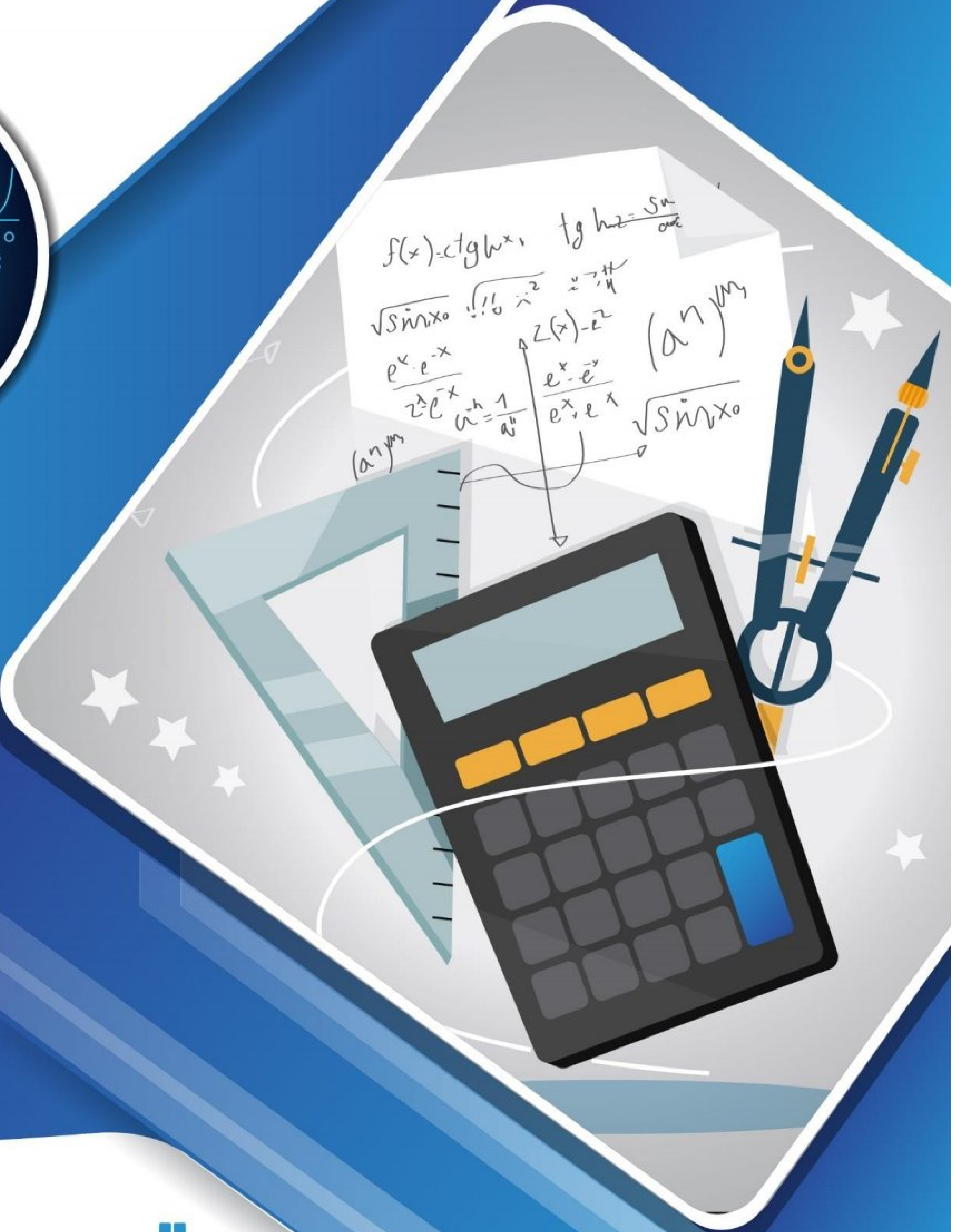
شيفرة الـ 600

للإعداد والتكوين والتأسيس في الرياضيات

إعداد: أ.خـالد عـامر



قســم التوابـع

التكامل والتوابع الأصلية

التكامل .. تمة

القسم الأول: إثبات أن F تابع أصلي.

القسم الثاني: كيفية إيجاد F

القسم الثالث: التكامل المحدد.

القسم الرابع: تطبيقات التكامل.

تعريف: القسم الأول..

نقول عن التابع $F(x)$ أنه تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال I إذا تحقق الشرطين:

- F اشتقاقي على المجال I
- $F'(x) = f(x)$

أنماط التمارين:

النمط الأول: نموذج وزاري.. ^^

نص السؤال: أثبت أن التابع $F(x)$ هو تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال I

فكرة الحل:

- نثبت أن التابع $F(x)$ اشتقاقي على المجال I
- نوجد $F'(x)$
- نثبت أن $F'(x) = f(x)$

تمرين: في كل من الحالات الآتية تحقق أنّ F تابع أصلي للتابع f على المجال I:

1. $f(x) = \tan^2 x$
   $F(x) = \tan x - x$
   $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
2. $f(x) = \cos x - x\sin x$
   $F(x) = x\cos x$
   $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$
   $F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$
   $I =]0, +\infty[$
4. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$
   $F(x) = \frac{-1}{x(x-1)}$
   $I =]0,1[$
5. $f(x) = \ln(x)$
   $F(x) = x.\ln(x) - x$
   $I =]0, +\infty[$
6. $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$
   $F(x) = \ln(ln(x))$
   $I =]1,+\infty[$
7. $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$
   $F(x) = x - \ln(1+e^x)$
   $I = \mathbb{R}$
8. $f(x) = \sqrt{e^x}$
   $F(x) = 2\sqrt{e^x}$
   $I = \mathbb{R}$

1) $x \mapsto -x$ اشتقاقي على R فهو اشتقاقي على I

$x \mapsto \tan x$ اشتقاقي على:

$R \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k \,;\, k \in Z\}$

فهو اشتقاقي على I.

مما سبق يكون التابع F(x) اشتقاقي على I لأنه مجموع تابعان اشتقاقيان على I

$F'(x) = 1 + \tan^2 x - 1$

$F'(x) = \tan^2 x = f(x)$

إذاً التابع F(x) تابع أصلي لـ f(x) على المجال I.

2) $x \mapsto x$ اشتقاقي على R فهو اشتقاقي على I

$x \mapsto \cos x$ اشتقاقي على R فهو اشتقاقي على I

مما سبق يكون التابع F(x) اشتقاقي على I لأنه جداء تابعان اشتقاقيان على I.

■ $F'(x) = \cos x - x \sin x$

$F'(x) = f(x)$

إذاً التابع $F(x)$ تابع أصلي لـ $f(x)$
على المجال I.

3) ■ $x \mapsto x$ اشتقاقي على R فهو
اشتقاقي على I

$x \mapsto \frac{1}{x}$ اشتقاقي على R^* فهو
اشتقاقي على I

مما سبق يكون التابع $F(x)$ اشتقاقياً
على I لأنه مجموع تابعان اشتقاقيان
على I.

■ $F'(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

$F'(x) = 2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$

$F'(x) = 2\,\frac{(x^4-1)}{x^3} = f(x)$

إذاً التابع $F(x)$ تابع أصلي لـ $f(x)$ على
المجال I.

4) ■ $x \mapsto \frac{1}{x}$ اشتقاقي على R^* فهو
اشتقاقي على I.

$x \mapsto \frac{1}{x-1}$ اشتقاقي على $R \setminus \{1\}$ فهو
اشتقاقي على I.

مما سبق يكون التابع $F(x)$ اشتقاقي
على I لأنه جداء تابعان اشتقاقيان
على I.

■ $F'(x) = \frac{-(2x-1)(-1)}{(x(x-1))^2}$

$F'(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2} = f(x)$

إذاً التابع $F(x)$ تابع أصلي لـ $f(x)$ على
المجال I.

5) ■ $x \mapsto x \ln x$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$
فهو اشتقاقي على I.

$x \mapsto -x$ اشتقاقي على R فهو
فهو اشتقاقي على I

مما سبق يكون التابع $F(x)$ اشتقاقياً
على I لأنه مجموع تابعان اشتقاقيان
على I.

■ $F'(x) = \ln x + \frac{1}{x} x - 1$

$F'(x) = \ln x + \cancel{1-1}$

$F'(x) = \ln x = f(x)$

إذاً التابع $F(x)$ تابع أصلي لـ $f(x)$ على
المجال I.

6) $x \mapsto Ln(Lnx)$ اشتقاقيا على $]1,+\infty[$ فهو اشتقاقي على I.

إذاً التابع $F(x)$ اشتقاقي على I

$$F'(x) = \frac{(Lnx)'}{Lnx}$$

$$F'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{Lnx} = \frac{1}{xLnx} = f(x)$$

إذاً التابع $F(x)$ تابع أصلي لـ $f(x)$ على المجال I.

7) $x \mapsto x$ اشتقاقيا على R فهو اشتقاقي على I.

$x \mapsto -Ln(1+e^x)$ اشتقاقي على R فهو اشتقاقي على I.

مما سبق يكون التابع $F(x)$ اشتقاقيا على I لأنه مجموع تابعان اشتقاقيان على I.

$$F'(x) = 1 - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}$$

$$F'(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$F'(x) = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} = f(x)$$

إذاً التابع $F(x)$ تابع أصلي لـ $f(x)$ على المجال I

8) $x \mapsto 2\sqrt{e^x}$ اشتقاقي على R فهو اشتقاقي على I

إذاً التابع $F(x)$ اشتقاقي على I

$$F'(x) = 2 \times \frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}$$

$$F'(x) = \sqrt{e^x} = f(x)$$

إذاً التابع $F(x)$ تابع أصلي لـ $f(x)$ على المجال I

ملاحظة .. ^^

- التابع $Tanx$ اشتقاقي على $R \setminus \{\frac{\pi}{2}+\pi K\}$

ولدينا: $(Tanx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

أي

$(Tanx)' = 1+Tan^2x$

- التابع $cotx$ اشتقاقي على $R \setminus \{\pi K; K \in Z\}$

ولدينا: $(cotx)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

أي

$(cotx)' = -1-cot^2x$

النمط الثاني:

نص السؤال: أثبت أن $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان للتابع $f(x)$ على المجال I

فكرة الحل:

الأسلوب الأول: الأسهل ..

- نثبت أن $F(x)$ اشتقاقي على المجال I .
- نثبت أن $G(x)$ اشتقاقي على المجال I .
- نشكل الفرق بين التابعين ونميز:

F - G
أو G - F

الحالة الأولى:

إذا كان الناتج عدد ثابت فإنّ التابعان $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان للتابع $f(x)$.

الحالة الثانية:

إذا كان الناتج مقدار يحوي x فإنّ التابعان $F(x)$ و $G(x)$ ليسا تابعان أصليان للتابع $f(x)$.

الأسلوب الثاني:

نثبت أن $F(x)$ اشتقاقي على المجال I ونوجد $F'(x)$

نثبت أن $G(x)$ اشتقاقي على المجال I ونوجد $G'(x)$.

نثبت أن: $G'(x) = F'(x)$

وبالتالي يكون $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان لـ $f(x)$ على المجال I

تمرين 1: في كل من الحالات الآتية تحقق أن F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال I :

1. $F(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}$
$G(x) = \frac{x^2+7x-5}{x-1}$
$I =]1, +\infty[$

2. $F(x) = \tan^2 x$
$G(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

3. $F(x) = \frac{2x^2-3x+7}{4x-5}$
$G(x) = \frac{-4x^2+2x-9}{10-8x}$
$I =]\frac{5}{4}, +\infty[$

4. $F(x) = \frac{1}{x^2+1}$
$G(x) = \frac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$
$I = \mathbb{R}$

5. $F(x) = \sin^2 x$
$G(x) = 2 - \cos^2 x$
$I = \mathbb{R}$

(1 ■ $x \longmapsto \frac{x^2+3x-1}{x-1}$ اشتقاقي على

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$ فهو اشتقاقي على I

■ $x \longmapsto \frac{x^2+7x-5}{x-1}$ اشتقاقي على

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$ فهو اشتقاقي على I

■ نشكل الفرق :

$$F(x) - G(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1} - \frac{x^2+7x-5}{x-1}$$

$$F(x) - G(x) = \frac{\cancel{x^2}+3x-1-\cancel{x^2}-7x+5}{x-1}$$

$$F(x) - G(x) = \frac{-4x+4}{x-1}$$

$$F(x) - G(x) = \frac{-4\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = -4$$

إذاً $F(x)$, $G(x)$ تابعان أصليان لـ $f(x)$ على المجال I

(2 ■ $x \longmapsto \tan^2 x$ اشتقاقي على :

$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi K ; K \in \mathbb{Z}\}$

إذاً $F(x)$ اشتقاقي على I

■ $x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ اشتقاقي على :

$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi K ; K \in \mathbb{Z}\}$

إذاً $G(x)$ اشتقاقي على I

■ نشكل الفرق :

$G(x)-F(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-\tan^2 x$

$G(x)-F(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$G(x)-F(x)=\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$G(x)-F(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=1$

إذاً التابع $F(x)$، $G(x)$ تابعان أصليان

لـ $f(x)$ على المجال I

3) $x \mapsto \dfrac{2x^2-3x+7}{4x-5}$ اشتقاقي على $R\setminus\{\frac{5}{4}\}$ فهو اشتقاقي على I

■ $x \mapsto \dfrac{-4x^2+2x-9}{10-8x}$ اشتقاقي على $R\setminus\{\frac{5}{4}\}$ فهو اشتقاقي على I

■ نشكل الفرق:

$F(x)-G(x)=\underset{(-2)}{\dfrac{2x^2-3x+7}{4x-5}}-\dfrac{-4x^2+2x-9}{10-8x}$

$F(x)-G(x)=\dfrac{-4x^2+6x-14+4x^2-2x+9}{10-8x}$

$F(x)-G(x)=\dfrac{4x-5}{10-8x}$

$F(x)-G(x)=\dfrac{4x-5}{-2(-5+4x)}=\dfrac{-1}{2}$

إذاً $F(x)$، $G(x)$ تابعان أصليان لـ

$f(x)$ على المجال I

4) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ اشتقاقي على R فهو اشتقاقي على I

■ $x \mapsto \dfrac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$ اشتقاقي على R فهو اشتقاقي على I

■ نشكل الفرق:

$F(x)-G(x)=\underset{(2)}{\dfrac{1}{x^2+1}}-\dfrac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$

$F(x)-G(x)=\dfrac{2-5-3x^2}{2(1+x^2)}$

$F(x)-G(x)=\dfrac{-3-3x^2}{2(1+x^2)}=\dfrac{-3}{2}\,\dfrac{(1+x^2)}{(1+x^2)}$

$F(x)-G(x)=\dfrac{-3}{2}$

إذاً التابع $F(x)$، $G(x)$ تابعان أصليان

لـ $f(x)$ على المجال I

5) $x \mapsto \sin^2 x$ اشتقاقي على R فهو اشتقاقي على I

■ $x \mapsto -\cos^2 x$ اشتقاقي على R فهو اشتقاقي على I

■ نشكل الفرق:

$F(x)-G(x)=\sin^2 x-2+\cos^2 x$

$F(x)-G(x)=1-2=-1$

إذاً $F(x)$، $G(x)$ تابعان أصليان لـ $f(x)$ على I

تمرين 2 : أيكون التابعان F و G الآتيان تابعين أصليين للتابع f ذاته على $\mathbb{R}$ ؟

$$F(x) = \sin(3x) - 2\sin(x)$$
$$G(x) = \sin x - 3\sin^3 x$$

- $x \mapsto \sin 3x$ اشتقاقي على R
- $x \mapsto -2\sin x$ اشتقاقي على R

فالتابع F(x) اشتقاقي على R لأنه مجموع تابعان اشتقاقيان على R.

- $x \mapsto \sin x$ اشتقاقي على R
- $x \mapsto -3\sin^3 x$ اشتقاقي على R

فالتابع G(x) اشتقاقي على R لأنه مجموع تابعان اشتقاقيان على R.

- نشكل الفرق:

$F(x) - G(x) =$

$\sin 3x - 2\sin x - \sin x + 3\sin^3 x$

$F(x) - G(x) = \sin 3x - 3\sin x + 3\sin^3 x$

إذاً التابعان F(x) و G(x) ليست توابع أصلية للتابع f(x) على R.

نحاول في السير معاً حتى نصل الغاية معاً ♡

- الخواص: التابع الأصلي للتابع f هو F.
- إذا كان لدينا مجموع توابع يمكننا إيجاد التابع الأصلي لكل منها على حدا.
- إذا كان لدينا جداء عدد حقيقي بتابع فإننا نترك العدد بحاله ونوجد التابع الأصلي لهذا التابع.
- التابع الأصلي لجداء توابع (لا يوجد قانون فوري).
- التابع الأصلي لقسمة توابع (لا يوجد قانون فوري)

كيفية إيجاد التابع الأصلي: القسم الثاني..

أولاً: إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل:

$$\boxed{f(x) = \alpha}$$

حيث α هو عدد ثابت حقيقي

فإنّ تابعه الأصلي يعطى وفق:

$$\boxed{F(x) = \alpha x + c}$$

ثابت.. (لا نضعه في الحل)

تمرين: في كل حالة من الحالات الآتية

أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

$I = \mathbb{R}$	1. $f(x) = 7$
$I = \mathbb{R}$	2. $f(x) = 1$
$I = \mathbb{R}$	3. $f(x) = -2$
$I = \mathbb{R}$	4. $f(x) = \frac{1}{2}$
$I = \mathbb{R}$	5. $f(x) = e$
$I = \mathbb{R}$	6. $f(x) = \sqrt{2}$
$I = \mathbb{R}$	7. $f(x) = \ln(3)$
$I = \mathbb{R}$	8. $f(x) = \pi$

1) $F(x) = 7x$

2) $F(x) = x$

3) $F(x) = -2x$

4) $F(x) = \frac{x}{2}$

5) $F(x) = e\,x$

6) $F(x) = \sqrt{2}x$

7) $F(x) = \ln(3)\,x$

8) $F(x) = \pi x$

أيْ: نؤجل $g'(x)$ ونضيف للأس واحد ونقسم على الأس الجديد.

ثانياً: إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل:

$$\boxed{f(x) = g'(x)\big(g(x)\big)^n}$$

حيث $n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ فإنّ تابعه الأصلي يعطى وفق:

$$\boxed{F(x) = \frac{\big(g(x)\big)^{n+1}}{n+1} + c}$$

منزيد ومنقسم على الجديد ^^

تمرين: في كل حالة من الحالات الآتية

أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I .

