رياضيات-الصف التاسع-نظامي+أحرار
شروحات كتاب الجبر

الدرس الثاني

الوحدة السادسة
الأخيرة

(مبادئ الاحتمالات و الإحصاء)

2- أحداث متنافية
وأحداث متعاكسة:

المحتويات

1 – تمهيد

﴿ بعض العمليات على المجموعات أو الأحداث – مثال ﴾

2 – الحدثان المتنافيان – ملاحظات – أمثلة .

3 – الحدثان المتعاكسان – ملاحظات – أمثلة .

4 – حل سؤال دورة دمشق – حماه 2018

5 – حل تدرب وتحقق من فهمك ﴿ ضمن الأمثلة ﴾

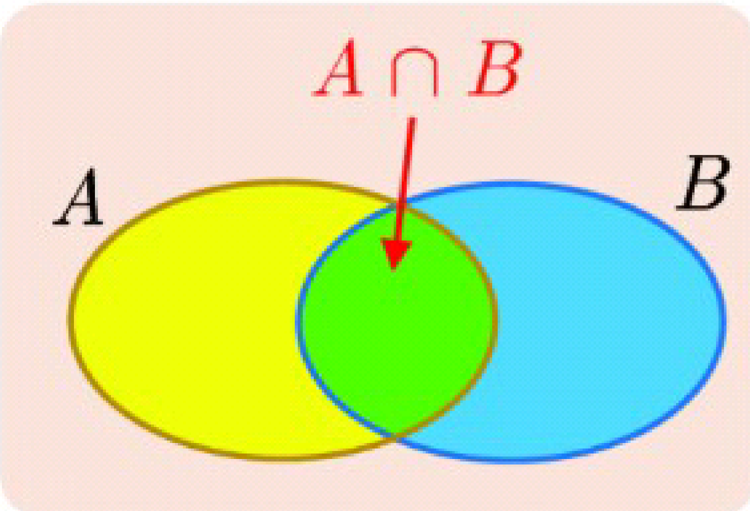
الوحدة السادسة

مبادئ الاحتمال والإحصاء

1. مفهوم الاحتمال
2. أحداث متنافية. أحداث متعاكسة
3. تجارب عشوائية مركبة
4. الوسيط والربيعات

تمهيد - « بعض العمليات على المجموعات أو الأحداث »

- مجموعة العناصر المشتركة بين الحدثين «A و B» نرمز لها بالرمز $\boxed{A \cap B}$ ويقرأ الرمز $\cap$

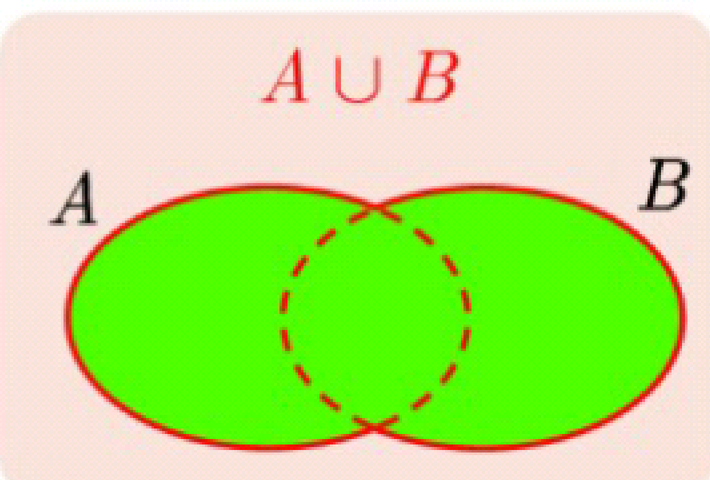


بلغة المجموعات : تقاطع المجموعتين «A و B»

بلغة الأحداث : تقاطع الحدثين «A و B»

التقاطع $\cap \Longleftrightarrow$ العناصر المشتركة بين المجموعتين (الحدثين)

- مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بين المجموعتين «A و B» نرمز لها بالرمز $\boxed{A \cup B}$ ويقرأ الرمز $\cup$



بلغة المجموعات : اجتماع المجموعتين «A و B»

وبلغة الأحداث: اجتماع الحدثين «A و B»

الاجتماع $\cup \Longleftrightarrow$ العناصر المشتركه وغير المشتركة بين المجموعتين (الحدثين)

- الحدث المُعاكس $\boxed{A', \bar{A}}$ الحدث الذي يقع عندما لا يقع الحدث A أي مجموعة نتائج التجربة التي لا تنتمي إلى المجموعة A.

