النهايات

قواعد حساب النهايات:

$x \to +\infty$

f (التابع صحيح) : نعوض فقط في الحد المسيطر

f (التابع كسري) :

1. درجة البسط = درجة المقام ⇐ $\frac{\text{أمثال المسيطر}}{\text{أمثال المسيطر}}$
2. درجة البسط أصغر من درجة المقام ⇐ $= 0$
3. درجة البسط أكبر من درجة المقام نأخذ:

$\frac{\text{الحد المسيطر}}{\text{الحد المسيطر}}$ ⇐ ثم نختصر ثم نحسب نهاية

$x \to$ عدد ⇐ نعوض تعويض عادي .

بوملة الـ 600 :

- ✓ $\frac{\text{عدد}}{\pm\infty} = 0$
- ✓ $\frac{\text{عدد}}{0}$ ⇐ ندرس الإشارة من اليمين واليسار
- ✓ $\frac{\sqrt{\text{شغلة}}}{\text{نفس الشغلة}} = \frac{1}{\sqrt{\text{شغلة}}}$
- ✓ جواب الجذر دائماً موجب
- ✓ أي عدد أس زوجي موجب
- ✓ $x^2 + \text{عدد} \neq 0$ لا ينعدم

قوانين مثلثية:

$$1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

حالات عدم التعيين:

$\pm\infty \mp \infty$

1. مربع ما خارج الجذر موجود تحت الجذر ⇐ نضرب ونقسم بالمرافق
2. مربع ما خارج الجذر غير موجود تحت الجذر ⇐ نسحب عامل مشترك

$\frac{+\infty}{+\infty}$ ح.ع.ت ⇐ نسحب عامل مشترك من البسط والمقام ونختصر

$\frac{0}{0}$ ح.ع.ت

1. كل كثير حدود من الدرجة الأولى ⇐ نخرج عامل مشترك إن أمكن
2. كل كثير حدود من الدرجة الثانية ⇐ تحليل مباشر
3. كل كثير حدود من الدرجة الثالثة أو أعلى ⇐ إجراء قسمة إقليدية على $(x - a)$ حيث a العدد الذي تسعى إليه $x \to a/x$
4. في حال وجود جذر ⇐ نضرب ونقسم بالمرافق
5. في حال وجود $\sin , \cos$ ⇐ نستخدم القوانين المثلثية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \,,\, \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)} = 1$$

حالات عدم التعيين الخاصة:

$x(0)\mp\infty$ ح.ع.ت

عندما يكون الصفر ناتج من $\sin(0)$

⇐ نضرب ونقسم على ما داخل $\sin$

الإحاطة:

تستخدم الإحاطة لـ :

1. $\sin(\infty)$, $\cos(\infty)$

$$-1 \le \sin(\text{أي شيء}) \le 1$$

$$-1 \le \cos(\text{أي شيء}) \le 1$$

$$0 \le \sin^2(\text{أي شيء}) \le 1$$

$$0 \le \cos^2(\text{أي شيء}) \le 1$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\sin\infty}{\infty}$$

الحل:

$$-1 \le \sin(x) \le 1$$

نقسم على x حيث $x > 0$ بجوار $+\infty$

$$\frac{-1}{x} \le \frac{\sin(x)}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$\lim -\frac{1}{x} = -\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

بوصلة الـ600 :

عندما نضرب أو نقسم بـ $(-)$ وعندما نقلب $\Leftarrow$ نقلب جهة المتراجحة

2. $(-1)^n$ $\quad -1 \le (-1)^n \le 1$

3. تابع الجزء الصحيح $E(X)$

$$\Leftarrow \quad x - 1 < E(x) \le x$$

مثال:

$$f(x) = \frac{E(x)}{x^2+1}, a = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{E(+\infty)}{+\infty}$$

$$x - 1 \le E(x) \le x$$

نقسم على $x^2 + 1 > 0$ في جوار $+\infty$:

$$\frac{x-1}{x^2+1} < \frac{E(x)}{x^2+1} \le \frac{x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

4. $R(x) \le f(x) \le g(x)$

$\Leftarrow$ نحصر التابع المطلوب بين التابعين الأخرين

مركز مجال ونصف قطر:

المركز: $m = \frac{a+b}{2}$

$$|f(x) - m| < r$$

نصف القطر: $r = \frac{b-a}{2}$

نهاية التابع المركب:

$$f_o g = f(g(x)) =$$

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) =$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = b$$

$$\lim_{x\to b} g(x) = c$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(g(x)) = c$$

a. نهاية الحشوة ثم نهاية القشرة عندما x تسعى لجواب نهاية الحشوة فنحصل على الحل

b. عندما يطلب كتابة $f_o g = f(g(x))$ بدلالة x نذهب إلى القشرة ونبدل في f كل x بـ $g(x)$

المقارب المائل :

لإثبات أن y مقارب لـf

1. نحسب نهاية الفرق $(f - y)$

2. يجب أن يكون جواب النهاية الفرق صفر

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f - y) = 0 \Rightarrow f \text{ مقارب لـ } y$$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق.

إيجاد مقارب:

1. كسر+ درجة أولى: يكون المقارب الدرجة الأولى

2. $f = \frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$ لكن درجة البسط أكبر بواحد من درجة المقام عندها: نقسم قسمة إقليدية فيكون المقارب هو ناتج القسمة.

3. $f = \sqrt{\text{درجة ثانية}}$ نتمم ما تحت الجذر إلى مربع كامل فيكون ما داخل القوس مقاربين مائلين

لكن

⇐ المقارب الأول: داخل القوس

⇐ المقارب الثاني: ما داخل القوس مع تغيير إشارة

4. الحالة العامة:

$$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) - a(x) = b$$

المقارب المائل:

$$y = ax + b$$

الختم (القيمة الوسطى):

f مستمر ومتزايد(متناقص) على المجال ()

تفريق الكسور:

إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام نقسم قسمة إقليدية نحل المقام باستخدام التحليل المباشر أو التحليل بالدلتا.

نكتب:

$$\frac{\text{ثابت أول}}{\text{المضروب أول}} + \frac{\text{ثابت ثاني}}{\text{المضروب ثاني}} + \cdots \ldots \ldots \ldots$$

لحساب ثابت نضرب الطرفين بمقامه ثم نحسب النهاية عندما x تسعى إلى القيمة التي تعدم المقام.

طرق أتمتة:

نهايات:

c. لإزالة حالة عدم التعيين:

كسرية $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ نستخدم أوبيتال:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

b. لإزالة حالة عدم التعيين $+\infty - \infty$

$$\sqrt{ax^2+c} + \sqrt{a}$$

الجواب 0

المقارب المائل:

1. $f(x) = \sqrt{ax^2+c}$ معادلة المقارب المائل

$y = \sqrt{a}x$ في جوار $+\infty$

$y = -\sqrt{a}x$ في جوار $-\infty$

2. $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ معادلة المقارب المائل

$$y = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

a. $\sqrt{ax^2+b} + cx$

$$|\sqrt{a}x| + cx = y_\Delta$$

b. $f(x) = ax + \frac{bx}{\sqrt{x^2+c}}$

$$= ax + \frac{bx}{\sqrt{x^2}} \Rightarrow ax + \frac{bx}{|x|} \Rightarrow ax + b = y_\Delta$$

الدنيا رح تعطيك خيارين «يا إما تعيش في قاع الندم أو على قمة النجاح! القرار بإيدك، هل بدك تعيش حياتك تقول "يا ريتني درست" أو "الحمد لله، تعبي جاب نتيجة"؟ اختار بحكمة

الاستمرار

1. نقول عن التابع f أنه مستمر عند نقطة a إذا تحقق

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

2. عندما يكون التابع له عدة فروع والشروط متراجحات ويوجد عدد مكرر عندها نسميه نقطة فاصلة

3. عند حساب نهاية x_y تسعى إلى نقطة فاصلة نحسب نهاية من اليمين واليسار

4. شرط الاستمرار عند نقطة فاصلة

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

5. إن القول x تسعى إلى a يعني $x \neq a$

حل المعادلات:

a. اثبت وجود حل للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a, b]$

$$f(a).f(b) < 0 \Leftarrow$$

$\Leftarrow$ يوجد حل للمعادلة في المجال $[a, b]$ و f مستمر على المجال $[a, b]$

b. اثبت وجود حل دون ذكر مجال:

سأل عن عدد الحلول

أعطا مجال ...... لم يعطي مجال

$\Leftarrow$ ندرس تغيرات:

1. نوجد مجموعة التعريف ونحسب النهاية عند أطراف مجموعة التعريف
2. نشتق
3. نعدم المشتق
4. نحسب صور القيم التي عدمت المشتق
5. تنظيم جدولاً

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

تابع الجزء الصحيح

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$E(0.1) = 0, E(1.3) = 1$$

$$E(1.8) = 1, E(4.9) = 4$$

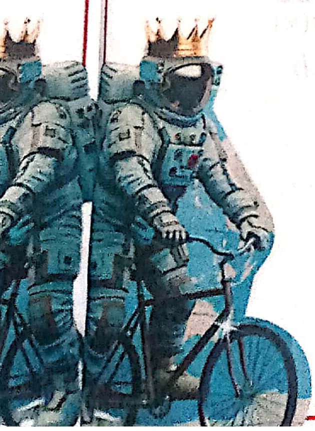
لكتابة تابع يحوي تابع الجزء الصحيح بصورة مستقلة عن $E(x)$

1. نقسم المجال المعطى إلى المجالات المغلقة من اليسار ومفتوحة من اليمين وطول كل واحد منها واحد
2. نفرع التابع وفي كل نوع نعوض بدل كل $E(x)$ القيمة الصغرى للمجال

✓ عندما يطلب مني رسم أو دراسة استمرار أكتب التابع بصورة مستقلة عن $E(x)$

✓ نقطة ضعف $E(x)$ هي الأعداد الصحيحة (عند دراسة استمرار أو اشتقاق)

لما تكسل، تذكر إن المنافس تبعك هلأ عم يدرس! الدنيا ما بترحم، واللي عم يضيع وقته اليوم رح يدفع الثمن بعدين. انتبه!



الاشتقاق

قواعد الاشتقاق:

1. $(a)' = 0$
2. $(ax)' = a$
3. $(x)' = 1$
4. $(ax^n)' = anx^{n-1}$
5. $(\sin(ax))' = (ax)'\cos(ax)$
6. $(\cos(ax))' = -(ax)'\sin(ax)$
7. $(\sqrt{a})' = \frac{\text{مشتق ما داخل جذر}}{\text{ضعفي الجذر}} = \frac{a'}{2\sqrt{a}}$
8. $\frac{a}{b} = \frac{a'b-b'a}{b^2}$
9. $(a.b)' = a'b + b'a$
10. $(\tan(x))' = \begin{cases} 1+\tan^2(x) \\ \frac{1}{\cos^2(x)} \end{cases}$

المماس:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

للحصول على x_0 :

1. إذا أعطاني الإكسات في نص التمرين
2. نقطة التقاطع مع محور الترتيب $x = 0$
3. نقطة التقاطع مع محور الفواصل $y = 0$
4. إذا أعطاني ميل المماس فحل المعادلة $f'(x) = m$ فيكون حل المعادلة هو x_0
5. نقطة تقاطع مع خط بياني ما فتحل المعادلة $f - y = 0$ فيكون الحل هو x_0

للحصول على y_0 :

1. نعوض x_0 بالتابع f فنحصل على y_0
2. نعوض في معادلة المماس فنحصل على y_0

أنت أقوى مما تتخيل،
ولا شي مستحيل إذا قررت!

