعة

*** دورة 2018**

في معلم متجانس مرسوم فيه دائرة مركزها النقطة N وتمس محور الفواصل في النقطة $A(2,0)$،

وتمس محور التراتيب في النقطة $B(0,2)$

والمطلوب:



(1) تحقق أن النقطتين $A(2,0)$ و $B(0,2)$ تنتميان إلى المستقيم $d: y+x=2$

نعوض إحداثيات النقطة $A(2,0)$ في المعادلة نجد:

$$0+2 \stackrel{?}{=} 2 \Rightarrow 2=2 \Rightarrow A(2,0)\in d$$

(وهي نقطة تقاطع المستقيم d مع محور الفواصل)

نعوض إحداثيات النقطة $B(0,2)$ في المعادلة نجد:

$$2+0 \stackrel{?}{=} 2 \Rightarrow 2=2 \Rightarrow B(0,2)\in d$$

(وهي نقطة تقاطع المستقيم d مع محور التراتيب)

(2) في معلم متجانس ارسم المستقيم d والمستقيم $\Delta: y-x=0$

$d: y+x=2$

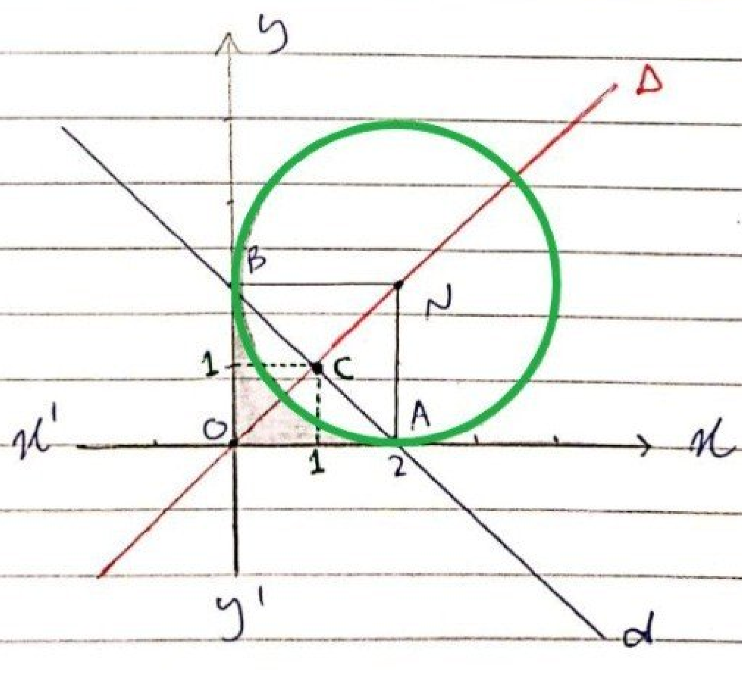
$\Leftrightarrow y=-x+2$

d	$B(0,2)$	$A(2,0)$
x	0	2
y	2	0

$\Delta: y-x=0$

$\Leftrightarrow y=x$

Δ	$O(0,0)$	$C(1,1)$	$N(2,2)$
x	0	1	2
y	0	1	2



(3) جد إحداثيي نقطة التقاطع بين المستقيمين d ، Δ

نلاحظ أن: المستقيمات يتقاطعان في النقطة $C(1,1)$ أي أن الثنائية $(1,1)$ هي الحل المشترك للمعادلتين $C(x,y) = C(1,1)$.

(4) احسب قياس القوس $\widehat{AB}$ واحسب مساحة المربع $OANB$ واحسب مساحة الجزء المظلل.

- الرباعي $OANB$ مربع طول ضلعه $\ell = 2$ وحدة
- وبالتالي: $B\hat{N}A = 90^\circ$

$B\hat{N}A = \widehat{AB} = 90^\circ$ (قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس التي تحصرها وبالعكس)

- مساحة المربع تساوي (طول ضلعه)^2 وحدة.