1. $f(x) = (2x+1)(x^2+x+5)^7$	$I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = (3x^2)(x^3+7)^{\frac{1}{2}}$	$I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = (x-1)^4$	$I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = 3(3x+4)^5$	$I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = e^x(e^x-1)^2$	$I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = \frac{1}{x}(\ln(x))^2$	$I =]0, +\infty[$
7. $f(x) = \frac{1}{x}\ln(x)$	$I =]0, +\infty[$
8. $f(x) = \cos x . \sin^5 x$	$I = \mathbb{R}$
9. $f(x) = -\frac{1}{x^2}.\left(\frac{1}{x}\right)^{-7}$	$I = \mathbb{R}^*$
10. $f(x) = (1+\tan^2 x).\tan^3 x$	$I = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\}$
11. $f(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}(\cot^2 x)$	$I = \mathbb{R}\backslash\{\pi k\}$

1 ▪ $f(x) = (2x+1)(x^2+x+5)^7$

$F(x) = \dfrac{(x^2+x+5)^8}{8}$

2 ▪ $f(x) = (3x^2)(x^3+7)^{\frac{1}{2}}$

$F(x) = \dfrac{(x^3+7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}(x^3+7)^{\frac{3}{2}}$

3 ▪ $f(x) = (x-1)^4$

$F(x) = \dfrac{(x-1)^5}{5}$

4 ▪ $f(x) = 3(3x+4)^5$

$F(x) = \dfrac{(3x+4)^6}{6}$

5 ▪ $f(x) = e^x(e^x-1)^2$

$F(x) = \dfrac{(e^x-1)^3}{3}$

قاعدة نفاضل ونكامل ومالك e^x لا تبالي "مو معبرتو" ^^

6 ▪ $f(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^2$

$F(x) = \dfrac{(\ln x)^3}{3}$

7 ▪ $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$

$F(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2}$

8 ▪ $f(x) = \cos x . \sin^5 x$

$F(x) = \dfrac{\sin^6 x}{6}$

9 ▪ $f(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)^{-7}$

$F(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-6}}{-6}$

10 ▪ $f(x) = (1+\tan^2 x)\tan^3 x$

$F(x) = \dfrac{\tan^4 x}{4}$

11 ▪ $f(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} . \cot^2 x$

$F(x) = \dfrac{\cot^3 x}{3}$

ملاحظات هامة:

الملاحظة الأولى: تطبيق مباشر:

يستخدم لأجل الاقتصاد في الوقت.. ت

إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل: $\boxed{f(x) = x^n}$

فإنّ تابعه الأصلي من الشكل:

$$\boxed{F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$$

تمرين: في كل حالة من الحالات الآتية

أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I :

$I = \mathbb{R}$	1. $f(x) = x$
$I = \mathbb{R}$	2. $f(x) = x^3$
$I = \mathbb{R}$	3. $f(x) = x^5$
$I = \mathbb{R}$	4. $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$
$I = \mathbb{R}$	5. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$
$I = \mathbb{R}$	6. $f(x) = x^{-5}$

1 $F(x) = \frac{x^2}{2}$ 2 $F(x) = \frac{x^4}{4}$

3 $F(x) = \frac{x^5}{5}$ 4 $F(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$

5 $F(x) = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$ 6 $F(x) = \frac{x^{-4}}{4}$

الملاحظة الثانية: أحياناً نحتاج إلى بعض الإصلاحات

من أجل إظهار $g'(x)$

شطب قطب

عامل مشترك

تباعد اجتماعي

الاستنساخ

تمرين: في كل حالة من الحالات الآتية

أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I

$I = \mathbb{R}$	1. $f(x) = (x+1)(x^2+2x)^{-5}$
$I = \mathbb{R}$	2. $f(x) = (x-2)(x^2-4x+5)^3$
$I = \mathbb{R}$	3. $f(x) = (4x+2)(x^2+x)^7$
$I = \mathbb{R}$	4. $f(x) = (-5x^4+10)(x^5-10x)^3$
$I = \mathbb{R}$	5. $f(x) = x^2(x^3+1)^4$
$I = \mathbb{R}$	6. $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)^5$
$I = \mathbb{R}^*$	7. $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^5}\right)$
$I = \mathbb{R}$	8. $f(x) = \sin x \,.\cos^3 x$
$I = \mathbb{R}\backslash\{\pi k\}$	9. $f(x) = (1+\cot^2 x).\cot^2 x$
$I =]0, +\infty$	10. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ دورة.. ^^

1 $f(x) = (x+1)(x^2+2x)^{-5}$

$f(x) = \frac{1}{2}(2x+2)(x^2+2x)^{-5}$

$F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+2x)^{-4}}{-4}$

$F(x) = \frac{(x^2+2x)^{-4}}{-8} = \frac{-1}{8(x^2+2x)^4}$

2 $f(x) = (x-2)(x^2-4x+5)^3$

$f(x) = \frac{1}{2}(2x-4)(x^2-4x+5)^3$

$F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-4x+5)^4}{4}$

$F(x) = \frac{(x^2-4x+5)^4}{8}$

3 $f(x) = (4x+2)(x^2+x)^7$

$f(x) = 2(2x+1)(x^2+x)^7$

$F(x) = 2\,\frac{(x^2+x)^8}{8} = \frac{(x^2+x)^8}{4}$

4 $f(x) = (-5x^4+10)(x^5-10x)^3$

$f(x) = -(5x^4-10)(x^5-10x)^3$

$F(x) = -\frac{(x^5-10x)^4}{4}$

9] ▪ $f(x) = (1+\cot^2 x)\cot^2 x$

$f(x) = -(-1-\cot^2 x)\cot^2 x$

$F(x) = -\dfrac{\cot^3 x}{3}$

10] ▪ $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$

$F(x) = \dfrac{\ln^2 x}{2}$

تذكر دائماً

أثناء الإصلاح تبقى $f(x)$

5] ▪ $f(x) = x^2(x^3+1)^4$

$f(x) = \dfrac{1}{3}\,3x^2(x^3+1)^4$

$F(x) = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{(x^3+1)^5}{5} = \dfrac{(x^3+1)^5}{15}$

6] ▪ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^5$

$f(x) = -\,\dfrac{-1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^5$

$F(x) = -\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^6}{6} = -\dfrac{\frac{1}{x^6}}{6} = \dfrac{-1}{6x^6}$

7] ▪ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x^5}\right)$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^5$

$f(x) = -\,\dfrac{-1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)^5$

$F(x) = -\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^6}{6} = -\dfrac{1}{6x^6}$

8] ▪ $f(x) = \sin x \, . \cos^3 x$

$f(x) = -(-\sin x)\cos^3 x$

$F(x) = -\dfrac{\cos^4 x}{4}$

الملاحظة الثالثة:

عند وجود قوة في المقام فإننا نرفعها إلى البسط

تمرين: **في كل حالة من الحالات الآتية**

أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I

$I =]2, +\infty[$	1. $f(x) = \frac{5}{(x-2)^7}$
$I =]-1, +\infty[$	2. $f(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$
$I =]\frac{1}{2}, +\infty[$	3. $f(x) = \frac{2}{(2x-1)^3}$
$I = \mathbb{R}$	4. $f(x) = \frac{e}{(1+ex)^2}$
$I = \mathbb{R}$	5. $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$
$I =]-1, +\infty[$	6. $f(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^4}$
$,I =]0, +\infty[$	7. $f(x) = \frac{-e^x-2}{(e^x+2x)^2}$
$I = \mathbb{R}\backslash\{\pi k\}$	8. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^5 x}$
$I = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}k\}$	9. $f(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}$
$I =]0,1[\cup]1, +\infty[$	10. $f(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln^4(x)}$
$I =]0,1[\cup]1, +\infty[$	11. $f(x) = \frac{1}{x\ln^3(x)}$

1) $f(x) = \frac{5}{(x-2)^7}$

$f(x) = 5\,(x-2)^{-7}$

$F(x) = 5\,\frac{(x-2)^{-6}}{-6} = \frac{-5}{6(x-2)^6}$

2) $f(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$

$f(x) = -2\,(x+1)^{-3}$

$F(x) = \cancel{-2}\,\frac{(x+1)^{-2}}{\cancel{-2}} = (x+1)^{-2}$

$F(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

3) $f(x) = \frac{2}{(2x-1)^3}$

$f(x) = 2\,(2x-1)^{-3}$

$F(x) = \frac{(2x-1)^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2(2x-1)^2}$

4) $f(x) = \frac{e}{(1+ex)^2}$

$f(x) = e\,(1+ex)^{-2}$

$F(x) = \frac{(1+ex)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{(1+ex)}$

5) $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$

$f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^{-2}$

$F(x) = \frac{(x^2-x+1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{(x^2-x+1)}$

6) $f(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^4}$

$f(x) = 6x^2\,(x^3+1)^{-4}$

$F(x) = \frac{(\tan x)^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2\tan^2 x}$

10) ■ $f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln^4 x}$

$f(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^{-4}$

$F(x) = \frac{(\ln x)^{-3}}{-3} = \frac{-1}{3(\ln x)^3}$

11) ■ $f(x) = \frac{1}{x\ln^3 x}$

$f(x) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\ln^3 x}$

$f(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^{-3}$

$F(x) = \frac{(\ln x)^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2\ln^2 x}$

$f(x) = 2\ 3x^2(x^3+1)^{-4}$

$F(x) = 2\ \frac{(x^3+1)^{-3}}{-3} = \frac{-2}{3(x^3+1)^3}$

7) ■ $f(x) = \frac{-e^x-2}{(e^x+2x)^2}$

$f(x) = -e^x-2(e^x+2x)^{-2}$

$f(x) = -(e^x+2)(e^x+2x)^{-2}$

$F(x) = -\frac{(e^x+2x)^{-1}}{-1} = \frac{1}{e^x+2x}$

8) ■ $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^5 x}$

$f(x) = \sin x \cdot \cos^{-5} x$

$f(x) = -(-\sin x)\cos^{-5} x$

$F(x) = -\frac{\cos^{-4} x}{-4} = \frac{1}{4\cos^4 x}$

9) ■ $f(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}$

$f(x) = 1+\tan^2 x\ (\tan x)^{-3}$

الملاحظة الرابعة:

في حال وجود جذر

فإننا نحولهُ إلى قوة ثم نتابع كما سبق.

تذكر يا عزيزي الطالب: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

مرين: في كل حالة من الحالات الآتية

وجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I

$I = \mathbb{R}$	1. $f(x) = 2x\sqrt{(x^2+1)^5}$
$I = \mathbb{R}$	2. $f(x) = 2x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$
$I = \mathbb{R}$	3. $f(x) = (4x+2)\sqrt{(x^2+x+5)^3}$
$I =]1, +\infty[$	4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$
$I =]2, +\infty[$	5. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$
$I =]3, +\infty[$	6. $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}}$
$I =]-\infty, 2[$	7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 3$
$I =]0, +\infty[$	8. $f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}$
$I =]3, +\infty[$	9. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-3}}$
$I =]0, +\infty[$	10. $f(x) = \frac{3x^2+2x}{\sqrt{x^3+x^2}}$
$I =]-2, +\infty[$	11. $f(x) = \frac{x+1}{(x+2)^4}$
$I =]-1, +\infty[$	12. $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^5}$
$I = \mathbb{R}$	13. $f(x) = x\sqrt{(x+1)^3}$
$I = \mathbb{R}$	14. $f(x) = x\sqrt[3]{(x-2)^2}$

1\] $F(x) = 2x\sqrt{(x^2+1)^5}$

$f(x) = 2x\,(x^2+1)^{\frac{5}{2}}$

$F(x) = \frac{(x^2+1)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{2(x^2+1)^{\frac{7}{2}}}{7}$

$F(x) = \frac{2}{7}\sqrt{(x^2+1)^7}$

2\] $F(x) = 2x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$

$f(x) = 2x\,(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$

$F(x) = \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}{5}$

$F(x) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x^2+1)^5}$

3\] $F(x) = (4x+2)\sqrt{(x^2+x+5)^3}$

$f(x) = (4x+2)(x^2+x+5)^{\frac{3}{2}}$

$F(x) = \frac{(x^2+x+5)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2(x^2+x+5)^{\frac{5}{2}}}{5}$

$F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{(x^2+x+5)^5}$

4\] $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$f(x) = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} = (x-1)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x) = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x-1}$

5\] $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

$f(x) = \frac{2x}{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}} = 2x(x^2-4)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x) = \frac{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^2-4}$

$F(x) = \frac{2\,(e^x-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{(e^x-1)}$

9] $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-3}}$

$f(x) = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x-3)^{\frac{1}{2}}}$

$f(x) = 2\,x^{-\frac{1}{2}} - (x-3)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x) = \frac{2\,x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{(x-3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$

$F(x) = 4\sqrt{x} - 2\sqrt{x-3}$

10] $f(x) = \frac{3x^2+2x}{\sqrt{x^3+x^2}}$

$f(x) = \frac{3x^2+2x}{(x^3+x^2)^{\frac{1}{2}}} = 3x^2+2x\,(x^3+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x) = \frac{(x^3+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^3+x^2}$

11] $f(x) = \frac{x+1}{(x+2)^4}$

طريقة أولى ...

$f(x) = \frac{x+1+1-1}{(x+2)^4} = \frac{x+2-1}{(x+2)^4}$

6] $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}}$

$f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x-6)^{\frac{1}{2}}}$

$f(x) = (2x-1)\,(x^2-x-6)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x) = \frac{(x^2-x-6)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^2-x-6}$

7] $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 3$

$f(x) = \frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{2}}} + 3$

$f(x) = (2-x)^{-\frac{1}{2}} + 3$

$f(x) = -(-)\,(2-x)^{-\frac{1}{2}} + 3$

$F(x) = -\frac{(2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 3x$

$F(x) = -2\sqrt{2-x} + 3x$

8] $f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}$

$f(x) = \frac{2e^x}{(e^x-1)^{\frac{1}{2}}} = 2e^x\,(e^x-1)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x) = (x+2)(x+1)^{-5}$

$F(x) = (x+1+1)(x+1)^{-5}$

$F(x) = (x+1)(x+1)^{-5} + (x+1)^{-5}$

$F(x) = (x+1)^{-4} + (x+1)^{-5}$

$F(x) = \frac{(x+1)^{-3}}{-3} + \frac{(x+1)^{-4}}{-4}$

$F(x) = \frac{-1}{3(x+1)^3} - \frac{1}{4(x+1)^4}$

13 ▪ $F(x) = x\sqrt{(x+1)^3}$

$F(x) = x\ (x+1)^{\frac{3}{2}}$

$F(x) = (x+1-1)(x+1)^{\frac{3}{2}}$

$F(x) = (x+1)(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}}$

$F(x) = (x+1)^{\frac{5}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}}$

$F(x) = \frac{(x+1)^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$

$F(x) = \frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{2(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5}$

$F(x) = \frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7} - \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}$

14 ▪ $F(x) = x\sqrt[3]{(x-2)^2}$

$F(x) = x\ (x-2)^{\frac{2}{3}}$

$F(x) = (x-2+2)(x-2)^{\frac{2}{3}}$

$F(x) = \frac{x+2}{(x+2)^4} - \frac{1}{(x+2)^4}$

$F(x) = (x+2)(x+2)^{-4} - (x+2)^{-4}$

$F(x) = (x+2)^{-3} - (x+2)^{-4}$

$F(x) = \frac{(x+2)^{-2}}{-2} - \frac{(x+2)^{-3}}{-3}$

$F(x) = -\frac{(x+2)^{-2}}{2} + \frac{(x+2)^{-3}}{3}$

$F(x) = \frac{-1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{3(x+2)^3}$

طريقة ثانية .. ^^

$F(x) = \frac{x+1}{(x+2)^4}$

$F(x) = (x+1)(x+2)^{-4}$

$F(x) = (x+2-1)(x+2)^{-4}$

$F(x) = (x+2)(x+2)^{-4} - (x+2)^{-4}$

$F(x) = (x+2)^{-3} - (x+2)^{-4}$

$F(x) = \frac{(x+2)^{-2}}{-2} - \frac{(x+2)^{-3}}{-3}$

$F(x) = \frac{-1}{2(x+2)^2} + \frac{1}{3(x+2)^3}$

12 ▪ $F(x) = \frac{x+2}{(x+1)^5}$

$$f(x) = (x-2)(x-2)^{\frac{2}{3}} + 2(x-2)^{\frac{2}{3}}$$

$$f(x) = (x-2)^{\frac{5}{3}} + 2(x-2)^{\frac{2}{3}}$$

$$F(x) = \frac{(x-2)^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + \frac{2(x-2)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}$$

$$F(x) = \frac{3}{8}(x-2)^{\frac{8}{3}} + \frac{6}{5}(x-2)^{\frac{5}{3}}$$

$$F(x) = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x-2)^8} + \frac{6}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5}$$

ثالثاً: إذا كان لدينا البسط مشتق المقام, أي:

$$\boxed{f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

فإنّ تابعه الأصلي هو لوغاريتم القيمة المطلقة للمقام, أي:

$$\boxed{F(x) = \ln(|g(x)|) + c}$$

انتبه: عند وجود قيمة مطلقة

يجب التخلص منها ومن أجل ذلك. هنا نستخدم المجال..