الميل:

1. نشتق ثم نعوض الإكسات فنحصل على ميل المماس
2. يمر من نقطتين $M = \frac{\text{فرق الوايات}}{\text{فرق الإكسات}}$
3. لدينا معادلة مستقيم ننقل المقادير إلى طرف واحد

$$M = \frac{-x \text{ الأمثال}}{y \text{ الأمثال}}$$

4. أفقي $M = 0$
5. مستقيمان متوازيان $M_1 = M_2$
6. مستقيمان متعامدان $M_1 = \frac{-1}{M_2}$ (نقلبه ونغير الإشارة)

القيم الحدية:

1. $f'(a) = 0$
2. $f'(x)$ يغير إشارته عن a

النقطة الفاصلة:

✓ عندما يكون التابع مفرغ والشروط متراجحات أو المجالات
عندها العدد المكرر يسمى النقطة الفاصلة

✓ نحسب النهاية من اليمين واليسار بشرطين:

$\frac{\text{عدد}}{0}$ أو x تسعى نحو نقطة فاصلة.

حساب النهايات باستخدام تعريف مشتق:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

عندما نعوض ونحصل على $\frac{0}{0}$ ويكون المقام قبل التعويض $x - a$ (حيث a العدد الذي تسعى إليه)عندها نفرض كشلي إكسات في البسط $g(x)$ وعندها يكون الجواب هو $g'(x)$)

بوصلة الـ 600:

يقبل C مماس موازي إذا كان هناك حل للمعادلة:

$$f'(x) = m$$

لا يقبل C مماس موازي إذا لم يكن هناك حل للمعادلة:

$f'(x) = m$ مستحيلة الحل

الاشتقاق

قواعد الاشتقاق:

1. $(a)' = 0$
2. $(ax)' = a$
3. $(x)' = 1$
4. $(ax^n)' = anx^{n-1}$
5. $(sin(ax))' = (ax)' cos(ax)$
6. $(cos(ax))' = -(ax)' sin(ax)$
7. $(\sqrt{a})' = \frac{\text{مشتق ما داخل جذر}}{\text{ضعفي الجذر}} = \frac{a'}{2\sqrt{a}}$
8. $\frac{a}{b} = \frac{a'b-b'a}{b^2}$
9. $(a.b)' = a'b + b'a$
10. $(tan(x))' = \begin{cases} 1 + tan^2(x) \\ \frac{1}{cos^2(x)} \end{cases}$

المماس:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

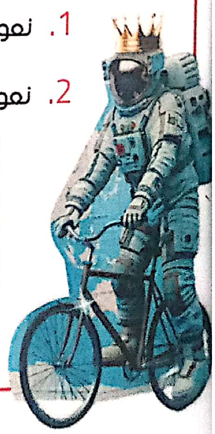
للحصول على x_0:

1. إذا أعطاني الإكسات في نص التمرين
2. نقطة التقاطع مع محور الترتيب $x = 0$
3. نقطة التقاطع مع محور الفواصل $y = 0$
4. إذا أعطاني ميل المماس فحل المعادلة $f'(x) = m$ فيكون حل المعادلة هو x_0
5. نقطة تقاطع مع خط بياني ما فتحل المعادلة $f - y = 0$ فيكون الحل هو x_0

للحصول على y_0:

1. نعوض x_0 بالتابع f فنحصل على y_0
2. نعوض في معادلة المماس فنحصل على y_0

أنت أقوى مما تتخيل،
ولا شي مستحيل إذا قررت!



الميل:

1. نشتق ثم نعوض الإكسات فنحصل على ميل المماس
2. يمر من نقطتين $M = \frac{\text{فرق الوايات}}{\text{فرق الإكسات}}$
3. لدينا معادلة مستقيم ننقل المقادير إلى طرف واحد
$$M = \frac{-x_{\text{الأمثال}}}{y_{\text{الأمثال}}}$$
4. أفقي $M = 0$
5. مستقيمان متوازيان $M_1 = M_2$
6. مستقيمان متعامدان $M_1 = \frac{-1}{M_2}$ (نقلبه ونغير الإشارة)

القيم الحدية:

1. $f'(a) = 0$
2. $f'(x)$ يغير إشارته عن a

النقطة الفاصلة:

✓ عندما يكون التابع مفرغ والشروط متراجحات أو المجالات عندها العدد المكرر يسمى النقطة الفاصلة

✓ نحسب النهاية من اليمين واليسار بشرطين: $\frac{\text{عدد}}{0}$ أو x تسعى نحو نقطة فاصلة.

حساب النهايات باستخدام تعريف مشتق:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

عندما نعوض ونحصل على $\frac{0}{0}$ ويكون المقام قبل التعويض $x - a$ (حيث a العدد الذي تسعى إليه)عندها نفرض كشلي إكسات في البسط $g(x)$ وعندها يكون الجواب هو $g'(x)$)

بوصلة ال 600:

يقبل C مماس موازي إذا كان هناك حل للمعادلة:

$f'(x) = m$

لا يقبل C مماس موازي إذا لم يكن هناك حل للمعادلة:

$f'(x) = m$ مستحيلة الحل

قابلية الاشتقاق:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

نقطة عادية $\rightarrow x$

الجواب عدد

$\Leftarrow f$ قابل للاشتقاق عنده $\Leftarrow$ ميل المماس هو هذا العدد

الجواب $\mp\infty$

$\Leftarrow$ f غير قابل للاشتقاق عنده $\Leftarrow$ لمماس شاقولي

معادلته $x = a$

نقطة فاصلة $\rightarrow x$

نهايتين متماثلتين:

$\Leftarrow$ f قابل للاشتقاق $\Leftarrow$ ميل المماس هو الجواب المكرر

نهايتين مختلفتين:

$\Leftarrow f$ قابل غير للاشتقاق $\Leftarrow$ للخط نصفي مماس:

نقطة $(a, f(a))$ والجواب الأول هو الميل.

نقطة $(a, f(a))$ والميل هو الجواب الثاني.

"ما إلي مزاج أدرس"
=
أقوى كذبة بتقولها
لنفسك! المزاج ما رح
يجي لحاله، انت اللي
بتصنعه! خد نفس عميق
بلش أول صفحة
والـ Focus رح يجي لحاله!

أنواع التوابع:

التابع الفردي:

يجب أن يتحقق الشرطين، التابع الفردي متناظر بالنسبة للمبدأ:

1. $\forall x \in D_f \Longrightarrow -x \in D_f$
2. $f(-x) = -f(x)$

التابع الزوجي:

يجب أن يتحقق الشرطين، التابع الزوجي متناظر بالنسبة لـ $y'y$

1. $\forall x \in D_f \Longrightarrow -x \in D_f$
2. $f(-x) = f(x)$

اشتقاق التابع المركب:

$$[fog]' = [f(g(x))]' = g'(x).f'(g(x))$$

التقريب التآلفي : $f(a+h) \cong f'(a).h + f(a)$

حيث a هو الجزء الحلو و h هو الجزء البشع

التناظر:

1. $\forall x \in D_f \Longrightarrow 2a - x \in D_f$
2. $f(x) + f(2a - x) = 2b$

طرق أتمتة:

مركز تناظر:

هو تقاطع المقارب الشاقولي مع المائل

مثال:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{8}{x+1}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 & \text{مقارب مائل} \\ x = -1 & \text{مقارب شاقولي} \end{cases}$$

$$\Leftarrow (x, y) = (-1, -3)$$

المتتاليات

متتالية حسابية:

هي متتالية أي حد فيها هو عبارة عن الحد الذي قبله مضافاً إليه عدد ثابت

قانون المتتالية الحسابية لإثباتها:

$$u_{n+1}-u_n = r\ const$$

القانون الذهبي المتتالية الحسابية:

$$u_n = u_m + r(n-m)$$

حساب مجموعة حدود متوالية من متتالية حسابية:

$$s=\frac{u_n+u_m}{2}(n-m+1)$$

حساب مجموعة حدود من متتالية حسابية:

$$2b=a+c$$

متتالية الهندسية:

قانون إثبات المتتالية الهندسية:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=q\ const$$

القانون الذهبي المتتالية الهندسية:

$$u_n=u_m.q^{n-m}$$

حساب مجموعة حدود من متتالية هندسية

$$b^2=a.c$$

دراسة اطراد المتتالية:

معرفة بالشكل بالتدريج:

1. اختبار الفرق: $u_n = u_m +$ عدد
2. اختبار القسمة: $u_{n+1}=a.u_n$
3. غير ذلك استقراء رياضي (البرهان بالتدريج)

معرفة بالشكل الصريح: (u_n بدلالة n)

1. اختبار الفرق: تقارن مع الصفر $u_{n+1}-u_n$
2. اختبار القسمة: نقارن مع الواحد $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
نستخدمها عندما u_n موجبة
3. اختبار تابع: نبدل بدل كل n ب x نحصل على التابع f وندرس اطراده وذلك بالاشتقاق وندرس إشارة المشتق وندرسه على المجال:
[أول قيمة ل n, ∞[

✓ إذا رأينا $(-)$ أس n ⇐ المتتالية غير مطردة

لإثبات ذلك لالحسب أول ثلاث حدود متوالية a,b,c

ونجد $a>b \quad , \quad b<c$

السلاسل:

ذات حدود ثابتة:

نعوض في آخر حد لنعرف أين سنتوقف

ذات حدود متغيرة: نعوض في آخر حد لنعرف أين سنتوقف

ونعوض في أول حد لنعرف من أين سنبدأ

التخمين:

1. نوجد على المبيضة أول أربع خمس حدود
2. نكتب على المسودة قانون $u_n=\alpha(a)^n+B$
3. نعوض بدل n قيمتين فنحصل على معادلة نحلها حل مشترك فنحصل على a, b

a. التدريج من أجل مساواة:

نسأل أنفسنا من هو المقدار الذي إذا ضربناه أو ضفناه إلى طرفي العلاقة الصحيحة حصلنا على العلاقة المجهولة

b. التدريج من أجل متراجحات:

يجوز تكبير الطرف الكبير وذلك بتبديل مقدار بمقدار أكبر منه أو حذف مقدار سالب

يجوز تصغير الطرف الصغير وذلك بحذف مقدار موجب أو تبديل n بأصغر قيمة لها

c. التدريج من أجل مضاعفات:

1. (م.a) أقصد بها مضاعف للعدد a
2. (م.a)=(م.a)±(م.a)
3. (م.a) ضرب أي مقدار (عدد) الناتج هو (م.a)
4. الصفر مضاعف لكل الأعداد .نبدأ من العالقة المجهولة
5. دوماً نبدأ من العلاقة المجهولة

d. التدريج لأجل متتالية معطاة بالشكل التدريجي:

$$u_{n+1}=f(u_n)$$

علاقة تدريج بسيطة ⇐ u_n مكتوبة مرة واحدة ⇐ شغلنا إحاطة

علاقة تدريجية معقدة ⇐ u_n مكتوبة أكثر من مرة ⇐

نبدل كل u_n ب x فنحصل على التابع $f(x)$ ⇐ نبرهن أن

التابع متزايد على مجال محدودة المتتالية ⇐ نأخذ صور

لأطراف الصحيحة من الملاقة

بوصلة ال 600:

دائماً ننطلق من الفرض (الملاقة الصحيحة) إلا التدريج من أجل

مضاعفات ننطلق من المالقة المجهولة E_{n+1}

دراسة اطراد متتالية معطاة بالشكل التدريجي:

متزايدة $u_n \le u_{n+1}$

متناقصة $u_n \ge u_{n+1}$

ثابتة $u_n = u_{n+1}$

(إذا لم يذكر نوع الاطراد نحسب أربع خمس حدود)

نهاية متتالية:

دراسة محدودية متتالية معرفة بالشكل الصريح

✓ الخبرة والنظرة الثاقبة

الكسر: نقارن بسطه مع مقامه فنعلم مقارنته مع 1 . الجذر

دائماً موجب

$-1 \le \sin(\ ) \le 1$.