$S_{(OANB)} = \ell^2 = 4$ وحدة مربعة

- مساحة الجزء المظلل S' هي مساحة المربع مطروحاً منها
- مساحة ربع الدائرة التي مركزها N ونصف قطرها $R = 2$ وحدة:

$$S' = 4 - \frac{1}{4}\left(\pi \times (2)^2\right) = 4 - \frac{1}{4}(\pi \times 4)$$

$= 4 - \pi$ وحدة مربعة

* اللاذقية 2019

• ليكن المستقيمان (d) ، (Δ) ومعادلتيهما على التوالي:

• والمطلوب:

$$\begin{cases} d: y = x \ldots (1) \\ \Delta: x + y = 4 \ldots (2) \end{cases}$$

• (1) حل جملة المعادلتين جبرياً:

• نعوض المعادلة الأولى في الثانية نجد:

$x + x = 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

• نعوض في المعادلة الأولى نجد $y = 2$ ومنه الثنائية $(x, y) = (2, 2)$

• هي حل مشترك لجملة المعادلتين

• (2) تحقق أن كلاً من النقطتين $A(4, 0)$ ، $B(0, 4)$ تقعان على المستقيم Δ.

• نعوض إحداثيات النقطة $A(4,0)$ في معادلة المستقيم Δ نجد:

$4 + 0 \stackrel{?}{=} 4 \Rightarrow 4 = 4 \Rightarrow A(4, 0) \in \Delta$

(وهي نقطة تقاطع المستقيم Δ مع محور الفواصل)

• نعوض إحداثيات النقطة $B(0,4)$ في معادلة المستقيم Δ نجد:

$0 + 4 \stackrel{?}{=} 4 \Rightarrow 4 = 4 \Rightarrow B(0, 4) \in \Delta$

(وهي نقطة تقاطع المستقيم Δ مع محور التراتيب).

• (3) في معلم متجانس ارسم المستقيمان (d) ، (Δ) واكتب إحداثيات N نقطة تقاطعهما.

$d: y = x$

$\Delta: x + y = 4$

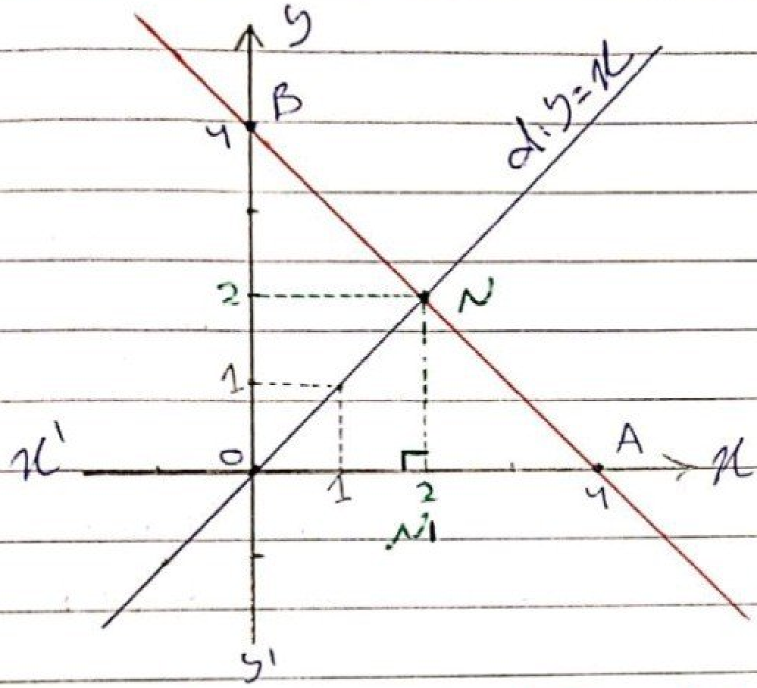
$\Leftrightarrow y = -x + 4$

d	O(0,0)	C(1,1)	N(2,2)
x	0	1	2
y	0	1	2

Δ	B(0,4)	A(4,0)	N(2,2)
x	0	4	2
y	4	0	2

هي النقطة الناتجة من حل جملة المعادلتين جبرياً نستطيع الاستفادة منها حيث يجب أن يتقاطع المستقيمان في هذه النقطة.