الخطوة الأولى:

ندرس إشارة مضمون القيمة المطلقة ونميز:

الحالة الأولى: مثلثي:

ندرس الإشارة بالاعتماد على الدائرة المثلثية

الحالة الثانية: غير مثلثي:

نعدم المقدار ثم ننظم جدول الإشارة

الخطوة الثانية:

نتخلص من القيمة المطلقة بحيث:

- إذا كان المضمون سالب فالقيمة المطلقة تساوي عكس المضمون
- إذا كان مضمون القيمة المطلقة موجب فالقيمة المطلقة تساوي المضمون نفسه

تمرين: في كل حالة من الحالات الآتية

أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I :

$I =]0, +\infty[$	1. $f(x) = \frac{1}{x}$
$I =]-\infty, 1[$	2. $f(x) = \frac{1}{x-1}$
$I =]3, +\infty[$	3. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$
$I =]0, \frac{\pi}{2}[$	4. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$
$I =]\frac{\pi}{2}, \pi[$	5. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$
$I =]0, \frac{\pi}{2}[$	6. $f(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$
$I =]0,1[$	7. $f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$
$I =]1, +\infty[$	8. $f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$

1] $f(x) = \frac{1}{x}$; $I =]0, +\infty[$

$F(x) = \ln|x| = \ln x$

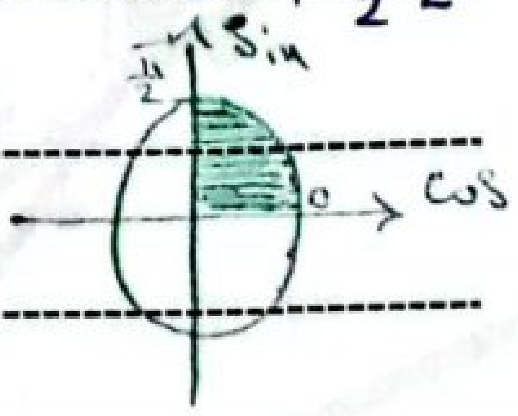
2] $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $I =]-\infty, 1[$

$F(x) = \ln|x-1| = \ln(-x+1)$

3] $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$; $I =]3, +\infty[$

$F(x) = \ln|x^2-x-6| = \ln x^2-x-6$

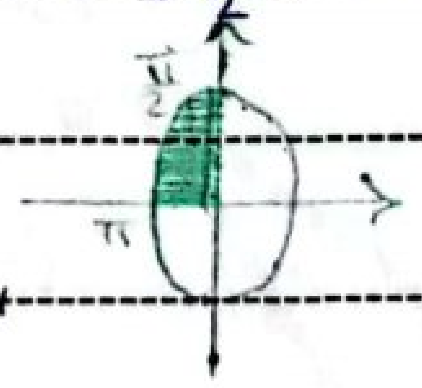
4] $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$; $I =]0, \frac{\pi}{2}[$



$F(x) = \ln|\sin x|$

$F(x) = \ln \sin x$

5] $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$; $I =]\frac{\pi}{2}, \pi[$



$F(x) = \ln|\sin x|$

$F(x) = \ln \sin x$

6] $f(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$; $I =]0, \frac{\pi}{2}[$

$F(x) = \ln|\tan x| = \ln \tan x$

7] ▪ $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$; $I =]0, 1[$

$F(x) = \ln|\ln x| = \ln(-\ln x)$

8] ▪ $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$; $I =]1, +\infty[$

$F(x) = \ln|\ln x| = \ln(\ln x)$

ملاحظات هامة:

أحياناً نحتاج إلى بعض الإصلاحات من أجل إظهار $g'(x)$

تمرين: في كل حالة من الحالات الآتية

أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I :

1. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$	$I =]2, +\infty[$
2. $f(x) = \frac{2e^x}{e^x-1}$	$I =]0, +\infty[$
3. $f(x) = \frac{3}{x-2}$	$I =]-\infty, 2[$
4. $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$	$I =]1, +\infty[$

1] ▪ $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$; $I =]2, +\infty[$

$f(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2-4}$

$F(x) = \frac{1}{2} \mathrm{Ln}|x^2-4| = \frac{1}{2} \mathrm{Ln}(x^2-4)$

2] ▪ $f(x) = \frac{2e^x}{e^x-1}$; $I =]0, +\infty[$

$f(x) = 2 \frac{e^x}{e^x-1}$

$F(x) = 2 \mathrm{Ln}|e^x-1| = 2 \mathrm{Ln}(e^x-1)$

3] ▪ $f(x) = \frac{3}{x-2}$; $I =]-\infty, 2[$

$f(x) = 3 \frac{1}{x-2}$

$F(x) = 3 \mathrm{Ln}|x-2| = 3 \mathrm{Ln}(-x+2)$

4] . $f(x) = \frac{1}{x \operatorname{Ln} x}$; $I =]1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{Ln} x}$$

$$F(x) = \operatorname{Ln} |\operatorname{Ln} x| = \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} x)$$

رابعاً: إذا كان التابع $f(x)$ عبارة عن تابع كسري بسطه ومقامه كثيري حدود وفشل ثانياً وثالثاً

فإننا نميز:

الحالة الأولى:

إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام

- نصلح باستخدام القسمة الإقليدية
- نكامل كما سبق

تمرين: في كل حالة من الحالات الآتية

أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I :

1. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$	$I =]-\infty, 2[$
2. $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$	$I =]\frac{1}{2}, +\infty[$
3. $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$	$I =]-1, +\infty[$
4. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$	$I =]2, +\infty[$

1] $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; $I =]-\infty, 2[$

الإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x-2 & x+1 \\ & -x \overset{+}{-} 2 \\ \hline & +3 \end{array}$$

$f(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$

$f(x) = 1 + 3 \frac{1}{x-2}$

$F(x) = x + 3 \ln|x-2|$

$F(x) = x + 3 \ln(-x+2)$

$F(x) = 2x - 3\,Ln|x+1|.$

$F(x) = 2x - 3\,Ln(x+1)$

4] ■ $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$; $I =]2, +\infty[$

الإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x^2-x-2 & x^3 \\ & -x^3 \pm x^2 \pm 2x \\ \hline & x^2+2x \\ & -x^2 \pm x \pm 2 \\ \hline & 3x+2 \end{array}$$

$f(x) = x+1 + \dfrac{3x+2}{x^2-x-2}$

↳

يحتاج إصلاح باستخدام تفريق الكسور

سنعود بعد قليل .. ^^

لكن لدينا:

$g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-x-2}$

$g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-x-2} = \dfrac{3x+2}{(x-2)(x+1)}$

$= \dfrac{A}{\underset{(x+1)}{x-2}} + \dfrac{B}{\underset{(x-2)}{x+1}}$

2] ■ $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$; $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$

الإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} & \frac{3}{2} \\ \hline 2x-1 & 3x+2 \\ & -3x \pm \frac{3}{2} \\ \hline & \frac{7}{2} \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\frac{7}{2}}{2x-1}$

$f(x) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2} \times \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2}{2x-1}$

$f(x) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{4}\,\dfrac{2}{2x-1}$

$F(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}\,Ln|2x-1|$

3] ■ $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$; $I =]-1, +\infty[$

الإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x+1 & 2x-1 \\ & -2x \mp 2 \\ \hline & -3 \end{array}$$

$f(x) = 2 + \dfrac{-3}{x+1}$

$f(x) = 2 - 3\,\dfrac{1}{x+1}$

$$= \frac{(x+1)A + (x-2)B}{(x-2)(x+1)}$$

ثانياً :

$$3x+2 = (x+1)A + (x-2)B$$

بفرض : $x = -1$:

$$1 = -3B \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

بفرض $x = 2$:

$$8 = 3A \Rightarrow A = \frac{8}{3}$$

إذاً :

$$g(x) = \frac{\frac{8}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$g(x) = \frac{8}{3(x-2)} + \frac{1}{3(x+1)}$$

ثالثاً ^^

$$f(x) = x+1+g(x)$$

$$f(x) = x+1+\frac{8}{3}\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{3}\ln(x-2)+\frac{1}{3}\ln(x+1)$$

ملاحظة :: يمكن أن يبدأ التمرين بقسمة إقليدية وينتهي بتفريق الكسور.

الحالة الثانية:

إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام فإننا:

- **نصلح التابع باستخدام تفريق الكسور**
- **نكامل كما سبق**

تمرين: **في كل حالة من الحالات الآتية**

أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I :

$I =]1, +\infty[$	1. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$
$I =]-\infty, -2[$	2. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$
$I =]-2, 3[$	3. $f(x) = \frac{x}{x^2-x-6}$
$I =]-1, 0[$	4. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x}$
$I =]0, 1[$	5. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$
$I =]0, 1[$	6. $f(x) = \frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2}$

1\. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$; $I =]1, +\infty[$

الإصلاح باستخدام تفريق الكسور:

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$(x+1)$ $\quad$ $(x-1)$

$$= \frac{(x+1)A + (x-1)B}{(x-1)(x+1)}$$

تكافؤ:

$$x+3 = (x+1)A + (x-1)B$$

بفرض: $x = -1$:

$$+2 = -2B \Rightarrow B = -1$$

بفرض: $x = 1$:

$$4 = 2A \Rightarrow A = 2$$

إذاً: $f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$

$$f(x) = 2\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = 2\ln|x-1| - \ln|x+1|$$

$$F(x) = 2\ln(x-1) - \ln(x+1)$$

2\. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$; $I =]-\infty, -2[$

الإصلاح باستخدام تفريق الكسور:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$(x+2)$ $\quad$ $(x-2)$

$$= \frac{(x+2)A + (x-2)B}{(x+2)(x-2)}$$

تكافؤ:

$$x+1 = (x+2)A + (x-2)B$$

بفرض: $x = -2$:

$$-1 = -4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

بفرض: $x = 2$:

$$3 = 4A \Rightarrow A = \frac{3}{4}$$

إذاً:

$$f(x) = \frac{\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}\,\frac{1}{x-2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+2}$$

$$F(x) = \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2|$$

$$F(x) = \frac{3}{4}\ln(-x+2) + \frac{1}{4}\ln(-x-2)$$

3] $f(x) = \frac{x}{x^2-x-6}$; $I =]-2,3[$

الإصلاح باستخدام تفريق الكسور

$$f(x) = \frac{x}{x^2-x-6} = \frac{x}{(x-3)(x+2)}$$

$$f(x) = \frac{A}{\underset{(x+2)}{x-3}} + \frac{B}{\underset{(x-3)}{x+2}}$$

$$= \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

نكافئ:

$$x = A(x+2)+B(x-3)$$

بفرض: $x=-2$:

$$-2 = -5 \Rightarrow B = \frac{2}{5}$$

بفرض: $x=3$:

$$3 = 5A \Rightarrow A = \frac{3}{5}$$

إذاً:

$$f(x) = \frac{\frac{3}{5}}{x-3} + \frac{\frac{2}{5}}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{3}{5}\,\frac{1}{x-3} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{x+2}$$

$$F(x) = \frac{3}{5}\ln|x-3| + \frac{2}{5}\ln|x+2|$$

$$F(x) = \frac{3}{5}\ln(-x+3) + \frac{2}{5}\ln(x+2)$$

4] $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x}$; $I =]-1,0[$

الإصلاح باستخدام تفريق الكسور:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x} = \frac{2x-1}{x(x+1)}$$

$$f(x) = \frac{A}{\underset{(x+1)}{x}} + \frac{B}{\underset{(x)}{x+1}}$$

$$= \frac{A(x+1)+B(x)}{x(x+1)}$$

نكافئ:

$$2x-1 = A(x+1)+B(x)$$

بفرض: $x = 0$:

$$-1 = A \Rightarrow A = -1$$

بفرض: $x=-1$:

$$-3 = -B \Rightarrow B = 3$$

إذاً:

$$f(x) = \frac{-1}{x} + \frac{3}{x+1}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x} + 3\,\frac{1}{x+1}$$

$$F(x) = -\ln|x| + 3\ln|x+1|$$

$F(x) = -Ln - x + 3Ln(-x-1)$

5] $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$; $I =]0,+\infty[$

الإصلاح باستخدام تفريق الكسور:

$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{2x+1}{(x+2)(x+1)}$

$f(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}$

$(x+1) \quad (x+2)$

$= \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)}$

تكافؤ:

$2x+1 = A(x+1) + B(x+2)$

بفرض: $x = -1$

$1 = B \Rightarrow B = 1$

بفرض: $x = -2$

$-3 = -A \Rightarrow A = 3$

إذاً:

$f(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+1}$

$f(x) = 3\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}$

$F(x) = 3Ln|x+2| + Ln|x+1|$

$F(x) = 3Ln(x+2) + Ln(x+1)$

6] $f(x) = \frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2}$; $I =]0,+\infty[$

الإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} & 2x+3 \\ \hline 2x^2-3x-2 & 4x^3-3x \\ & -4x^3 \overset{+}{-} 6x^2 \overset{+}{-} 4x \\ \hline & 6x^2+x \\ & -6x^2 \overset{+}{-} 9x \overset{+}{-} 6 \\ \hline & 10x+6 \end{array}$$

$f(x) = 2x+3 + \frac{10x+6}{2x^2-3x-2}$

نتابع الإصلاح باستخدام تفريق الكسور:

سنعود بعد قليل.. ^^

ليكن لدينا:

$g(x) = \frac{10x+6}{2x^2-3x-2}$

$g(x) = \frac{10x+6}{(2x+1)(x-2)}$

$g(x) = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2}$

$= \frac{A(x-2)+B(2x+1)}{(2x+1)(x-2)}$

تكافؤ:

$10x+6 = A(x-2) + B(2x+1)$

بفرض: $x = 2$

$$26 = 5B \Rightarrow B = \frac{26}{5}$$

بفرض: $x = -\frac{1}{2}$

$$1 = -\frac{5}{2}A \Rightarrow A = -\frac{2}{5}$$

إذاً:

$$g(x) = \frac{-\frac{2}{5}}{2x+1} + \frac{\frac{26}{5}}{x-2}$$

$$g(x) = -\frac{2}{5}\frac{1}{2x+1} + \frac{26}{5}\frac{1}{x-2}$$

$$g(x) = -\frac{1}{5}\frac{2}{2x+1} + \frac{26}{5}\frac{1}{x-2}$$

عندئذ ^^

$$f(x) = 2x+3 + g(x)$$

$$f(x) = 2x+3 + \frac{10x+6}{2x^2-3x-2}$$

$$f(x) = 2x+3-\frac{1}{5}\frac{2}{2x+1} + \frac{26}{5}\frac{1}{x-2}$$

$$F(x) = \frac{2x^2}{2} + 3x - \frac{1}{5}\ln|2x+1| + \frac{26}{5}\ln|x-2|$$

$$F(x) = x^2+3x-\frac{1}{5}\ln(2x+1) + \frac{26}{5}\ln(x-2)$$

ملاحظة .. ^^

* تفريق الكسور :

▪ نضع $f(x)$ ▪ نحلل المقام في $f(x)$ ونكتب $f(x)$ بدلالة كسرين أحدهما A والآخر B ▪ نوحد المقامات ونقارن مع $f(x)$ ▪ نعطي قيم لـ x (نعدمها داخل الأقواس) فنحصل على قيم A , B

جاءت دورات مع التابع الأسي..

خامساً: إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل:

$$\boxed{f(x) = g'(x)e^{g(x)}}$$

فإنّ تابعهُ الأصلي من الشكل:

$$\boxed{F(x) = e^{g(x)} + c}$$

ملاحظات هامة:

الملاحظة الأولى: تطبيق فوري:

إذا كان التابع $f(x)$ من الشكل:

$$\boxed{f(x) = e^{\alpha x}}$$

فإنّ تابعهُ الأصلي من الشكل:

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c}$$

الملاحظة الثانية:

أحياناً نحتاج إلى بعض الإصلاحات من أجل إظهار $g'(x)$.

تمرين: في كل حالة من الحالات الآتية

أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I :

$I = \mathbb{R}$	1. $f(x) = 2xe^{x^2}$
$I = \mathbb{R}$	2. $f(x) = 5e^{5x}$
$I = \mathbb{R}$	3. $f(x) = xe^{x^2}$
$I = \mathbb{R}$	4. $f(x) = e^{5x}$
$I = \mathbb{R}$	5. $f(x) = e^{-3x}$
$I = \mathbb{R}$	6. $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$
$I = \mathbb{R}^*$	7. $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$
$I = \mathbb{R}$	8. $f(x) = \frac{-e^x+e^x}{e^x+e^{-x}}$
$I = \mathbb{R}$	9. $f(x) = \cos x \,.\, e^{\sin x}$
$I = \mathbb{R}$	10. $f(x) = \sin x \, e^{\cos x}$
$I =]0, +\infty[$	11. $f(x) = (\ln(x) + 1)e^{x.\ln(x)}$
$I = \mathbb{R}$	12. $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ نشكل الأسي..

1] $f(x) = 2x e^{x^2}$

$F(x) = e^{x^2}$

2] $f(x) = 5e^{5x}$

$F(x) = e^{5x}$

3] $f(x) = x e^{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{2} 2x e^{x^2}$

$F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$

4] $f(x) = e^{5x}$

$f(x) = \frac{1}{5} 5e^{5x}$

$F(x) = \frac{1}{5} e^{5x}$

5] $f(x) = e^{-3x}$

$F(x) = -\frac{1}{3} e^{-3x}$

6] $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

$F(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x}$

7] $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

$f(x) = -(-\frac{1}{x^2}) e^{\frac{1}{x}}$

$F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$

8] $f(x) = \frac{-e^x + e^x}{e^x + e^{-x}}$

$F(x) = \ln|e^{x}+e^{-x}| = \ln e^{x}+e^{-x}$

$\boxed{9}$ ■ $f(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$

$F(x) = e^{\sin x}$

$\boxed{10}$ ■ $f(x) = \sin x\, e^{\cos x}$

$f(x) = -(-\sin x)\, e^{\cos x}$

$F(x) = -e^{\cos x}$

$\boxed{11}$ ■ $f(x) = (\ln(x)+1)\, e^{x\ln x}$

$F(x) = e^{x\ln x}$

$\boxed{12}$ ■ $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

طريقة أولى ..

$f(x) = \dfrac{1+e^{-x}-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$f(x) = \dfrac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} + \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$f(x) = 1 + \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$F(x) = x + \ln|1+e^{-x}|$

$F(x) = x + \ln(1+e^{-x})$

طريقة ثانية ..

$f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

$f(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{x}}} = \dfrac{1}{\frac{e^{x}+1}{e^{x}}}$

$f(x) = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$

$F(x) = \ln(1+e^{x})$

ملاحظة ..

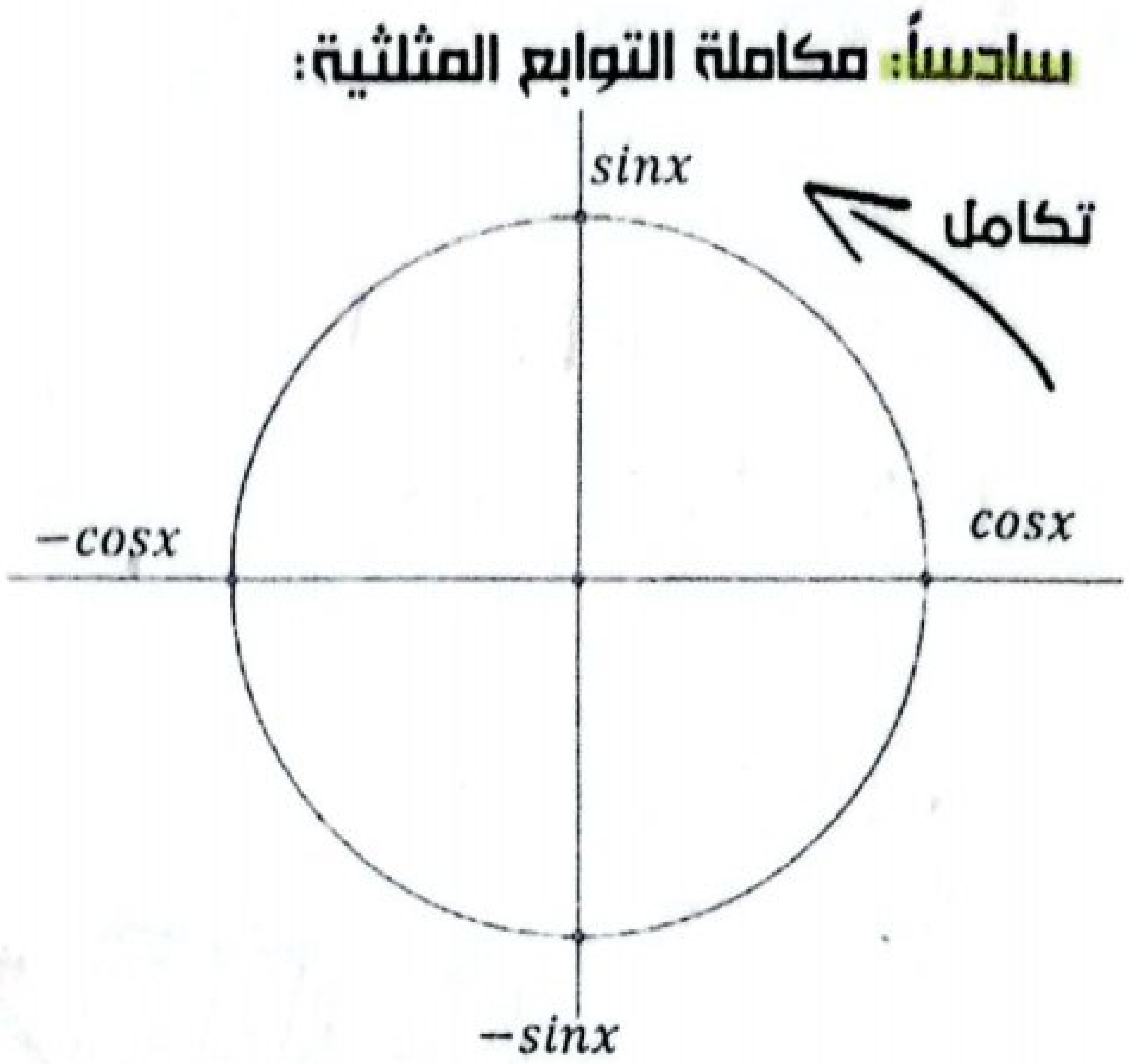
■ كيفية تجريب خامساً :

إذا كان التابع f عبارة عن جداء مشتق الأس في $\left(e^{\text{هذا الأس}}\right)$

■ كيفية تطبيق خامساً :

نهمل المشتق ونضع التابع $e^{\text{هذا الأس}}$ كما هو.

