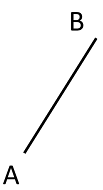
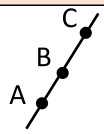
رقم	الســـــــــــــؤال	رقم	الســـــــــــــؤال
1	كيف نجد مركبات شعاع	26	كيف نثبت توازي مستقيمين
2	كيف نجد طويلة شعاع	27	كيف نثبت توازي مستويين
3	كيف يتم إثبات الارتباط الخطي لثلاث أشعة	28	كيف نثبت تعامد مستويين
4	كيف نثبت أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة	29	كيف نثبت أن مستقيم يوازي مستوي
5	كيف نثبت أن ثلاث نقاط تعين مستوي	30	كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيمين
6	كيف نجد الجداء السلمي لشعاعين	31	كيف ندرس الوضع النسبي لمستويين
7	كيف يتم حساب الجداء السلمي بالمسقط العمودي	32	كيف ندرس وضع مستقيم مع مستوي
8	كيف نثبت تعامد شعاعين	33	كيف ندرس الوضعيات النسبية لثلاث مستويات
9	كيف نجد إحداثيات نقط بمعلم	34	كيف نجد معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة
10	كيف نثبت الارتباط الخطي لثلاث أشعة	35	كيف نجد معادلة الكرة
11	كيف نجد معادلة مستوي	36	كيف نجد مركز و نصف قطر كرة
12	كيف نجد معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط	37	كيف نثبت أن مستوي يمس كرة
13	كيف نجد معادلة مستوي يمر من نقطة معلومة و علم شعاع توجيه له	38	كيف يتم حساب حجم رباعي الوجوه
14	كيف نجدمعادلة مستوي يحوي مستقيمين متقاطعين	39	قواعد إيجاد طبيعة مجموعة نقاط
15	كيف نثبت أن أربع نقاط تقع على استقامة واحدة	40	كيف نجد طبيعة مجموعة نقاط
16	كيف نجد تمثيل وسيطي المستقيم	41	كيف نجد إحداثيات مركز ثقل المثلث
17	كيف نجد تمثيل وسيطين لمستقيم مار من نقطتين	42	كيف نجد إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة
18	كيف نجد شعاع توجيه مستقيم ناتج من تقاطع مستويين	43	كيف نثبت أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة لمعلومية مركز الأبعاد
19	معادلة مستويات خاصة	44	كيف نحدد نقطة M أين تقع
20	كيف نجد إحداثيات نقطة في مستوي	45	كيف نجد أمثال β, α لتكون M مركز الأبعاد
21	كيف نجد إحداثيات نقطة من مستقيم	46	كيف نكتب علاقة شعاعية لارتباط ثلث أشعة
22	كيف نعين المسقط العمودي لنقطة على مستقيم	47	كيف نثبت أن النقطة K مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط
23	كيف نعين المسقط العمودي لنقطة على مستوي	48	كيف نجد معادلة مستوي Q عمودي على مستوي P ومار من نقطتين
24	كيف نجد بعد نقطة عن مستوي	49	كيف نثبت أن ثلاث نقاط تعيين مستو علم معادلته
25	كيف نجد بعد نقطة عن مستقيم	50	كيف نثبت أن مستقيم يقطع كرة في نقطتين

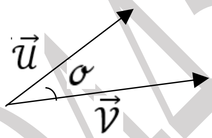
1	كيف نجد مركبات شعاع $\overrightarrow{AB}$
الطريقة	$\overrightarrow{AB} = \left(X_B - X_A , Y_B - Y_A , Z_B - Z_A \right)$
مثال	B (0 , 3 , -1) , A (1 ,2 ,3) $\overrightarrow{AB}\,(0-1 , 3-2 , -1-3)$ $\overrightarrow{AB} = (-1 , 1 , -4)$

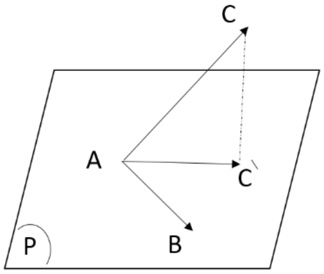
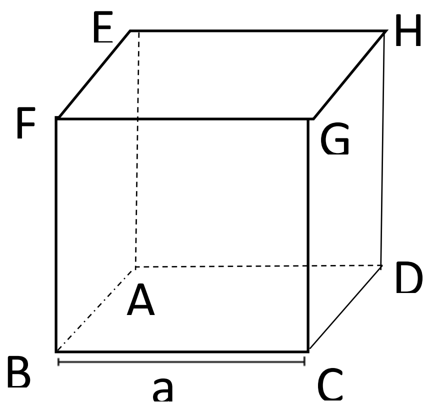
2	كيف نجد طويلة شعاع	
الطريقة	$\lVert\overrightarrow{AB}\rVert = AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$ و اذا كان $\vec{u}\,(X, Y , Z)$ فإن $\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$	
مثال	A (1 , +1 , 0) B (1 , -3 , 2) $\lVert\overrightarrow{AB}\rVert = AB = \sqrt{(1-1)^2 + (-3-1)^2 + (2-0)^2}$ $= \sqrt{0^2 + 16 + 4}$ $= \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$	$\vec{u} = (3, 0 , 2)$ $\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{3^2 + 0^2 + 2^2}$ = 5

3	كيف يتم اثبات توازي شعاعين لأي مرتبطين خطياً	
الطريقة	ليكن $\vec{u}\,(X_1 , Y_1 , Z_1)$ $\vec{v}\,(X_2, Y_2 , Z_2)$	شرط التوازي $\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$
مثال	$\vec{u} = (-1\ , 3 , 2)$ $\vec{v}\,(2, -6, -4)$	الشرط $\frac{1}{2} = \frac{3}{-6} = \frac{2}{-4}$ - محقق اذاً $\vec{v} // \vec{u}$ أي الشعاعين مرتبطين خطياً

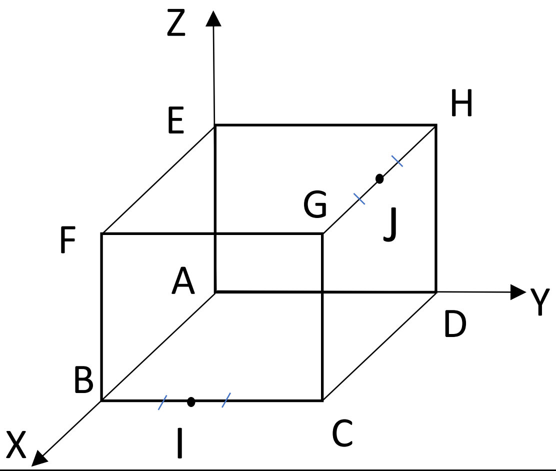
4	**كيف نثبت ثلاث نقاط A , B , C على استقامة واحدة**
الطريقة	نثبت أن أي شعاعين متشكلين من النقاط الثلاث مرتبطين خطياً 
مثال	$\overrightarrow{AB}\,(-1\,,-1\,,1\,)$ $\overrightarrow{AC}\,(\,2\,,2\,,-2\,)$ نلاحظ أن مركباتهما متناسبة $\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}$ فالشعاعين مرتبطين خطياً و النقاط A , B , C على استقامة واحدة