نلاحظ أن:
المستقيمان (d) ، (Δ)
يتقاطعان في النقطة
$N(x,y) = N(2,2)$
(وهذا هو الحل المشترك لجملة
المعادلتين التي حصلنا عليه في
الطلب الأول)



(4) / طلب جديد / احسب $\tan N\hat{O}A$ واستنتج تعامد d ، Δ .

لتكن N_1 هي مسقط النقطة N على محور الفواصل عندئذ
المثلث ON_1N قائم في N_1 وبالتالي.

$$\cdot \tan N\hat{O}A = \frac{NN_1}{ON_1} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow N\hat{O}A = 45^\circ$$

وبنفس الطريقة نجد:
$N\hat{A}O = 45^\circ$ ومنه :
$O\hat{N}A = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$
فالمثلث ONA قائم الزاوية في N أي أن $NA \perp NO$
بمعنى آخر $d \perp \Delta$.

طريقة ثانية لإثبات التعامد

لاحظ أن N_1 منتصف OA أي أن NN_1 متوسط في المثلث ONA
ويساوي نصف طول الضلع المتعلق به، فالمثلث ONA قائم في N
بمعنى آخر $NA \perp NO \Leftrightarrow d \perp \Delta$

انتبه جيداً لهذا الطلب وتعلم الطرائق المختلفه لحله

* نموذج وزاري

ليكن (d) ، (d') مستقيمان من:

$$\begin{cases} d: y = x - 2 \quad \text{----} (1) \\ d': y + x = 2 \quad \text{----} (2) \end{cases}$$

(1) حل جبريًا الجملة السابقة.

الجملة المعادلتين تكافئ:

$$\begin{cases} y - x = -2 \\ y + x = 2 \end{cases}$$

بالجمع نجد: $2y = 0 \Rightarrow y = 0$

نعوض في (2) نجد $2 = x$ ومنه:

الثنائية $(x, y) = (2, 0)$ هي الحل الوحيد لجملة المعادلتين.

(2) احسب إحداثيات نقاط تقاطع (d) ، (d') مع المحورين الإحداثيين.

$d: y = x - 2$

$A(0, -2)$ نقطة تقاطع d مع محور التراتيب

$B(2, 0)$ = = d = = الفواصل

$C(0, 2)$ = = d' = = التراتيب

$B(2, 0)$ = = d' = = الفواصل

d	$A(0,-2)$	$B(2,0)$
x	0	2
y	-2	0

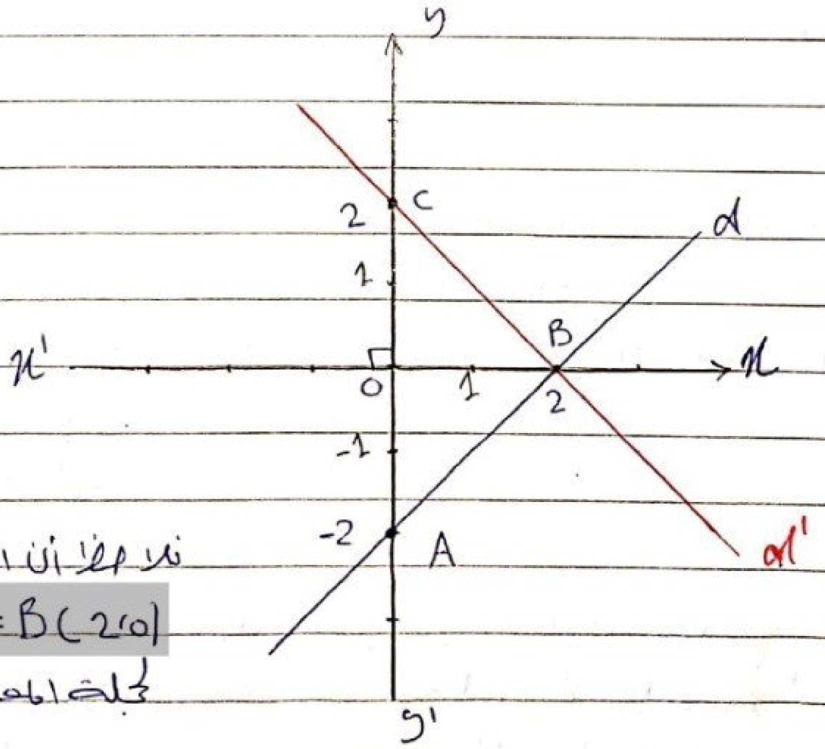
$d': y + x = 2$

$\Leftrightarrow y = -x + 2$

d'	$C(0,2)$	$B(2,0)$
x	0	2
y	2	0

نفس النقطة B

(3) ارسم (d) ، (d') ثم استنتج الحل المشترك لمعادلتي الجملة بيانيًا.



