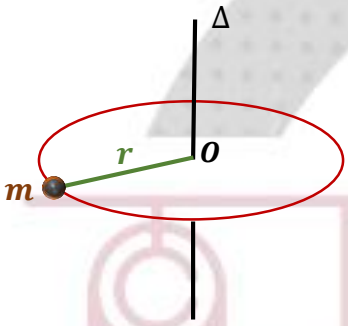
مفهوم عزم العطالة:

هو ممانعة الجسم لتغيير سرعته الزاوية ونرمز له بالرمز I_Δ

ملاحظة:

يتعلق عزم عطالة جسم بكتلته، فهو يزداد بزيادتها وينقص بنقصانها...



1-عزم عطالة نقطة مادية:

إن عزم عطالة نقطة مادية حول محور دوران ثابت يتناسب طرداً مع كتلة النقطة m ، ومع مربع بعدها عن محور الدوران r .

$$I_\Delta = mr^2$$

2-عزم عطالة جسم صلب يدور حول محور يمر من مركز عطالته:

1- إذا كان الجسم الصلب (ساق متجانسة متناظرة) فيكون:

$$I_{\Delta/c} = \frac{1}{12}ml^2$$

ملاحظة: يعطى بنص المسألة.

2- إذا كان الجسم الصلب (قرص متجانس متناظر) فيكون:

$$I_{\Delta/c} = \frac{1}{2}Mr^2$$

ملاحظة: يعطى بنص المسألة.

3- نظرية هايغنز:

سؤال: كيف يتغير عزم عطالة الجسم إذا كان محور دورانه لا يمر من مركز عطالته:

أجاب هايغنز على هذا التساؤل بنظريته التي تنص على أن:

عزم العطالة $I_{\Delta'}$ لجسم صلب بالنسبة إلى محور دوران Δ' لا يمر من مركز عطالته يساوي عزم عطالته I_Δ حول محور دوران Δ يوازي المحور Δ' ويمر من مركز عطالته، مضافاً إليه جداء كتلته m في مربع البعد بين المحورين d ويعبر عنها رياضياً بالعلاقة:

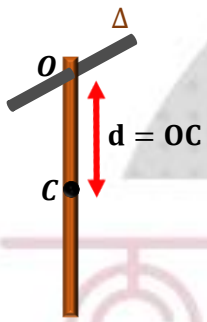
$$I_{\Delta'} = I_{\Delta/c} + md^2$$

كتلة الجسم m ، $d = OC$

تطبيق1:

استنتج بالرموز العلاقة المحددة لعزوم عطالة ساق متجانسة طولها $1m$ كتلتها $1.2kg$ حول محور يمر من نهايتها العلوية، وعمودي عليها إذا علمت أن عزم عطالة الساق حول محور مار من منتصفها $I_{\Delta/c}=\frac{1}{12}Ml^2$ ثم احسب قيمته.

الحل:



$$I_{\Delta/o}=I_{\Delta/c}+Md^2$$

$$I_{\Delta/c}=\frac{1}{12}Ml^2\ ,d=\frac{1}{2}l$$

$$I_{\Delta/o}=\frac{1}{12}Ml^2+M(\frac{l}{2})^2$$

$$I_{\Delta/o}=\frac{1}{12}Ml^2+\frac{1}{4}Ml^2=\frac{1}{3}Ml^2=\frac{1}{3}\times 1.2\times 1^2$$

$$I_{\Delta/o}=0.4\ kg.m^2$$

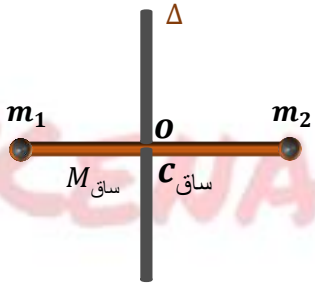
4- عزم عطالة جملة مادية:

إن عزم عطالة جملة مادية حول محور دوران ثابت يساوي مجموع عزوم عطالة مكونات الجملة.

تطبيق 2:

استنتج بالرمز العلاقة المحددة لعزم عطالة جملة مادية مؤلفة من ساق متجانسة كتلتها M، طولها l تحمل في طرفيها كتلتان نقطتيتان كتلة كل منهما m، والجملة تهتز حول محور دوران مار من منتصفها علماً أن عزم عطالة الساق حول محور دوران مار من مركز عطالتها: $I_{\Delta/c}=\frac{1}{12}Ml^2$

الحل:



$$I_{\Delta/\text{جملة}}=I_{\Delta/\text{ساق}}+I_{\Delta/m}+I_{\Delta/m}$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}}=I_{\Delta/c}+2I_{\Delta/m}\quad (*)$$

$$I_{\Delta/c}=\frac{1}{12}Ml^2$$

$$I_{\Delta/m}=mr^2=m(\frac{l}{2})^2=\frac{1}{4}ml^2$$

نعوض في (*)

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{12}Ml^2 + 2(\frac{1}{4}ml^2)$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{2}l^2(\frac{1}{6}M + m)$$

تطبيق3:

استنتج بالرموز العلاقة المحددة لعزم عطالة جملة مادية مؤلفة ساق متجانسة كتلتها M وطولها l تحمل في طرفها السفلي كتلة نقطية m والجملة تهتز حول محور دوران مار من منتصفها. علماً أن عزم عطالة الساق حول محور مار من مركز عطالتها: $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12}Ml^2$

الحل:

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m}$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{12}Ml^2 + mr^2 \quad , \quad r = \frac{l}{2}$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{12}Ml^2 + (\frac{1}{4}ml^2)$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{4}l^2(\frac{1}{3}M + m)$$

تطبيق 4:

استنتج بالرموز العلاقة المحددة لعزم عطالة جملة مادية مؤلفة ساق متجانسة كتلتها M وطولها l تحمل في طرفها السفلي كتلة نقطية m والجملة تهتز حول محور دوران مار من نهايتها العلوية إذا علمت أن عزم عطالة الساق حول محور مار من منتصفها: $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12}Ml^2$

الحل:

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/m}$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \underbrace{I_{\Delta/c} + Md^2} + mr^2 \quad , \quad d = \frac{l}{2} \quad r = l$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{12}Ml^2 + M(\frac{l}{2})^2 + ml^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}Ml^2 + ml^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{4}{12}Ml^2 + ml^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = l^2(\frac{1}{3}M + m)$$

حالة خاصة:

$$m = M$$

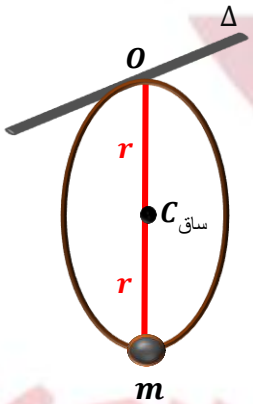
$$I_{\Delta/\text{جملة}} = l^2\left(\frac{M}{3} + M\right) = Ml^2(\frac{1}{3} + 1)$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{4}{3}Ml^2$$

تطبيق5 :

استنتج بالرموز العلاقة المحددة لعزم عطالة جملة مادية مؤلفة من قرص متجانس كتلة M ونصف قطرة r مثبت في نقطة محيطة كتلة نقطية m حيث أن $m = M$ و الجملة تهتز حول محور دوران مار من الطرف العلوي للقرص.

إذا علمت أن عزم عطالة القرص حول محور مار من مركز عطالته: $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2}Mr^2$



الحل:

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{قرص}} + I_{\Delta/\text{كتلة}}$$

$$I_{\Delta/\text{قرص}} = I_{\Delta/c} + Md^2\ , \qquad d = r$$

$$I_{\Delta/\text{قرص}} = \frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2$$

$$I_{\Delta/\text{قرص}} = \frac{3}{2}Mr^2$$

$$I_{\Delta/\text{كتلة}} = mr^2\ , \qquad r = 2r$$

$$I_{\Delta/\text{كتلة}} = m(2r)^2 = 4mr^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{3}{2}Mr^2 + 4mr^2$$

ولكن $m = M$

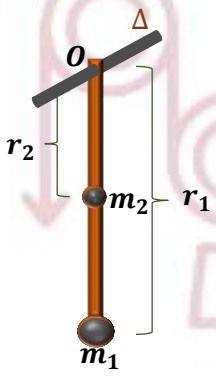
$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{3}{2}mr^2 + 4mr^2 = \frac{3}{2}mr^2 + \frac{8}{2}mr^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{11}{2}mr^2$$

تطبيق 6:

استنتج بالرموز العلاقة المحددة لعزم عطالة جملة مادية مؤلفة ساق متجانسة كتلتها M وطولها l تحمل في طرفها السفلي كتلة نقطية m_1 و مثبت في منتصفها كتلة نقطية m_2 والجملة تهتز حول محور دوران مار من طرفها العلوي

الحل:



$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = 0 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad , \quad r_1 = l, r_2 = \frac{l}{2}$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = m_1 l^2 + m_2 (\frac{l}{2})^2$$

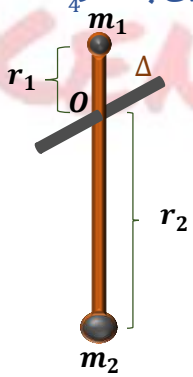
$$I_{\Delta/\text{جملة}} = m_1 l^2 + \frac{1}{4} m_2 l^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = l^2 (m_1 + \frac{1}{4} m_2)$$

تطبيق 7 :

استنتج بالرموز العلاقة المحددة لعزم عطالة جملة مادية مؤلفة من ساق متجانسة كتلتها M وطولها l تحمل في طرفيها كتلتان نقطيتان m_1, m_2 والجملة تهتز حول محور دوران مار من نقطة تبعد عن الكتلة الأولى بمقدار $\frac{l}{4}$.

الحل:



$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

لأن كتلتها مهملة $I_{\Delta/\text{ساق}} = 0$

$$I_{\Delta/m_1} = m_1 r_1^2 \qquad r_1 = \frac{l}{4}$$

$$I_{\Delta/m_2} = m_2 r_2^2 \qquad r_2 = \frac{3l}{4}$$

$$I_{\Delta/m_2} = \frac{m_2 9}{16} l^2$$

نعوض:

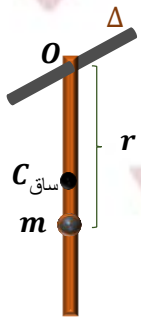
$$I_{\Delta/\text{جملة}} = m_1 \frac{l^2}{16} + m_2 \frac{9}{16} l^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{l^2}{16}(m_1 + 9m_2)$$

تطبيق 8:

استنتج بالرموز العلاقة المحددة لعزم عطالة جملة مادية مؤلفة من ساق متجانسة كتلتها M وطولها l نثبت كتلة نقطية m على بعد $\frac{l}{3}$ من طرفها السفلي والجملة تهتز حول محور دوران مار من نهايتها العلوية. علماً أن عزم عطالة الساق حول محور مار من منتصفها: $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} M l^2$

الحل:



$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/m}$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \underbrace{I_{\Delta/c} + Md^2} + mr^2 \qquad , \qquad d = \frac{l}{2} \quad r = \frac{2}{3} l$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{12} M l^2 + M \frac{l^2}{4} + m \frac{4}{9} l^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{3} M l^2 + \frac{4}{9} m l^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{3} l^2 (M + \frac{4}{3} m)$$

KENANA SHAMMOUT