5	**كيف نثبت ثلاث نقاط تعين مستوي**
الطريقة	نثبت أنها لا تقع على استقامة واحدة كالسؤال الرابع (4)
مثال	أثبت أن النقاط A (1,2,3) و B (0,1,4) و C (-1,-3,2) تعين مستوي الحل : نجد $\overrightarrow{AB}\,(-1\,,-1\,,1\,)$ $\overrightarrow{AC}\,(\,-2\,,-5\,,-1\,)$ نلاحظ أن $\frac{-1}{-2}=\frac{-1}{-5}$ فالشعاعين غير مرتبطين خطياً فالنقاط لا تقع على استقامة واحدة و النقاط تعين مستوي

6	**كيف نجد الجداء السلمي لشعاعين**
الطريقة	$\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$ $= \|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\|.\cos\sigma$ 
مثال	$\|\vec{u}\| = 3$ $\quad \|\vec{v}\| = 2$ $\quad \sigma = \frac{\pi}{4}$ $\vec{u}.\vec{v} = 3\times2\times\cos\frac{\pi}{4}$ $= 6\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\,\frac{\sqrt{2}}{2}$
مثال	إذا كان $\vec{v}(-1,0,5\,)$ $\quad \vec{u}(\,2,3,1\,)$ فإن $\vec{u}.\vec{v} = -1\times2+0\times3+5\times1=3$

7	كيف يتم حساب الجداء السلمي بالمسقط العمودي للشعاع
الطريقة	$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC'}$ حيث C' المسقط العمودي لـ C على المستوي (P) 
مثال	مكعب طول حرفه a 1) احسب الجداء السلمي لـ $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{GE}$ 2) احسب الجداء السلمي لـ $\overrightarrow{DB}\,.\,\overrightarrow{GC}$ الحل : 1) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CA}$ $= \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BA}$ $= -a\,.\,a = -a^2$ حيث : $\overrightarrow{CA}$ مسقط GE على المستوي . $\overrightarrow{BA}$ مسقط CA على AB . 2) $\overrightarrow{DB}\,.\,\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{DC}\,.\,\overrightarrow{GC} = 0$ لأن الشعاعين $\overrightarrow{GC}$ و $\overrightarrow{DC}$ متعامدان . 

8	كيف نثبت تعامد شعاعين
الطريقة	نثبت أن الجداء السلمي لهما صفراً
مثال	أثبت أن الشعاعين $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ متعامدين حيث $\vec{u}\,(1\,,2\,,-5)$ $\quad$ $\vec{v}\,(1\,,2\,,1)$ $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 1\times1 + 2\times2 + 1\times -5$ $= 1 + 4 - 5 = 0$ إذا $\vec{v}$ و $\vec{u}$ متعامدين

9	ايجاد إحداثيات النقط
الطريقة	في معلم $(\vec{A}, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ A (0 , 0 ,0) B (a , 0 , 0) D (0 , a , 0) C (a , a ,0) F (a , 0 , a) H (0 , a, a) G (a , a ,a) 
مثال	إذا كان المكعب طول حرفه 1 . A(0,0,0) , B(1,0,0) , D(0,1,0) , E(0,0,1) , E(0,0,1) , C(1,1,0) $I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$, $J\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$

10	إثبات الارتباط الخطي لثلاث أشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
الطريقة	1) نثبت أن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ (مثلاً) غير مرتبطين . 2) نثبت أنه يوجد عددين حقيقين a, b يحققان : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$
مثال	لتكن الأشعة $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, 1, -1\right)$, $\vec{v}\left(\frac{-1}{2}, 1, 1\right)$, $\vec{w}\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$ أثبت أنها مرتبطة خطياً . الحل : نلاحظ أن $\frac{1}{+1} \neq \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$ فالشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطياً . الآن لنثبت وجود عددين حقيقين a, b يحققان $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ $\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right) = a\left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right) + b\left(\frac{1}{2}, 1, -1\right)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ 0 = a + b \\ -1 = a - b \end{array} \right\} \Rightarrow$ وبالتالي $\left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{array} \right.$ $\vec{w} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ وفيه الأشعة مرتبطة خطياً

11	كيف نجد معادلة المستوي
الطريقة	اذا كان - معلوم شعاع الناظم للمستوي P $\vec{n}\,(a\,,b\,,c\,)$ - نقطة يمر منها المستوي $(\,x_0\,,y_0\,,z_0\,)$ - تكون معادلة المستوي $a\,(\,x - x_0) + b\,(\,y - y_0) + c\,(\,z - z_0) = 0$
مثال	اكتب معادلة المستوي P المار من النقطة $A(\,1\,,3\,,-3\,)$ و شعاع الناظم له $\vec{n}(\,2\,,3\,,5)$ الحل: المعادلة هي $2\,(\,x - 1\,) + 3(\,y - 3\,) + 5(z + 2\,) = 0$ $2x + 3y + 5z - 1 = 0$

12	إيجاد معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط C, B , A معلومة
الطريقة الأولى	1- نثبت أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً في تعيين مستوي . 2- حسب تعريف المستوي هو مجموعة النقاط $M(\,x\,,y\,,z\,)$ التي تحقق $\overrightarrow{AM} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}$
مثال	أوجد معادلة المستوي P المار من النقاط $C(\,4,3,5\,)\,,\,B(\,10,4,3\,)\,,\,A(\,1,5,4\,)$ الحل نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}(\,9,-1\,,-1\,)\,,\overrightarrow{AC}\,(\,3,-2,1\,)$ غير مرتبطين خطياً نضع $\overrightarrow{AM} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}$

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y-5 \\ z-4 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9a+3b \\ -a-2b \\ -a+b \end{bmatrix}$$

$x - 1 = 9a + 3b$ ... ... -1

$y - 5 = -a - 2b$ ... ... -2

$z - 4 = -a + b$ ... . -3

نعوض في (1)

