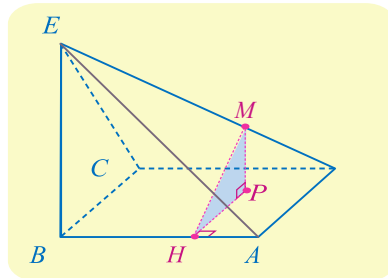
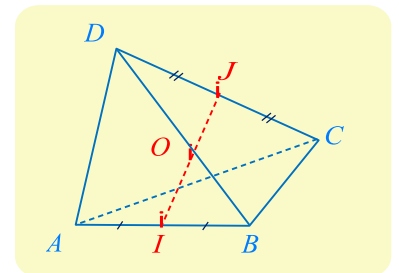


76 سؤال



طرق الحل



أمثلة لكل طريقة

## بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

أقدم اليكم بعون الله تعالى ملخص لمراجعة أقطار الأشعة في الفراغ والجداء السلمي والمستقيماض والمستوي في الفراغ بالطريقة السليمة وتعمدته وضع مثال مع كل طريقة وهذه الأمثلة الخليما من الكتاب والنماذج الوزارية والدورات وانوه أن الكتاب هو المرجع الأساسي للدراسة ولكن انا هنا أقدم لكم طريقة أو أسلوب للفهم أكثر سائلاً من الله أن أكون قد وفقت في هذا الشرح.  
أقدم هذا العمل خالصاً لوجه الله وسائلاً منكم الدعاء لوالدي ولي.

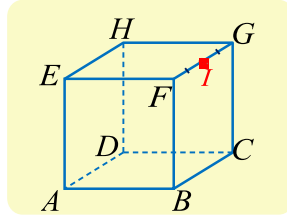
ثم ماذا ؟

ثم بعد صبرك اليعقوبي ستنال أمانيك اليوسفية فعناء

اليوم لذة الغد

## السؤال الأول: كيف نعين نقطة $M$ مثلاً تحقق علاقة شعاعية؟

$ABCDEF GH$  مكعب و  $I$  منتصف الحرف  $[FG]$



1- عين النقطة  $M$  التي تحقق العلاقة (1) الآتية:

$$\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{FI} = \vec{AM}$$

2 أثبت صحة العلاقة (2) الآتية:

$$\vec{AB} + \vec{CF} = \vec{AF} + \vec{CB}$$

الحل:

1- لدينا حسب قاعدة متوازي الأضلاع

$$\vec{AB} + \vec{AE} = \vec{AF}$$

$$\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{FI} = \vec{AF} + \vec{FI}$$

وبالاستفادة من علاقة شال نجد

$$\vec{AF} + \vec{FI} = \vec{AI}$$

ومنه:  $\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{FI} = \vec{AI}$  وبالتعويض في العلاقة السابقة (1) نجد:

$$M = I \iff \vec{AI} = \vec{AM}$$

## السؤال الثاني: كيف نثبت صحة علاقة شعاعية؟

2 سنقوم بحل الطلب الثاني من المثال السابق

$$\vec{AB} = \vec{AF} + \vec{FB} \text{ سنكتب: } \vec{AB} = \vec{AF} + \vec{FB}$$

وبالاستفادة من علاقة شال :

$$\vec{AB} + \vec{CF} = \vec{AF} + \vec{FB} + \vec{CF}$$

$$= \vec{AF} + \vec{CF} + \vec{FB} \text{ اذن :}$$

$$\vec{AB} + \vec{CF} = \vec{AF} + \vec{CB} \text{ وهو المطلوب}$$

مثال 2 صفحة 16 تدرّب 2

## السؤال الثالث: كيف نوجد مركبات شعاع؟

مثال 2  $A(1,2,3)$   $B(-4,2,1)$  اوجد  $\vec{AB}$

$$\vec{AB}(-4 - 1, 2 - 2, 1 - 3) \Rightarrow$$

$$\vec{AB}(-5, 0, -2)$$

نستعمل قوانين الاشعة التي مرّت معنا سابقاً ك علاقة شال والجمع الشعاعي للأشعة وكذلك طريقة متوازي الاضلاع او ربما تحليل شعاع الى شعاعين يفيدان في تطبيق تلك القواعد... الخ حتى نصل الى علاقة مثلا