$-1 \le \cos(\ ) \le 1$

✓ نبدأ من n للوصول إلى u_n

$1 \le n < +\infty$

✓ المبرهنات:

ندرس اطراد المتتالية وبعدها

1. متزايدة:

الحد الذي يبدأ منه التزايد $< u_n < \lim_{n\to\infty} u_n$

2. متناقصة:

الحد الذي يبدأ منه التناقص $\ge u_n \ge \lim_{n\to\infty} u_n$

نهاية متتالية "المعرفة بشكل صريح":

نهايتها عدد ⇐ متقاربة

نهايتها (∞) ⇐ متباعدة

إحاطة $(-1)^n$

$$a^\infty = \begin{cases} +\infty & ; a > 1 \\ 0 & ; -1 < a < 1 \\ 1 & ; a = 1 \\ \text{غير موجودة} & ; a < -1 \end{cases}$$

بوصلة ال 600:

أصفر حد أعلى يسمى عنصر راجح

أكبر حد أدنى يسمى عنصر قاصر

كل عدد أكبر من العنصر الراجح يعتبر راجح

كل عدد أصفر من العنصر القاصر يعتبر قاصر

ضب السلاسل:

✓ حدود السلسلة هي من متتالية حسابية أو هندسية ⇐

نطبق قانون مجموع S

✓ حدود السلسلة هي من حدود متوالية من متتالية

مرتبطة بمتتالية هندسية أو حسابية ⇐ حركة منظمة

نضرب بعدد الحدود

✓ حدود السلسلة هي حدود متوالية من متتالية تحوي

إشارة ناقص بين ال n ⇐ حركة منتظمة

✓ مرة نبدل كل حد بأكبر حد ومرة نبدل كل حد بأصغر حد

⇐ ثم إحاطة

المتتاليتان المتجاورتان:

نقول عن t_n و v_n أنهما متجاورتان إذا كان:

1. أحدهما متزايدة والثانية متناقصة

2. $\lim_{n\to\infty} (t_n - v_n) = 0$

بوصلة ال 600:

كل متتالية متزايدة محدودة من الأعلى أو متناقصة

ومحدودة من الأدنى تكون متقاربة ولحساب

نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$

طرق أتمتة:

لإيجاد الحد العام في المتتالية الحسابية أمثال ال n هو الأساس r ونعوض حد البدء للتأكد

مثال:

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = 3$ منها $u_0 = 6$ فإن الحد العام

$u_n = 2n - 1$

$u_n = 2n + 6$

$u_n = 3n - 1$

$u_n = 3n + 6$

إن إطراد سلسلة ذات حدود ثابتة من الشكل:

$$\Rightarrow s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

هي دوماً "متزايدة"

إذا كان أساس المتتالية الهندسية

$-1 < q < 1$ فإن نهايتها "صفر"

"صعبة وما عم أفهم"؟
طيب حاول للمرة المليون!
أي شي بالعالم بتقدر تتعلمه
بس الفرق بين الناجح والفاشل
هو عدد المرات اللي حاول فيها.

التابع اللوغاريتمي

مجموعة التعريف: ما داخل اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر.

القيمة المطلقة موجبة دائماً، لكن يجب أن نستثني القيم التي تعدم ما داخلها لأن ما داخل اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر .

التربيع يماثل القيمة المطلقة دائماً موجب .

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(e) = 1$
3. $\ln(3) = 1.1$
4. $\ln(5) = 1.6$
5. $\ln(2) = 0.7$
6. $\ln(7) = 1.9$
7. $e = 2.7$

خواص اللوغاريتم:

1. $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
3. $a\ln(x) = \ln(x^a)$
4. $\ln(e^x) = x$
5. $e^{\ln x} = x$

لا يجوز استخدام خواص اللوغاريتم الا بعد إيجاد مجموعة التعريف (شرط الحل) .

لحل المعادلة اللوغاريتمية يجب إيجاد شرط الحل

$\Leftarrow \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

حل المتراجحات اللوغاريتمية :

1. نوجد شرط الحل
2. نحل المتراجحة.
3. نوجد الحلول المقبولة

$\ln(\quad) < \ln(\quad)$

(يكفي إيجاد شرط الحل للطرف الصغير)

اشتقاق التابع اللوغاريتمي:

1. مشتق ما داخل اللوغاريتم على ما داخل اللوغاريتم .
2. عندما يكون لدينا تابع مركب نشتق من جوا لبرا وعندما نصل إلى اللوغاريتم يكون مشتقه هو واحد على ما داخل اللوغاريتم.

بوصلة ال 600:

حل المتراجحات مجالات .

نهاية التابع اللوغاريتمي :

1. $\ln(0) = -\infty$
2. $\ln(+\infty) = +\infty$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$
5. $\lim_{x\to\infty} x.\ln x = 0^-$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x.\ln x} = -\infty$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$

:$0(\infty)$

✓ 0 جاي من $\ln(1)$ ⟸ نجعل ما داخل اللوغاريتم (مجهول + 1) ثم نقسم ونضرب بالمجهول ويكون جواب الكسر (1)

✓ 0 مو جاي من $\ln(1)$ ⟸ ننشر

لإزالة عدم التعيين:

1. عامل مشترك .
2. نشر وتوحيد المقامات .
3. توزيع البسط على المقام
4. استخدام الخواص

تمارين تمذر العدم:

نميز حالتين :

1. يوجد $\ln(x)$ وحد ثاني يحوي x

2. يوجد e^x وحد ثاني يحوي x وعندها نفرض المعادلة $g(x)$ وندرس تغيرات :

ونميز ثلاث حالات:

✓ $g(x) < 0$ المعادلة مستحيلة.

✓ $g(x) > 0$ المعادلة مستحيلة .

✓ $g(x)$ له حل وحيد نوجد الحل بالترتيب $\{e, 0, -1, 1\}$

النجاح مش للي بيفهم بسرعة، النجاح للي ما بيوقف أبدًا! حتى لو المادة صعبة، لا تستسلم استمر وحبة حبة رح تكسرها.

التابع الأسي

مشتق التابع الأسي : $e^x > 0$

مشتق الأس ضرب التابع الأسي كله بلوغاريتم الأساس.

نهاية التابع الأسي:

1. $e^{-\infty} = 0$
2. $e^{+\infty} = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n . e^x = 0$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

للتحويل من أسي عادي إلى أسي نيبري

$\Leftarrow e$ أس الأس باللوغاريتم الأساس

نهايات جديرة بالحب:

نسمي التابع y، نأخذ لوغاريتم الطرفين لإنزال الأس ، نجعل ما داخل اللوغاريتم(مجهول + 1) نضرب ونقسم بالمجهول نهاية الكسر هي 1 ويكون الجواب النهائي بعد أخذ e أس الطرفين.

المعادلة التفاضلية :

إن حل المعادلة التفاضلية ليس عدد بل تابع

شكل الأساسي $y' = ay + b$

$y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

لإزالة عدم التعيين:

1. عامل مشترك
2. نشر
3. توحيد المقامات
4. توزيع البسط على المقام

التكامل والتوابع الأصلية

ليكن F تابعاً معرفاً على المجال I نقول إن التابع F تابع أصلي للتابع F على المجال I إذا وفقط إذا كان Fاشتقاقياً على I كان $F'(X) = F(X)$ في حالة X من I

(أي أن التكامل هو العملية المعاكسة للاشتقاق)

التوابع الأصلية لبعض التوابع المألوفة:

(قواعد للحفظ):

نرمز للتابع بالرمز f وتابعه الأصلي يرمز له F

	$F(x)$	$f(x)$
.1	عدد ثابت a	0 الصفر
.2	ax	a ثابت حقيقي
.3	$\frac{a}{n+1}\,x^{n+1}$	ax^n
.4	$\frac{(ax+b)^{n+1}}{a.(n+1)}$	$(ax+b)^n$
.5	$\frac{e^{(ax+b)}}{a}$	$e^{(ax+b)}$
.6	$\frac{-\cos(ax+b)}{a}$	$\sin(ax+b)$
.7	$\frac{\sin(ax+b)}{a}$	$\cos(ax+b)$
.8	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ أو $\tan^2(x)+1$
.9	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\csin^2(x)}$ أو $-\cot^2(x)-1$

تكامل الكسر:

1. $\frac{\text{عدد ثابت}}{(\text{كثير حدود من الدرجة الأولى})^n}$ أي $\frac{a}{a\,(bx+c)^n}$

⇐ نرفع المقام إلى البسط ونغير إشارة الأس

$$a.(bx+c)^{-n}$$

⇐ والتكامل يكون بإضافة واحد للأس والتقسيم على الأس الجديد ولا ننسى أن نقسم على أمثال x

$$\frac{a}{b}.\frac{(bx+c)^{-n+1}}{-n+1}$$

2. $\frac{\text{مشتق المقام}}{\text{المقام}}$ أي $\frac{f'(x)}{f(x)}$

⇐ التكامل يكون لوغاريتم المقام بالقيمة المطلقة

$$\ln|f(x)|$$

وعندما يعطينا مجال نزيل القيمة المطلقة

3. $\frac{\text{مشتق تحت ما الجزر}}{\text{الجزر}}$ أي $\frac{f(x)}{\sqrt{f(x)}}$

⇐ التكامل هو ضعفي الجذر

$$2\sqrt{f(x)}$$

4. $\frac{(a_1x^n+a_2)x^{n-1}+\dots}{(b_1x^m+b_2)x^{m-1}+\dots}$

حيث $n \le m$ ، $0 \ne a1, b1$

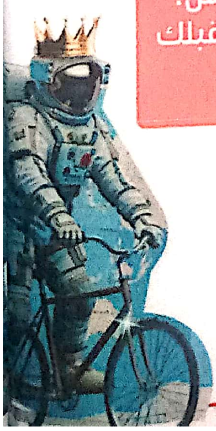
أي درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام والتكامل يكون ⇐ نقسم البسط على المقام قسمة اقليدية وهنا نميز حالتين:

المقام درجة أولى ⇐ نذهب للحالة الأولى

المقام درجة ثانية ⇐ تفريق كسور

5. ليس أياً مما سبق والمقام من الدرجة الثانية ⇐ التكامل يكون تفريق كسور.