سادساً: مكاملة التوابع المثلثية:



القسم الأول: قوانين:

$F(x)$	$f(x)$
$F(x) = -\cos x + c$	$f(x) = \sin x$
$F(x) = \sin x + c$	$f(x) = \cos x$
$F(x) = \tan x + c$	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$F(x) = \tan x + c$	$f(x) = 1 + \tan^2 x$
$F(x) = -\cot x + c$	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$
$F(x) = -\cot x + c$	$f(x) = 1 + \cot^2 x$

القسم الثاني:

$F(x)$	$f(x)$
$F(x) = -\cos(g(x)) + c$	$f(x) = g'(x)\sin(g(x))$
$F(x) = \sin(g(x)) + c$	$f(x) = g'(x)\cos(g(x))$
أي في الدالتين نهمل $g'(x)$ ثم نكامل الدالة.	

القسم الثالث:

تطبيق مباشر:

$F(x)$	$f(x)$
$F(x) = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)$	$f(x) = \cos(\alpha x)$
$F(x) = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$	$f(x) = \sin(\alpha x)$

القسم الرابع:

دساتير مثلثية نحتاجها للإصلاح قبل المكاملة.	
المجموعة الأولى	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
المجموعة الثانية	$\cos^2(\text{زاوية}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\text{ضعفي الزاوية})$
	$\sin^2(\text{زاوية}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\text{ضعفي الزاوية})$
المجموعة الثالثة	$\sin(\text{زاوية}) = 2\sin(\text{نصف الزاوية})\cos(\text{نصف الزاوية})$
المجموعة الرابعة	$\cos x . \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
	انتبه.. $\sin x . \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$
	$\cos x . \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$
	$\sin x . \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

طريقة حفظ المجموعة الرابعة:

- نضع $\frac{1}{2}$
- ننظر إلى الجداء ونميز:

جداء	مجموع
تماثل	cos, cos
اختلاف	sin, sin

- ننظر إلى النسبة الأخيرة في الجداء ونميز:

هي cos ⇓ الإشارة في المنتصف هي (+)

هي sin ⇓ الإشارة في المنتصف هي (-)

تمرين: في كل حالة من الحالات الآتية

أوجد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I :

1. $f(x) = \tan x$	$I =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$
2. $f(x) = \cot x$	$I =]0, \pi[$
3. $f(x) = \cos^2 x$	$I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \sin^2 x$	$I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \cos^3 x$	$I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = \sin^3 x$	$I = \mathbb{R}$
7. $f(x) = \tan^2 x$	$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
8. $f(x) = \cot^2 x$	$I =]0, \pi[$
9. $f(x) = 2\cos x \cdot \sin^2 x$	$I = \mathbb{R}$
10. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$	$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
11. $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$	$I =]0, \pi[$
12. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + 3}}$	$I = \mathbb{R}$
13. $f(x) = \cos^2(3x)$	$I = \mathbb{R}$
14. $f(x) = \cos 3x \cdot \cos x$	$I = \mathbb{R}$
هام جداً 15. $f(x) = \cos^4 x$	$I = \mathbb{R}$
16. $f(x) = \sin^4 x$	$I = \mathbb{R}$
17. $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 1$	$I = \mathbb{R}$
طريقة 18. $f(x) = \frac{1}{\sin 2x}$	$I =]0, \frac{\pi}{2}[$
~~19. $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$, $I = \mathbb{R}$~~ محذوف	
20. $f(x) = \cos x\,(\sin^2 x - 3\sin x)$ $I = \mathbb{R}$	

1 - $f(x) = \tan x$

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{(-\sin x)}{\cos x}$

$F(x) = -\ln|\cos x|$

$F(x) = -\ln(-\cos x)$

2 - $f(x) = \cot x$

$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

$F(x) = \ln|\sin x|$

$F(x) = \ln(\sin x)$

3 - $f(x) = \cos^2 x$

$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\sin 2x$

$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$

4 - $f(x) = \sin^2 x$

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\sin 2x$

$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$

5 - $f(x) = \cos^3 x$

$f(x) = \cos x \cdot \cos^2 x$

$f(x) = \cos x(1 - \sin^2 x)$

$f(x) = \cos x - \cos x \cdot \sin^2 x$

$F(x) = \sin x - \frac{\sin^3}{3}$

طريقة ثانية .. ^^

$f(x) = \cot^2 x$

$f(x) = 1 + \cot^2 x - 1$

$F(x) = -\cot x - x$

9] $f(x) = 2\cos x \cdot \sin^2 x$

$F(x) = \frac{2\sin^3 x}{3}$

10] $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$

$f(x) = \sin x \cdot \cos^{-3} x$

$f(x) = -(-\sin x) \cdot \cos^{-3} x$

$F(x) = \frac{-\cos^{-2} x}{-2} = \frac{\cos^{-2} x}{2}$

11] $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$

$f(x) = \frac{\cos x}{\sin^{\frac{1}{2}} x}$

$f(x) = \cos x \cdot \sin^{-\frac{1}{2}} x$

$F(x) = \frac{\sin^{\frac{1}{2}} x}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\sin x}$

12] $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + 3}}$

$f(x) = \frac{\sin x}{(2\cos x + 3)^{\frac{1}{2}}}$

6] $f(x) = \sin^3 x$

$f(x) = \sin x \cdot \sin^2 x$

$f(x) = \sin x (1 - \cos^2 x)$

$f(x) = \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x$

$F(x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$

7] $f(x) = \tan^2 x$

طريقة أولى .. ^^

$f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$

$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

$F(x) = \tan x - x$

طريقة ثانية .. ^^

$f(x) = \tan^2 x$

$f(x) = 1 + \tan^2 x - 1$

$F(x) = \tan x - x$

8] $f(x) = \cot^2 x$

طريقة أولى .. ^^

$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$

$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

$F(x) = -\cot x - x$

$f(x)=\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2$

لـ مطابقة ..

$f(x)=\frac{1}{4}+\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{2}\cos(2x)+$

$\big)_2$

$\frac{1}{4}\cos^2 2x$

$f(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x$

لـ دساتير مثلثية ..

$f(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4x)\right]$

$f(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x$

$f(x)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

$F(x)=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$

$\boxed{16}$ ■ $f(x)=\sin^4 x$

$f(x)=(\sin^2 x)^2$

$f(x)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2$

لـ مطابقة ..

$f(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x$

لـ دساتير مثلثية ..

$f(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right]$

$f(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x$

يؤخرها الله ولكنهُ لا ينساها.. 🙁 ♡

$f(x)=\sin x\,(2\cos x+3)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x)=\frac{1}{-2}(-2\sin x)(2\cos x+3)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x)=-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{(2\cos x+3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}$

$F(x)=-\sqrt{2\cos x+3}$

$\boxed{13}$ ■ $f(x)=\cos^2(3x)$

$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(6x)$

$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{1}{6}\sin(6x)$

$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\cos 6x$

$\boxed{14}$ ■ $f(x)=\cos 3x\cdot\cos x$

$f(x)=\frac{1}{2}[\cos(4x)+\cos(2x)$

$f(x)=\frac{1}{2}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)$

$F(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{4}\sin(4x)+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin(2x)$

$F(x)=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{4}\cos(2x)$

$\boxed{15}$ ■ $f(x)=\cos^4 x$

$f(x)=(\cos^2 x)^2$

$F(x) = -\frac{1}{2} \ln(\cos x) + \frac{1}{2} \ln(\sin x)$

2 . $f(x) = \cos x (\sin^2 x - 3\sin x)$

$f(x) = \cos x . \sin^2 x - 3 \cos x . \sin x$

$F(x) = \frac{\sin^3 x}{3} - 3 \frac{\sin^2 x}{2}$

$F(x) = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{3}{2} \sin^2 x$

ملاحظة:

الرمز $\int_a^b dx$ يقول أوجد التابع الأصلي للتكامل يلي جوا ثم عوض فوق ناقص تحت.

$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$

$F(x) = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$

17 . $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 1$

$f(x) = 2 \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

$F(x) = 2 \tan x - x$

18 . $f(x) = \frac{1}{\sin 2x}$

$f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin 2x}$

$f(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x . \cos x}$

$f(x) = \frac{\sin^{\cancel{2}} x}{2 \cancel{\sin x} . \cos x} + \frac{\cos^{\cancel{2}} x}{2 \sin x . \cancel{\cos x}}$

$f(x) = \frac{\sin x}{2 \cos x} + \frac{\cos x}{2 \sin x}$

$f(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{-\sin x}{\cos x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)$

$F(x) = -\frac{1}{2} \ln|\cos x| + \frac{1}{2} |\sin x|$

التكامل المحدد: القسم الثالث..

رمزه: لـ إيجاد $F(x)$

• تعويضاً

$$\boxed{\int_a^b d(x)}$$

سوا سوا

القانون:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

دورة الـ فوق.. دورة الـ تحت..

ملاحظة: إنَّ الرمز $\int_a^b d(x)$ يبقى عند الإصلاح ولكنه يختفي عند المكاملة

خواص التكامل المحدد: هام..

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

وتطبق بشكل عكسي وفق: بشرط: حدود التكامل نفسها..

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f+g)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

علاقة شال:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

شرط التطبيق:

أن يكون التابع نفسه وتطبق بشكل عكسي أيضاً

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

انتبه يا صديقي الطالب: دورة 2021.. ^^

عند وجود قيمة مطلقة قبل المكاملة فإننا نتخلص منها ثم نصلح ثم نكامل (مع الانتباه أنه يمكنك استخدام علاقة شال عند اللزوم)

تمرين: احسب I في كل من الحالات الآتية:

1. $I = \int_{-1}^{2}(2x-1)\,dx$
2. $I = \int_0^1 2xe^{x^2}\,dx$
3. $I = \int_2^4 \frac{3}{x-1}\,dx$
4. $I = \int_{-1}^{2}(x^2-4x+3)dx$
5. $I = \int_{-1}^{2}(x-2)(x^2-4x+3)dx$
6. $I = \int_1^3(x^3+2x^2+1)dx$
7. $I = \int_{-1}^{1}\left(x+1-\frac{1}{x+2}\right)dx$
8. $I = \int_1^2 \frac{x^4+x^3+x^2+x}{x^2}\,dx$
9. $I = \int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}\,dx$
10. $I = \int_1^2 \frac{x^3}{x^4+2}\,dx$
11. $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x}\,dx$
12. $I = \int_{-2}^{-1} \frac{2x-1}{x-1}\,dx$
13. $I = \int_0^1 \frac{4}{x^2-4}\,dx$
14. $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$
15. $I = \int_0^1 \frac{4x^3-3x}{2x^2-3x-2}\,dx$
16. $I = \int_1^2\left(t^2+t-\frac{1}{t}\right)dt$
17. $I = \int_0^3 \frac{d_t}{\sqrt{1+t}}$
18. $I = \int_0^1 te^{t^2-1}\,dt$
19. $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$
20. $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$ مكرر.. ^^
21. $I = \int_0^2(\sqrt{2x+1})dx$
22. $I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx$
23. $I = \int_1^e \frac{(\ln(x))^2}{x}\,dx$
24. $I = \int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$
25. $I = \int_0^1(e^{2x}-e^{-2x})dx$

$= (3Ln3)-(3Ln1) = 3Ln3$

4] $I = \int_{-1}^{2} (x^2-4x+3)\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{2}$

$= \left(\frac{8}{3} - 8 + 6\right) - \left(\frac{-1}{3} - 2 - 3\right)$

$= \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{3} + 5 = 3 + 3 = 6$

5] $I = \int_{-1}^{2} (x-2)(x^2-4x+3)\,dx$

$= \int_{1}^{2} \frac{1}{2}(2x-4)(x^2-4x+3)\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}\,\frac{(x^2-4x+3)^2}{2}\right]_{-1}^{2}$

$= \left[\frac{(x^2-4x+3)^2}{4}\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{1}{4} - \frac{64}{4} = \frac{-63}{4}$

6] $I = \int_{1}^{3} (x^3+2x^2+1)\,dx$

$I = \left[\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + x\right]_{1}^{3}$

26. $I = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x\, dx$

27. $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \,.\, \sin^2 x)\,dx$

28. $I = \int_{0}^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$

29. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx$

30. $I = \int_{-3}^{-1} x|x+2|dx$

31. $I = \int_{-1}^{2} x|x-1|dx$

32. $I = \int_{0}^{3} (2-|2-x|)dx$

33. $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(\sqrt{2-2\cos(2x)}\right) dx$

1] $I = \int_{-1}^{2} (2x-2)\,dx$

$= \left[2\frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{2} = \left[x^2 - x\right]_{-1}^{2}$

$= (4-2) - (1+1) = 2 - 2 = 0$

2] $I = \int_{0}^{1} 2x e^{x^2}\,dx$

$= \left[e^{x^2}\right]_{0}^{1} = (e^1) - (e^0)$

$= e - 1$

3] $I = \int_{2}^{4} \frac{3}{x-1}\,dx$

$= \int_{2}^{4} 3\,\frac{1}{x-1}\,dx$

$= \left[3\,Ln|x-1|\right]_{2}^{4}$

$$I = \frac{14+18-3}{6} + \ln 2$$

$$I = \frac{29}{6} + \ln 2$$

9] ▪ $$I = \int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}\,dx$$

$$I = \int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x}\,dx$$

$$I = \int_1^2 \frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{1}{x}\,dx$$

$$I = \int_1^2 x + 2 + \frac{1}{x}\,dx$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x|\right]_1^2$$

$$I = \left(\frac{(2)^2}{2} + 2(2) + \ln 2\right) - \left(\frac{1}{2} + 2 + 0\right)$$

$$I = 2 + 4 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 2$$

$$I = \frac{8-1}{2} + \ln 2 = \frac{7}{2} + \ln 2$$

10] ▪ $$I = \int_1^2 \frac{x^3}{x^4+2}\,dx$$

$$I = \int_1^2 \frac{1}{4}\,\frac{4x^3}{x^4+2}\,dx$$

$$I = \left[\frac{1}{4}\ln|x^4+2|\right]_1^2$$

$$I = \left(\frac{(3)^4}{4} + \frac{2(3)^3}{3} + 3\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + 1\right)$$

$$I = \frac{165}{4} - \frac{23}{12} = \frac{495-23}{12}$$

$$I = \frac{472}{12} = \frac{118}{3}$$

7] ▪ $$I = \int_{-1}^{1} \left(x + 1 - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} + x - \ln|x+2|\right]_{-1}^{1}$$

$$I = \left(\frac{1}{2} + 1 - \ln 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1 - \ln 1\right)$$

$$I = \frac{1}{2} + 1 - \ln 3 - \frac{1}{2} + 1 = 2 - \ln 3$$

8] ▪ $$I = \int_1^2 \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x^2}\,dx$$

$$I = \int_1^2 x^2 + x + 1 + \frac{1}{x}\,dx$$

$$I = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x|\right]_1^2$$

$$I = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln x\right]_1^2$$

$$I = \left(\frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} + 2 + \ln 2\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + 0\right)$$

$$I = \frac{8}{3} + 2 + 2 + \ln 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1$$

$$I = \frac{7}{3} + 3 - \frac{1}{2} + \ln 2$$

$I = \left[2x + \text{Ln}|x-1| \right]_{-2}^{-1}$

$I = (2(-1)+\text{Ln}2) - (2(-2)+\text{Ln}3)$

$I = (-2+\text{Ln}2) - (-4+\text{Ln}3)$

$I = -2+\text{Ln}2+4-\text{Ln}3$

$I = 2+\text{Ln}2-\text{Ln}3$

3 ■ $I = \int_0^1 \frac{4}{x^2-4} \, dx$

الإصلاح باستخدام تفريق الكسور :

$\frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{(x-2)(x+2)}$

$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

$= \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

نكافئ :

$4 = A(x+2) + B(x-2)$

بفرض : $x=2$:

$4 = 4A \Rightarrow A = 1$

بفرض : $x=-2$:

$4 = -4B \Rightarrow B = -1$

$I = \int_0^1 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \, dx$

$I = \left[\frac{1}{4} \text{Ln} |x^4+2| \right]_1^2$

$I = \left(\frac{1}{4} \text{Ln}18 \right) - \left(\frac{1}{4} \text{Ln}3 \right)$

$I = \frac{1}{4} \text{Ln} \frac{18}{3} = \frac{1}{4} \text{Ln}6$

11 ■ $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x} \, dx$

$I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x} - \frac{3}{x} \, dx$

$I = \int_{-2}^{-1} 1 - \frac{3}{x} \, dx$

$I = \left[x - 3\text{Ln}|x| \right]_{-2}^{-1}$

$I = (-1) - (-2-3\text{Ln}2)$

$I = 1 + 3\text{Ln}2$

12 ■ $I = \int_{-2}^{-1} \frac{2x-1}{x-1} \, dx$

الإصلاح باستخدام القسمة الطويلة :

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x-1 & 2x-1 \\ & -2x \pm 2 \\ \hline \end{array}$$

$I = \int_{-2}^{-1} 2 + \frac{1}{x-1} \, dx$

$$I = \left[Ln|x-2| - Ln|x+2| \right]_0^1$$

$$I = (Ln(1) - Ln3) - (Ln2 - Ln2)$$

$$I = -Ln3 - 0$$

$$I = -Ln3$$

14 $$I = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\, dx$$

الإصلاح باستخدام تفريق الكسور :

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{2x+1}{(x+2)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}$$

$$= \frac{A(x+1) + B(x+2)}{(x+2)(x+1)}$$

تكافؤ :

$$2x+1 = A(x+1) + B(x+2)$$

بفرض : $x = -1$

$$1 = B \Rightarrow B = 1$$

بفرض : $x = -2$

$$-3 = -A \Rightarrow A = 3$$

إذاً :

$$I = \int_0^1 \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+1}$$

$$I = \int_0^1 3\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1}$$

$$I = \left[3\,Ln|x+2| + Ln|x+1| \right]_0^1$$

$$I = (3Ln3 + Ln2) - (3Ln2 + Ln(1))$$

$$I = 3Ln3 + Ln2 - 3Ln2$$

$$I = 3Ln3 - 2Ln2$$

مفتاح النجاح هو أن نركز فكرنا ووعينا على الأشياء التي نتمناها لا أن نركز على الأشياء التي نخشاها ♡