ان مجموع احتمال أي حدث مع الحدث المتمم له هو 1 أي أن :

$$\boxed{P(A) + P(\bar{A}) = 100\% = 1}$$

سنتحدث عن الحدثين المتعاكسين بالتفصيل في سياق الدرس

مثـال

نتأمل المجموعة $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

ليكن A الحدث الموافق للأعداد الزوجية في Ω و B الحدث الموافق للأعداد الفردية في Ω والحدث C الموافق لمضاعفات العدد 4 في Ω والحدث D الموافق للأعداد الأولية في Ω والحدث E الموافق للأعداد الأولية أو الأعداد الزوجية والحدث F الموافق للأعداد الأولية ومضاعفات العدد (4).

① اكتب أولاً عناصر المجموعات F,E,D,C,B,A

$A=\{0,2,4,6,8\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$

$C=\{0,4,8\}$, $D=\{2,3,5,7\}$

$E=D\cup A=\{0,2,3,4,5,6,7,8\}$

$F=D\cap C=\phi=\{\ \ \}$

② اكتب بصيغة القائمة الأحداث الآتية:

$A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}=\Omega$

$A\cap B=\phi=\{\ \ \}$, $A\cap C=\{0,4,8\}=C$

$A\cup C=\{0,2,4,6,8\}=A$

$B\cup C=\{0,1,3,4,5,\quad 7,8,9\}$

$B\cap C=\phi=\{\ \ \}$

$A'=\bar{A}=\{1,3,5,7,9\}=B$

$E'=\{1,9\}$, $D\cap E=\{2,3,5,7\}=D$

ثانيا: أحداث متنافية و أحداث متعاكسة

الحدثان المتنافيان

تعريف:

نقول عن حدثين أنهما **متنافيان** إذا استحال وقوعهما في آن معاً

وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر ويتحقق مايلي:

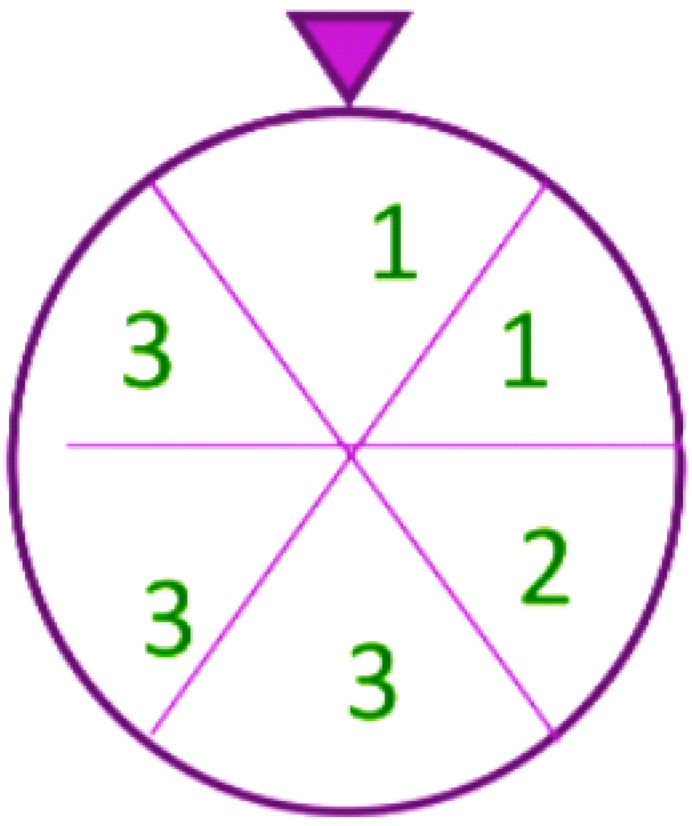
$A,B \Leftrightarrow A\cap B=\phi \;\;, A\cup B\neq\Omega$ **حدثان متنافيان**

ملاحظة: **(صح او خطأ + اختيار من متعدد)**

إذا كان A و B حدثين متنافيين، كان احتمال «الحدث A أو B» مساوياً مجموع احتماليهما.