"رح أدرس بكرا" = تذكرة VIP للفشل!
لا تأجل شي للمستقبل لأنه مستقبلك
هو نتيجة قراراتك اليوم!



بوصلة الـ 600 :

إذا أردنا تكامل جداء تابعين نميز حالتين

1. إذا كان أحد التابعين مشتق بجزء من الاخر وقد يكون على الشكل التالي:

$$\left(\begin{matrix}\text{مشتق}\\ \text{الجزء}\end{matrix}\right) . \sin(\text{الجزء}) \left(\begin{matrix}\text{مشتق}\\ \text{الجزء}\end{matrix}\right) . e^{\text{الجزء}}$$

$$\frac{\text{مشتق الجزء}}{(\text{الجزء})^{n}}$$

$$(\text{مشتق الجزء}) . \sqrt{\text{الجزء}}$$

عند ذلك نحذف المشتق ونفرض $(t = \text{الجزء})$

ثم نسحب التكامل وال ننسى أن نبدل الـ t لأصلها

2. تكامل بالتجزئة

تكامل التوابع المثلثية:

3. من الشكل التالي:

$$\sin^{\text{اس زوجي}}(x) \quad \cos^{(\text{اس زوجي})}(x)$$

نطبق القانون :

$$\cos^{\text{اس زوجي}}(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^{\text{اس زوجي}}(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

4. من الشكل التالي:

$$\sin^{\text{اس فردي}}(x) , \cos^{\text{اس فردي}}(x)$$

نطبق القانون :

$$-cos^{\text{أس فردي}}(x) = \cos(x) . \cos^{\text{اس فردي}}(x)$$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$-\sin^{\text{اس فردي}}(x) = \sin(x) . \sin^{\text{اس فردي}}(x)$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

وبعد ذلك نستخدم الحالة (1) من الملاحظة السابقة

1. جداء تابعين مثلثين بزوايا مختلفة فنستخدم دساتير التحويل

$$\sin(x) . \cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\sin(x) . \sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y))$$

$$\cos(x) . \sin(x) = \frac{1}{2}[\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

$$\text{Cos}(x) . \cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

تكامل بالتجزئة:

1. تأخذ الأشكال الاتية

a. كثير الحدود e^x

b. كثير الحدود $\sin(x)$

c. كثير الحدود $\cos(x)$

d. في هذه الحالات نفرض

$$u = \text{كثير الحدود} \rightarrow u' = (\quad)$$

$$v = \left(\begin{matrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{matrix}\right) \rightarrow v' = (\quad)$$

$$\Longrightarrow (u.v) - \int (u'.v)dx$$

2. وتأخذ الشكل :

$(\text{كثير الحدود}) . \ln x$

في هذه الحالة نفرض

$$u = \ln x \rightarrow u' = ()$$

$$v' = \text{كثير الحدود} \rightarrow v = (\quad)$$

$$\Rightarrow (u.v) - \int (u'.v)dx$$

2. وتأخذ الشكل

$e^{x}.sinx$ أو $e^x . \cos x$

في هذه الحالة نفرض:

لا يوجد فرق في الفرضيات وهو تكامل دوار نستخدم التجزئة مرتين

التكامل المحدد :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(X)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حساب المساحة :

يعقد حساب المساحة لسطح على حساب التكامل

أي فعلياً نحن نريد أن نحسب مساحة سطح

المحدد محدد بين خطين بيانيين لتابعين وبالتالي

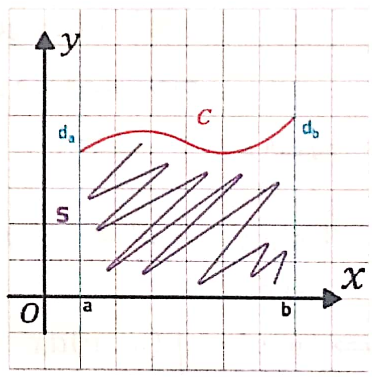
1. يجب أن ندرس الوضع النسبي بين الخطين.

2. فيكون التابع المستكمل هو التابع الذي خطه البياني في الاعلى – التابع الذي خطه البياني في الأسفل

3. حدود التكامل هي إما مستقيمين شاقولين أو مستقيم شاقولي ونقطة تقاطع أو نقطتين تقاطع

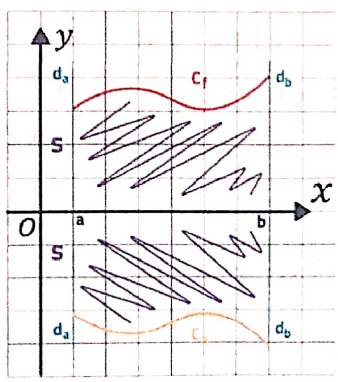
الأمثلة :

✓ احسب مساحة السطح المحدد بين C_f ومحور الفواصل والمستقيمان الشاقوليان $x = a$, $x = b$ عند عدم الفرق نحصل على نقاط التقاطع



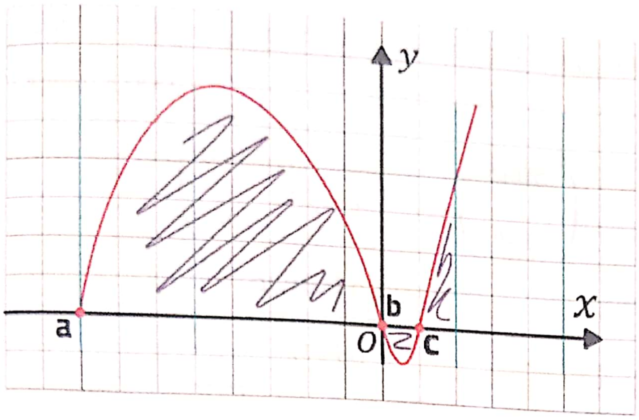
الحل: المساحة $s = \int_a^b b(f - 0)dx$

✓ احسب مساحة السطح المحدد بين C_f و C_g والمستقيمين الشاقولين $x = b$, $x = a$



الحل: $s = \int_a^b (g - f)dx$

✓ احسب مساحة السطح المحدد بين الخط والبياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = a$, $x = 1$



الحل:

$$S = \int_a^0 (f - 0)\, dx + \int_b^c (0 - f)dx + \int_c^1 (f - 0)dx$$

لما تتعب، تخيل نفسك بعد النجاح! كيف رح يكون شعورك لما تشوف اسمك ناجح؟ لما تفوت الجامعة اللي بدك إياها؟ حافظ على هالشعور وقاتل عشانه!

الأشعة

لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة

1. نشكل شعاعين لها نفس البداية ونبرهن أنهما مرتبطين خطياً
2. نبرهن أن أحداهما مركز أبعاد متناسبة بالنسبة للنقطتين الباقيتين

لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوي واحد

1. نشكل ثلاث أشعة ونبرهن أنهم مرتبطين خطياً
2. نبرهن أن أحدهم هو مركز أبعاد النقاط الثلاث الباقية
3. نبرهن أنهم يقعون على مستقيمين متقاطعين
4. نوجد معادلة المستوي المار من ثلاث نقاط ثم نبرهن أن النقطة الرابعة تحقق معادلة المستوي

لإثبات وقوع خمس نقاط في مستوي واحد:

نبرهن أن النقاط تقع على مستقيمين متقاطعين

ملاحظة:

$\overrightarrow{AB} = K\overrightarrow{AC} \Leftarrow A, B, C$ تقع على استقامة واحدة $C(AB)$ أو $BE(AC)$ أو $A \in (BC)$

✓ إذا كان v', u' مرتبطان خطياً و $w', v'. u'$ مرتبطان خطياً $\Leftarrow w'$ يوازي المستوي المار من v', u'

حساب بعد نقطتين $A. B$:

$$AB = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + ([Y_A - Y_B])^2 + (z_A - z_B)^2}$$

إيجاد إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة:

$$C\left(\frac{X_A+X_B}{2}, \frac{Y_A+Y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

إيجاد إحداثيات مركز ثقل المثلث:

$$G\left(\frac{X_A+X_B+X_C}{3}, \frac{Y_A+Y_B+Y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

لجمع شعاعين: نجمع المركبات المتقابلة.

ضرب شعاعين: نضربه بجميع المركبات:

تشكيل شعاع $\overrightarrow{AB}$: النهاية ناقص البداية

نظيم الشعاع (طويلة الشعاع)

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\left(\text{المركبة الاولى}\right)^2 + \left(\text{المركبة الثانية}\right)^2 + \left(\text{المركبة الثالثة}\right)^2}$$

إثبات الارتباط الخطي لشعاعين:

علينا إثبات تناسب المركبات.

الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$$

ثم نحصل على ثلاث معادلات نأخذ اثنتان فقط

نحلها فنوجد a, b ثم نعوض في الثالثة التي لم نأخذها

إما محققة ⇐ أشعة مرتبطة خطياً

أو غير محققة ⇐ أشعة غير مرتبطة خطياً

✓ في أي علاقة شعاعية علمنا الكل إلا واحدة عندها نستطيع حساب إحداثيات.

✓ عندما يطلب منا معرفة نوع المثلث نحسب مربع أطوال أضلاعه:

1. جميع الأطوال متساوية ⇐ مثلث متساوي الأضلاع
2. طولي ضلعين متساوين ⇐ مثلث متساوي الساقين
3. أطول واحد يساوي مجموع الطولين الباقيين ⇐ المثلث قائم

الكرة:

هي كل النقاط التي تبعد عن نقطة محددة (مركز) مسافة ثابتة (نصف القطر)

ولحساب معادلة الكرة: يلزمنا "مركز، نصف قطر"

بفرض $c(x_0, y_0, z_0)$ مركز و r نصف قطر

عندها:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

بوطلة الـ 600:

1. قد يعطينا مركز ونصف قطر
2. قد يعطينا مركز ونقطة عندها بعد النقطة عن المركز يكون نصف القطر
3. قد يعطينا مركز ويصف الكرة بأنها تمس المستوي عندها بعد المركز عن المستوي هو نصف القطر

4. قد يعطينا قطر الكرة عندها نحسب المركز منتصف قطعة مستقيمة ويكون نصف القطر هو بعد أحد النقاط عن المركز (قانون بعد بين نقطتين)

5. قد يعطينا مركز ويصف الكرة انها تمس المستقيم عندها بعد المركز عن المستقيم هو نصف القطر

✓ عندما يقول A نظيرة بالنسبة لـ B ⇐ B منتصف AC .