15 $$I = \int_0^1 \frac{4x^3 - 3x}{2x^2 - 3x - 2}\, dx$$

الإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية

$$\begin{array}{r|l} & 2x+3 \\ \hline 2x^2-3x-2 & 4x^3 - 3x \\ & -4x^3 \pm 6x^2 \pm 4x \\ \hline & 6x^2 + x \\ & -6x^2 \pm 9x \pm 6 \\ \hline & 10x + 6 \end{array}$$

$$I = \int_0^1 2x + 3 + \frac{10x+6}{2x^2-3x-2}\, dx$$

الإصلاح باستخدام تفريق الكسور :

سنعود بعد قليل ..

$$\frac{10x+6}{2x^2-3x-2} = \frac{10x+6}{(2x+1)(x-2)}$$

16 . $I = \int_1^2 (t^2 + t - \frac{1}{t})\, dt$

$I = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \text{Ln}|t|\right]_1^2$

$I = (\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - \text{Ln}2) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \text{Ln}1)$

$I = \frac{23}{6} - \text{Ln}2$

17 . $I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

$I = \int_0^3 (1+t)^{-\frac{1}{2}}\, dt$

$I = \left[\frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = \left[2(1+t)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3$

$I = 2\left[\sqrt{1+t}\right]_0^3$

$I = 2(\sqrt{4}) - (\sqrt{1}) = 2$

18 . $I = \int_0^1 t e^{t^2-1}\, dt$

$I = \int_0^1 \frac{1}{2}\, 2t\, e^{t^2-1}\, dt$

$I = \frac{1}{2}\int_0^1 2t e^{t^2-1}\, dt$

$= \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2}$

$= \frac{A(x-2) + B(2x+1)}{(2x+1)(x-2)}$

تكافؤ :

$10x + 6 = A(x-2) + B(2x+1)$

بفرض: $x = 2$:

$26 = 5B \Rightarrow B = \frac{26}{5}$

بفرض: $x = -\frac{1}{2}$:

$1 = -\frac{5}{2}A \Rightarrow A = \frac{-2}{5}$

إذاً :

$\frac{10x+6}{2x^2-3x-2} = -\frac{1}{5}\, \frac{2}{2x+1} + \frac{26}{5}\, \frac{1}{x-2}$

عندئذٍ

$I = \int_0^1 2x + 3 - \frac{1}{5}\, \frac{2}{2x+1} + \frac{26}{5}\, \frac{1}{x-2}\, dx$

$I = \left[\frac{2x^2}{2} + 3x - \frac{1}{5}\text{Ln}|2x+1| + \frac{26}{5}\text{Ln}|x-2|\right]_0^1$

$I = \left[x^2 + 3x - \frac{1}{5}\text{Ln}|2x+1| + \frac{26}{5}\text{Ln}|x-2|\right]_0^1$

$I = (4 - \frac{1}{5}\text{Ln}3 - 0) - (0 - 0 + \frac{26}{5}\text{Ln}2)$

$I = 4 - \frac{1}{5}\text{Ln}3 - \frac{26}{5}\text{Ln}2$

$$I = \int_0^2 \frac{1}{2}\, 2\, (2x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$I = \left[\frac{1}{2}\, \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2$$

$$I = \left[\frac{1}{3}\, (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2$$

$$I = \frac{1}{3} \left[(2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2$$

$$I = \frac{1}{3} \left((5)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$I = \frac{1}{3}\, 5\sqrt{5} - \frac{1}{3}$$

$\boxed{22}$ ■ $I = \int_1^e \frac{(\ln x)}{x}\, dx$

$$I = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x\, dx$$

$$I = \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e$$

$$I = \left(\frac{1}{2} \right) - (0) = \frac{1}{2}$$

$\boxed{23}$ ■ $I = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$

$$I = \frac{1}{2} \left[e^{t^2-1} \right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{2} (e^0) - (e^{-1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

$\boxed{19}$ ■ $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\, dx$

$$I = \int_0^1 x\, (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2}\, 2x\, (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 2x (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$I = \left[3\, (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$I = \left(3(2)^{\frac{3}{2}} \right) - \left(3(1)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$I = 3(2\sqrt{2}) - 3 = 6\sqrt{2} - 3$$

$\boxed{21}$ ■ $I = \int_0^2 \sqrt{2x+1}\, dx$

$$I = \int_0^2 (2x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$I = \frac{1}{2} e^{2} + \frac{1}{2e^{2}} - 1$

$I = \frac{e^{4} - 2e^{2} + 1}{2e^{2}}$

$\boxed{26}$ ■ $I = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx$

$I = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}$

$I = \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} \right)$

$I = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$

$\boxed{27}$ ■ $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^{2} x \, dx$

$I = \left[\frac{\sin^{3} x}{3} \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$I = \left(\frac{1}{3} \right) - (0) = \frac{1}{3}$

$\boxed{28}$ ■ $I = \int_{0}^{\pi} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx$

$I = \left[-\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right]_{0}^{\pi}$

$I = \left(-\cos \frac{5\pi}{4} \right) - \left(-\cos \frac{\pi}{4} \right)$

$I = \int_{1}^{e} \frac{1}{x} (\ln x)^{2} \, dx$

$I = \left[\frac{(\ln x)^{3}}{3} \right]_{1}^{e}$

$I = \left(\frac{1}{3} \right) - (0) = \frac{1}{3}$

$\boxed{24}$ ■ $I = \int_{0}^{1} \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \, dx$

$I = \left[\ln | e^{x} + e^{-x} | \right]_{0}^{1}$

$I = \left(\ln (e + e^{-1}) \right) - \ln 2$

$I = \ln \left(e + \frac{1}{e} \right) - \ln 2$

$I = \ln \left(\frac{e^{2} + 1}{e} \right) - \ln 2$

$I = \ln (e^{2} + 1) - \ln (e) - \ln 2$

$I = \ln \left(\frac{e^{2} + 1}{2e} \right)$

$\boxed{25}$ ■ $I = \int_{0}^{1} (e^{2x} - e^{-2x}) \, dx$

$I = \left[\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{0}^{1}$

$I = \left(\frac{1}{2} e^{2} + \frac{1}{2} e^{-2} \right) - \left(\frac{1}{2} (1) + \frac{1}{2} (1) \right)$

$$I = \int_{-3}^{-2} (-x^2 - 2x)\,dx + \int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x)\,dx$$

$$I = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-2}^{-1}$$

$$I = \left(\frac{8}{3} - 4 \right) - (9 - 9) + \left(\frac{-1}{3} + 1 \right) - \left(\frac{-8}{3} + 4 \right)$$

$$I = \frac{8}{3} - 4 + \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - 4$$

$$I = -8 + 6 = -2$$

31 $$I = \int_{-1}^{2} x|x-1|\,dx$$

سنعود بعد قليل ،، ^^ (دراسة إشارة x-1)

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

عدنا ،، ^^

$$I = \int_{-1}^{1} x(-x+1)\,dx + \int_{1}^{2} x(x-1)\,dx$$

$$I = \int_{-1}^{1} (-x^2 + x)\,dx + \int_{1}^{2} x^2 - x\,dx$$

$$I = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{1}^{2}$$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

29 $$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{(-\sin x)}{\cos x}\,dx$$

$$I = \left[-\ln|\cos x| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I = \left(-\ln \frac{1}{2} \right) - \left(-\ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

$$I = \ln 2 + \ln\sqrt{3} - \ln 2 = \ln\sqrt{3}$$

30 $$I = \int_{-3}^{-1} x|x+2|\,dx$$

سنعود بعد قليل ،، ^^ (دراسة إشارة x+2)

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

عدنا ،، ^^

$$I = \int_{-3}^{-2} x(-x-2)\,dx + \int_{-2}^{-1} x(x+2)\,dx$$

$I = \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(2)^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$

$I = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

$I = \frac{-18+16+3}{6} = \frac{1}{6}$

32 $I = \int_0^3 2 - |2-x| \, dx$

[illegible] (دراسة إشارة $2-x$)

$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

تُصبح

$I = \int_0^2 2-(2-x)dx + \int_2^3 2-(-2+x)\,dx$

$I = \int_0^2 x \, dx + \int_2^3 (4-x)\,dx$

$I = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[4x + \frac{x^2}{2}\right]_2^3$

$I = 2 - 0 + 12 - \frac{9}{2} - 8 + 2$

$I = 2 + 12 - \frac{9}{2} - 6$

$I = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$

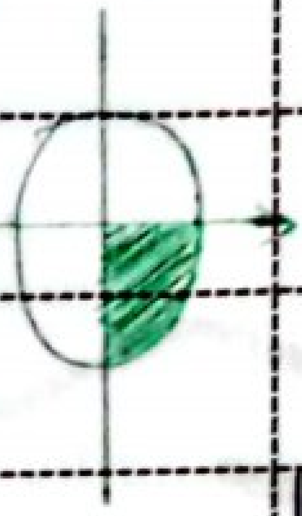
33 $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos 2x} \, dx$

$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos 2x)} \, dx$

$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 x} \, dx$

$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2|\sin x| \, dx$

$I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -2\sin x \, dx$



$I = 2\left[\cos x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$

$I = 2(\cos 2\pi) - (\cos \frac{3\pi}{2})$

$I = 2(1-0) = 2$

التكامل بالتجزئة: مكرر دورات.. ت

إذا كان لدينا: ← فرضية مناسبة.

الحالة الأولى: ← قانون.

← كما سبقا.

$$I = \int_a^b x^n \sin x \, dx$$

$$I = \int_a^b x^n \cos x \, dx$$

$$I = \int_a^b x^n e^x dx$$

فإنّ الفرضية المناسبة:

$$u = \text{التابع الصحيح} \rightarrow u' = (\text{التابع الصحيح})'$$

جداء

تكامل

$$v' = \text{الباقي} \rightarrow v = \text{تكامل الباقي}$$

الحالة الثانية:

$$I = \int_a^b x^n \ln(x) \, dx$$

فإنّ الفرضية المناسبة:

$$u = \ln(x) \rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

جداء

تكامل

$$v' = \text{الباقي} \rightarrow v = \text{تكامل الباقي}$$

الخطوات:

- نضع الفرضية المناسبة
- نضع القانون:

$$I = [u.v]_a^b - \int_a^b v.u'dx$$

ملاحظات:

- أحياناً نحتاج إلى المكاملة بالتجزئة مرات متتالية

تمرين: احسب I في كل من الحالات الآتية:

1. $I = \int_1^e x\ln(x)\,dx$
2. $I = \int_0^\pi x.\cos x\,dx$
3. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin x\,dx$
4. $I = \int_1^2 (x-2)e^x dx$
5. $I = \int_0^1 (x+2)e^x dx$
6. $I = \int_0^\pi (x-1)\cos x\,dx$
7. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x.\sin(3x)\,dx$
8. $I = \int_1^e (x-1)\ln(x)\,dx$
9. $I = \int_0^1 (2x+1)e^{-x}\,dx$
10. $I = \int_{Ln2}^{Ln3} (x^2-1)e^x\,dx$
11. $I = \int_0^\pi e^x\cos x\,dx$ دوري.. ت
12. $I = \int_0^\pi e^x.\sin x\,dx$ دوري.. ت

$$I = \int_1^e x Ln x \, dx$$

$$u = Ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} Ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} Ln x\right]_1^e - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} Ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right) - \left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

$u = x-2 \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$I = \left[(x-2)e^x\right]_1^2 - \int_1^2 e^x \, dx$

$I = \left[xe^x - 2e^x\right]_1^2 - \left[e^x\right]_1^2$

$I = \left[xe^x - 2e^x - e^x\right]_1^2$

$I = \left[xe^x - 3e^x\right]_1^2$

$I = (2e^2 - 3e^2) - (e - 3e)$

$I = -e^2 + 2e$

5] ■ $I = \int_0^1 (x+2)e^x \, dx$

$u = x+2 \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$I = \left[(x+2)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx$

$I = \left[(x+2)e^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1$

$I = \left[(x+2)e^x - e^x\right]_0^1$

$I = (e(2)) - (1)$

$I = 2e - 1$

2] ■ $\int_0^\pi x \cos x \, dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$

$I = \left[x \sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx$

$= \left[x \sin x\right]_0^\pi - \left[-\cos x\right]_0^\pi$

$= \left[x \sin x + \cos x\right]_0^\pi$

$I = (-1) - (1) = -2$

3] ■ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

$I = \left[-x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \, dx$

$I = \left[-x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I = \left[-x \cos x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I = (1) - (0) = 1$

4] ■ $I = \int_1^2 (x-2)e^x \, dx$

8] $I = \int_1^e (x-1) \ln x \, dx$

$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = x-1 \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} - x$

$I = \left[(\frac{x^2}{2} - x) \ln x \right]_1^e - \int_1^e (\frac{x}{2} - 1) dx$

$I = \left[(\frac{x^2}{2} - x) \ln x \right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} - x \right]_1^e$

$I = \left[(\frac{x^2}{2} - x) \ln x - \frac{x^2}{4} + x \right]_1^e$

$I = \left[(\frac{e^2}{2} - e) - \frac{e^2}{4} + e \right] - \left[0 - \frac{1}{4} + 1 \right]$

$I = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4}$

9] $I = \int_0^1 (2x+1) e^{-x} dx$

$u = 2x+1 \Rightarrow u' = 2$

$v' = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$

$I = \left[-(2x+1) e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -2e^{-x} dx$

$I = \left[(-2x-1) e^{-x} - 2e^{-x} \right]_0^1$

$I = (-3e^{-1} - 2e^{-1}) - (-1-2)$

$I = -\frac{5}{e} + 3$

6] $I = \int_0^{\pi} (x-1) \cos dx$

$u = x-1 \Rightarrow u' = 1$

$v' = \cos x \Rightarrow v = -\sin x$

$I = \left[(x-1)(-\sin x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\sin x \, dx$

$I = \left[-\sin x (x-1) \right]_0^{\pi} - \left[\cos x \right]_0^{\pi}$

$I = \left[(-\sin x)(x-1) - \cos x \right]_0^{\pi}$

$I = (1) - (-1) = 2$

7] $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin 3x \, dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = \sin 3x \Rightarrow v = -\frac{1}{3} \cos 3x$

$I = \left[-\frac{1}{3} x \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{1}{3} \cos 3x \, dx$

$I = \left[-\frac{1}{3} x \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[-\frac{1}{9} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$I = \left[-\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$I = \left(-\frac{1}{3} (\frac{\pi}{3}) (-1) + 0 \right) - (0 + 0)$

$I = \frac{1}{3} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$

10. $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (x^2-1)\, e^x \, dx$

$u = x^2-1 \Rightarrow u' = 2x$

$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$$* \quad \boxed{I = \left[(x^2-1)e^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3} - \underbrace{\int_{\ln 2}^{\ln 3} 2x e^x \, dx}_{J}}$$

سنعود بعد قليل.. يحتاج تجزئة:

$J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2x e^x \, dx$

$u = 2x \Rightarrow u' = 2$

$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$J = \left[2xe^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3} - \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2e^x \, dx$

$J = \left[2xe^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3} - \left[2e^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

عدنا.. نعوض في *:

$I = \left[x^2e^x - e^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3} - \left[2xe^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3} + \left[2e^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$I = \left[x^2e^x - e^x - 2xe^x + 2e^x\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$I = (3(\ln 3)^2 - 6\ln 3 + 3) - (2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$

$I = 3(\ln 3)^2 - 6\ln 3 - 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$

11. $I = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$

$u = e^x \Rightarrow u' = e^x$

$v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$

$$* \quad \boxed{I = \left[e^x \sin x\right]_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi} \sin x \, e^x \, dx}_{J}}$$

سنعود بعد قليل.. ^^ يحتاج تجزئة..

$u = e^x \Rightarrow u' = e^x$

$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

$J = \left[-e^x . \cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -e^x . \cos x \, dx$

وإن سقطت سبعاً فانهض ثمانية 🙂♡

$J = \left[-e^x . \cos x\right]_0^{\pi} - I$

عدنا.. نعوض في *:

$I = \left[e^x \sin x\right]_0^{\pi} - \left[-e^x \cos x\right]_0^{\pi} - I$

$2I = \left[e^x \sin x + e^x \cos x\right]_0^{\pi}$

$2I = (-e^{\pi}) - (1) = -e^{\pi} - 1$

$I = \dfrac{-e^{\pi} - 1}{2}$

12. $I = \int_0^{\pi} e^x . \sin x \, dx$

$u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$

$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$$* \quad \boxed{I = \left[\sin x \, e^x\right]_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi} \cos x \, e^x \, dx}_{J}}$$

سنعيد ديه قليل .. ثم نحتاج تجزئة ..