$\vec{AM} = \vec{AI}$  عندها تكون  $M=I$  أي علاقة تجعلنا نفهم أي تقع  $M$

ننتقل من طرف الأول من العلاقة الشعاعية ونبدأ بالعمل عليها مستخدمين قواعد

الاشعة التي وردت معنا سابقاً حتى نصل الى الطرف الثاني

قد يرد هذا الطلب مرفقاً بشكل هندسي (مكعب رباعي وجوه ... الخ وقد يرد بدون

شكل

لكن  $A(X_A, Y_A, Z_A), B(X_B, Y_B, Z_B)$

فيكون الشعاع  $\vec{AB}$  هو  $\vec{AB}(X_B - X_A, Y_B - Y_A, Z_B - Z_A)$

**السؤال الرابع:** كيف نوجد طويـلة (ناظم) شعاع او المسافة بين نقطتين؟

لتكن  $B(X_B, Y_B, Z_B), A(X_A, Y_A, Z_A)$   
فيكون الشعاع  $\overrightarrow{AB}$  هو  $(X_B - X_A, Y_B - Y_A, Z_B - Z_A)$   
فتكون طويـلة (ناظم) شعاع هي

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

مثال 3:

لتكن  $B(-4, 2, 1), A(1, 2, 3)$  اوجد المسافة بين  $A$  و  $B$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-5)^2 + (0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

**السؤال الخامس:** كيف نوجد احداثيات منتصف قطعة مستقيمة؟

لتكن  $B(X_B, Y_B, Z_B), A(X_A, Y_A, Z_A)$

ولتكن  $I$  منتصف  $[AB]$  فتكون احداثيات  $I$  هي

$$I\left(\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2}, \frac{Z_A + Z_B}{2}\right)$$

ملاحظة: إذا كانت النقطة  $M$  نظيرة نقطة أخرى ولتكن  $M$  بالنسبة الى نقطة ولتكن  $C$  عندئذ تكون  $C$  منتصف  $[BM]$

مثال لتكن  $C(1, 2, -2), B(-2, 3, 2)$  و  $A(3, 0, -1)$

اوجد احداثيات  $I$  منتصف  $[AB]$

ثم اوجد احداثيات  $D$  نظيرة  $I$  بالنسبة الى  $C$ .

**الحل:** نطبق دستور احداثيات منتصف قطعة مستقيمة  $I\left(\frac{3-2}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{-1+2}{2}\right) \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

بما ان  $D$  نظيرة  $I$  بالنسبة الى  $C$  إذاً هذا يعني ان  $C$  منتصف  $[DI]$

$$C(1,2,-2): \left( \frac{X_D + \frac{1}{2}}{2}, \frac{Y_D + \frac{3}{2}}{2}, \frac{Z_D + \frac{1}{2}}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{X_D + \frac{1}{2}}{2} = 1 \Rightarrow X_D = \frac{3}{2} \\ \frac{Y_D + \frac{3}{2}}{2} = 2 \Rightarrow Y_D = \frac{5}{2} \\ \frac{Z_D + \frac{1}{2}}{2} = -2 \Rightarrow Z_D = \frac{-9}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-9}{2}\right)$$

**السؤال السادس:** كيف نبين طبيعة مثلث؟ وكيف نوجد احداثيات مركز ثقله؟

لتكن  $C(X_C, Y_C, Z_C), B(X_B, Y_B, Z_B), A(X_A, Y_A, Z_A)$

$G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$  فتكون احداثيات  $G$  هي

$$G\left(\frac{X_A + X_B + X_C}{3}, \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3}, \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}\right)$$

ولتبيان طبيعة المثلث نوجد الطويلة للأضلاع الثلاث وعلى أساسها

نحكم ان كان قائم حقق قاعدة عكس فيثاغورث. او متساوي الأضلاع او متساوي الساقين او مختلف الأضلاع

**ملاحظة:** راجع صفحة المراجعة الهامة في اخر الملف

**مثال:**

لتكن  $C(0,4,0), B(3,6,-2), A(1,3,-1)$ :

بين طبيعة المثلث  $ABC$  ثم اوجد احداثيات  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$

الحل :

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(3-1)^2 + (6-3)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(0-1)^2 + (4-3)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{BC}\| = \sqrt{(0-3)^2 + (4-6)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{17}$$

نلاحظ أن:  $AB^2 + AC^2 = BC^2$

وحسب عكس فيثاغورث المثلث  $ABC$  قائم في  $A$

$$G\left(\frac{X_A + X_B + X_C}{3}, \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3}, \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{1+3+0}{3}, \frac{3+6+4}{3}, \frac{-1-2+0}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}, \frac{13}{3}, -1\right)$$

## السؤال السابع: كيف نوجد احداثيات نقطة تحقق علاقة شعاعية؟

نفرض احداثيات النقطة  $(x, y, z)$  ونوجد الشعاع المتعلق بتلك النقطة والاشعة الاخرى الموجودة في العلاقة فنحصل على ثلاث معادلات من الدرجة الاولى بدلالة  $x$  و  $y$  و  $z$  على ترتيب وبذلك نكون قد عينا احداثيات النقطة

مثال لتكن :  $C(0,4,0), B(3,6,-2), A(1,3,-1)$

1 اوجد احداثيات  $M$  التي تحقق العلاقة :  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

2 اوجد احداثيات  $N$  التي تحقق العلاقة :

$$\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NC}$$

الحل :

1 بفرض  $M(x, y, z)$  فيكون :

$$\begin{bmatrix} x-3 \\ y-6 \\ z+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 6-3 \\ -2+1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0-1 \\ 4-3 \\ 0+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-3 \\ y-6 \\ z+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x-3 \\ y-6 \\ z+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x-3 = -1 \Rightarrow x = 2 \\ y-6 = 6 \Rightarrow y = 12 \\ z+2 = 2 \Rightarrow z = 0 \end{cases}$$

ومنه  $M(2,12,0)$  الطلب 2 بنفس الأسلوب.