$x - 1 = 9(\ ) + 3(\ )$

ومنه معادلة المستوي

$x + 4y + 5z - 41 = 0$

نطرح 3 من 2 نجد : $y - z - 1 = -3\,b$

$b = \frac{y+z+1}{3}$ $\qquad a = \frac{-y-2z+13}{3}$

12 الطريقة الثانية	لايجاد معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط A ,B , C
الطريقة	1- نثبت أن $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً . 2- نكتب معادلة المستوي : $ax + by + cz + d = 0$ ناظمة $\vec{n}(a, b, c)$ و الناظم عمودي على شعاعي توجيه $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 3- نضع $\vec{n}\,.\overrightarrow{AB} = 0$ $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$ 4- نحل معادلتين بثلاث مجاهيل و نجد a,b,c 5- ثم نحسب d باعتبار المستوي مار من A مثلاً .
مثال	A(1,5,4) B(10,4,3) C(4,3,5) الحل : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\,(9, -1, -1) \\ \overrightarrow{BC}\,(3, -2\,, 1) \end{cases}$ غير مرتبطين خطياً بفرض $\vec{n}$ (a,b,c) ناظم المستوي (ABC) $\vec{n}\,.\overrightarrow{AB} = 0 \Longrightarrow 9a - b - c = 0$ $\vec{n}\,.\overrightarrow{BC} = 0 \Longrightarrow 3a - 2b + c = 0$ نفرض C=1 ومنه $\begin{cases} 9a - b -= +1 \\ 3a - 2b = 1 \end{cases}$ بحل المعادلتين نجد $a = \frac{1}{5}, b = \frac{4}{5}$ ومنه الناظم $\vec{n}(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 1)$ و بالتالي : $\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y + z + d = 0$ وبما أن المستوي (ABC) مار من النقطة A(1,5,4) نعوض : $\frac{1}{5}(1) + \frac{4}{5}(5) + 1(4) + d = 0$ ومنه $d = \frac{41}{5}$ وبالتالي : $\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y + z - \frac{41}{5} = 0$ اذاً معادلة المستوي : $X + 4y + 5z - 41 = 0$

الطريقة الثالثة 12	**لايجاد معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط .**
الطريقة	1- نكتب معادلة المستوي $ax + by + cz + d = 0$ 2- نعوض إحداثيات النقاط A , B , C في المعادلة. 3- نحصل على ثلاث معادلات بأربع مجاهيل . 4- نضع d=1 مثلاً و نحل ثلاث معادلات و نجد a , b ,c .
مثال	أوجد معادلة المستوي (ABC) A(-1 , 0 , 1) , B(1 , 2 , -1) , C (0 , 3 , 1) الحل : المعادلة $ax + by + cz + d = 0$ A(-1 , 0 , 1) : $-ax + c + d = 0$ B(1 , 2 , -1) : $a + 2b - c + d = 0$ C (0 , 3 , 1) : $3b + c + d = 0$ نضع d=1 : 1) $-a + c + 1 = 0$ 2) $a + 2b - c + 1 = 0$ 3) $3b + c + 1 = 0$ بجمع 1 و 2 : $2b + 2 = 0$ $b = -1$ نعوض في 3 فنجد : C = 2 نعوض في 1 فنجد : a = 3 تتكون معادلة المستوي : $3x - y + 2z + 1 = 0$

<table>
<tr><td>13</td><td>إيجاد معادلة مستوي يمر من نقطة و عُلم شعاعي توجيه له $\vec{v},\vec{u}$</td></tr>
<tr><td>الطريقة</td><td>1- بفرض شعاع الناظم للمستوي $\vec{n}(a,b,c)$
2- نضع : $\vec{n}.\vec{u} = 0$
$\vec{n}.\vec{v} = 0$
و نحسب a,b,c
3- نكتب معادلة المستوي المار من A و ناظمه $\vec{n}(a,b,c)$ كما في السؤال 11</td></tr>
<tr><td>مثال</td><td>أوجد معادلة المستوي P المار من النقطة $A(1,0,1)$
والشعاعين $\vec{u}(2,1,1)$ و $\vec{v}(1,-1,-2)$ شعاعي توجيه له .
الحل : بفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$
$\begin{cases} n.\vec{u} = 0 \longrightarrow 2a+b+c=0 \\ n.\vec{v} = 0 \longrightarrow a-b+2c=0 \end{cases}$ نضع $c = 1$ نجد :
$2a + b + 1 = 0$
$a - b + 2 = 0$
$3a + 3 = 0$ ومنه $a = -1$ ومنه $b = 3$
فيكون الناظم $\vec{n}(1,3,1)$ و بالتالي معادلة المستوي المار من النقطة A
و ناظمه $\vec{n}$ هي :
$1(x-1) + 3(y-0) + (z+1) = 0$
$P: x + 3y + z - 2 = 0$</td></tr>
</table>

المدرس :

خالد القاسم

0994597320

0987578951

14 كيف نجد معادلة مستوي يحوي مستقيمين متقاطعين

الطريقة

1- تعيين نقطة التقاطع A .

2- نجد $\vec{v}, \vec{u}$ شعاعين توجيه هذين المستقيمين .

3- تعيين الناظم $\vec{n}(a, b, c)$ للمستوي الذي يحققه :

$$\vec{n}.\vec{u} = 0$$

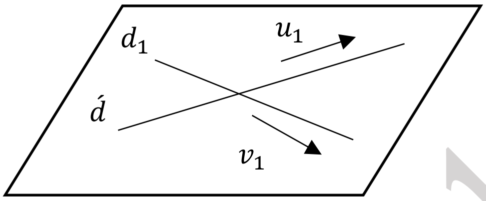
$$\vec{n}.\vec{v} = 0$$

4- نكتب معادلة المستوي المار من A و $\vec{n}$ ناظمه .

مثال

ليكن المستقيمين

$$d\begin{cases} x = t - 4 \\ y = -t + 3 \\ z = t \end{cases} \qquad t \in R \quad \acute{d}\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t + 1 \\ z = -t + 2 \end{cases}$$



المتقاطعة في $A(0,1,2)$

الحل :

نجد $\vec{u}(1, -1, 1)$ شعاع توجيه d

$\vec{V}(3, 2, -1)$ شعاع توجيه $\acute{d}$

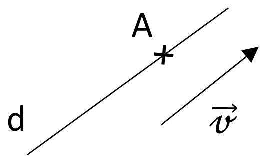
وليكن الناظم $\vec{n}(a, b, c)$ للمستوي P الذي يحوي $\acute{d}, d$ فهو يحقق :

$$\vec{n}.\vec{v} = 0$$

$$\vec{n}.\vec{u} = 0$$

ونكمل كما في السؤال 13

15	كيف نثبت أن أربع نقاط تقع في مستوي واحد A,B,C,D
الطريقة	طريقة 1- نثبت أن ثلاث منها تعيين مستوي كما سبق بالسؤال 5 . ثم نثبت أن النقطة الرابعة تنتمي لهذا المستوي . طريقة 2- نثبت أن إحدى النقاط مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاثة الباقية . طريقة 3- نثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}$, مرتبطة خطيا كما في السؤال 10
مثال	لتكن النقاط C(4,3,2) B(10,4,3) A(1,5,4) D(0,4,5) أثبت أنها تقع في مستو واحد . الحل : نجد : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\ (9,-1,-1) \\ \overrightarrow{AC}\ (3,-2,1) \\ \overrightarrow{AD}\ (-1,-1,1) \end{cases}$ نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة اذاً النقاط A,B,C مستو تعيين تكون النقطة D من المستوي (ABC) اذا وفقط اذا وجد عددان حقيقيان a,b يحققان $$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$ $$(-1,-1,1) = a(9,-1,-1) + b(3,-2,1)$$ $$= 9a + 3b, -a - 2b\ , -a + b$$ ومنه : $\begin{cases} 9a + 3b = -1 & (1 \\ -a - 2b = -1 & (2 \\ -a + b = 1 & (3 \end{cases}$ من المعادلتين 2 و 3 نجد أن : $$a = -\frac{1}{3}\ , b = \frac{2}{3}$$ نعوضها في المعادلة 1 فنجد : $9(-\frac{1}{3}) + 3\left(\frac{2}{3}\right) = -1$ أنها محققة . إذا $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ فالاشعة : $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\ , \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً . فالنقاط A,B,C,D تقع في مستو واحد .