$u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$

$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$$J = \left[e^x \cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -e^x \sin x\,dx$$

$$J = \left[e^x \cos x\right]_0^{\pi} + I$$

عندما نعوض في J :

$$I = \left[\sin x\, e^x\right]_0^{\pi} - \left[e^x \cos x\right]_0^{\pi} - I$$

$$2I = \left[\sin x\, e^x - \cos x\, e^x\right]_0^{\pi}$$

$$2I = \left[e^x (\sin x - \cos x\right]_0^{\pi}$$

$$2I = ((0+1)e^{\pi}) - ((0-1)e^{0})$$

$$2I = e^{\pi} + 1 \Rightarrow I = \frac{e^{\pi}+1}{2}$$

ملاحظة:

يمكن إيجاد التابع الأصلي $F(x)$ بالاستفادة من التكامل المحدد وفق الخطوات التالية:

- **نستبدل كل x بـ t**
- **نوجد المطلوب باستخدام التكامل بالتجزئة فيكون:**

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

حيث: a مقدار كيفي من المجال I

تمرين 1 : **ليكن لدينا التابع f المعرف على** $]0,+\infty[$

$$f(x)=\ln(x)$$

عيّن تابعاً أصلياً للتابع f

$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

$F(x) = \int_1^x Lnt \,.\, dt$

$u = Lnt \Rightarrow u' = \frac{1}{t}$

$v' = 1 \Rightarrow v = t$

$F(x) = [t.Lnt]_1^x - \int_1^x 1\,dt$

$F(x) = [t\,Lnt]_1^x - [t]_1^x$

$F(x) = [t\,Lnt - t]_1^x$

$F(x) = x\,Ln x + 1$

تمرين 2 :

جد تابعاً أصلياً للتابع f على المجال I :

1. $f(x)=x\cos x$	$I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=x\sin 2x$	$I=\mathbb{R}$
3. $f(x)=x^2e^x$	$I=\mathbb{R}$
4. $f(x)=x^2\ln(x)$	$I=]0,+\infty[$
5. $f(x)=x^2\sin 2x$	$I=\mathbb{R}$
6. $f(x)=x^2\cos 3x$	$I=\mathbb{R}$

1] $f(x) = x\cos x$

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$F(x) = \int_0^x t.\cos t\,dt$

$u = t \Rightarrow u' = 1$

$v' = \cos t \Rightarrow v = \sin t$

$F(x) = [t\sin t]_0^x - \int_0^x \sin t\,dt$

$F(x) = [t\sin t]_0^x - [-\cos t]_0^x$

$F(x) = [t\sin t + \cos t]_0^x$

$F(x) = (x\sin x + \cos x) - (1)$

$F(x) = x.\sin x + \cos x - 1$

2] $f(x) = x\sin 2x$

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$F(x) = \int_0^x t\sin 2t\,dt$

سنوجد من قبل ناتج تكامل

$J = \int_0^x t e^t \, dt$

$u = t \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^t \Rightarrow v = e^t$

$J = \left[t e^t\right]_0^x - \int_0^x e^t \, dt$

$J = \left[t e^t\right]_0^x - \left[e^t\right]_0^x$

$J = \left[t e^t - e^t\right]_0^x$

عندئذ نعوض في *

$F(x) = \left[t^2 e^t\right]_0^x - 2\left[t e^t - e^t\right]_0^x$

$F(x) = \left[t^2 e^t - 2t e^t + 2e^t\right]_0^x$

$F(x) = (x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x) - (0 + 0 + 2)$

$F(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2$

4 ▪ $f(x) = x^2 \ln x$

$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$

$F(x) = \int_1^x t^2 \ln t \, dt$

$u = \ln t \Rightarrow u' = \frac{1}{t}$

$v' = t^2 \Rightarrow v = \frac{t^3}{3}$

$u = t \Rightarrow u' = 1$

$v' = \sin 2t \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos 2t$

$F(x) = \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{2}\cos 2t \, dt$

$F(x) = \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t\right]_0^x - \left[-\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^x$

$F(x) = \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^x$

$F(x) = \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\right) - 0$

$F(x) = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$

3 ▪ $f(x) = x^2 e^x$

$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$

$F(x) = \int_0^x t^2 e^t \, dt$

$u = t^2 \Rightarrow u' = 2t$

$v' = e^t \Rightarrow v = e^t$

$F(x) = \left[t^2 e^t\right]_0^x - \int_0^x 2t e^t \, dt$

$$* \quad \boxed{F(x) = \left[t^2 e^t\right]_0^x - 2\underbrace{\int_0^x t e^t \, dt}_{J}}$$

$J = \left[\frac{1}{2} t \sin 2t\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2} \sin 2t \, dt$

$J = \left[\frac{1}{2} t \sin 2t\right]_0^x - \left[-\frac{1}{4} \cos 2t\right]_0^x$

$J = \left[\frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t\right]_0^x$

نعتاض ثم نعوض في *:

$F(x) = \left[-\frac{1}{2} t^2 \cos 2t\right]_0^x +$

$\left[\frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t\right]_0^x$

$F(x) = \left[-\frac{1}{2} t^2 \cos 2t + \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t\right]_0^x$

$F(x) = \left(-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} (\cos 2x)\right)$

$- \left(\frac{1}{4}\right)$

$F(x) = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x$

$+ \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4}$

6] $f(x) = x^2 \cos 3x$

$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$

$F(x) = \int_0^x t^2 \cos 3t \, dt$

$u = t^2 \Rightarrow u' = 2t$

$v' = \cos 3t \Rightarrow v = \frac{1}{3} \sin 3t$

$F(x) = \left[\frac{t^3}{3} \ln t\right]_1^x - \left[\frac{1}{3} \frac{t^3}{3}\right]_1^x$

$F(x) = \left[\frac{t^3}{3} \ln t - \frac{1}{9} t^3\right]_1^x$

$F(x) = \left(\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3\right) - \left(-\frac{1}{9}\right)$

$F(x) = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{9}$

5] $f(x) = x^2 \sin 2x$

$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$

$F(x) = \int_0^x t^2 \sin(2t) \, dt$

$u = t^2 \Rightarrow u' = 2t$

$v' = \sin 2t \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2t$

$F(x) = \left[-\frac{1}{2} t^2 \cos 2t\right]_0^x - \int_0^x -t \cos 2t \, dt$

$$* \boxed{F(x) = \left[-\frac{1}{2} t^2 \cdot \cos 2t\right]_0^x + \underbrace{\int_0^x t \cos 2t \, dt}_{J}}$$

سنعود نعمل .. ثم تكامل تجزئة ..

$J = \int_0^x t \cos 2t \, dt$

$u = t \Rightarrow u' = 1$

$v' = \cos 2t \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2t$

$$F(x)=\left[\frac{1}{3}t^2\sin 3t\right]_0^x-\int_0^x\frac{2}{3}t\sin 3t\,dt$$

$$\boxed{F(x)=\left[\frac{1}{3}t^2\sin 3t\right]_0^x-\frac{2}{3}\underbrace{\int_0^x t\sin 3t\,dt}_{J}}\ *$$

سنوجد ... تكامل ... بالتجزئة :

$$J=\int_0^x t\sin 3t\,dt$$

$$u=t\Rightarrow u'=1$$

$$v'=\sin 3t\Rightarrow v=-\frac{1}{3}\cos 3t$$

$$J=\left[-\frac{1}{3}t\cos 3t\right]_0^x-\int_0^x-\frac{1}{3}\cos 3t\,dt$$

$$J=\left[-\frac{1}{3}t\cos 3t\right]_0^x+\left[+\frac{1}{9}\sin 3t\right]_0^x$$

$$J=\left[-\frac{1}{3}t\cos 3t+\frac{1}{9}\sin 3t\right]_0^x$$

عندئذٍ.. نعوض في * :

$$F(x)=\left[\frac{1}{3}t^2\sin 3t\right]_0^x-\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}t\cos 3t+\frac{1}{9}\sin 3t\right]_0^x$$

$$F(x)=\frac{1}{3}x^2\sin 3x+\frac{2}{9}x\cos 3x-\frac{2}{27}\sin 3x$$

ملاحظة :

أوجد التابع الأصلي للتابع f نميز :

تحقق إحدى القواعد من أولاً إلى سادساً	فشل جميع القواعد من أولاً إلى سادساً
⇓	⇓
فوراً نوجد التابع الأصلي.	نطبق القانون: $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ حيث a مقدار كيفي من I.

تطبيقات التكامل: القسم الرابع ..

أولاً: حساب المساحات: مكرر دورات .. ^^

نص السؤال:

احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني والمستقيم Δ (Δ مستقيم أفقي أو مائل) وبين $x = a$ و $x = b$

• المساحات:
• رسم.
• تحديد منطقة.
• بناء قانون.

خطوات الحل:

- نرسم الخط البياني
- نضع القانون:

$$S = \int_a^b (\text{فوق} - \text{تحت})dx$$

- حيث فوق وتحت يقصد بها $f(x)$ و y_Δ
- نتابع كما سبق..

انتبه يا صديقي الطالب:

- إذا كان الخط البياني C_f فوق المستقيم Δ فإنَّ قانون المساحة يُعطى وفق:

$$S = \int_a^b (f(x) - y_\Delta)\, dx$$

- إذا كان المستقيم Δ فوق الخط البياني C_f فإنَّ قانون المساحة يُعطى وفق:

$$S = \int_a^b \left(y_\Delta - f(x)\right)\, dx$$

ملاحظات هامة:

1. يمكن استخدام علاقة شال عند اللزوم لإيجاد المساحة المطلوبة
2. أحياناً حدود التكامل تكون غير مُعطاة إنما تستنتج وفق:
   - محور التراتيب $x = 0$
   - عند وجود نقاط تقاطع مع محور الفواصل فإنّ حدود التكامل هي فواصل نقاط التقاطع
   - حدود التكامل في المساحة هي قيم لـ x وتكون من الصغير إلى الكبير
3. عندما يكون Δ هو محور الفواصل فإن $y_\Delta = 0$
4. ناتج المساحة موجب حصراً

التمرين الأول:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x^2 - 4$$

① أولاً:

ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم ارسم C

② ثانياً:

في كل من الحالات الآتية احسب المساحة S

1. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = 3$ و $x = 4$
2. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = 1$ و $x = 2$
3. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمان $x = 1$ و $x = 3$
4. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل ومحور التراتيب والمستقيم الذي معادلته $x = 2$
5. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C والمستقيم الذي معادلته $y = 5$ والمستقيمان $x = 1$ و $x = 2$
6. هام S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C والمستقيم الذي معادلته $y = x$ ومحور التراتيب والمستقيم الذي معادلته $x = 2$
7. S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C والمستقيم الذي معادلته $y = x$ والمستقيمان $x = 4$ و $x = 5$

أولاً: دراسة تغيرات التابع:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

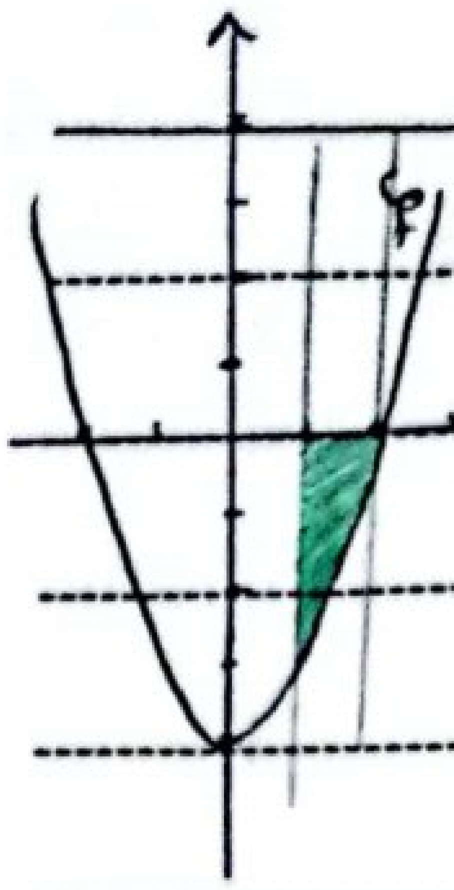
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 0$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = -4$

$S=\int_1^2 (y_\Delta - f(x))\,dx$ [2

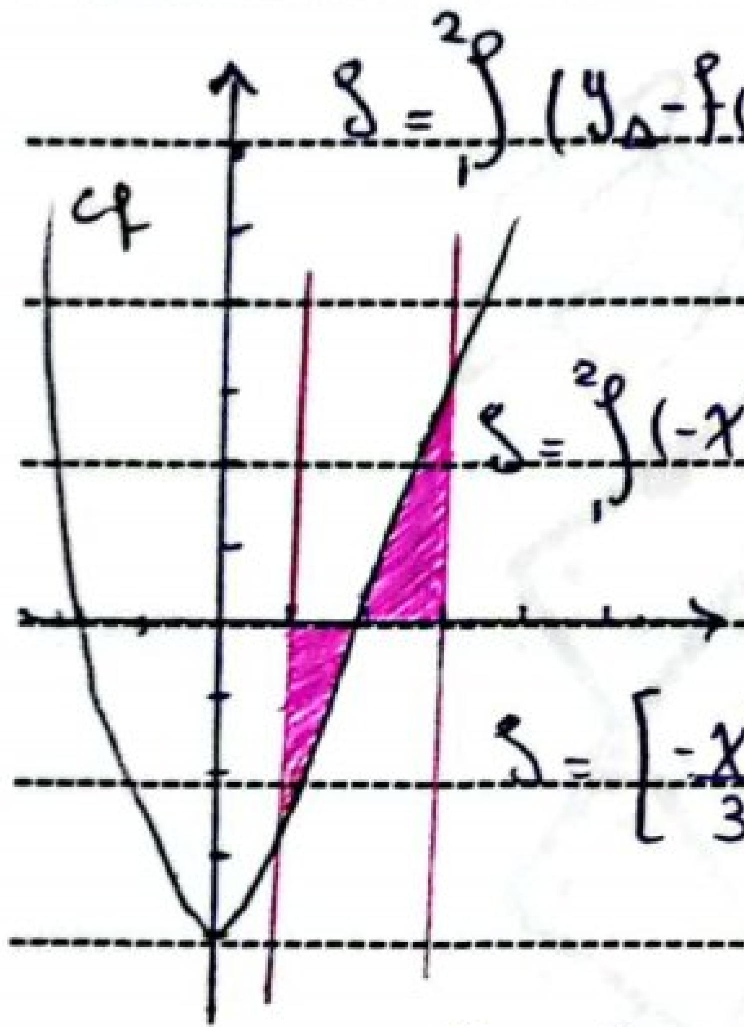


$S=\int_1^2 (-x^2+4)\,dx$

$S=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_1^2$

$S=\left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(-\frac{1}{3}+4\right)=\frac{5}{3}$

$S=\int_1^2 (y_\Delta - f(x))\,dx+\int_2^3 (f(x)-y_\Delta)\,dx$ [3

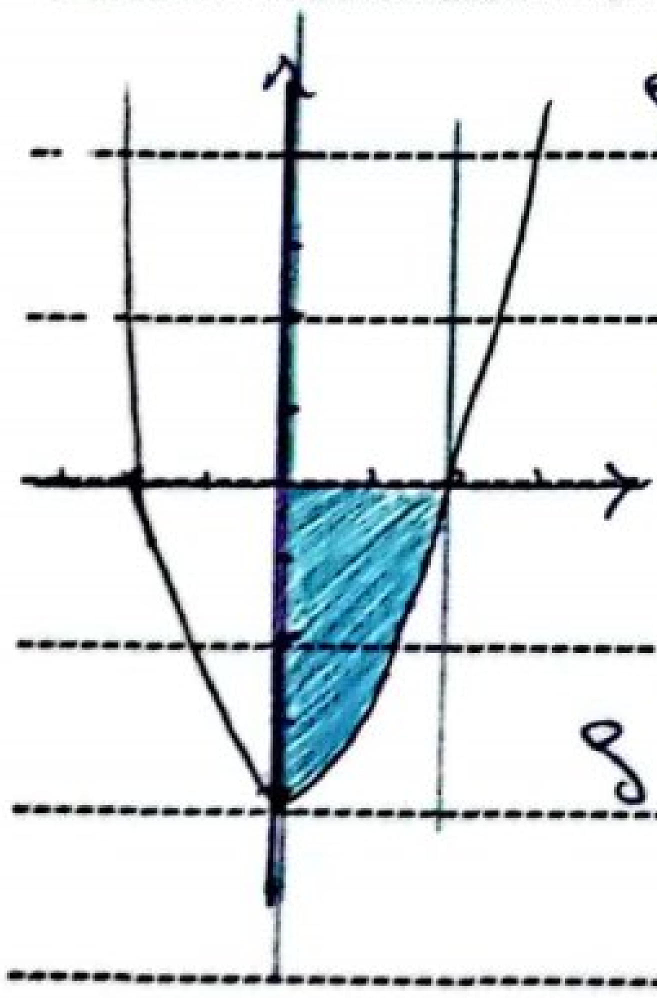


$S=\int_1^2 (-x^2+4)\,dx+\int_2^3 (x^2-4)\,dx$

$S=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3$

$S=\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=\frac{12}{3}=4$

$S=\int_0^2 (y_\Delta - f(x))\,dx$ [4

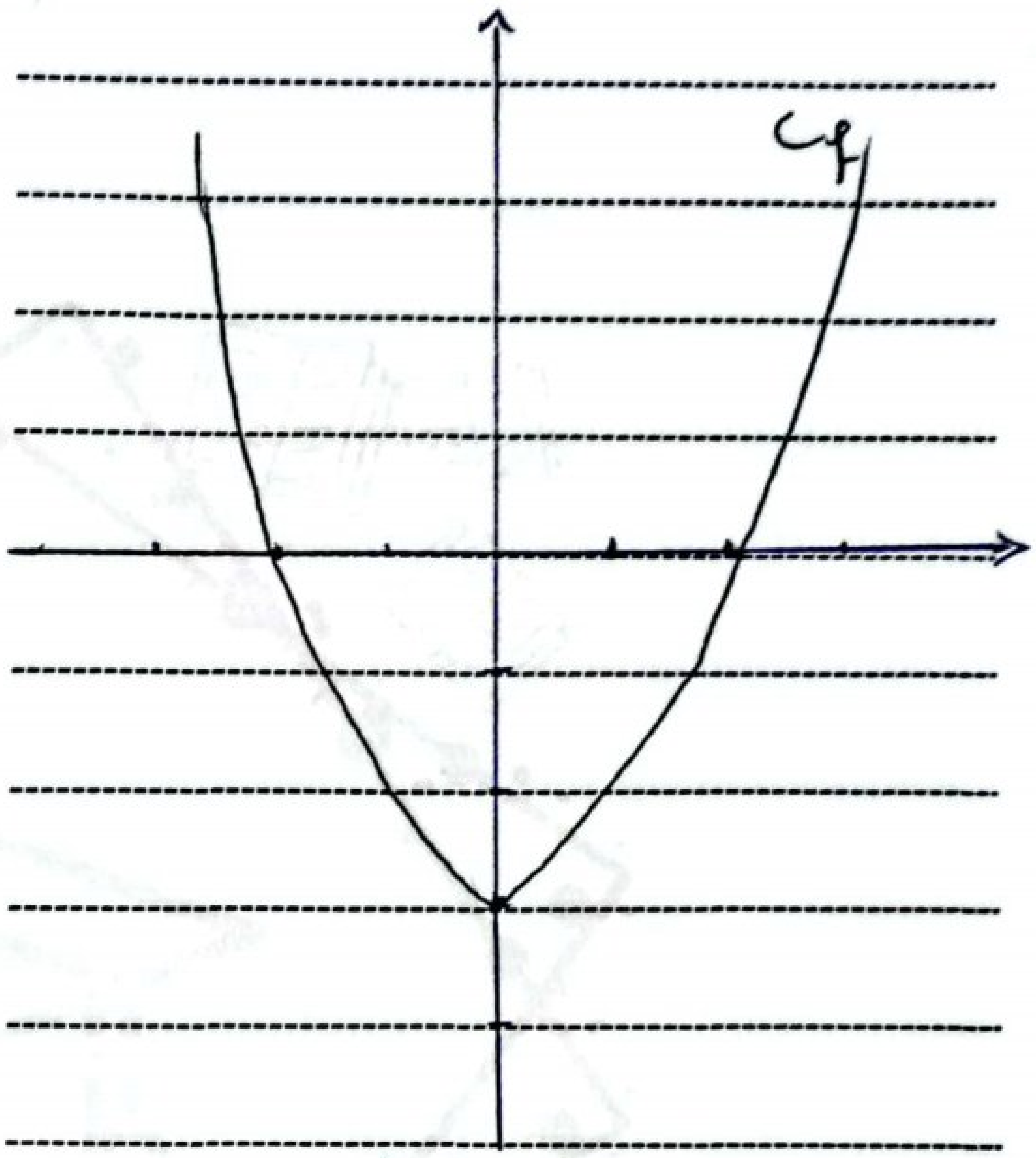


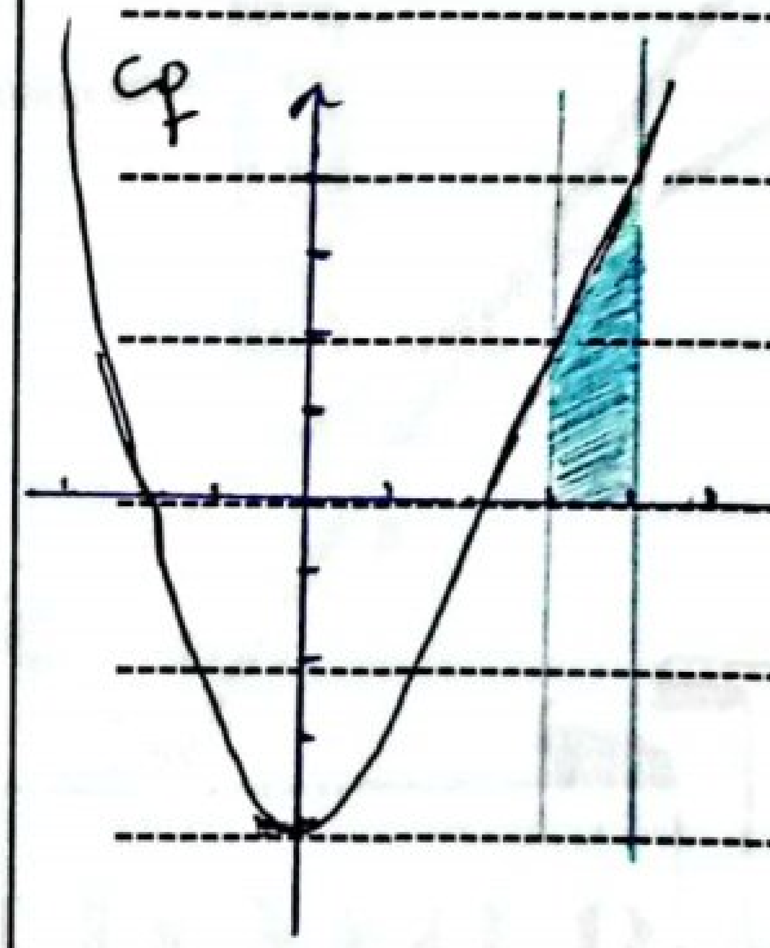
$S=\int_0^2 (-x^2+4)\,dx$

$S=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2$

$S=-\frac{8}{3}+8=\frac{16}{3}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$





