قواعد التكامل (التابع الأصلي)

1) $\int a\ dx = ax$

مثال: $\int 5\ dx = 5x + k$

2) $\int g^n\ dx = \frac{g^{n+1}}{(n+1)(g')}$

مثال: $\int x^3\ dx = \frac{x^4}{4(1)} + k$

مثال: $\int (2x+5)^3\ dx = \frac{(2x+5)^4}{4(2)} + k$

3) $\int \frac{g'}{g} dx = \ln|g|$

مثال: $\int \frac{5}{x} dx = 5\int \frac{1}{x} dx = 5\ ln|x| + k$

4) $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b}$

مثال: $\int e^{3x+1}\ dx = \frac{1}{3} e^{3x+1} + k$

5) $\int g^n . g'\, dx = \frac{g^{n+1}}{(n+1)}$

مثال :

$$\int \frac{[lnx]^2}{x} dx = \int \frac{1}{x} . (lnx)^2 dx$$
$$= \frac{(lnx)^3}{3} + k$$

6) $\int \star' . e^{\star} dx = e^{\star}$

قاعدة هامة : $\int \frac{\star'}{\sqrt{\star}} = 2\sqrt{\star}$

7) $\int \sin(\star)\ dx = \frac{-1}{\star'} \cos(\star)$

8) $\int \cos(\star)\ dx = \frac{1}{\star'} \sin(\star)$

9) $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan x$

10) $\int \frac{-1}{\sin^2 x} dx = \cot x$

للحصول على النسخة المطبوعة مع الحلول في جميع المحافظات ..مكتبة الأمل0959458194

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't add this stamp.
WWW.PRINT-DRIVER.COM

التكامل بالتجزئة : لدينا عدة أشكال:

1) $\int x^n e^x dx$
2) $\int x^n \sin x\, dx$
3) $\int x^n \cos x\, dx$

نفرض $x^n = u$ والثاني v'

القانون:~
$$\int u\,v' = u.v - \int v.u'$$

4) $\int x^n \ln x\ dx$ نفرض $u = \ln x$
$v' = x^n$

مثـال

$$I = \int x \sin x\, dx$$
$$u = x \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$
$$\int x \sin x\, dx = -x\cos x - \int -\cos x\, dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + c$$

مثال هام

$$I = \int x^2 . \cos x\, dx$$
$$u' = x^2 \Rightarrow u' = 2x$$
$$v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$$
$$I = x^2.\sin x - 2\int x \sin x\ dx$$
$$I' = \int x . \sin x\, dx$$
$$u = x \Rightarrow u' = 1$$
$$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$$
$$I' = -x\cos x - \int -\cos x\ dx$$
$$= -x\cos x + \sin x$$
$$\Rightarrow I = x^2.\sin -2\,[-x\cos x + \sin x] + c$$

التكامل المحدد :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

حيث F تابع أصلي للتابع f

خواص التكامل المحدد :

1. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
2. $k \in R$ حيث $\int_a^b kf = k\int_a^b f$
3. $\int_a^b f = -\int_b^a f$
4. $c \in [a,b]$ حيث $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't add this stamp.
WWW.PRINT-DRIVER.COM

أهم خواص اللوغاريتم

1) $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$
2) $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
3) $e^{\ln x} = x$
4) $\ln a^n = n\ln a$
5) $\ln e^x = x\ln e = x$

مثـال

$$I = \int x.\ln x\,dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} + c$$

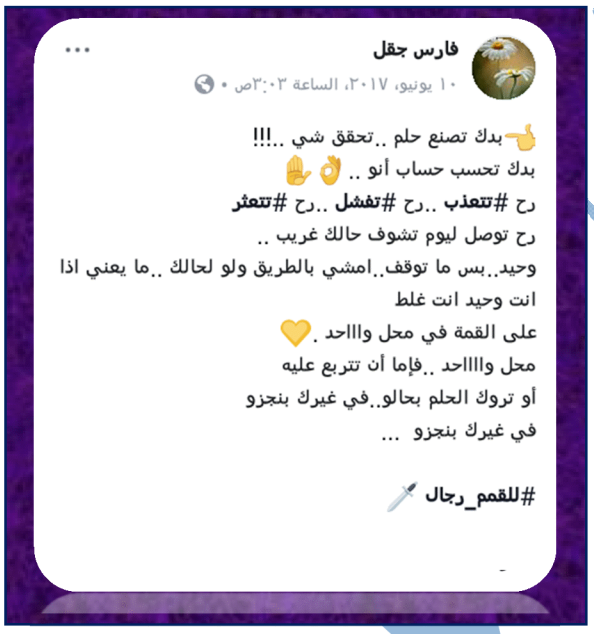
مثـال

$$I = \int \ln x\,dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow x\ln x - \int x.\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + c$$