16	إيجاد تمثيل وسيطي لمستقيم مار من نقطة و معلوم شعاع توجيه له .
الطريقة	النقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ شعاع التوجيه $\vec{v}(a, b, c)$ يوازي المستقيم d معادلة المستقيم d: $X = at + x_o$ $Y = bt + y_o$ $t \in R$ $Z = ct + z_o$ 
مثال	اكتب تمثيل وسيطي لمستقيم d مار من النقطة A(1,2,3) و الشعاع u(5,3,-2) شعاع توجيه له . الحل : نعوض مباشر بالمعادلات : $R \in t \quad \begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 3t + 2 \\ z = 2t + 3 \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} x = at + x_o \\ y = bt + y_o \\ z = ct + z_o \end{cases}$

17	إيجاد تمثيل وسيطي لمستقيم (AB)
الطريقة	• نختار نقطة من أحد النقطتين A أو B . • نجد شعاع التوجيه $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ • نعوض بالمعادلات الوسيطية .
مثال	اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) حيث A(1,2,3) و B(0,1,4) نختار النقطة A(1,2,3) نجد شعاع التوجيه $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0 - 1, 1 - 2, 4 - 1)$ = (-1,-1,3) ونكتب المعادلات $t \in R \quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$

18 كيف نجد شعاع توجيه المستقيم d الناتج من تقاطع مستويين p و Q

الطريقة

1- نجد $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ شعاعين ناظمي P و Q على الترتيب :

2- بفرض $\vec{u}$(a , b , c) شعاع توجيه المستقيم

$$\vec{u}.\overrightarrow{n_1} = 0$$

$$\vec{u}.\overrightarrow{n_2} = 0$$

ونعين a ,b , c كما سبق بالسؤال (12)

مثال

ليكن المستويين :

$$\mathcal{P}: x + 2y - 3z + 1 = 0$$

$$\mathcal{Q}: x + y + z + 1 = 0$$

يتقاطع المستويين وفق مستقيم Δ أوجد شعاع توجيه له .

الحل :

$$\begin{cases} \mathcal{P} \text{ ناظم } \vec{n}_1(1,2.-3) \\ \mathcal{Q} \text{ ناظم } \vec{n}_2(1,1,1) \end{cases}$$ نلاحظ أن n_1, n_2 غير متوازيين

وليكن $\vec{u}(a, b. c)$ شعاع توجيه Δ

$$\vec{u}.\vec{n}_1 = 0$$

$$\vec{u}.\vec{n}_2 = 0$$

ومنه :

a + 2b - 3c =0

a + b + c =0

نضع c=1 ← a + 2b =3

a + b =-1

لحل هاتين المعادلتين نجد أن :

a = 5 , b = 4

وبالتالي :

$\vec{u}(4, -5, 1)$ شعاع توجيه لـ Δ

19	مستويات خاصة $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
الطريقة	• معادلة المستوي : $(o,\vec{i},\vec{j})$ هي $z=0$ • معادلة المستوي: $(o,\vec{i},\vec{k})$ هي $y=0$ • معادلة المستوي: $(o,\vec{j},\vec{k})$ هي $x=0$ • معادلة مستوي يوازي: $(o,\vec{i},\vec{j})$ هي $z=a$ • معادلة مستوي يوازي: $(o,\vec{i},\vec{k})$ هي $y=a$ • معادلة مستوي يوازي: $(o,\vec{j},\vec{k})$ هي $x=a$ a ثابت • معادلة مستوي يوازي : ox $by+cz+d=0$ معادلة مستوي يوازي: oy $ax+cz+d=0$ معادلة مستوي يوازي: oz $ax+by+d=0$

20	كيف نجد احداثيات نقطة من مستو معلومة معادلته .
الطريقة	• نعطي قيمتين لمتغيرين ونجد قيمة المتغير الثالث . • و اذا كانت المعادلة فيها فقط نتغير نجد قيمة هذا المتغير و يكون قيمة المتغير الثاني و الثالث كيفي . • اذا كانت المعادلة فيها متغيرين نعطي لإحدهما قيمة و نجد الآخر و يكون قيمة الثالث كيفي .
مثال	أوجد إحداثيات نقطة من المستوي P بالحالات التالية : 1- معادله P : $3x+y+z+2=0$ نعطي $x=0\ ,y=2$ فنجد $z=-4$ فتكون النقطة (0,2,-4) . 2- معادله P $x+y-2=0$ نعطي لـ $x=3$ فنجد $y=-1$ و نختار $z=1$ فتكون النقطة (3,-1,1) 3- معادله P : $3y-4=0$ نجد $y=2$ ونختار $x=1$ و $z=3$ فتكون النقطة (1,2,3).

21	كيف نجد إحداثيات نقطة من مستقيم عُلم تمثيل وسيطي له .
الطريقة	• نعطي للوسيط t أي قيمة من R . ونجد x, y, z وإذا كان أحدهم ثابت نأخذه كما هو
مثال	أوجد إحداثيات نقطة من المستقيم d . $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 4 \\ z = 3 \end{cases}$ نعطي لـ t قيمة t=1 فنجد أن : $x = 1$ ، $y = 3$ ، $z = 3$ فتكون النقطة (3، 3، 1)

22	كيف نعين المسقط العمودي لنقطة A على مستقيم .
الطريقة	1) نكتب معادلة المستوي P الذي يمر من A وعمودي على d أي شعاع توجيه d = ناظم لـ Δ . 2) نعين نقطة تقاطع المستوي P و المستقيم d ولتكن H . إن H هي المسقط العمودي لـ A على d .
مثال	ليكن المستقيم d : $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = -t \end{cases}$ أوجد المسقط القائم لـ $A(2,0,1)$ على d . الحل : $\vec{u}(1,2,-1)$ شعاع توجيه لـ d. • نكتب معادلة المستوي المار من $A(2,0,1)$ وناظمه $\vec{u}(1,2,-1)$ $1(x-2) + 2(y-0) - 1(z-1) = 0$ $x + 2y - z - 1 = 0$ • بالحل المشترك لمعادلتي d و P نجد أن : $t + 2(2t+1) + t - 1 = 0$ $t + 4t + 2 + t - 1 = 0 \Rightarrow 5t = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ z = \frac{1}{5} \end{cases}$ ومنه تكون H المسقط القائم لـ Δ على d $H(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$