$S=\int_3^4 (f(x)-y_\Delta)\,dx$ [1

$S=\int_3^4 (x^2-4)\,dx$

$S=\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_3^4$

$S=\left(\frac{64}{3}-16\right)-\left(9-12\right)$

$S=\frac{64}{3}-16+3=\frac{64}{3}-13=\frac{25}{3}$

$S = \int_0^2 (y_\Delta - f(x))\, dx$

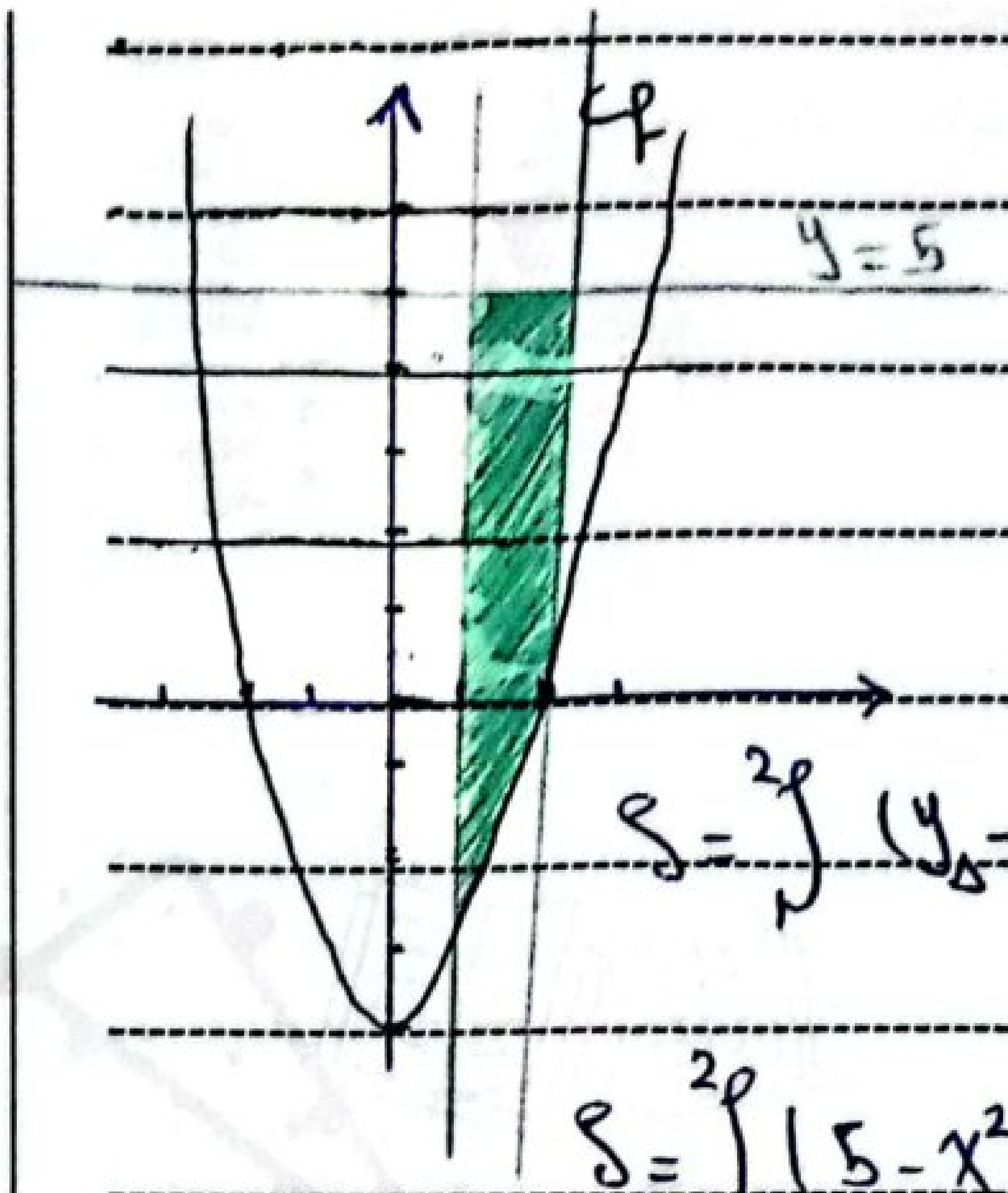
$S = \int_0^2 (x - x^2 + 4)\, dx$

$S = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^2$

$S = \left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3} + 4(2) \right) - (0+0+0)$

$S = 2 - \frac{8}{3} + 8 = 10 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3}$

5.



$S = \int_1^2 (y_\Delta - f(x))\, dx$

$S = \int_1^2 (5 - x^2 + 4)\, dx$

$S = \int_1^2 (-x^2 + 9)\, dx$

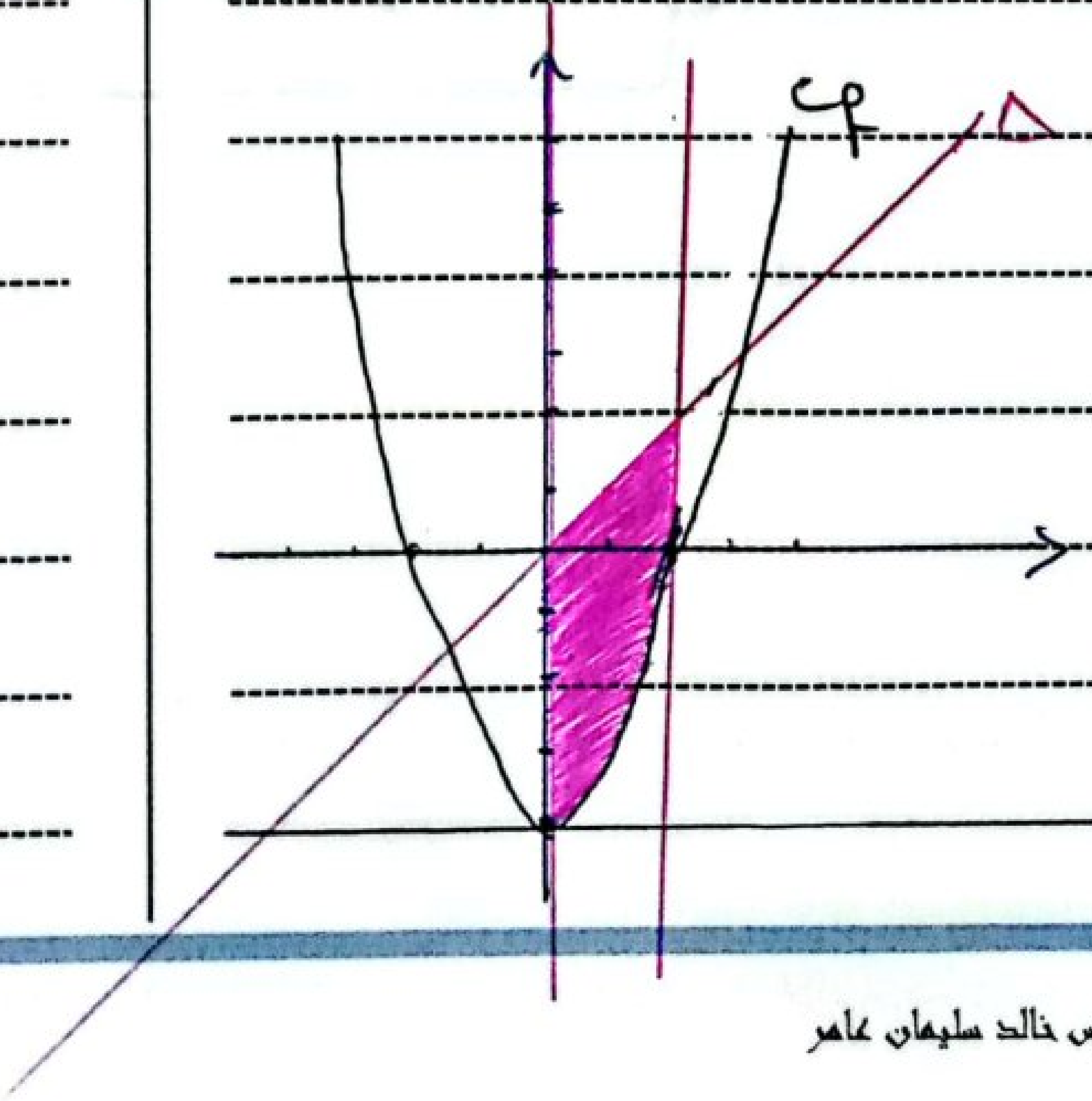
$S = \left[-\frac{x^3}{3} + 9x \right]_1^2$

$S = \left(-\frac{(2)^3}{3} + 9(2) \right) - \left(-\frac{1}{3} + 9 \right)$

$S = -\frac{8}{3} + 18 + \frac{1}{3} - 9$

$S = -\frac{7}{3} + 9 = \frac{18}{3} = 6$

6



التمرين الثالث عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = (x-1)e^x$$

١. أثبت أن $f^n(x) = (x+n-1)e^x$

٢. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها وارسم خطه البياني

٣. أوجد قيمة تقريبية $f(0.1)$

٤. احسب S مساحة السطح المحصور بين الخط البياني ومحوري الإحداثيات

٥. استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g حيث:

$$g(x) = \frac{-x-1}{e^x}$$

٦. ناقش بيانياً بحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة $xe^x - e^x - m = 0$

التمرين الرابع عشر:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x + \frac{4}{e^x+1}$$

١. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

٢. أثبت $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط C وادرس وضعه النسبي

٣. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(x+4)\big)$ ثم فسر النتيجة هندسياً

٤. اكتب معادلة T المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها صفر

٥. احسب $f(x)+f(-x)$ ثم استنتج أن النقطة $A(0,2)$ هي مركز تناظر للخط C

٦. ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم T و C

٧. استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع

$$g(x) = \frac{4e^x}{e^x+1} - x$$

ثم فسر النتيجة هندسياً

٨. احسب مساحة السطح المحدد بالخط C والمستقيم $\Delta: y = x+4$ والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

ثانياً: حساب حجم المجسم الدوراني:

طلب مع مسألة ١٠٠ ،

+ لم يأتي سابقاً

نص السؤال:

أوجد حجم المجسم الدوراني

فكرة الحل:

نطبق القانون:

$$V = \pi\int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx$$

التمرين الأول:

احسب حجم المجسم الناتج عن دوران الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ دورة كاملة حول محور الفواصل على المجال $[1,2]$

$$V = \pi\int_1^2 (f(x))^2 dx$$

$$= \pi\int_1^2 \left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^2 dx = \pi\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$$

$$= \pi\int_1^2 x^{-3} dx = \pi\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2$$

$$= \pi\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^2$$

$$= \pi\left[\left(\frac{-1}{8}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right)\right]$$

$$= \pi\left(\frac{-1}{8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$V = \frac{3}{8}\pi$$

التمرين الثاني:

احسب حجم المجسم الناتج عن دوران الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ دورة كاملة حول محور الفواصل على المجال $[0,1]$

$$\bar{V} = \pi \int_0^1 (f(x))^2 \, dx$$

$$\bar{V} = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} \, dx$$

$$\bar{V} = \pi \int_0^1 \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} \, dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx$$

$$\bar{V} = \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx$$

$$\bar{V} = \pi \left[x - \text{Ln}|1+e^x| \right]_0^1$$

$$\bar{V} = \pi \left((1 - \text{Ln}(1+e)) - (-\text{Ln}2) \right)$$

$$\bar{V} = \pi \left(1 - \text{Ln}(1+e) + \text{Ln}2 \right)$$

التمرين الثالث:

احسب حجم المجسم الناتج عن دوران الخط البياني للتابع $f(x) = x\sqrt{x(1-x)}$ دورة كاملة حول محور الفواصل على المجال $[0,1]$ ،

$$\bar{V} = \pi \int_0^1 (f(x))^2 \, dx$$

$$\bar{V} = \pi \int_0^1 \left(x\sqrt{x(1-x)} \right)^2 dx$$

$$\bar{V} = \pi \int_0^1 x^2 \left(x(1-x) \right) dx$$

$$\bar{V} = \pi \int_0^1 (x^3 - x^4) \, dx$$

$$\bar{V} = \pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$\bar{V} = \pi \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - (0) \right]$$

$$\bar{V} = \pi \left(\frac{1}{20} \right)$$

$$V = \frac{\pi}{20}$$

تمارين:

التمرين الأول: سحبية دورة .. ^^

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x + 1}$$

١. **جد الأعداد a و b و c التي تحقق:**

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

٢. **أياً كان x من D احسب** $I = \int_0^2 f(x)dx$

1 الإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية..

$$\begin{array}{r|l} & x - 6 \\ \hline x+1 & x^2 - 5x + 1 \\ & -x^2 \mp x \\ \hline & -6x + 1 \\ & \pm 6x \pm 6 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$f(x) = x - 6 + \frac{7}{x+1}$

بالمقارنة مع: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

نجد أن:

$\boxed{a = 1}$

$\boxed{b = -6}$ $\boxed{c = 7}$

2

$I = \int_0^2 f(x)\,dx$

$I = \int_0^2 x - 6 + \frac{7}{x+1}\,dx$

$I = \int_0^2 x - 6 + 7\frac{1}{x+1}\,dx$

$I = \left[\frac{x^2}{2} - 6x + 7\ln|x+1|\right]_0^2$

$I = \left(2 - 12 + 7\ln3\right) - \left(0 - 0 + 7(0)\right)$

$I = 7\ln3 - 10$

التمرين الثاني: دورة 2017 الثانية .. ^^

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+3}$$

1. **اكتب $f(x)$ بالشكل**

$$f(x)=ax+b+\frac{1}{x+3}$$

2. **عين قيمة كلاً من a و b ثم أثبت أنّ المستقيم $y=ax+b$ مقارب في جوار $+\infty$**
3. **احسب $\int_0^2 f(x)dx$**

1 الإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية..

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-2 & x+3 \\ \hline -x^2 \mp 3x & x-1 \\ -x-2 & \\ \pm x \pm 3 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$f(x)=x-1+\frac{1}{x+3}$

بالمقارنة مع:

$f(x)=ax+b+\frac{1}{x+3}$

نجد أنّ:

$\boxed{a=1}$ $\boxed{b=-1}$

2 إثبات أنّ: $y=x-1$:

$h(x)=f(x)-y_\Delta$

$h(x)=\cancel{x-1}+\frac{1}{x+3}-(\cancel{x-1})$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$

إذاً:

المستقيم الذي معادلته $\Delta: y=x-1$

مقارب مائل في جوار $+\infty$.

3 $I=\int_0^2 f(x)\,dx$

$I=\int_0^2 x-1+\frac{1}{x+3}\,dx$

$I=\left[\frac{x^2}{2}-x+Ln|x+3|\right]_0^2$

$I=(2-2+Ln5)-(0+0+Ln3)$

$I=Ln5-Ln3$

$I=Ln\left(\frac{5}{3}\right)$

إنها لعافية أن ينشغل المرء بنفسه، بأفكاره، بأحلامه .. ♡

التمرين الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^3-x^2+x-3}{x^2-x-2}$$

١. **عين الأعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق**

$$f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

٢. **احسب $\int_0^1 f(x)dx$**

1 الإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^2-x-2 & x^3-x^2+x-3 \\ & -x^3\pm x^2\pm 2x \\ \hline & 3x-3 \end{array}$$

$$f(x)=x+\frac{3x-3}{x^2-x-2}$$

يحتاج إصلاح .. سنعود بعد قليل..