مثــال

في تجربة الدولاب المرفق، نتأمل الحدثين:



A « ظهور الرقم 1 »

B « ظهور عدد زوجي »

$$\Omega=\{1,1,2,3,3,3\}\ ,A=\{1,1\}\ ,B=\{2\}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ ,P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{1}{6}$$

B,A حدثان متنافيان $\Leftarrow A\cap B=\phi\ ,A\cup B\neq\Omega$

ملاحظة:

هذان الحدثان متنافيان. إذاً احتمال ظهور 1 أو عدد زوجي يساوي $p(A)+p(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

لاحظ: بفرض D هو الحدث الدال على توقف إحدى قطاعات الدولاب والتي تحمل عدد زوجي أو العدد 1 عند المعلم عندئذ فإن :

$$D=\{1,1,2\}\Rightarrow P(D)=\frac{n(D)}{n(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

تحقق من فهمك

نلقي حجر نرد متجانس ، أوجهه محملة بالأرقام
1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6
و نعرّف الأحداث الآتية:
A : ((ظهور عدد أصغر أو يساوي 2))
B : ((ظهور عدد أكبر تماماً من 4))

- الحدثان A و B متنافيان . لماذا؟

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A=\{1,2\}\ ,B=\{5,6\}\Rightarrow$$

$A\cap B=\phi\ ,A\cup B\neq\Omega\Rightarrow$ حدثان متنافيان B,A

- احسب احتمال A ثم احتمال B.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

- احسب احتمال الحدث E: ((ظهور عدد n يحقق: $n \leq 2$ أو $n > 4$))

طريقة أولى:

$$E = \{1,2,5,6\}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

طريقة ثانية:

$$P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

لأن الحدثين A و B متنافيان

$$P(E) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

إذا كان A و B حدثين متنافيين، كان احتمال «الحدث A أو B» مساوياً مجموع احتماليهما.

الحدثان المتعاكسان

تعريف:

نقول عن حدثين أنهما **متعاكسان** إذا كان كل منهما يعاكس الآخر في حدوثه

الحدث **المعاكس** لحدث A هو الحدث الذي يتحقق إن لم يتحقق A.نرمز إليه بالرمز $\bar{A}$ ونقول إن A و $\bar{A}$ متعاكسان (كل منهما يعاكس الآخر) ويكون:

حدثان متعاكسان $B,A \Leftrightarrow A \cap B = \phi \, , A \cup B = \Omega$

حدثان متعاكسان $B,A \Rightarrow P(A)+P(B)=1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} P(A)=1-P(B) \\ P(B)=1-P(A) \end{cases}$$

حالة خاصة للحدثين المتنافيين:

إذا كان A وB حدثان متنافيان وكان $P(A)+P(B)=1$ عندئذٍ

نقول عن A وB أنهما متعاكسان أي:

الحدثان المتعاكسان: هما حدثان متنافيان مجموع احتماليهما (1).

مثــال — **تدرب**

نلقي حجر نرد متجانس ، أوجهه محملة بالأرقام
1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6

و نعرّف الأحداث الآتية:

I : ((ظهور عدد فردي))

J : ((ظهور عدد زوجي))

- الحدثان I و J متعاكسان. لماذا؟

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$I = \{1,3,5\} , J = \{2,4,6\} \Rightarrow$$

$$I \cap J = \phi , I \cup J = \Omega$$

I و J حدثان متعاكسان.

- احسب احتمال الحدث J بطريقتين مختلفتين.

طريقة أولى:

$$P(I) = \frac{n(I)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(J) = \frac{n(J)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

طريقة ثانية:

بما أن الحدثان I و J حدثان متعاكسان فإن:

$$\boxed{P(I)+P(J)=1} \Rightarrow$$

$$P(J)=1-P(I) \Rightarrow$$

$$P(J)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

طلب إضافي مع ملاحظة خطيرة

هل الحدثان I, J متنافيان؟

كنا قد عرفنا الحدثين المتعاكسين بأنهما حدثين متنافيين مجموع احتماليهما يساوي 1 .

يجب الانتباه جيدا الى هذه الملاحظه :

- الحدثان المتعاكسان هما متنافيان دوما .
والعكس غير صحيح بالضروره .

ملاحظة أخرى

مجموع احتمالي الحدثين المتعاكسين هو 1 .
ولكن اذا كان مجموع احتمالي حدثين هو 1 فهذا لايعني ان يكونا متعاكسين ..... يرجى الانتباه

مثــال

في تجربة إلقاء حجر نرد متجانس أوجد فضاء العينة:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

ثم أحسب احتمالات الأحداث الآتية:

الحدث B: الحصول على عدد زوجي.

لدينا: $B = \{2,4,6\}$ عندئذ يكون: $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

الحدث C: الحصول على عدد أولي.