مثـال

$$I = \int \frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$= \int \ln x.x^{-2}dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^2 \Rightarrow v' \frac{x^{-1}}{-1}$$

$$I = \ln x\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) - \int \frac{1}{x}.\frac{x^{-1}}{-1}dx$$

$$= \frac{-1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x}.\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{-1}{x}\ln x + \int x^{-2}\,dx$$

$$= \frac{-1}{x}\ln x + \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't add this stamp.
WWW.PRINT-DRIVER.COM

ترتيب قوة التوابع :

1) التابع اللوغارتمي.
2) كثيرة الحدود.
3) المثلثية.
4) الاسية

نفرض التابع الأقوى u والأخر v'

حساب تكامل التوابع الكسرية : نفرق الكسر ثم نكامل

تفريق الكسور :

نميز حالتين:

الحالة الأولى : درجة البسط أقل من درجة المقام عندها نفرّق الكسر كما يلي:

$$f(x) = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$$

نحلل المقام للشكل: $(x-r_1)(x-r_2)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\text{البسط}}{(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{A}{(x-r_1)} + \frac{B}{(x-r_2)}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x-r_1)$ ثم نجعل x تسعى إلى r_1
ولحساب B نضرب الطرفين بـ $(x-r_2)$ ثم نجعل x تسعى إلى r_2

طريقة ثانية : نوحد المقامات ثم نطابق بين الطرفين ونحل المعادلات الناتجة

مثال

أوجد التابع الأصلي للتابع f على المجال $]2,4[$

$$f(x) = \frac{x}{x^2-6x+8}$$

نفرّق الكسر إلى مجموع كسور جزئية

نحلل المقام: $x^2-6x+8 = (x-4)(x-2)$

$$\Rightarrow \star \boxed{f(x) = \frac{x}{(x-4)(x-2)} = \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x-2)}}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x-4)$ ثم نجعل x تسعى إلى 4

$$\frac{x}{x-2} = A + \frac{B(x-4)}{x-4}$$

نجعل x تسعى إلى 4

$$\Rightarrow A = \frac{4}{4-2} \Rightarrow A = 2$$

طريقة ثانية : نوحد المقامات فنجد :

$$\frac{x}{(x-4)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - 4B}{(x-4)(x-2)}$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد :

$$A + B = 1 \ldots ①$$

$$-2A - 4B = 0 \ldots . ②$$

بأكل المشترك نجد :

$$B = -1 \text{ و } A = 2$$

للحصول على النسخة المطبوعة مع الحلول في جميع المحافظات ..مكتبة الأمل0959458194

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't add this stamp.
WWW.PRINT-DRIVER.COM

تم التحميل من موقع المدرسة السورية الإلكترونية
https://eschoolsyria.com

لحساب B نضرب الطرفين بـ $(x-2)$ ثم نجعل x تسعى إلى 2

$$\Rightarrow B=\frac{2}{2-4} \quad \Rightarrow B=-1$$

نعوض في ⋆

$$f(x)=\frac{2}{x-4}+\frac{-1}{x-2}$$

$$F(x)=2\ln(-x+4)-\ln(2-x)+k$$

احسب التكامل: $\int \frac{x}{x^2-6x+8}dx$

بعد التفريق ينتج:

$$\int \frac{2}{x-4}dx+\int \frac{-1}{x-2}dx$$
$$=2\int \frac{1}{x-4}dx-1\int \frac{1}{x-2}dx$$
$$=2\ln|x-4|-\ln|x-2|+k$$

مثـال

احسب التكامل :

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}dx$$

نحلل المقام لكي نفرق الكسر :

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$
$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x+1)$ ثم نجعل x تسعى إلى (-1)

$$\Rightarrow A=\frac{-1}{1} \quad \Rightarrow A=-1$$

لحساب B نضرب الطرفين بـ $(x+2)$ ثم نجعل x تسعى إلى (-2)

$$\Rightarrow \frac{-3}{-1}=B \quad \Rightarrow B=3$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x^2+3x+2}=\frac{-1}{x+1}+\frac{3}{x+2}$$

$$I=\int_0^1 \frac{-1}{x+1}dx+\int_0^1 \frac{3}{x+2}dx$$

$$=[-\ln|x+1|+3\ln|x+2|]_0^1=\cdots$$

أكالة الثانية : إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام ونعود للحالة الأولى

للحصول على النسخة المطبوعة مع الحلول في جميع المحافظات ..مكتبة الأمل0959458194

تمرين هام

احسب ما يلي : $\int_0^{\ln 3} e^x(1-e^x)^5\,dx$

$$= -\int_0^{\ln 3} -e^x(1-e^x)^5\,dx$$

$$= -\left[\frac{(1-e^x)^6}{6}\right]_0^{\ln 3} = -\frac{32}{3}$$

تطلب النسخة المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل
واتس أب/ 0959458194

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't add this stamp.
WWW.PRINT-DRIVER.COM