الإصلاح باستخدام تفريق الكسور:

$$J=\frac{3x-3}{x^2-x-2}$$

$$J=\frac{3x-3}{x^2-x-2}=\frac{3x-3}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}$$

$$=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

نكافئ:

$$3x-3=A(x+1)+B(x-2)$$

نفرض: $x=-1$:

$$-6=-3B \Rightarrow B=2$$

نفرض: $x=2$:

$$3=3A \Rightarrow A=1$$

إذاً:

$$J=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}$$

$$J=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}$$

نعوض:

$$f(x)=x+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}$$

بالمقارنة مع:

$$f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

نجد أن:

$a=1 \quad b=2 \quad c=1$

2

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$I=\int_0^1 x+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}\,dx$$

$$I=\int_0^1 x+2\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}\,dx$$

$$I=\left[\frac{x^2}{2}+2\ln|x+1|+\ln|x-2|\right]_0^1$$

$$I=\left(\frac{1}{2}+2\ln 2+0\right)-(0+0+\ln 2)$$

$$I=\frac{1}{2}+2\ln 2-\ln 2$$

$$I=\frac{1}{2}+\ln 2$$

التمرين الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$$

1. **عين الأعداد الحقيقية a و b و c و d التي تحقق:**

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1}$$

2. **احسب** $I = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

1] الإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x^2-1 & x^3+x^2+x-1 \\ & \underline{-x^3 \pm x} \\ & x^2+2x-1 \\ & \underline{-x^2 \pm 1} \\ & 2x \end{array}$$

$$f(x) = x+1 + \frac{2x}{x^2-1}$$

سنعود بعد قليل ::

الإصلاح باستخدام تفريق الكسور:

$$J = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$J = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$J = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

نطابق:

$$2x = A(x+1) + B(x-1)$$

نفرض: $x = -1$:

$$-2 = -2B \Rightarrow B = 1$$

نفرض: $x = 1$:

$$2 = 2A \Rightarrow A = 1$$

إذاً:

$$J = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

عدنا ::

$$f(x) = x+1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

بالمقارنة مع:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1}$$

نجد أن:

$\boxed{a = 1}$ $\boxed{b = 1}$

$\boxed{c = 1}$ $\boxed{d = 1}$

2]

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x + 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + \ln|x-1|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$I = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$I = \cancel{\frac{1}{8}} + \frac{1}{2} + \cancel{\ln\frac{3}{2}} + \cancel{\ln\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{8}} + \frac{1}{2} - \cancel{\ln\frac{1}{2}} - \cancel{\ln\frac{3}{2}}$$

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{e^{2x}+3e^{x}+1}{e^{x}+1}$$

1. **عين الأعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق:**

$$f(x)=ae^{x}+b+\frac{c}{e^{x}+1}$$

2. **احسب** $I=\int_0^1 f(x)dx$

1) الإصلاح باستخدام القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} & e^{x}+2 \\ \hline e^{x}+1 & e^{2x}+3e^{x}+1 \\ & -e^{2x}\mp e^{x} \\ \hline & 2e^{x}+1 \\ & -2e^{x}\mp 2 \\ \hline & -1 \end{array}$$

$$f(x)=e^{x}+2+\frac{-1}{e^{x}+1}$$

بالمقارنة مع:

$$f(x)=ae^{x}+b+\frac{c}{e^{x}+1}$$

نجد أن:

$\boxed{a=1}$, $\boxed{b=2}$, $\boxed{c=-1}$

2)

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$I=\int_0^1 e^{x}+2-\frac{1}{e^{x}+1}\,dx$$

$$I=\int_0^1 e^{x}+2\quad\frac{-1-e^{x}+e^{x}}{e^{x}+1}\,dx$$

$$I=\int_0^1 e^{x}+2+\frac{-1-e^{x}}{e^{x}+1}+\frac{e^{x}}{e^{x}+1}\,dx$$

$$I=\int_0^1 e^{x}+2+\frac{-1\cancel{(1+e^{x})}}{\cancel{e^{x}+1}}+\frac{e^{x}}{e^{x}+1}\,dx$$

$$I=\left[e^{x}+2x-x+\ln(e^{x}+1)\right]_0^1$$

$$I=\left(e+2-1+\ln(e+1)\right)-\left(1+0-0+\ln 2\right)$$

$$I=e+2-1+\ln(e+1)-1-\ln 2$$

$$I=e+\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

التمرين السادس : **ليكن لدينا العددين:** شبيه دورتين..

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

1. احسب J
2. احسب $I + J$ ثم استنتج I

$\boxed{1}$

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$J = \left[\frac{1}{2} Ln|1+x^2|\right]_0^1$$

$$J = \frac{1}{2} Ln 2$$

$\boxed{2}$

$$I + J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$I + J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3+x}{1+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{1+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$I + J = \frac{1}{2}$$

استنتاج I :

نعلم أن :

$$I + J = \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} - J$$

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} Ln 2$$

التمرين السابع: **ليكن لدينا العددين:**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + 2\sin x} dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} dx$$

1. احسب J
2. احسب $I + J$ ثم استنتج I

1

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \frac{2\cos x}{1+2\sin x} dx$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x}{1+2\sin x} dx$$

$$J = \frac{1}{2}\left[\ln|1+2\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$J = \frac{1}{2}\left((\ln(3)) - (\ln(1))\right)$$

$$J = \frac{1}{2}\ln 3$$

2

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos x}{1+2\sin x} dx$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x . \cos x + \cos x}{1+2\sin x} dx$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cancel{(2\sin x + 1)}}{\cancel{(1+2\sin x)}} dx$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$I + J = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I + J = (1) - (0) = 1$$

استنتاج قيمة I :

سنكسبُ رِهانَ الحياةِ يوماً فما كانَ جهادنا على أحلامنا عبثاً ♡

$$I + J = 1$$

$$I + \frac{1}{2}\ln 3 = 1$$

$$I = 1 - \frac{1}{2}\ln 3$$

التمرين الثامن: ليكن لدينا العددين:

$$I = \int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}+1}dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx$$

احسب J و $I + J$ ثم استنتج I

- حساب J :

$$J = \int_0^1 \frac{x e^{x^2}}{e^{x^2}+1} dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{2x e^{x^2}}{e^{x^2}+1} dx$$

$$J = \left[\frac{1}{2} \text{Ln} |e^{x^2}+1| \right]_0^1$$

$$J = \left(\frac{1}{2} \text{Ln}(e+1) \right) - \left(\frac{1}{2} \text{Ln} 2 \right)$$

$$J = \frac{1}{2} \left(\text{Ln}(e+1) - \text{Ln} 2 \right)$$

$$J = \frac{1}{2} \text{Ln}\left(\frac{e+1}{2} \right)$$

- حساب I+J :

$$I+J = \int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}+1} dx + \int_0^1 \frac{x e^{x^2}}{e^{x^2}+1} dx$$

$$I+J = \int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}+1} + \frac{x e^{x^2}}{e^{x^2}+1} dx$$

$$I+J = \int_0^1 \frac{x + x e^{x^2}}{e^{x^2}+1} dx$$

$$I+J = \int_0^1 \frac{x \cancel{(1+e^{x^2})}}{\cancel{e^{x^2}+1}} dx$$

$$I+J = \int_0^1 x \, dx$$

$$I+J = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$I+J = \left(\frac{1}{2} \right) - (0) = \frac{1}{2}$$

- استنتاج I :

$$I + J = \frac{1}{2}$$

$$I + \frac{1}{2} \text{Ln}\left(\frac{e+1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{Ln}\left(\frac{e+1}{2} \right)$$

التمرين التاسع :

١. **أثبت أنّ:**

$$\frac{1}{1+e^{x}}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

٢. **واستنتج قيمة**

$$I=\int_{0}^{1}\frac{1}{(e^{x}+1)}dx$$

$$\boxed{1}\quad \underbrace{\frac{1}{1+e^{x}}}_{L_1} = \underbrace{\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}}_{L_2}$$

$$L_1 = \frac{1}{1+e^{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^{-x}}}$$

$$L_1 = \frac{1}{\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}}} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = L_2$$

$$\boxed{2}\quad I = \int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^{x}}\,dx$$

$$I = \int_{0}^{1}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$$

$$I = \int_{0}^{1}\frac{-(-e^{-x})}{e^{-x}+1}\,dx$$

$$I = -\int_{0}^{1}\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$$

$$I = -\left[\ln|e^{-x}+1|\right]_{0}^{1}$$

$$I = -\left[(\ln(\tfrac{1}{e}+1) - \ln 2\right]$$

$$I = -\ln\left(\frac{e^{-1}+1}{2}\right)$$

التمرين العاشر :

١. **أثبت أنّ:**

$$\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$$

٢. **واستنتج قيمة**

$$J = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

$$\underbrace{\frac{1}{1+e^x}}_{L_1} = \underbrace{1 - \frac{e^x}{e^x+1}}_{L_2} \qquad \boxed{1}$$

$$L_1 = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}$$

$$L_1 = \frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$L_1 = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = L_2$$

$$J = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx \qquad \boxed{2}$$

$$J = \int_0^1 1 - \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$J = \left[x - Ln|e^x+1|\right]_0^1$$

$$J = (1 - Ln(e^x+1)) - (0 - Ln2)$$

$$J = 1 - Ln(e^x+1) + Ln2$$

$$J = 1 + Ln\left(\frac{2}{e^x+1}\right)$$

التمرين الحادي عشر : ليكن لدينا العددين: دورة 2018

$$J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 2} dx$$

$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{2}{e^x + 2} dx$$

1. احسب J
2. احسب $J + I$ ثم استنتج I

1

$$J = \int_0^{Ln2} \frac{e^x}{e^x+2} dx$$

$$J = \left[Ln|e^x+2| \right]_0^{Ln2}$$

$$J = (Ln4) - (Ln3) = Ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

2

$$I + J = \int_0^{Ln2} \frac{2}{e^x+2} dx + \int_0^{Ln2} \frac{e^x}{e^x+2} dx$$

$$I + J = \int_0^{Ln2} \frac{2}{e^x+2} + \frac{e^x}{e^x+2} dx$$

$$I + J = \int_0^{Ln2} \frac{e^x+2}{e^x+2} dx$$

$$I + J = \int_0^{Ln2} 1 \, dx$$

$$I + J = \left[x \right]_0^{Ln2}$$

$$I + J = (Ln2) - (0) = Ln2$$

استنتاج I :

$$I + J = Ln2$$

$$I + Ln\frac{4}{3} = Ln2$$

$$I = Ln2 - Ln\frac{4}{3}$$

$$I = Ln2 - 2Ln2 + Ln3$$

$$I = -Ln2 + Ln3 = Ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

التمرين الثاني عشر : ليكن لدينا العددين: خارجي ..♥

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$$

1. احسب $J - I$ و $I + J$

ثم استنتج قيمة كل من I و J

2. أعد حساب I و J بطريقة أخرى

$\boxed{1}$ ▪ حساب $J-I$:

$$J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$$

$$J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x - \sin^2 x \, dx$$

$$J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x \, dx$$

$$J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx$$

$$J - I = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$J - I = \left(\frac{1}{2}\sin \pi\right) - (0)$$

$$J - I = 0$$

▪ حساب $I+J$:

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x + \cos^2 x \, dx$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx$$

$$I + J = \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I + J = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

▪ استنتاج قيمة I و J :

$$\begin{cases} J - I = 0 & \boxed{1} \\ I + J = \frac{\pi}{2} & \boxed{2} \end{cases}$$

نجمع $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ فنجد :

$$2J = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{J = \frac{\pi}{4}}$$

نعوض في $\boxed{2}$:

$$I = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4}}$$

$\boxed{2}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x \, dx$$

$$I = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x \, dx$$

$$J = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$J = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$J = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

التمرين الثالث عشر: ليكن لدينا العددين:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$$

1. احسب J
2. احسب $I + J$ ثم استنتج I

$\boxed{1}$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$

$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$

$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(-\sin x)}{\cos x} \, dx$

$J = \left[-\ln|\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$J = \left(-\ln \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0) = \frac{1}{2} \ln 2$

$\boxed{2}$ $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x + \tan x \, dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(\tan^2 x + 1) \, dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \tan x \, dx$

$I + J = \left[\frac{\tan^2 x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$I + J = \left(\frac{1}{2} \right) - (0) = \frac{1}{2}$

$I + J = \frac{1}{2}$

استنتاج I:

$I + J = \frac{1}{2}$

$I + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2}$

$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$

التمرين الرابع عشر: امتاف .. ^^

ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \cos^4 x$$

١. اكتب f بدلالة $\cos 2x$ و $\cos 4x$

٢. عين تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$

٣. احسب $I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} f(x)dx$

1] كتابة f بـ دلالة $\cos 2x$, $\cos 4x$:

$f(x) = \cos^4 x$

$f(x) = (\cos^2 x)^2$

$f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2$

لم مطابقة .. ^^

$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x$

$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right]$

قوي التوكل لا يُهزم والله إذا كلّف أعان ♡

$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$

$f(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

$f(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$ [2

$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} f(x)\,dx$ [3

$I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\,dx$

$I = \left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{12}}$

$I = \frac{2\pi + 8 + \sqrt{3}}{64}$

التمرين الخامس عشر: نموذج وزاري .. ^^

١. أثبت صحة المساواة

$$\cos^2 x . \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$$

٢. ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x . \sin^2 x \; dx$

$$\underbrace{\cos^2 x . \sin^2 x}_{L_1} = \underbrace{\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x}_{L_2} \quad [1$$

$$L_1 = \cos^2 x . \sin^2 x$$

$$L_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) . \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)$$

$$L_1 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) . \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$L_1 = \frac{1}{4}(1 - \cos^2 2x)$$

$$L_1 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

$$L_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$L_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x = L_2$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x . \sin^2 x \; dx \quad [2$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x \; dx$$

$$I = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 4 \; dx$$

$$I = \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}(0)\right) - (0 - 0)\right]$$

$$I = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$$

التمرين السادس عشر :

1. **باستعمال صيغتي $\sin^2 a$ و $\cos^2 a$ بدلالة $\cos 2a$ أو بأي طريقة تراها مناسبة اكتب $\sin^4 x$ بدلالة $\cos 2x$ و $\cos 4x$**
2. **احسب** $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^4 x \, dx$

[1] كتابة $\sin^4 x$ بدلالة $\cos 2x$ و $\cos 4x$:

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x\right)^2$$

مطابقة

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x$$

دساتير

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

[2]

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^4 x \, dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \, dx$$

$$I = \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

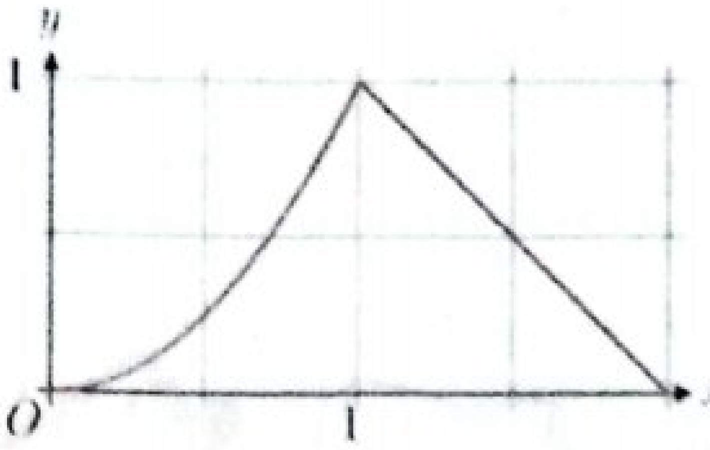
$$I = \frac{3\pi - 8\sqrt{2} + 2}{64}$$

التمرين السابع عشر: من أسئلة الوحدة .. ت ٨

نرمز عادة بالرمز $\min(a,b)$ إلى أصغر العددين a و b , تحقق أنّ الخط البياني C_f للتابع f المعرف على المجال $[0,2]$ بالصيغة:

$$f(x) = \min(x^2, 2-x)$$

هو الخط المرسوم في الشكل المجاور.



1. **احسب التكامل** $\int_0^2 f(x)\,dx$ **وقل ماذا يمثل هذا العدد**
2. **احسب بالمثل** $\int_0^2 g(x)\,dx$ **و** $\int_0^1 h(x)\,dx$ **في حالة:**

$$g(x) = 1 - |1-x|$$
$$h(x) = \min(x^2, (x-1)^2)$$

بعد رسم خطيهما البيانيان على مجال المكاملة

1] نلاحظ أنه أياً كان: $0 \leq x \leq 1$

يكون:

$x^2 + x - 2 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 2 - x$

نلاحظ أنه أياً كان: $1 \leq x \leq 2$

يكون:

$x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2 - x$

ومنه:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & ; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

يمثل هذا العدد مساحة السطح المحصور بين الخط و محور الفواصل.

2] $g(x) = 1 - |1-x|$

ندرس إشارة:

$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$ $\overset{0}{}$	1	$\overset{2}{}$ $+\infty$
	$+$	0	$-$
	x		$2-x$

$$g(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-x & ; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{-(2-x)^2}{2}\right]_1^2 = 1$$

$h(x) = \min(x^2, (x-1)^2)$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (1-x)^2 & ; \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)^2\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{(1-x)^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{12}$

إضافي .. هام ^^

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$f(x) = e^{2x} . \cos x$

1 احسب $f'(x)$, $f''(x)$

2 عين عددين a , b يحققان المساواة:

$f(x) = a f'(x) + b f''(x)$

3 استنتج تابعاً أصلياً للتابع f على R.

الحل:

1 $f'(x) = 2e^{2x}. \cos x - e^{2x}. \sin x$

$f'(x) = e^{2x}(2\cos x - \sin x)$

$f''(x) = 2e^{2x}(2\cos x - \sin x) + (-2\sin x - \cos x)e^{2x}$

$f''(x) = e^{2x}(4\cos x - 2\sin x - 2\sin x - \cos x)$

$f''(x) = e^{2x}(3\cos x - 4\sin x)$

2 $f(x) = a f'(x) + b f''(x)$

$e^{2x}. \cos x = a(e^{2x}(2\cos x - \sin x)) + b(e^{2x}(3\cos x - 4\sin x))$

$e^{2x}. \cos x = e^{2x}(2a\cos x - a\sin x) + 3b\cos x - 4b\sin x$

$\cos x = (2a+3b)\cos x + (-a-4b)\sin x$

بالمطابقة نجد:

$2a + 3b = 1$ .. [1]

$-a - 4b = 0$ .. [2]

نضرب المعادلة [2] بالعدد (2):

$2a + 3b = 1$ .. [1]

$-2a - 8b = 0$ .. [2]'

نجمع [1] و [2]' نجد:

$-5b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{5}$

نعوض في [1]:

$2a - \frac{3}{5} = 1 \Rightarrow 2a = \frac{8}{5}$

$\Rightarrow a = \frac{8}{10} \Rightarrow a = \frac{4}{5}$

$f(x) = \frac{4}{5} f'(x) - \frac{1}{5} f''(x)$

3 $f(x) = \frac{4}{5} f'(x) - \frac{1}{5} f''(x)$

$F(x) = \frac{4}{5} f(x) - \frac{1}{5} f'(x)$

إضافي .. ث ^

ليكن f التابع المعرف على R وفق:

$f(x) = \sin^4 x$

1 احسب $f'(x)$ بدلالة $\cos x$, $f''(x)$

2 استنتج تابعاً أصلياً للتابع f.

الحل:

1

$f'(x) = 4\cos x . \sin^3 x$

$f''(x) = -4\sin x . \sin^3 x + 12\cos^2 x . \sin^2 x$

$f''(x) = -4\sin^4 x + 12\cos^2 x . \sin^2 x$

كتابة $f(x)$ بـ دلالة $f''(x), \cos 4x$

لدينا:

$f''(x) = -4\sin^4 x + 12\cos^2 x . \sin^2 x$

$4f(x) = 12\cos^2 x . \sin^2 x - f''(x)$

$f(x) = 3\cos^2 x . \sin^2 x - \frac{1}{4} f''(x)$

$f(x) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) - \frac{1}{4} f''(x)$

$f(x) = 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x\right) - \frac{1}{4} f''(x)$

$f(x) = 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)\right) - \frac{1}{4} f''(x)$

ما دُمتَ تسعى، فلا تُذعِن لمعضلةٍ
لا بُدّ من خاضَ دربَ السعيِ أن يصلَ..
أطنانٌ من التعب؛
تمحوها فكرةٌ مُطمئنة:
«وأنّ سعيه سوف يُرى» ♡

$f(x) = 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x\right) - \frac{1}{4} f''(x)$

$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\cos 4x - \frac{1}{4} f''(x)$

$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\cos 4x - \frac{1}{4} f''(x)$ 2

$F(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{32}\sin 4x - \frac{1}{4} f'(x)$

التوابع

التكامل والتوابع الأصلية

شيفرة الـ 600

- أوراق تم ترتيب الكتاب فيها بهيئة أسئلة بالصيغ المحتملة لورودها "وفقاً للتوصيف الوزاري" وخطوات الإجابة عنها
- مخططات وجداول لخصت الأفكار بطريقة احترافية مساعدة
- مسائل امتحانية جزئية ومسائل امتحانية شاملة

2023

إعداد: أ.خالد عامر

by:Hisham Labanieh

أ.خالد عامر 0940 916 753