## السؤال الثامن: كيف نوجد احداثيات نقطة $D$ تجعل النقاط الأربعة $ABCD$ متوازي اضلاع؟ وكيف نوجد احداثيات مركز متوازي الاضلاع هذا؟

يكون الرباعي  $ABCD$  متوازي اضلاع إذا وفقط إذا كان  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

مركز متوازي الاضلاع هو منتصف قطره

أي منتصف  $\{AC\}$  وبالتالي لإيجاد مركز متوازي الاضلاع نوجد

احداثيات منتصف قطره  $\{AC\}$  أي احداثيات منتصف قطعة مستقيمة.

ملاحظة راجع صفحة القواعد الهامة في اخر الملف فقد يرد السؤال مثل اشكال أخرى غير

متوازي الاضلاع (٥) (٥)

**مثال:** لتكن النقاط  $A(1,2,-3), B(-1,3,3), C(4,-1,2)$  ولتكن  $D$

نقطة تجعل  $ABCD$  متوازي الاضلاع. احسب احداثيات  $D$

ثم احسب احداثيات  $I$  مركز متوازي الاضلاع هذا

**الحل:** يكون الرباعي  $ABCD$  متوازي اضلاع إذا وفقط إذا كان  $\vec{AB} = \vec{DC}$  ولكن مركبات  $\vec{AB}$  هي  $(-2,1,6)$  وبفرض أن  $D(x,y,z)$  فتكون مركبات الشعاع  $\vec{DC}$  هي  $(4-x, -1-y, 2-z)$  ومنه نكتب المساواة بالشكل:

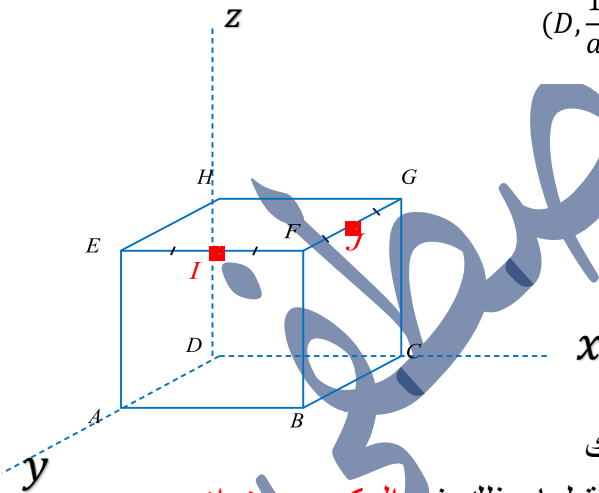
$$\begin{bmatrix} 4-x \\ -1-y \\ 2-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-2 \\ z=-4 \end{cases} \Rightarrow D(6, -2, -4)$$

مركز متوازي الاضلاع  $I$  هو منتصف  $[AC]$  فاحداثيات النقطة  $I$  هي  $(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}, \frac{z_A+z_C}{2}) \Rightarrow I(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$

**السؤال التاسع:** كيف نوجد احداثيات نقاط رؤوس مكعب؟

ليكن لدينا مكعب كل طول حرف من حروفه  $a$

عندئذ تكون احداثيات عند المعلم:  $(D, \frac{1}{a}\vec{DC}, \frac{1}{a}\vec{DA}, \frac{1}{a}\vec{DH})$



$D(0,0,0), A(0,a,0), B(a,a,0), C(a,0,0)$

$H(0,0,a), E(0,a,a), F(a,a,a), G(a,0,a)$

$I(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a)$

**ملاحظة 1:** إن احداثيات المبدأ دوماً  $(0,0,0)$

نلاحظ أن احداثيات النقاط:  $H, E, F, G$  كل منها تملك

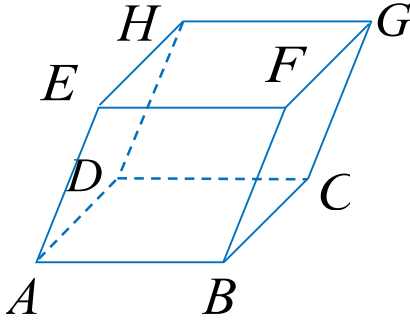
نفس احداثيات الفاصلة  $x$  والترتيب  $y$  للنقطة المقابلة لها وذلك في **المكعب ومتوازي المستطيلات... الخ.**