الجداء السلمي:

$$\vec{u}.\vec{v} = a\alpha + \beta b + \gamma c$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{w}\|.\cos(\text{الزاوية بينهما})$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$

$$\vec{u}.\vec{u} = \|u\|^2 = \vec{u}^2$$

متعامدان $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v}$

مستوي مع مستوي :

تعامد: نثبت تعامد ناظمين

توازي: نثبت الارتباط الخطي للناظمين .

تقاطع: عدم الارتباط الخطي للناظمين .

مستقيم مع مستقيم :

تعامد: نثبت تعامد أشعة التوجيه .

توازي: الارتباط الخطي لأشعة التوجيه.

تقاطع: بحث ثالث بدو شغل.

مستوي مع مستقيم :

تعامد: نبرهن الارتباط الخطي لشعاع التوجيه للمستقيم مع ناظم المستوي .

توازي: نبرهن تعامد شعاع التوجيه مع الناظم.

تقاطع: عدم تعامد شعاع التوجيه المستقيم مع ناظم المستوي.

معادلة المستوي:

7. لدينا نقطة (x_0, y_0, z_0) وناظم $\vec{n}Q = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$

عندها:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$$

1. المستوي Q يوازي المستوي P ويمر من A :

$A \in Q$ ولدينا $\vec{n}Q = \vec{n}P$

2. المستوي Q عمودي على P ويمر من A وB :

نفرض $\vec{n}Q = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, $\vec{n}Q.\overrightarrow{AB} = 0$

و $\vec{n}Q.\vec{n}P = 0$ نفرض α او β أولا عددا ما يفضل غير الصفر فنحصل على معادلتين بمجهولين نحلهما حل مشترك فنحصل على

α و β وγ بالتالي حصلنا على $\vec{n}Q$ ولدينا نقطة A أو B فنعوض في معادلة المستوي

3. المستوي Q يمر من A و B و C

$\overrightarrow{AB}\vec{n}Q$, $\overrightarrow{AC}\vec{n}P = 0$

4. المستوي Q عمودي على المستوي P و المستوي R يمر من نقطة:

نفرض $\vec{n}Q = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$

$$\vec{n}R.\vec{n}Q = 0 , \vec{n}Q.\vec{n}P = 0$$

5. $\vec{v}$ و$\vec{u}$ شعاعان توجيه للمستوي Q ويمر من النقطة حيث أن أشعة توجيه المستوي هي شعاعين موجودين داخل المستوي وغير مرتبطين خطيا

$$\vec{n}Q.\vec{u} = 0 ; \vec{n}Q.\vec{v} = 0$$

6. معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة ⇐ AB نفرض $M(x, y, z)$ نقطة من المستوي المحوري $MA^2 = MB^2$ نفك متطابقات وننقل إلى طرف واحد وتم المطلوب

المعادلات الوسيطية لمستقيم:

1. نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وشعاع توجيه:

$$d = \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 ; t \in R \\ z = \gamma t + z \end{cases} \Leftarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

2. نقطتين ولم يعطي شعاع توجيه:

نشكل شعاع من النقطتين فنحصل على شعاع توجيه

3. فصل مشترك لمستويين متقاطعين:

عزل أحد المجاهيل لطرف مع الأرقام نفكر بفرض لإيجاد المجهولين الباقيين بدلالة المعزول ثم نفرض المعزول at حيث $a \neq 0$

4. عمودي على مستوي ويمر من نقطة:

ناظم المستوي هو شعاع التوجيه.

تقاطع:

✓ مستقيم مع مستوي:

1. نوجد معادلة المستوي
2. نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم
3. نعرض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي
4. نحسب t
5. نعوض t في المعادلات الوسيطية

✓ ثلاث مستويات ⇐ غاوس

✓ مستقيم مع مستقيم ⇐ بدو شغل

طبيعة مجموعة النقاط:

✓ يوجد مجاهيل من الدرجة الأولى ⇐مستوي

✓ يوجد مجاهيل من الدرجة الثانية نتمم إلى مربع كامل

ونميز ثلاث حالات:

5. موجب $= ()^2 + ()^2 + ()^2$

⇐ كرة مركزها هي الأرقام داخل القوس مع تغيير إشارات ونصف القطر هو جذر الطرف الثاني

6. $()^2 + ()^2 = 0$

⇐ نقطة إحداثياتها الأرقام داخل القوس مع تغيير إشارة

4. سالب $= ()^2 + ()^2 \Leftarrow$ خالية

معادلات وسيطية مممقة:

(AB) هو مستقيم كلو شغال

$[AB)$ هو نصف لنصف مستقيم يبدأ من A

$[AB]$هو قطعة مستقيمة

$(AB]$ هو نصف مستقيم يبدأ من A باتجاه B

	شعاع توجيه	نقطة
$[AB)$	$\overrightarrow{AB}$	$A[0,+\infty[$
$[AB]$	$\overrightarrow{AB}$	$A[0,1]$
$(AB]$	$\overrightarrow{BA}$	$B[0,+\infty[$

ملاحظة:

✓ مساحة المثلث القائم: طولي الضلعين القائمين $\times \frac{1}{2}$

✓ حجم الهرم: مساحة القاعدة × الارتفاع $\times \frac{1}{3}$

✓ مساحة شبه المنحرف: $\frac{\text{القاعدة الصغرى} \times \text{الكبرى}}{2}$ (الارتفاع)

إيجاد نقطة تقاطع مستقيمين:

متقاطعين:

متوازيان: ⇐ ارتباط أشعة التوجيه

متخالفين: ⇐ يقعان في مستويان مختلفان

(لا يقعان في مستوي واحد)

إثبات تقاطع مستقيمين:

1. نوجد المعادلة الوسيطية للمستقيمين
2. في أحد التمثيلين نبدل s بـ t
3. نطابق المعادلات ونأخذ فقط معادلتين ونحلها ونوجد t و s
4. بعد إيجاد t و s نعوض في المعادلة الثالثة التي لم نأخذها

إما محققة ⇐ متقاطعين

أو غير محققة ⇐ غير متقاطعين

لإيجاد نقطة التقاطع:

5. نعوض t في التمثيل الذي يحوي t أو نعوض s في التمثيل الذي يحوي s

تلازي أو تطابق مستقيمين:

1. نبرهن الارتباط الخطي لأشعة التوجيه بالتالي تكون قد برهنا التوازي أو التطابق
2. نوجد التمثيل وسيطي للمستقيمين
3. نطابق المعادلات ⇐ نعزل t :

⇐ نفس الشي = t في الكل طبوقان

⇐ نفس الشي $\neq t$ في الكل غير طبوقان

بعد نقطة عن مستقيم:

✓ هو فصل مشترك لمستويين متعامدين:

1. نحسب بعد النقطة عن المستوي الأول لنفرض ℓ
2. نحسب بعد النقطة عن المستوي الثاني لنفرض⇐ M الجواب المطلوب للمسألة هو $\sqrt{\ell^2+M^2}$

✓ غير ذلك:

1. نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم
2. نفرض M نقطة من مستقيم احداثياته بدلالة t
3. نحسب مربع بعد A عن M نفك متطابقات.
4. نفك المتطابقات

إما: ندرس اطراد وذلك بالاشتقاق وندرس الاطراد القيمة المطلقة التي تعدم المشتق نعوضها في صيغة قبل الاشتقاق فنحصل على الجواب لكن علينا أن نجد

أو: نتمم إلى مربع كامل فيكون الجواب جانب القوس للتربيع

المسقط القائم:

على المستوي:

a. نوجد معادلة المستوي
b. نوجد العلاقات الوسيطية للمستقيم المار من النقطة وعمودي على المستوي
c. نوجد نقطة تقاطع المستوي مع المستقيم
d. نوجد t نعوض في معادلات الوسيطية.

✓ للتأكد بعد النقطة عن مسقطها القائم نفس بعد النقطة عن المستوي.

على المستقيم:

نفس خطوات بعد نقطة عن مستقيم لكن بدل التعويض في العالقة قبل الاشتقاق نعوض في المعادلات وسيطيه

طريقة غاوس:

أي جمل تحت كل عنصر أو صفر سطر نرمز له ℓ المذكور أولاً لا يتغير

بعد التدريج:

✓ ظهور سطر من الشكل:

$$0+0+0=\alpha\neq 0$$

⇐ مستحيلة الحل والمستويات لا تشترك بأي نقطة

✓ ظهور سطر من الشكل:

$$0+0+0=0$$

⇐ لها عدد لا نهائي من الحلول المستويات تشترك بمستقيم

✓ تدريج نظامي ⇐ حل وحيد نحسبه من تحت لفوق تشترك بنقطة.

أما ظهور سطرين من الشكل:

$$0+0+0=0$$

⇐ المستويات طبوقة.

حساب الجداء السلمي دون معلم متجانس:

رباعي الوجه فيه الزوايا متساوية وتساوي $\frac{\pi}{3}$

الهرم المنتظم بين ضلعين متجاورين زاويته $\frac{\pi}{3}$

الهرم المنتظم بين ضلعين متقابلين زاويته $\frac{\pi}{2}$

مركز الأبعاد:

قانون بلا كسر:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\Delta\overrightarrow{GD}=0$$

قانون أبو كسر:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{BG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$$

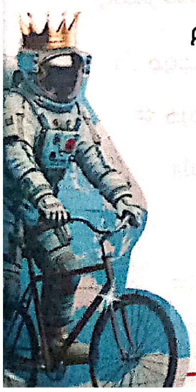
إحداثيات مركز أبعاد متناسبة:

$(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ و G مركزهم

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

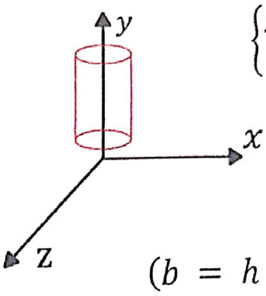
$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$



الأسطوانة:

هو مجسم ناتج دوران مستطيل لأحد أضلاعه

1. أسطوانة محورها (o,k):



معادلتها: $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ a\le z\le b \end{cases}$

إحداثيات مركزها:

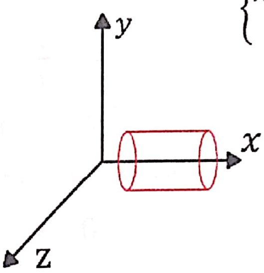
$(0,0,0),(0,0,b)$

ارتفاعها:

$(b=h+a),(h=b-a)$

نصف قاعدتها: r

2. أسطوانة محورها (o,j) :



معادلتها: $\begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ a\le x\le b \end{cases}$

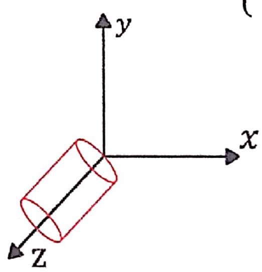
إحداثيات مركزها:

$(0,0,0),(0,b,0)$

ارتفاعها: $h=b-a$

نصف قطرها: r

3. أسطوانة محورها (o,i) :



معادلتها: $\begin{cases} y^2+z^2=r^2 \\ a\le y\le b \end{cases}$

إحداثيات مركزها:

$(a,0,0),(0,b,0)$

ارتفاعها: $h=b-a$

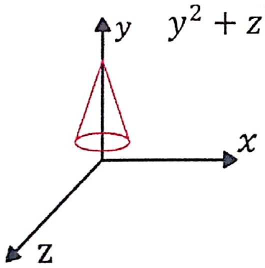
نصف قطرها: r

معادلة المخروط:

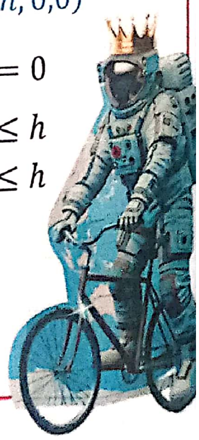
في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ في الفراغ:

3. رأسه ومحوره $(o,\vec{i})$ وقاعدته دائرة مركزها

$A(h,0,0)$ ونصف قطرها r

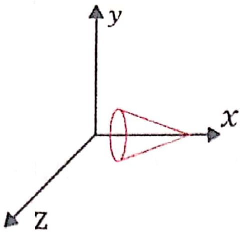


$$y^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}x^2=0$$
$$0\le x\le h$$
$$0\le y\le h$$



1. رأسه o ومحوره $(o,\vec{j})$ وقاعدته دائرة مركزها

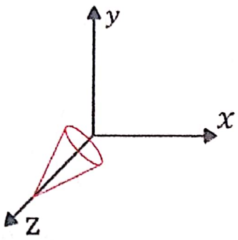
$A(0,1,0)$ ونصف قطرها r



$$x^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}y^2=0$$
$$0\le y\le h$$

2. رأسه o ومحوره $(o,\vec{k})$ وقاعدته دائرة مركزها

$A(0,0,h)$ ونصف قطرها r



$$x^2+y^2-\frac{r^2}{h^2}z^2=0$$
$$0\le z\le h$$

نكشات الأشمة:

.1

✓ أثبت أن d و d' متقاطعان في Δ

✓ أكتب معادلة المستوي بـ d و d'

خطوات الحل:

a. نعتبر شعاعي التوجيه المستقيمان هما شعاعان توجيه المستوي

b. النقطة المستخدمة هي نقطة تقاطع المستقيمان

2. يعطينا إحداثيات A,B,C المطلوب.

أثبت أن G (التي لدينا إحداثياتها) هي نقطة تلاقي الارتفاعات.

خطوات الحل:

a. نكتب معادلة مستوي ABC

b. نثبت أن G تنتمي إلى المستوي ABC

c. $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{AB}=0$

3. أثبت أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط A,B,C حيث إحداثيات $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ معلومة وأثقال α,β,γ معلومة

الحل:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

4. أثبت أن G م أ م للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ حيث إحداثيات A,B,C معلومة وأثقال α,β,γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها

الحل:

نشكل اشعة $\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}$

طرق أتمتة:

معادلة المستوي:

$$ax+by+cz+d=0$$

ولدينا $\vec{v}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix},\vec{u}=\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \Delta\\ \lambda\end{pmatrix}$

هما شعاعي توجيه

فإن الناظم لإيجاد ناظم المستوي الذي هو:

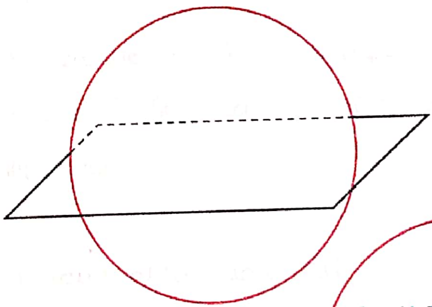
$$n_{\vec{p}}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

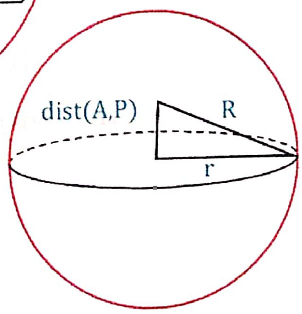
لحساب a: $\beta\lambda-\gamma\Delta$

لحساب b: $-(\alpha\lambda-\gamma\varepsilon)$

لحساب c: $\alpha\Delta-\beta\varepsilon$

تقاطع مستوي مع كرة: $A(x_0,y_0,z_0)$





حسب فيثاغورث:

$$r^2=R^2-[dist(A.P)]^2$$

طبيعة مجموعة نقاط:

$$x^2+y^2+z^2=ax+by+cz+d=0$$

لإيجاد المركز:

$$(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2})$$

$$R^2=(-\frac{a}{2})^2+(-\frac{b}{2})^2+(-\frac{c}{2})^2-d$$

R^2 عدد موجب $\Leftarrow$ كرة

R^2 عدد سالب $\Leftarrow$ مجموعة خالية

R^2 صفر $\Leftarrow$ نقطة

بعد نقطة عن مستقيم:

$$d:\begin{cases}x=at+x_0\\ y=bt+y_0\quad ;t\in R\\ z=ct+z_0\end{cases}$$

نفرض M نقطة من المستقيم إحداثياتها بدلالة t نحسب بعد AM

$$\|AM\|=\sqrt{at^2+bt+c}$$

نفرض: $t=\frac{-b}{2a}$

ونعوض t في AM

البعد بين مستويين متوازيين:

$$P: ax+by+cz+d_1=0$$
$$q: ax+by+cz+d_2=0$$

هو $dist(p,q)=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

أهم شي تتذكره: الناس اللي بتضحك عليك اليوم، رح يصفقوا لك بكرا!! فاجئهم، لا تخليهم يشمتوا فيك.

إعداد: أ. إياد جمجول / 0968 065 280

$$i^2 = -1$$

$$z = x + iy$$

✓ عند جمع عددين عقديين نجمع الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي.

✓ لتحويل الكسر إلى شكل جبري نضرب البسط والمقام بالمرافق المقام

✓ جداء عدد عقدي بمرافقه يساوي مربع الطويلة

الشكل المثلثي:

$$Z = r.[\cos(\quad) + i\sin(\quad)]$$

القسم الحقيقي $\Leftrightarrow$ cos

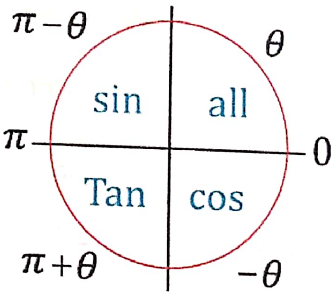
القسم التخيلي $\Leftrightarrow$ sin

a. يجب أن يكون العدد العقدي بالشكل الجبري

b. نسحب الطويلة عامل مشترك

c. نحدد الزاوية

d. نحدد الربع الذي تنتمي إليه الزاوية



كل سنة طنجرة كوسا

ADD SUGAR TO THE COFFEE

بوصلة الـ 600:

✓ زاوية حقيقي بحت موجب $\Leftarrow 0$

✓ زاوية حقيقي بحت سالب $\Leftarrow \pi$

✓ زاوية تخيلي بحت موجب $\Leftarrow \frac{\pi}{2}$

✓ زاوية تخيلي بحت سالب $\Leftarrow \frac{-\pi}{2}$

الخواص:

1. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

2. $z_1.z_2 = r_1.r_2\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) + \\ i\sin(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}$

3. $z^n = r^n\,[\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1)]$

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

✓ $z_1.z_2 = r_1.r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

✓ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

✓ $z^n = r^n e^{in\theta}$

$$e^{i0} = 1 \;,\; e^{-i\frac{\pi}{2}} = -1$$

$$e^{i\pi} = -i \;,\; e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

علاقة أويلر:

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} \;,\; \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2i}$$

✓ عندما يطلب حل معادلة تحوي Z و$\bar{Z}$ طبيعية مجموعة النقاط ⇐ نبدل كل Z بـ $x + iy$

✓ عند حل معادلة درجة ثانية وظهرت دلتا سالبة عندها يمكن إكمال الحل في C حيث

$$\Delta = -16 \Rightarrow \sqrt{|\Delta|} = 4$$

وعند حساب حلول $\sqrt{|\Delta|}$ نضرب بـ i

جذر العدد العقدي:

ليس فعال دوماً:

1. نحول إلى الشكل الأسي $z = re^{i\theta}$

2. ثم نجذر الطويلة ونقسم الزاوية على 2

3. نضع $\pm$ أي $\mp\sqrt{r}e^{i\frac{\pi}{2}}$

فعالة دوماً:

طريقة المعادلة الثالثة:

معلومة $z^2 = a + ib$

مطلوبة $z = x + iy$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x^2 - y^2 = a$$

$$2xy = b$$

b) لمعرفة تطبيق الإشارة)

✓ المرافق يوزع على كل حتة وزنكة في التمرين

مجموعة نقاط M:

$$|u| = 1 \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{u}$$

7. إذا ثبت الزاوية ⇐ نصف مستقيم
8. إذا ثبت الطويلة ⇐ دائرة
9. كلمة حقيقي ⇐ $\bar{z} = z$
10. كلمة تخيلي ⇐ $\bar{z} = -z$
11. $|\bar{z}|$ ⇐ $\bar{z} = \frac{1}{z}$
12. نبدل كل z بـ $x + iy$

في المستوي:

- درجة أولى ⇐ مستقيم.
- درجة ثانية ⇐ دائرة.

في الفراغ:

- درجة أولى ⇐ مستوي.
- درجة ثانية ⇐ كرة.

طريقة الأتمتة:

الشكل المثلثي $z = x + iy$

1. الحقيقي = التخيلي ⇐ $\theta = \frac{\pi}{4}$
2. لحقيقي > التخيلي ⇐ $\theta = \frac{\pi}{6}$
3. لحقيقي < التخيلي ⇐ $\theta = \frac{\pi}{3}$
4. حقيقي بحت موجب ⇐ $\theta = 0$
5. حقيقي بحت سالب ⇐ $\theta = \pi$
6. تخيلي بحت موجب ⇐ $\theta = \frac{\pi}{2}$
7. تخيلي بحت سالب ⇐ $\theta = \frac{-\pi}{2}$
8. الجذران التربيعيان متعاكسان للعدد المقدمي

$$z^2 + bz + c = 0$$

إن حلول المعادلة مترافقان

$$z^2 + ibz + c = 0$$

إن حلول المعادلة غير مترافقان

تطبيقات العقدية

1. العدد العقدي الذي يمثل منتصف القطعة AB هو
$$Z = \frac{Z_A - Z_B}{2}$$
2. طول القطعة AB $|Z_A - Z_B| = AB$
3. العدد العقدي الذي يمثل شعاع هو $Z_A - Z_B$
4. العدد العقدي الذي يمثل مركز ثقل مثلث $Z_G =$
$$\frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$$
5. العدد العقدي الذي يمثل م أ م للنقاط
$$(C,\gamma), (B,\beta), (A,\alpha)$$
$$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + + \gamma}$$
6. الزاوية $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right)$
7. لإثبات التعامد: $\frac{\text{فرق عددين}}{\text{فرق عددين}} =$ تخيلي بحت
8. لإثبات تعامد وتساوي أطوال:
$$\frac{\text{فرق عددين}}{\text{فرق عددين}} = \mp i$$
9. لإثبات مثلث قائم:

تخيلي بحت $= \frac{\text{فرق عددين}}{\text{فرق عددين}}$ يوجد نقطة مكررة

10. لإثبات مثلث قائم ومتساوي الساقين:

$\mp i = \frac{\text{فرق عددين}}{\text{فرق عددين}}$ يوجد نقطة مكررة

11. لإثبات تساوي أطوال متوازي الأضلاع:

$\mp 1 = \frac{\text{فرق عددين}}{\text{فرق عددين}}$ يوجد نقطة مكررة

12. لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة:

حقيقي بحت $= \frac{\text{فرق عددين}}{\text{فرق عددين}}$ يوجد نقطة مكررة

طبيعة مجموعة النقاط:

تمثل محور $\Longleftarrow |Z - Z_A| = |Z - Z_B|$ ✓

$|Z - Z_A| = r$ ✓

$\Leftarrow$ تمثل دائرة مركزها Z_A ونصف قطرها r

متوازي الأضلاع:

معين: (أضلاع متساوية والأقطار متعامدة)

مستطيل: (يوجد زاوية قائمة والأقطار متساوية)

$b \Leftarrow$ شعاع الانسحاب

$k \Leftarrow$نسبة التحاكي

$z \Leftarrow$الأصلية

$z' \Leftarrow$ الصورة .