لدينا: $C = \{2,3,5\}$ عندئذ يكون: $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

لاحظ معي مايلي ، ان مجموع احتمالي الحدثين السابقين هو 1 حيث:

$$P(B)+P(C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

هل نقول أنهما حدثان متعاكسان؟ لاحظ

$$B \cap C = \{2\} \neq \phi$$

اي ان A, B حدثان غير متعاكسين .

الخلاصه :

اذا كان A, B حدثان متعاكسان فإن مجموع احتماليهما هو 1

اما العكس غير صحيح بالضروره

مثـال — حماة 2018

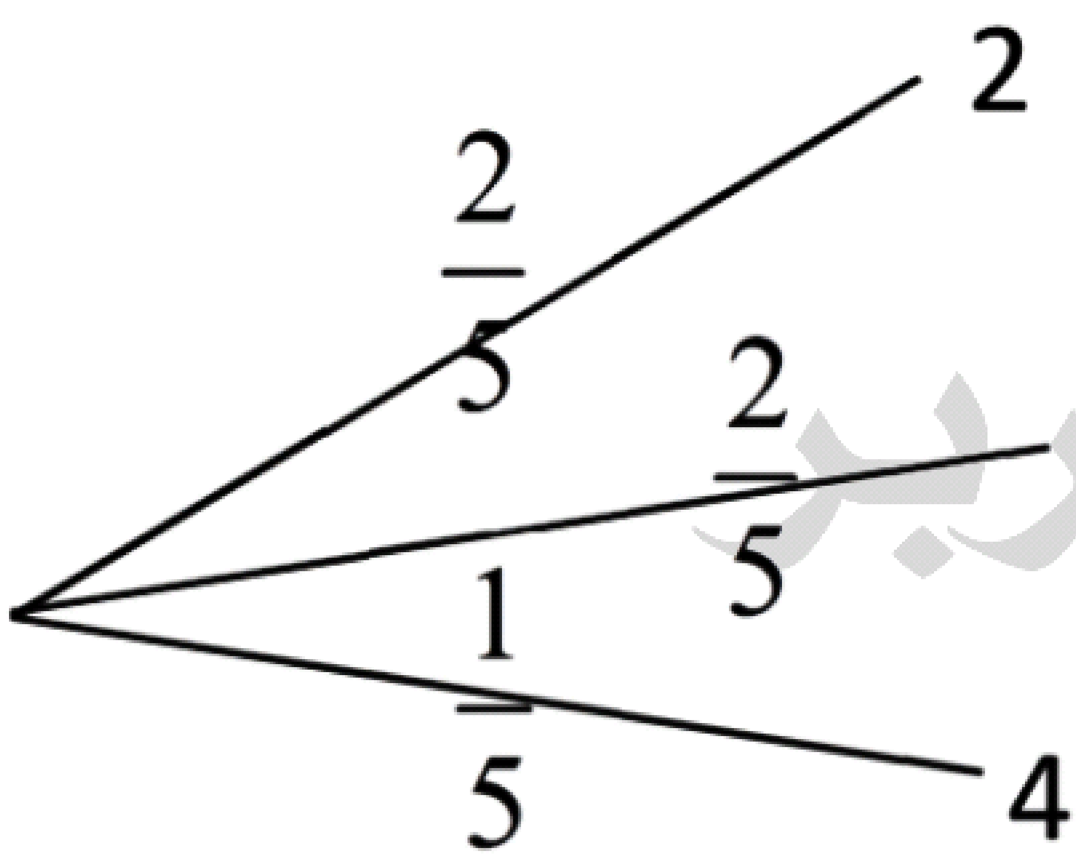
مغلف يحوي 5 بطاقات متماثلة كتبت عليها الأرقام : 4, 3, 3, 2, 2

نسحب من المغلف عشوائياً بطاقة واحدة ونسجل رقمها :

1) ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها باحتمالات النتائج الممكنة .

2) الحدث A هو ظهور بطاقة تحمل رقماً أصغر تماماً من 4 ، احسب $P(A)$.