23	كيف نعين المسقط العمودي لنقطة A على مستوي P .
الطريقة	1- نكتب معادلة المستقيم d و الذي يمر من A . 2- شعاع توجيهه هو ناظم P . 3- نعين نقطة تقاطع P و d و لتكن H إن H هي المسقط العمودي لـ A على d
مثال	أوجد إحداثيات المسقط العمودي للنقطة A (2 , -1 , 1) على المستوي $P: x + y + z = 0$ الحل : نجد $(1,1,1)\ \vec{n}$ ناظم P وهو شعاع توجيه لـ d إذا معادلة d : $x = t + 2$, $y = t - 1$, $z = t + 1$ t ∈ R نعوض تمثيل d بمعادلة P : فنجد $t + 2 + t - 1 + t + 1 = 0$ $3t = -2 \Rightarrow t = -\frac{2}{3}$ ومنه نعوض في معادلة d فنجد : $x = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$ $y = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3}$ $z = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$ إذاً إحداثيات المسقط $H(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$

المدرس :
خالد القاسم
0994597320
0987578951

الطريقة	24 كيف نجد بعد نقطة Δ عن مستوي P .
الطريقة	طريقة 1: تعين المسقط العمودي H للنقطة Δ على المستوي P ثم نجد المسافة ΔH فتكون هي البعد عن المستوي P . طريقة 2: حسب قانون بعد نقطة Δ عن المستوي P : $d(\Delta , p) = \frac{\lvert a+by+cz+d \rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
مثال	احسب بعد النقطة A(2,1,1) عن المستوي : $P: 2x - 2y - z - 2 = 0$ الحل : $d(A , p) = \frac{\lvert 4-1-4-1 \rvert}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}$

المدرس :
خالد القاسم
0994597320
0987578951

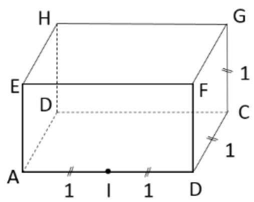
25

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات

فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$

ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$

احسب بعد G عن المستقيم (IH) .



الطريقة

طريقة أولى :

بفرض M المسقط القائم للنقطة G على المستقيم (IH) وبالتالي $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{IH} = 0$ ... (*)

وبما أن M تقع على (IH) فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين :

$(I,1-t)$ و $(H.t)$ حيث t عدد حقيقي و بالتالي : $M(1-t,1-t)$

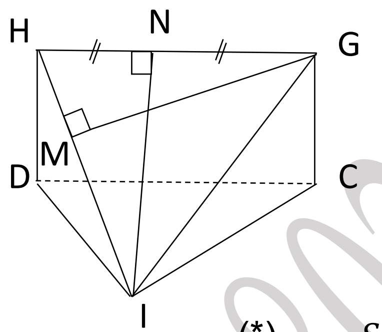
أصبح لدينا IH(-1,1,1) ومنه $\overrightarrow{GM}(-1-t,t-1,t-I)$

وحسب (*) : $1+t+t-1+t-1=0$ ومنه $t=\frac{1}{3}$

إذن $M(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ و بالتالي $\overrightarrow{GM}(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$

أخيراً : $dist\,(G,(IH)) = \|\overrightarrow{GM}\| = \frac{1}{3}\sqrt{16+4+4} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

طريقة ثانية :



بفرض M المسقط القائم للنقطة G على (IH)

و بفرض N منتصف $[GH]$ وبالتالي $N(I,I,I)$

لدينا $\overrightarrow{IN}(0,I,I)$ و $\overrightarrow{GH}(-2,0,0)$

و بالتالي : $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{GH} = 0$ و منه $\overrightarrow{IN} \perp \overrightarrow{GH}$

إذا مساحة المثلث GIH : $S = \frac{1}{2}\,IH\,.GM = \frac{1}{2}\,GM\,.IN$ ....(*)

لدينا $\overrightarrow{IH}(-1,1,1,)$ و بالتالي $\|\overrightarrow{IH}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

و لدينا $\|\overrightarrow{IN}\| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

نعوض في * فنجد $GM\ \sqrt{3} = 2\ \sqrt{2}$

ومنه البعد المطلوب $GM= \frac{2\sqrt{6}}{3}$

كيف نثبت توازي مستقيمين	26
نثبت أن شعاعي توجيههما متوازيين أي مرتبطين خطياً .	الطريقة
أثبت أن المستقيمين d و d̀ المعرفين كما يلي : $\grave{d}\begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 6t-1 \\ z = -4t+1 \end{cases}$ $\quad d\begin{cases} x = t+1 \\ y = 3t+2 \\ z = -2t+3 \end{cases}$ الحل : لدينا شعاع توجيه d_1 : $\vec{u}\,(1,3,-2)$ و شعاع توجيه $\grave{d}_1$: $\vec{v}\,(2,6,-4)$ نلاحظ أن مركباتتها متناسبة أي الشعاعين مرتبطين خطياً فالمستقيمان متوازيان .	مثال

كيف نثبت توازي مستويين	27
نثبت أن شعاعي ناظميهما متوازيان	الطريقة
بين أن المستويين P و Q متوازيين $P: -x-2y+\frac{1}{2}z-1=0$ $Q: 2x+4y-z=0$ الحل : لدينا $\vec{n}(2,4,-1)$ ناظم Q $\vec{n}\left(-1,-2,\frac{1}{2}\right)$ ناظم P نلاحظ مركباتهما متناسبة $\frac{2}{1}=\frac{4}{-2}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}$ فالمستويان متوازيان .	مثال

28	كيف نثبت تعامد مستويين
الطريقة	نثبت ناظميهما متعامدين
مثال	أثبت أن المستويين : $P: x + 2y + 3z + 1 = 0$ $Q: x + y + z + 1 = 0$ متعامدين . الحل : لدينا $\overrightarrow{n_1}(1,2,-3)$ ناظم P $\overrightarrow{n_2}(1,1,1)$ ناظم Q و نلاحظ أن جداءهما السلمي يساوي الصفر $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 1\times1 + 2\times1 - 3\times1 = 0$ ومنه P و Q متعامدان .

29	كيف نثبت أن مستقيم يوازي مستوي .	
الطريقة	نثبت أن شعاع توجيه المستقيم يعامد شعاع ناظم المستوي .	
مثال	ليكن المستقيم d : $x = -4t + t$ $y = 3 + t$ $z = t$	و ليكن المستوي P معادلته $p: x + 2y - 3z + 1 = 0$
	أثبت أن d و P متوازيان الحل : لدينا $\vec{n}(1,2,-3)$ شعاع ناظم P $\vec{v}(1,1,1)$ شعاع توجيه d نلاحظ أن جداؤهما السلمي يساوي صفراً . أي $\vec{n}.\vec{v} = 1\times1 + 2\times1 - 3\times1 = 0$ إذاً $\vec{n} \perp \vec{v}$ ومنه P و d متوازيان .	