$z_0 \Leftarrow$ المركز

$\theta \Leftarrow$ زاوية الدوران

الانسحاب:

$$z' = z + b$$

إذا Z غير مضروبة بشيء $\Leftarrow$ الانسحاب وشعاعه هو ما جانب الأصلية

التحاكي:

(نسبة ومركز)

$$Z' - Z_0 = K(Z - Z_0)$$

الأصلية مضروبة بعدد حقيقي $\Leftarrow$ تحاكي .

الدوران: (زاوية ومركز)

$$Z' - Z_0 = e^{i\theta}(Z - Z_0)$$

إذا الأصلية مضروبة بعدد عقدي $\Leftarrow$ دوران

:Dangerous

a. تناظر محوري محوره ox_0 يعني مرافق

b. تناظر مركزي مركزه النقطة A

مثلاً هو:

✓ تحاكي مركزه A نسبته -1

✓ دوران مركزه A وزاويته π

c. التناظر المحوري الذي محوره oy

يعني غير إشارة فقط القسم الحقيقي

بوصلة ال 600 :

✓ عندما يكون لدينا فرق عددين على فرق عددين يساوي فرق عددين على فرق عددين وبسط أحدهما يوجد لدينا منصف داخلي يساوي المقام الاخر إذاً لدينا منصف داخلي

✓ إذا كان لدينا عددين لهم نفس الطويلة فإن هذان العددين مع المبدأ o يشكلون مثلث متساوي الساقين

رح يكون في أيام سيئة
بس تخطيها هو اللي
بيخليك ناجح! حتى لو
اليوم مو يومك، ما يعني
إنك تستسلم، بالعكس
ارجع بكرا أقوى!

تحليل توافقي

توافيق:

$$\binom{n}{r},\ n \geq r$$

قانون لإثبات علاقات: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

خاصة هامة: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

التراتيب:

$$n \geq p_n^r$$

$$p_n^r = n!\ ,\quad \binom{n}{r} = \frac{p_n^r}{r!}$$

عند حل معادلة تراتيبية علينا إيجاد شرط الحل

$$p_y^x :\ y \geq x$$

ملاحظات لحل المسائل:

يهتم بالترتيب:

1. نسحب على الترتيب
2. توزيع جوائز مختلفة أشياء
3. اختيار الأشخاص وتسميتهم (وضعهم بمناصب)
4. تشكيل كلمة
5. تشكيل عدد(كلمة السر)
6. سباق:

وجد تكرار ⇐ مبدأ الأساسي في العد

لا يوجد تكرار ⇐

✓ تراتيب.

✓ مبدأ الأساسي في العد.

لا يهتم بالترتيب:

1. سحب معا
2. توزيع جوائز متماثلة
3. اختيار أشخاص
4. اختيار شخص واحد مع نسميه زويدن ⇐توافيق

✓ كل مسألة تتحدث عن تشكيل عدد نستخدم المبدأ الأساسي في العد آحاد عشرات مئات ....

✓ واحد على الأقل:

تحليل توافقي: عدم الظهور — كلي

احتمالات: 1 — عدم الظهور

✓ كلمة على الأقل أو على الأكثر:

نكتب كل الحالات الممكنة ثم نضع خطاً الحالات المطلوبة:

إما بأخذ المتمم أو نحل الطلب على حاله

✓ إذا كان نظام المسألة يهتم بالترتيب ولكن في الطلب لم يحدد بالترتيب ⇐ هذا يعني أنه يريد كل الحالات بالترتيب لذلك نضرب بسحب 3:

a. جنسين (نضرب بـ 3)

b. ثلاث أجناس (نضرب بـ 6)

منشور ثنائي الحد:

$$(b+a)^n = \binom{n}{0}b^0a^n + \binom{n}{1}b^1a^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}b^na^0$$

وإذا سأل عن حد معين:

$$T_r = \binom{n}{r} b^r a^{n-r}$$

نستخدمه عندما يسألني عن حد معين

المعركة الحقيقية هي بينك وبين نفسك! العدو الوحيد هو عقلك اللي بيحاول يقنعك إنك ضعيف. لا تصدقه لأنك أقوى منه!

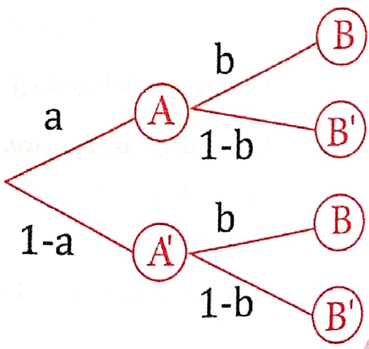
الاحتمالات

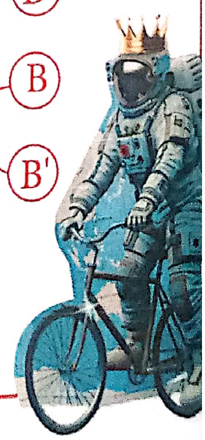
1. $1 \geq P(A) \geq 0$ "الاحتمال A"
2. $P(A') = P'(A) = 1 - P(A)$
الاحتمال المتمم لـ A
3. تقاطع و
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
اجتماع أو
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
4. ديمورغان قلب الفنجان:
$$P(A' \cup B') = P'(A \cap B)$$
$$P(A' \cap B) = P'(A \cup B)$$
5. احتمال A علماً أن B قد وقع
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
6. $P\,(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$

الشجرة:

القانون: $\dfrac{\text{احتمال التقاطع}}{\text{احتمال الحدث الذي وقع}}$

$$P(A') = 1 - p$$
$$P(B)(A) = a$$
$$P(A \cap B) = P.a$$
$$P(B) = P.a + (1 - P)(b)$$





المتحول المشوائي:

هو متحول يأخذ قيمة على حسب نتيجة تجربته

القانون الاحتمالي:

إن مجموع السطر الثاني دائماً "واحد"

x	2	1	-1
$P(x = x_0)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

التوقع:
$$E(x) = 2\left(\frac{1}{6}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) - 1\left(\frac{4}{6}\right) = -\frac{1}{6}$$

التباين:
$$u(x) = 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + (-1)^2$$
$$= \frac{4}{6} - E(X)^2$$

الانحراف:
$$\sigma(x) = \sqrt{u(x)}$$

المتحولات العشوائية :

- ✓ مجموعة كل عامود في أسفله.
- ✓ مجموع كل سطر على يمينه.
- ✓ في القلب احتمالات التقاطع.

x/y	y_0	y_1	y_2	y_3	قانون y
x_0	$D(x_0, y_0)$				
x_1		قالب القانون			هامش
x_2					
x_3					
قانون x		هامش			

عندما نكرر التجربة عدد كبير من المرات وتكرار التجربة ال يؤثر في النتائج المتتالية ونحن نهتم بحيث معين عندما نفكر بالتجربة.

مثل:

- ✓ رمي قطعة نقود
- ✓ رمي حجر نرد.
- ✓ سحب على التتالي مع إعادة

إعداد: أ. إياد جعجوع / 0968 065 280

قوانين:

$$q = 1 - p$$
$$E(X) = n.P$$
$$V(X) = n.P.q$$
$$D(x = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

✓ عدد تكرار التجربة $= n$

✓ عدد مرات ظهور الحدث المراد $= k$

✓ احتمال ظهور الحدث المطلوب في المرة الواحدة p

خلّي حلمك سبب تعبك
مش خوفك! لا تدرس لأنك
خايف تفشل، ادرس لأنك
بدك تنجح!

قراءة الجداول

قراءة الجداول:

1. $f'(x) > 0$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 3	↗	7	↗	$+\infty$

$]0,2[\cup]2,+\infty[$

2. ما طبيعة المماس؟

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$			‖		
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3 ‖ 3	↘	$-\infty$

نصفي المماس عند $x = 1$

3. بين ما للخط من قيم حدية:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	0 ‖	↗	5

قيمة حدية كبرى $f(1) = 3$

قيمة حدية صغرى $f(2) = 0$

4. اكتب المقاربات:

$y = 5$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

5. اكتب معادلة المماس في النقطة $x = 1$:

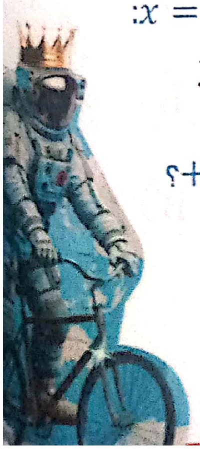
$$y - 3 = 0(x - 1)$$
$$y = 3$$

6. هل يملك C مقاربات مائلة بجوار $+\infty$؟

لا

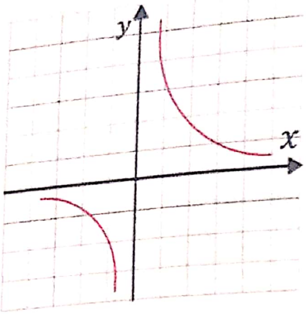
7. ما طبيعة المماس من $x = 2$

شاقولي



4. D_f مجموعة التعريف:

هي كل الإكسات التي إما فوقها أو تحتها يمر خط البياني.