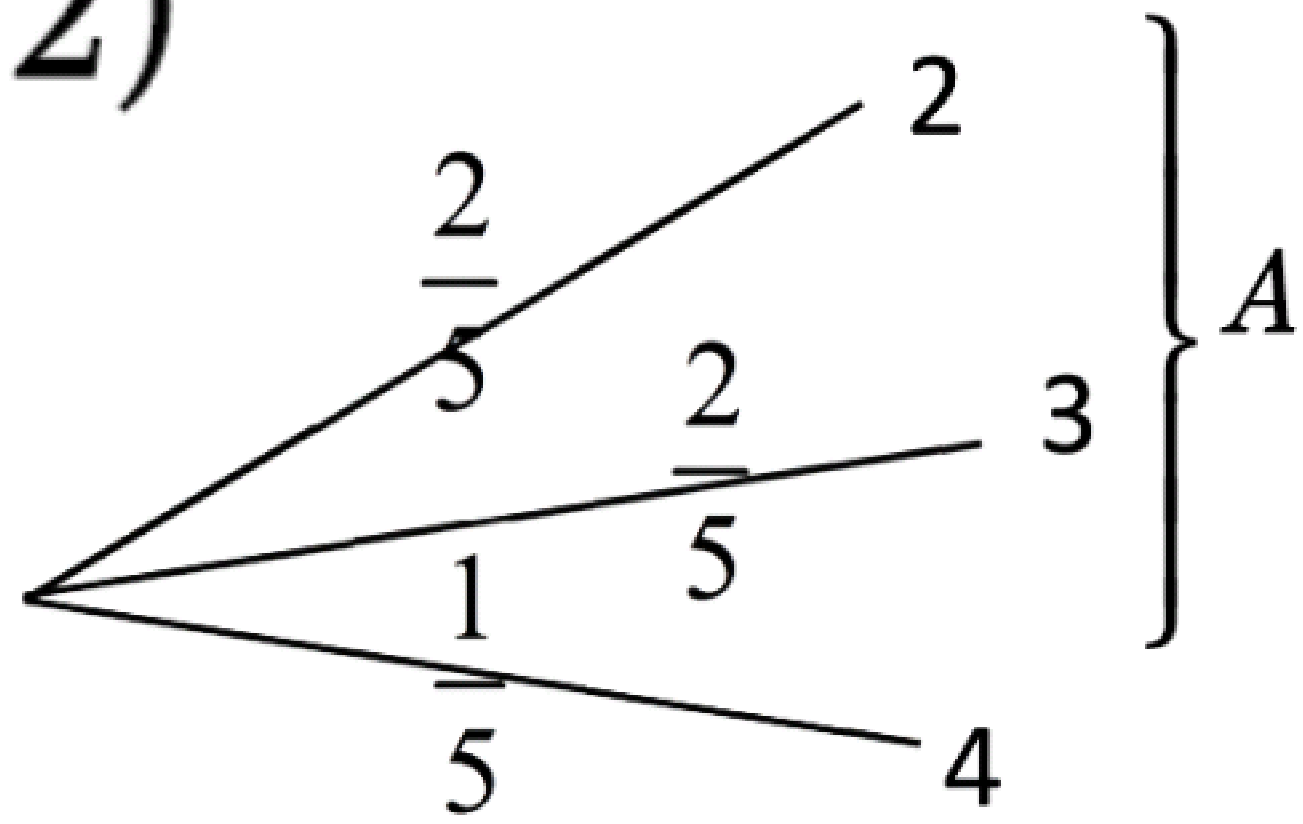
3) الحدث $\bar{A}$ هو الحدث المعاكس للحدث A ، احسب $P(\bar{A})$.



$$P(2)=\frac{2}{5}\ ,P(3)=\frac{2}{5}$$

$$P(4)=\frac{1}{5}$$

2)



$$P(A)=P(2)+P(3)$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$$

or

$$A=\{2,2,3,3\}\Rightarrow$$

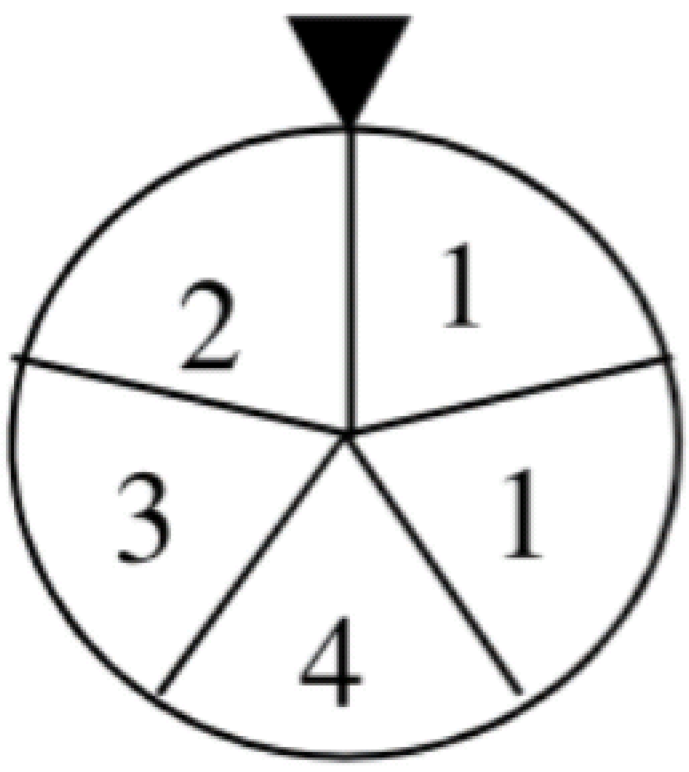
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{4}{5}$$