<table>
<tr><td>كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيمين</td><td>30</td></tr>
<tr><td>
1- نجد شعاعي توجيه المستقيمين
2- أ) إذا كان متوازيان كان المستقيمان متوازيان .
ب) إذ لم يكونا متوازيان فهما : إما متقاطعين
أو ليسا في مستوٍ واحد
جـ) لمعرفة الوضع : نساوي المركبات لهذين المستقيمين مع بعضهما نحصل على ثلاث معادلات بمجهولين t و s :
• نختار معادلتين ونحلهما و نعين المجهولين ثم نعوض بالثالثة فإذا تحققت فهما متقاطعين و إذا لم تتحقق فهما ليسا في مستوٍ واحد .
</td><td>الطريقة</td></tr>
<tr><td>
ليكن المستقيمين :
$$d\begin{cases}x=2t-4\\y=-t+3\\z=t\end{cases}\qquad \grave{d}\begin{cases}x=3t\\y=2t+1\\z=-t+2\end{cases}$$
ادرس الوضع النسبي لهما .
الحل : لدينا شعاع توجيه d : $\vec{u}(2,-1,1)$
$\grave{d}$: $\vec{v}(3,2,-1)$ مركباتهما غير متناسبة
إذاً المستقيمان غير متوازيان
لذا نضع : 1) 3s=2t-4
2) 2s+1=-t+3
3) -s +2 =t
نحل 2 و 3 نجد أن بالجمع : s = 0
و منه نعوض في 3 فنجد $t = 2$
نعوض بـ 1 0=2 (2) -4
0 = 0 محققة إذاً للمعادلات حل فالمستقيمان متقاطعان و نقطة تقاطعهما : (0,1,2)
</td><td>مثال</td></tr>
</table>

31	كيف ندرس الوضع النسبي لمستويين .
الطريقة	1) نعين شعاعي ناظمي المستويين $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 2) إذا كان $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ مرتبطين خطياً كانا المستويين متوازيين . 3) إذا كان $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ غير مرتبطين خطياً كانا المستويين متقاطعين .
مثال	السؤال 26

32	كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيم مع مستوي .
الطريقة	1) نعوض معادلة المستقيم d بمعادلة المستوي P ينتج معادلة بمجهول واحد t . 2) نحل هذه المعادلة ونميز الحالات : أ) إذا كان لها حل وحيد ($\propto t = \beta$) كان المستقيم قاطع للمستوي . و نجد إحداثيات نقطة التقاطع بتعويض قيمة t بمعادلة المستقيم . ب) إذا كان للمعادلة عدد غير منتهٍ من الحلول($Ot = 0$)كان المستقيم محتوى بالمستوي . جـ) إذا كان ليس للمعادلة حل ($0t = b$) كان المستقيم يوازي المستوي.
مثال	ادرس الوضع النسبي للمستقيم d مع المستوي P : $d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = -3t + 1 \end{cases}$ $P: \ x - y + z = 1$ الحل نعوض معادلة d بمعادلة P فنجد : $2t - 1 - t3 - \ t + 1 = 1$ و منه نجد $t = -\frac{1}{2}$ (حل وحيد) إذاً المستقيم d قاطع للمستو P .

33	كيف ندرس الوضعيات النسبية لثلاث مستويات .
الطريقة	1) نحل جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل . 2) إذا كان لها حل وحيد كانت المستقيمات تشترك بنقطة واحدة . 3) إذا كان لها عدد غير منته من الحلول كانت المستويات تشترك بمستقيم . 4) إذا لم تكن لها أي حل فإنها لا تشترك معاً بأي نقطة . ملاحظة : يتم حل جملة ثلاث معادلات بطريقة غاوس أو أي طريقة أخرى .
مثال	ادرس الوضع النسبي للمستويات الثلاث : $x - y + z = 1 \quad .... \; L_1$ $2x + 13y - 7z = -1 \quad .... \; L_2$ $5x + y + z = -5 \quad ..... \; L_3$ الحل : نقوم بالاجرائين : $L_2 - 5L_1 \to L'_2 \qquad x - y + z = 1$ $L_3 - 2L_1 \to L'_3 \qquad 3y - 2z = -5$ $15y - 9z = -3$ نقوم بالإجراء : $L'_3 - 5L'_2 \to L''_3 \qquad x - y + z = 1$ $3y - 2z = -5$ $z = 22$ ومنه نحسب y : $\quad y = 13$ نعوض بالأولى فتكون $\quad x = -8$ و بالتالي المستويات الثلاث تشترك بنقطة واحدة هي (-8,13,22)

كيف نجد معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$	**34**
1) نجد إحداثيات I منتصف $[AB]$ 2) نجد $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ ناظم المستوي . 3) نكتب معادلة المستوي كما بالسؤال (11) .	الطريقة
أوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث A(1,2,3) . B(3,-2,1) الحل : • نجد إحداثيات I منتصف $[AB]$ $I\ (\ 2\ ,0\ ,2\ )$ • نجد مركبات شعاع الناظم $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (3-1, -2-2, 1-3\ )$ • نكتب المعادلة : $2(x-2) - 4(y-0) - 2(z-2) = 0$ $2x - 4y - 2z = 0$	مثال

كيف نجد معادلة كرة عُلِمَ مركزها و نصف قطرها .	**35**
إذا كان مركزها $\Omega(x_o, y_o, z_o)$ و نصف قطرها r نبدل بالمعادلة $(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = r^2$	الطريقة
اكتب معادلة كرة مركزها (2,1,-2) و نصف قطرها . الحل : المعادلة : $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 25$	مثال

36	**كيف نجد مركز ونصف قطر كرة عُلِمت معادلتها .**
الطريقة	- نتمم إلى مربع كامل . - حتى تكتب المعادلة بالشكل : $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=r^2$ - ثم نستنتج المركز (x_o,y_o,z_o) ونصف قطرها r .
مثال	أوجد مركز نصف قطر الكرة التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$ الحل : نتمم إلى مربع كامل : $x^2-2x+1-1+y^2+2y+1-1+z^2-4z+4-4-3=0$ $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ ومنه المركز $(1,-1,2)$ ونصف القطر r=3

37	**كيف نثبت أن مستوي يمس كرة .**
الطريقة	- نجد بعد مركز الدائرة عن المستوي . - فإذا كان البعد = نصف قطر الكرة فكان المستوي يمس الكرة .
مثال	أثبت أن المستوي P معادلته : $x-2y+3z=5$ مماس للكرة التي معادلتها : $(x-2)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=\frac{4}{14}$ الحل : نجد أن مركز الكرة $A(2,-2,3)$ $r=\frac{2}{\sqrt{14}}$ نجد بعد المركز عن المستوي : $d(\Delta,P)=\frac{\|2-4+9-5\|}{1+4+9}=\frac{2}{\sqrt{14}}=\mathrm{r}$ المستوي يمس الكرة $\Longleftarrow$

38 كيف يتم حساب حجم رباعي الوجوه .

الطريقة

- القانون : حجم رباعي الوجوه = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

$$v = \frac{1}{3} s.h$$

القاعدة قد تكون مثلث أو مربع أو ....

الارتفاع هو غالباً بعد رأس الرباعي عن مستوي القاعدة .