نلاحظ أن المستقيمان يتقاطعان في النقطة $B(x, y) = B(2, 0)$ أي أن الحل المشترك لجملة المعادلتين هو الثنائية $B(2, 0)$

(4) أثبت أن المستقيم (d) يعامد المستقيم (d').

يوجد عدة طرائق للحل:

طريقة أولى: من المثلث القائم OCB نجد وحسب فيثاغورث:

$[CB]^2=[OC]^2+[OB]^2 \Rightarrow [CB]^2=2^2+2^2=4+4=8$

ومنه: $[CB]=2\sqrt{2}$

وبنفس الطريقة من المثلث القائم OAB نجد وحسب فيثاغورث:

$[AB]^2=\underbrace{[OB]}_{2}^2+[OA]^2 \Rightarrow [CB]^2=2^2+2^2=4+4=8$

ومنه: $[AB]=2\sqrt{2}$

2 وليس 2- انتبه
الأطوال دوماً موجبة

أصبح لدينا في المثلث ABC:

$[AB]=2\sqrt{2}$ ، $[CB]=2\sqrt{2}$ ، $[CA]=4$ وحسب عكس فيثاغورث

$[CA]^2 \overset{?}{=} [CB]^2+[AB]^2$

$4^2 \overset{?}{=} (2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2$

$16 \overset{?}{=} 8+8 \Rightarrow 16=16$ محقق

بالتالي المثلث ABC قائم في B بمعنى آخر: $CB \perp AB$

أي: $d' \perp d$

طريقة ثانية:

في المثلث ABC نلاحظ أن النقطة O منتصف AC أي أن OB متوسط

في المثلث ABC ويساوي نصف طول الضلع المتعلق به

(لاحظ $[AC]=4$ ، $[OB]=2$) فالمثلث ABC قائم في B

بمعنى آخر: $CB \perp AB$

أي: $d' \perp d$

تذكر: في المثلث القائم: المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر
وبالعكس: إذا كان المتوسط المتعلق بأحد أضلاع مثلث يساوي نصف طول هذا الضلع فإن المثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع.

* نماذج وزارية :

لتكن المعادلة الخطية $2x - y + 4 = 0$ ، تمثيلها البياني عبارة عن مستقيم Δ في جملة متعامدة نظامية والمطلوب :

(1) أكتب المعادلة الخطية السابقة بالشكل $y = mx + p$ ثم استنتج كلاً من m, p

$$\left.\begin{array}{l} \Delta: 2x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 4 \\ \text{من الشكل } y = mx + p \end{array}\right\} \Rightarrow m = 2 \text{ and } p = 4$$

(2) ارسم المستقيم Δ والمستقيم $d: y - 2 = 0$ وأوجد M نقطة التقاطع.

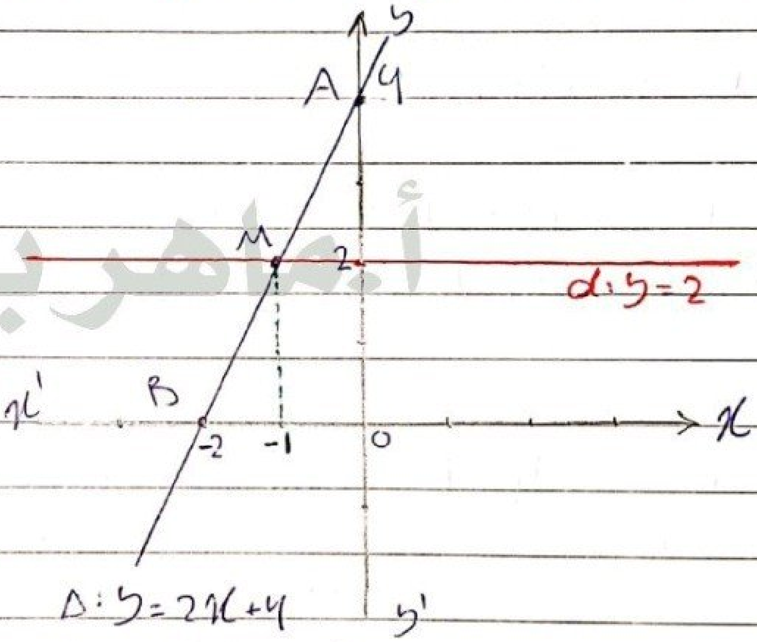
$\Delta: 2x - y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow y = 2x + 4$