3) $\underbrace{A,\bar{A}}_{\text{متعاكسان}}$ $\quad P(A)+P(\bar{A})=1\Rightarrow P(\bar{A})=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

$$or\ \ \bar{A}=\{4\}\Rightarrow P(\bar{A})=\frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)}=\frac{1}{5}$$

مثــال — محافظة دمشق 2018

في الشكل المجاور دولاب متجانس مقسم إلى خمسة أقسام متساوية، ندور هذا الدولاب وبعد أن يستقر نقرأ العدد المكتوب الذي يستقر عليه المعلم.

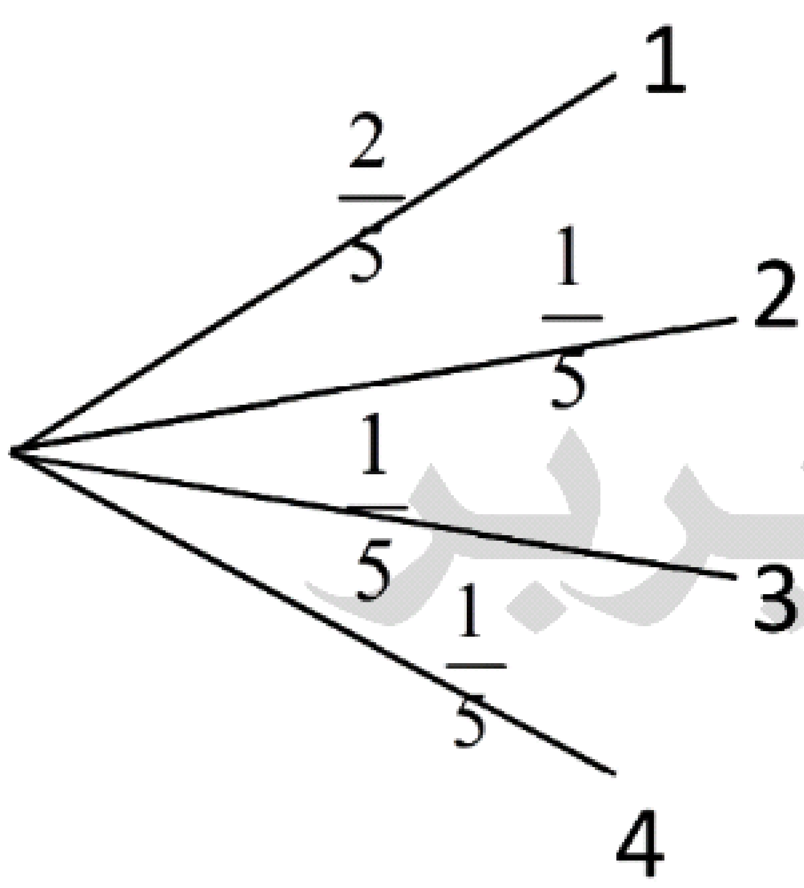


A حدث ظهور العدد 1 ، B حدث ظهور عدد زوجي.

1) ارسم شجرة الامكانات مزوداً فروعها باحتمالات النتائج الممكنة.

2) احسب احتمال الحدث A ثم احتمال الحدث B.

3) هل الحدثان A و B متنافيان مبرراً إجابتك؟



$$P(1)=\frac{2}{5}\,,P(2)=\frac{1}{5}$$

$$P(3)=\frac{1}{5}\,,P(4)=\frac{1}{5}$$

2)

$$\left.\begin{aligned} A=\{1,1\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{2}{5} \\ B=\{2,4\}\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{2}{5} \end{aligned}\right\}$$

وهما حدثان متنافيان لأن وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر حيث:

$$A\cap B=\phi\,,A\cup B\neq\Omega$$