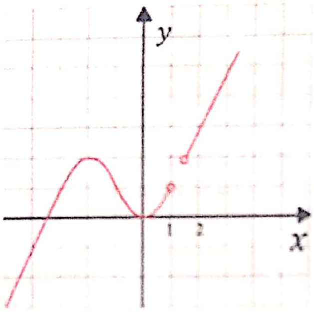


$$D_f = R/\{0\}$$

$$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

5. $f(D_f)$ المستقر الفعلي:

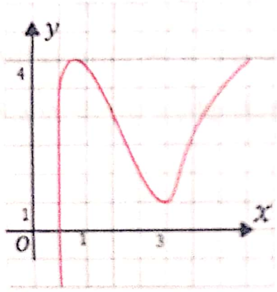
هي الوايات التي على يمينها أو يسارها خط بياني.



$$f(D_f) =]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$$

6. $f(\,]a,b[\,)$

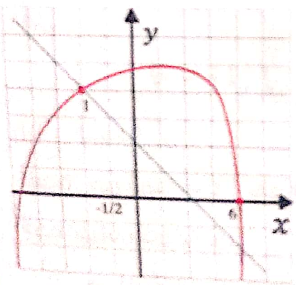
نرسم من $x = a$ و $y = b$ مستقيم شاقولي ونكتب الوايات التي يمر منها الخط البياني.



$$f(\,]1,3[\,) =]1,4[$$

7. مثلاً $f(x) < x + 1$

نسقط تقاطع الإكسات التي يكون الخط فيها تحت المستقيم.

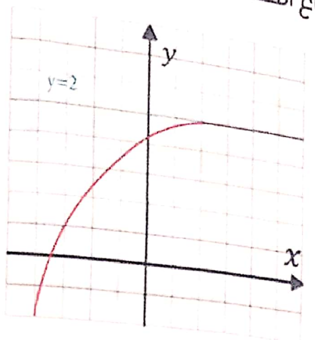


الحل:

$$f > y_\Delta,]-\frac{1}{2}, 6[$$

8. الاستمرار: عدم انقطاع الخط

هل f مستمر عند 2 ؟



$\lim_{x\to2} f \neq f(2) \Leftarrow f$ غير مستمر عند 2

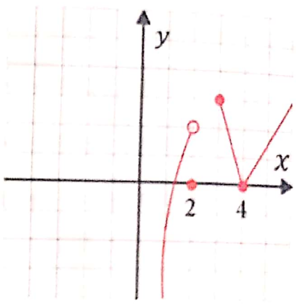
9. قابلية الاشتقاق:

يكون التابع غير قابل للاشتقاق عند

✓ الانقطاع

✓ عدم التعريف(خمسة)

✓ بوز



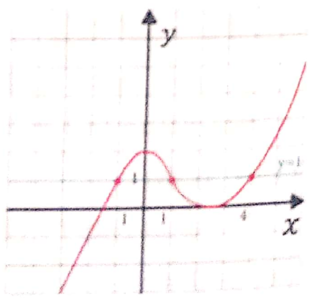
الحل:

fغير قابل للاشتقاق عند الصفر

fغير قابل للاشتقاق عند 4 و 2

10. $f(x) > a$:

نرسم المستقيم الأفقي $y = 1$نسقط نقاط التقاطع على محور الفواصل ثم نكتب مجالات التي يكون عندها الخط فوق المستقيم.

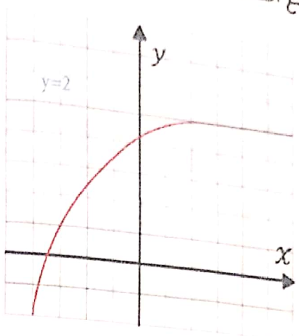


$$]-1,1[\cup]4.+\infty[$$

قراءة الرسوم

8. الاستمرار: عدم انقطاع الخط

هل f مستمر عند 2 ؟



$\lim_{x\to 2} f \neq f(2) \Leftarrow f$ غير مستمر عند 2

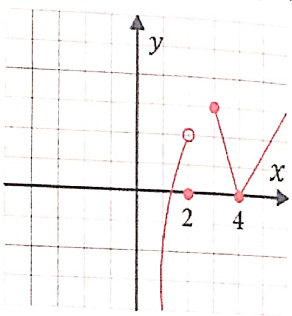
9. قابلية الاشتقاق:

يكون التابع غير قابل للاشتقاق عند

✓ الانقطاع

✓ عدم التعريف(خمسة)

✓ بوز



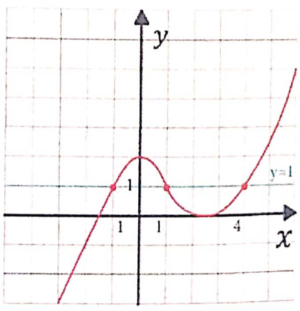
الحل:

fغير قابل للاشتقاق عند الصفر

fغير قابل للاشتقاق عند 4 و 2

10. $f(x) > a$:

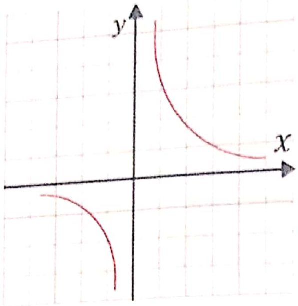
نرسم المستقيم الأفقي $y = 1$ونسقط نقاط التقاطع على محور الفواصل ثم نكتب مجالات التي يكون عندها الخط فوق المستقيم.



$]-1,1[\cup]4.+\infty[$

4. D_fمجموعة التعريف:

هي كل الإكسات التي إما فوقها أو تحتها يمر خط البياني.

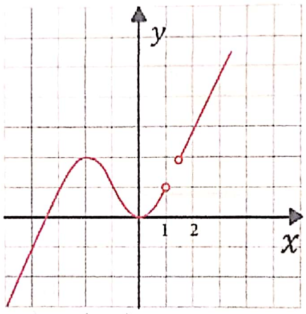


$D_f = R/\{0\}$

$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

5. $f(D_f)$ المستقر الفعلي:

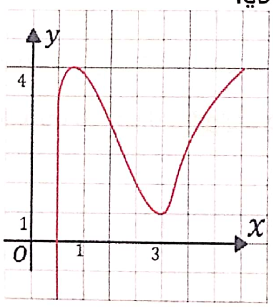
هي الوايات التي على يمينها أو يسارها خط بياني.



$f(D_f) =]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

6. $f(]a,b[)$

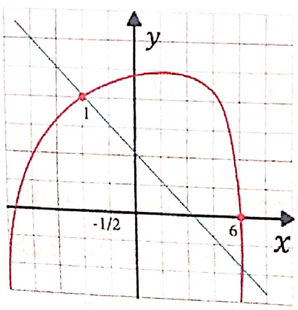
نرسم من $x = a$ و $y = b$ مستقيم شاقولي ونكتب الوايات التي يمر منها الخط البياني.



$f(]1,3[) =]1,4[$

7. مثلاً $f(x) < x + 1$

نسقط تقاطع الإكسات التي يكون الخط فيها تحت المستقيم.

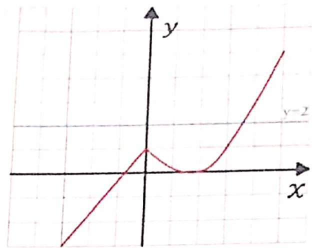


الحل:

$f > y_\Delta,]-\frac{1}{2},6[$

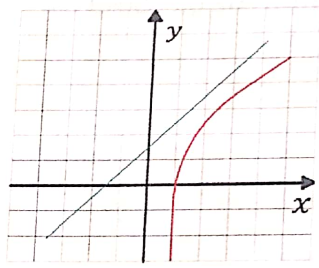
8. عدد حلول المعادلة $f(x) = a$

نرسم مستقيم أفقي $y = a$ يكون عدد مرات التقاطع هو عدد الحلول x



الحل: $f(x) = 2$ حل وحيد

9. المقارب المائل y_Δ:



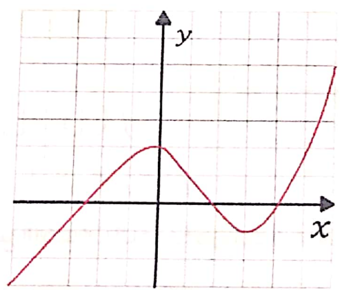
$$\lim_{x\to\infty} f - y_\Delta = 0^-$$

c تحت المقارب

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f - y_\Delta} = -\infty$$

10. صور عدد $f(a)$

نطلق من $x = a$ نحو الخط البياني وعندما نصل إلى الخط البياني تنحرف نحو الوايات فنحصل على الجواب.



الحل:

$$f(0) = 1 \;,\; f(1) = 0$$

11. $f'(\text{عدد})$

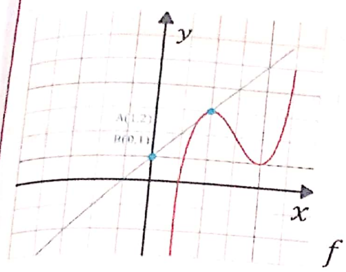
نطلق من (عدد = x) نحو الخط البياني وعندما نصل إلى الخط البياني سوف نجد:

b. مماس أفقي ⇐ الجواب صفر

c. مماس مائل ⇐ نوجد نقطتين واضحتين

a. يمر منها مماس

⇐ الجواب= $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

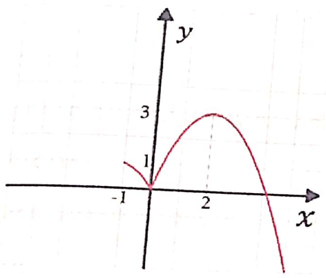


الحل: $f'(1) = \frac{1-2}{0-1} = 1$

11. القيم الحدية:

هي رأس كل هضبة وقاع كل وادي وبداية كل مطموسة أو نهاية كل مطموسة ويجب كتابة:

$$f(\;) = (\;)$$



الحل:

$f(2) = 3$ قيمة حدية كبرى

$f(0) = 0$ قيمة حدية صغرى

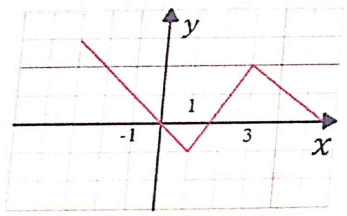
$f(-1) = 1$ قيمة حدية كبرى

12. $f'(x) > 0$

إشارة $f'(x)$ مرتبطة بإطراد $f(x)$

13. دراسة إطراد:

نسقط القيم الحدية على محور الفاصل فنحصل على مجالات الإطراد



$f(\,]-1,1[\,)$ متناقص تماماً

$\Leftarrow f'(x) < 0$

$f(\,]1,3[\,)$ متزايد تماماً

$\Leftarrow f'(x) > 0$

$f(\,]1,+\infty[\,)$ متناقص تماماً

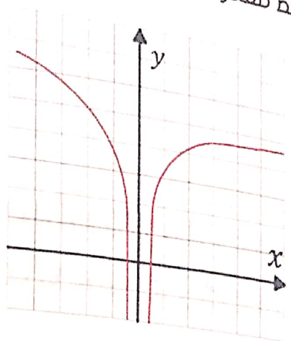
$\Leftarrow f'(x) < 0$

12. نهاية:

نتتبع الخط

الحل:

12. نهاية:
نتتبع الخط فعلاوة الخط هي النهاية



الحل:

$$\lim_{x\to 0^+} f = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f = 2$$

لا تنتظر ريحًا تُحرّك ساكنًا
زمجر بنفسك واصنعِ الإعصارا