مثال

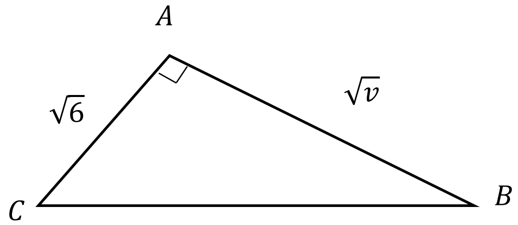
لتكن النقاط $A(1,0,-1)$ $B(2,2,3)$ $C(3,1,-2)$ $D(-4,2,1)$

1) أثبت أن المثلث ABC قائم و احسب مساحته .

2) برض معادلة المستوي (ABC) : $2x - 3y + z - 1 = 0$

احسب بعد النقطة D عن (ABC) .

3) احسب حجم رباعي الوجوه DABC



الحل :

1) نجد

$$\overrightarrow{AB}(1,2,4)$$

$$\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$$

نلاحظ أن جداؤهما السلمي :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 + 2 - 4 = 0$$

فهما متعامدين فالمثلث ABC قائم في A

لحساب مساحته :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$S = \frac{\sqrt{21} \times \sqrt{6}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{14}$$

2) بعد D عن المستوي (ABC)

$$d = \frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}$$

$$= \sqrt{14}$$

3) حساب الحجم :

$$v = \frac{1}{3} s.h = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \sqrt{14}.\sqrt{14} = 7$$

39	قواعد إيجاد طبيعة مجموعة نقاط بالفراغ .	
	العلاقة	طبيعة مجموعة النقاط M
	MA = ثابت = r	هي كرة مركزها A ونصف قطرها r
	MA=MB	هي المستوي المحوري للقطعة $[AB]$
	$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$	هي كرة قطرها $[AB]$
	$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0$	هي مستوي شعاع ناظمه $\overrightarrow{BC}$ و يمر من النقطة A .

ملاحظات :

1) مهما تكن النقطة M من الفراغ فإن :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\delta)\overrightarrow{MG} \qquad (**)$$

حيث G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$$(A,\alpha),(B,\beta),(C,\delta)$$

وحيث $\alpha+\beta+\delta\neq 0$

2) إذا كان $\alpha+\beta+\delta=0$ فإن الشعاع :

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}$ شعاع ثابت مستقل عن M .

3) $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ (*)

حيث G مركز ثقل المثلث ABC .

المدرس :
خالد القاسم
0994597320
0987578951

40 — **أوجد طبيعة النقاط M التي تحقق .**

مثال :

لتكن $G(2,1,0)$ مركز ثقل المثلث ABC و $\grave{G}\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)$ مركز الأبعاد المتناسبة للجملة : $\{(A,3),(B,-1),(C,1)\}$

حالة 1

عين مجموعة النقاط M التي تحقق :

$$//\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}//=6$$

الحل : بما أن G مركز ثقل المثلث ABC و حسب العلاقة (**) بالسؤال 39 فإن :

$//(1+1+1)\overrightarrow{MG}//=6$ إذن $3MG=6$ ومنه $MG=2$

إن مجموعة النقاط M هي كرة مركزها G و نصف قطرها 2 .

حالة 2

$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

الحل بما أن G هي مركز ثقل المثلث ABC و $\grave{G}$ هي مركز الأبعاد المتناسبة حسب (*) فإن $\|3\overrightarrow{M\grave{G}}\|=\|3\overrightarrow{MG}\|$

$$MG=M\grave{G}$$

إذن مجموعة النقاط M التي هي المستوي المحوري للقطعة $[G\grave{G}]$

حالة 3

$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$$

الحل :

بما أن G مركز ثقل المثلث ABC فإن :

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(1+1+1)\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MG}$ حسب (*).

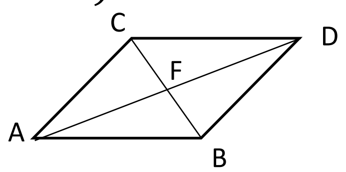
وبما أن مجموعة الأمثال في الطرف الأيمن :

2-1-1=0

فإن الشعاع $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ مستقل عن M

أي ثابت لنرى ما هو :

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}&=+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\\&=-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\\&=-(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})-(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})\\&=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\\&=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\\&=-2\overrightarrow{AF}\end{aligned}$$



حيث F منصف BC ومنه : $\|3\overrightarrow{MG}\|=\|-2\overrightarrow{AF}\|$

$$3MG=\mathbf{2AF}$$

$$MG=\frac{2}{3}AF$$

$MA=\frac{2}{3}AF=$ ثابت $=K$

إذن مجموعة النقاط كرة مركزها G ونصف قطرها $\frac{2}{3}AF$.

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$ الحل : بما أن G مركز ثقل المثلث ABC و $\grave{G}$ مركز الأبعاد المتناسبة لِـ A,B,C فإن $3\overrightarrow{MG}.3\overrightarrow{M\grave{G}}=0$ حسب (*) $9\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{M\grave{G}}=0$ إن مجموعة النقاط كرة قطرها $G\grave{G}$	حالة 4

المدرس :

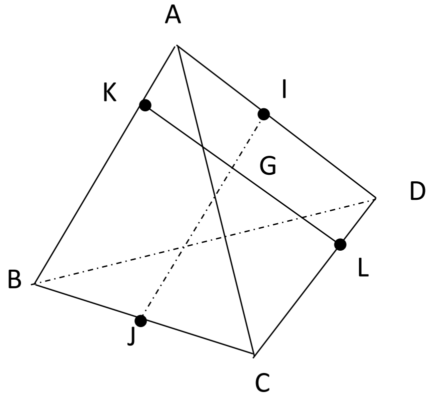
خالد القاسم

0994597320

0987578951

41	**كيف نجد إحداثيات مركز ثقل المثلث ABC .**
الطريقة	حسب القانون : $G\left(\frac{X_A+X_B+X_C}{3},\frac{Y_A+Y_B+Y_C}{3},\frac{Z_A+Z_B+Z_C}{3}\right)$
مثال	احسب إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC A(1,-1,1) B(2,0,1) C(3,-2,1) الحل : $G(\frac{1+2+3}{3},\frac{-1+0-2}{3},\frac{1+1+1}{3})$ G(2,-1,1)

42	**كيف نجد إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط .**
الطريقة	- إذا كان G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة : $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\delta)$ وكان معلوم إحداثيات A,B,C فإن : $X_G=\frac{\alpha\times X_A+\beta\times X_B+\delta\times X_C}{\alpha+\beta+\delta}$ $Y_G=\frac{\alpha\times Y_A+\beta\times Y_B+\delta\times Y_C}{\alpha+\beta+\delta}$ $Z_G=\frac{\alpha\times Z_A+\beta\times Z_B+\delta\times Z_C}{\alpha+\beta+\delta}$
مثال	احسب إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة : (A,1) , (B,-2) ,(C , 3) وحيث C(-1,0,0) B(0,2,1) A(1,1,-1) الحل : $X_G=\frac{1\times1-2\times0+3\times-1}{1-2+3}=\frac{-2}{2}=-1$ $Y_G=\frac{1\times1-2\times2+3\times0}{2}=\frac{3}{2}$ $Z_G=\frac{1\times-1-2\times1+3\times0}{2}=\frac{-3}{2}$ $\Rightarrow\ G(-1,\frac{-3}{2},\frac{-3}{2})$