Δ	$A(0,4)$	$B(-2,0)$
x	0	-2
y	4	0

$d: y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

معادلة مستقيم يوازي محور الفواصل



نلاحظ أن المستقيمان يتقاطعان في نقطة واحدة $M(x,y)$ وبالإسقاط على محوري الفواصل والتراتيب نجد: $M(x,y) = M(-1,2)$

أي أن الحل المشترك لجملة المعادلتين هو الثنائية السابقة.

(3) تأكد من صحة الحل الذي حصلت عليه في الطلب الثاني بحل الجملة جبرياً:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 4 = 0 \quad \ldots (1) \\ y = 2 \quad \ldots (2) \end{array}\right.$$

لدينا $y = 2$ نعوض في (1) نجد

$2x - 2 + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$

أي أن الثنائية $(x,y) = (-1,2)$ هي حل مشترك لجملة المعادلتين

ما يؤكد صحة الحل البياني الوارد في الطلب الثاني.

* دورة 2022 الموحدة:

1- المستقيمان d_1 , d_2 ومعادلتاهما:

$$\begin{cases} d_1 : y = 2x + 2 \quad ---- (1) \\ d_2 : 3x - y + 3 = 0 \quad ---- (2) \end{cases}$$

1 حل جملة المعادلتين جبرياً:

/ نستطيع استخدام طريقة الحذف بالتعويض بأن نعوض المعادلة (1) في (2) ولكن لاحظنا بأن الجملة تكتب بالشكل:/

$$\begin{cases} d_1 : -2x - 2 + y = 0 \\ d_2 : 3x + 3 - y = 0 \end{cases}$$

بالجمع نجد:

$x + 1 = 0 \Leftarrow \boxed{x = -1}$ نعوض في (1) نجد $\boxed{y = 0}$ وبالتالي الثنائية $(x,y) = (-1,0)$ هي حل مشترك لجملة المعادلتين.

2 جد إحداثيي النقطة B نقطة تقاطع المستقيم d_1 مع محور التراتيب.

يتقاطع المستقيم $d_1 : y = 2x + 2$ مع محور التراتيب عندما $x = 0$ ومنه $y = 2$ أي أن $B(0,2)$ هي نقطة تقاطع المستقيم d_1 مع محور التراتيب.

ثم جد إحداثيي النقطة C نقطة تقاطع المستقيم d_2 مع محور التراتيب.

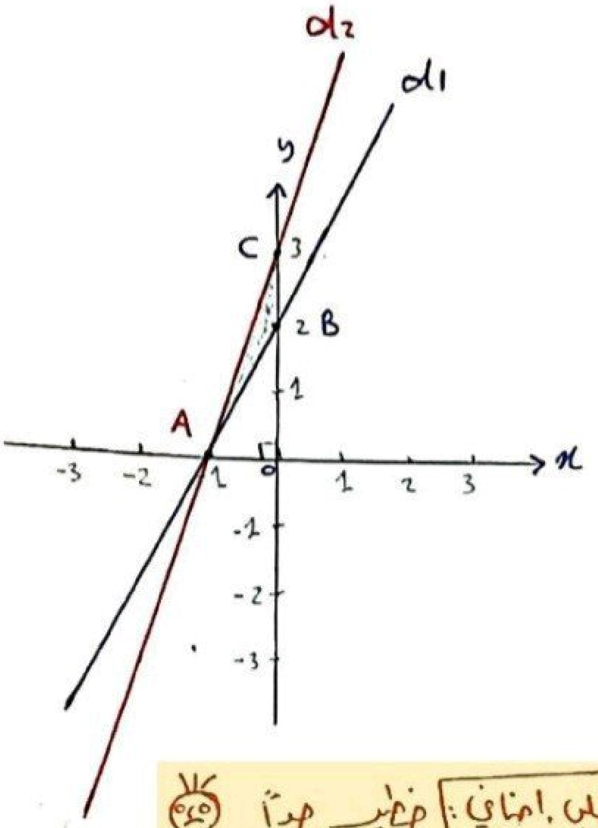
يتقاطع المستقيم $d_2 : y = 3x + 3$ مع محور التراتيب عندما $x = 0$ ومنه $y = 3$ أي أن $C(0,3)$ هي النقطة تقاطع المستقيم d_2 مع محور التراتيب.