43	**كيف نثبت أن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة اعتماداً على مركز الأبعاد المتناسبة .**
الطريقة	نثبت أن إحدى هذه النقاط هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الباقيتين .
مثال	لتكن ABCD رباعي وجوه القطعة K من $[AB]$ تحقق $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و L نقطة من $[CD]$ تحقق $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ وأخيراً I منتصف $[AD]$ و J منتصف $[BC]$  ونعرف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط : $(A,2)\ (B,1)(C,1)(D,2)$ 1- أثبت أن النقاط G و I و J على استقامة و احدة . 2- أثبت L,K,G على استقامة واحدة . الحل : لدينا فرضاً J منتصف BC فيكون (J,2) مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,2), (C,1) ولدينا فرضا I منتصف AD فيكون (I,4) مركز أبعاد (D,2) , (A ,2) ولدينا فرضاً G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الأربع (B,1) (C,1) (D,2) (A,2) وحسب الخاصة التجميعية : فإن (G,6) مركز أبعاد المتناسبة للنقطتين (J,2) , (I,4) ومنه I و J و G تقع على استقامة و احدة . 2- بالمثل يحل .

44	كيف نحدد نقطة M أين تقع وتحقق علاقة شعاعية
الطريقة	باستخدام علاقة شال .
مثال	DEFGH ABC مكعب J منتصف FG حدد موقع النقطة M التي تحقق : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{FJ}}$ الحل $\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{FJ}} \\ \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AJ}} \end{cases}$ حسب شال إذاً M تقع عند J .

45	كيف نجد β α لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين A,B.
الطريقة	نكتب العلاقة بالشكل $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ونستنتج α , β .
مثال	أعط β α لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ إذا كان $2\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{0}$ الحل : $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = 0$ $3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = 0$ $-3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 0$ إذاً M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-3),(B,1)$

كيف نكتب علاقة ارتباط لثلاث أشعة .	46
إذا كان M مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط $(C,\delta),(B,\beta),(A,\alpha)$ 1) نكتب العلاقة $\vec{o} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC}$ 2) حسب الخاصة التجميعية نضع A=M فنكتب العلاقة بالشكل : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$	الطريقة
إذا كانت M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (C , 1) , (B , 1) , (A , -1) احسب x,y بحيث $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ الحل : بما أن M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط فإن $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ و حسب الخاصة التجميعية نختار M=A $-\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-1+1+1)\overrightarrow{AM}$ $\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1\end{array}$	مثال

المدرس :

خالد القاسم

0994597320

0987578951

47	**كيف نثبت أن نقطة K هي مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط .**
الطريقة	المعطيات علاقة شعاعية تحققها النقطة K . طريقة 1 : باستخدام علاقة شال نثبت أن العلاقة تكتب بالشكل $\alpha\overrightarrow{KA}+\beta\overrightarrow{KB}+\delta\overrightarrow{KC}=0$ نستنتج أن K مركز الأبعاد المتناسبة و نستنتج الأثقال . طريقة 2 : نثبت أن $\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{BC}$ نستنتج أن K ,C,B,A تقع في مستو واحد وبالتالي K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,1-a-b) , (B , a) , (C , b)
مثال	ليكن ABCDEFGH مكعب أثبت أن النقطة K المعرفة بالعلاقة $2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,\delta),\ (B,\beta),\ (G,\alpha)$ يطلب ايجاد δ , β , α الحل : لدينا $2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$ $=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{KG}$ $=2\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{KG}$ $\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}+3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$ وبما أن $1-2+3\neq 0$ *فإن* K *مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :* (G , 3) (C , -2) (B , 1)

48	**كيف نجد معادلة مستوي Q عمودي على مستوي P مار من نقطتين B , A**
الطريقة	1) نجد $\overrightarrow{AB}$ و ناظم المستوي $\vec{n}: P$ و نثبت أنهما غير مرتبطين . 2) نكتب معادلة Q : $ax + by + cz + d = 0$ ونعوض النقطتين A,B نحصل على معادلتين . 3) و من تعامد ناظم Q و ناظم P نحصل على المعادلة 4) بحل المعادلات نجد a, b, c, d
مثال	اكتب معادلة المستوي q العمودي على المستوي p و مار من النقطتين B,A حيث $Q: x + y + z = 0$ و $A(1,0,0)$ و $B(0,1,1)$ الحل : نجد أن $\overrightarrow{AB}(-1,1,1)$ و $\overrightarrow{np}(1,1,1)$ غير مرتبطين خطياً نعوض $A(1,0,0)$ فنجد $a + d = 0$ نعوض $B(0,1,1)$ فنجد $b + c + d = 0$ ومن تعامد $\overrightarrow{np}(1,1,1)$ مع $\overrightarrow{nq}(a, b, c)$ نجد $a + b + c = 0$ بحل المعادلات الثلاث نجد أن : $A = d = 0$ و $b = -c$ نعطي $c = -1$ فيكون $b = 1$ فيكون معادلة Q $y - z = 0$

المدرس :
خالد القاسم
0994597320
0987578951

49	إثبات أن ثلاث نقاط تعين مستوي عُلِمَ معادلته .
الطريقة	نتحقق من أن النقاط الثلاث تحقق معادلة المستوي.
مثال	تحقق من أن النقاط A(+1 ,1,0) B(2 , 1 , +1) C(-1 , 2 ,-1) تعين مستوياً معادلته : $x + y - z - 2 = 0$ الحل : نعوض A(+1 , 1 , 0) بمعادلة P فنجد 0=2-0-1+1+ محققة نعوض B(2 , 1 , +1) بمعادلة P فنجد 0=2-1- 1+ 2 محققة نعوض C(-1 , 2 , -1) بمعادلة P فنجد 0= 2- 1+ 2 + 1- محققة إذن النقاط A , B , C تعين المستوي P .

50	كيف نثبت أن مستقيم يقطع سطح كرة في نقطتين .
الطريقة	نعوض معادلة المستقيم بمعادلة الكرة : ينتج معادلة من الدرجة الثانية المجهول فيها t . نثبت أن لها حلان و نجد الحلين .
مثال	ليكن التمثيل الوسيطي لمستقيم d : $\begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$ حيث $t \in R$ و لتكن الكرة S معادلتها : $(X+1)^2 + Y^2 + (Z+2)^2 = 6$ بين أن المستقيم d يقطع الكرة S في نقطتين . الحل : نبدل معادلات d بمعادلة D فنجد : $1 + t^2 + (t + 3)^2 = 6$ ومنه $t^2 + 3t + 2 = 0$ و بما أن $\Delta = 1 > 0$ فإن المستقيم قاطع للكرة في نقطتين لايجاد إحداثياتها نحسب t و نعوض بمعادلة المستقيم .