3 في معلم متجانس حدد النقطتين B , C ثم حدد النقطة A نقطة تقاطع المستقيمين d_1 , d_2 ثم ارسمهما.

/ملاحظة: لا ضرورة لرسم الجداول المعتادة في هذه المسألة حيث قمنا بتعيين نقطتين من كل مستقيم نقطة التقاطع (الحل المشترك) بالإضافة إلى B , C وهذا يكفي لرسم المستقيمين /

$A(-1,0) , B(0,2) \in d_1$.

$A(-1,0) , C(0,3) \in d_2$



طلب إضافي: خطير جداً

احسب مساحة المثلث ABC ثم احسب محيطه.

* حساب S_{ABC}.

- طريقة أولى:

مساحة المثلث ABC هي عبارة عن مساحة المثلث القائم AOC مطروحاً منها مساحة المثلث القائم AOB أي:

$$S_{ABC} = S_{AOC} - S_{AOB} = \frac{3 \times 1}{2} - \frac{2 \times 1}{2}$$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}$ وحدة مربعة

- طريقة ثانية:

المثلث ABC منفرج الزاوية تتلاقى ارتفاعاته في نقطة تقع خارجه عندئذٍ:

$$S_{ABC} = \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$$

1- الارتفاع هو AO وطوله يساوي 1

القاعدة هي CB (وليس CO) وطولها 1

ومنه: $S_{ABC} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ وحدة مربعة

* حساب محيط المثلث ABC.

$CB = 1$

- من المثلث القائم AOB وحسب فيثاغورث نجد: $AB = \sqrt{5}$

- " " " AOC " " " : $AC = \sqrt{10}$

$\Rightarrow P(ABC) = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{10}$ وحدة طول

ملاحظات وحقائق هامة للمراحل القادمة (مطالعة)

* (1) ليكن لدينا d_1 ، d_2 مستقيمان معينان بالمعادلتين:

$$\begin{cases} d_1: y = m_1 x + p_1 \\ d_2: y = m_2 x + p_2 \end{cases}$$

إن الشرط اللازم والكافي ليكون المستقيمان d_1 ، d_2 متعامدين هو أن يكون جداء العددين m_1 ، m_2 هو -1 أي:

$$d_1 \perp d_2 \iff m_1 \times m_2 = -1$$

/ تحقق من ذلك بحل الطلبات السابقة والمتعلقة بإثبات التعامد /

* (2) إذا كان $m_2 = m_1$ فإن $d_1 \parallel d_2$ وفي هذه الحالة لا توجد نقطة تقاطع للمستقيمين أي لا يوجد حل مشترك للجملة فهي مستحيلة الحل.

* (3) إذا كان $p_1 = p_2$ and $m_2 = m_1$ عندئذٍ فإن المعادلتان متكافئتان بالتالي المستقيم d_1 سينطبق على المستقيم d_2 ويكون للجملة عدد لا نهائي من الحلول.

* * *

أكتفي بحل هذا القدر من أسئلة الدورات والتي ناقشنا فيها أغلب الحالات التي قد تأتي في الامتحانات وسأقوم بإرفاق باقي الأسئلة دون حل للتدرب عليها والانتهاء منها بأسرع وقت.

* * *

وبعد كل هذا يجب أن تكون الـ 100 درجة قد أصبحت في متناول الجميع ... 👍