➤ **ملاحظة:** يمكن أخذ المعلم الذي نريده في المكعب وستختلف احداثيات النقاط من

معلم الى اخر ولكن سيبقى جوابنا صحيح في الطلبات القادمة وفي حال ذكر لك

المعلم في نص المسألة ف التزم به

**السؤال العاشر: كيف نوجد احداثيات رؤوس متوازي السطوح في حال علم منها أربعة؟**



في معلم  $O(i, j, k)$  للفراغ نعطي إحداثيات أربع

من رؤوس متوازي السطوح  $ABCDEFGH$  المرسوم جانباً، وهي

$$C(-3, 2, 0) \quad B(1, 3, -1) \quad \text{و} \quad A(2, 1, -1)$$

جد إحداثيات الرؤوس الأربعة الأخرى.

❖ **تنويه هام:** هنا لا يمكننا ان نأخذ **الملاحظة 1** التي اشترت اليها في

السؤال السابق أي لا يمكننا ان نعتبر ان فاصلة وترتيب النقطة  $F$  مثلاً هي نفسها

فاصلة وترتيب النقطة  $B$  لأن  $F$  ليست المسقط العمودي ل  $B$  ونعم ذلك

على النقاط الثلاث المتبقية  $G, E, H$  وبالتالي اخذ المعلم هنا **لن يفيد**

لذلك سنفكر كالتالي: **الحل**

حسب شال لدينا:  $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD}$

$$\Rightarrow \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

$$\begin{bmatrix} x_D - x_o \\ y_D - y_o \\ z_D - z_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a - x_o \\ y_a - y_o \\ z_a - z_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_c - x_b \\ y_c - y_b \\ z_c - z_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 - 1 \\ 2 - 3 \\ 0 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D(-2, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{AE}(1, -2, 4)$$

نلاحظ أن  $F$  صورة  $B$  وفق انسحاب شعاعه  $\vec{AE}$  فيكون:

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow F(2, 1, 3)$$

ونلاحظ ايضاً أن  $G$  صورة  $C$  وفق انسحاب شعاعه  $\vec{AE}$  فيكون

$$\begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow G(-2, 0, 4)$$

ونلاحظ ان  $H$  صورة  $D$  وفق انسحاب شعاعه  $\vec{AE}$

$$\begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow H(-1, -2, 4)$$

**ملاحظة:** ورد في الكتاب متوازي السطوح المستطيلة (متوازي المستطيلات أي جميع وجوه مستطيلات) يمكن أخذ المعلم فيه لحساب احداثيات أي نقطة من رؤوسه .

**السؤال 11: كيف نثبت الارتباط الخطي لشعاعين تحليلاً؟**

مثال: ليكن لدينا الشعاعان  $\vec{V}(4,2,-2)$ ,  $\vec{U}(2,1,-1)$

اثبت ان الشعاعان مرتبطان خطياً.

الحل: نلاحظ ان:  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2}$  وبالتالي

فالشعاعان  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  مرتبطان خطياً

ليكن لدينا الشعاعان  $\vec{U}(X_1, Y_1, Z_1)$ ,  $\vec{V}(X_2, Y_2, Z_2)$   
 يكون هذان الشعاعان مرتبطان خطياً إذا كان  $\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$

مثال: ليكن لدينا الشعاعان  $\vec{V}(0,2,-2)$ ,  $\vec{U}(0,1,-1)$

اثبت ان الشعاعان مرتبطان خطياً.

نلاحظ ان:  $\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2}$  وبالتالي

فالشعاعان  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  مرتبطان خطياً حسب التنويه 1

مثال: ليكن لدينا الشعاعان  $\vec{V}(0,4,-1)$ ,  $\vec{U}(0,0,-1)$

اثبت ان الشعاعان مرتبطان خطياً.

فالشعاعان  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  مرتبطان خطياً حسب التنويه 2

لأن  $\vec{v} = -4\vec{u}$

❖ تنويه هام 1: قد ترد معك حالة ان يكون هناك شعاعان

يملكان المركبات التالية:

$\vec{V}(0, a', b')$ ,  $\vec{U}(0, a, b)$

الشعاعان مرتبطان خطياً يجب ان يكون

$\frac{0}{0} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$  وهنا نهمل النسبة الأولى ونحكم

على الارتباط الخطي للشعاعين من تناسب

النسبة  $(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'})$

❖ تنويه 2: وقد ترد لدينا حالة أخرى ان

يكون هناك شعاعان يملكان المركبات

التالية  $\vec{V}(0,0,a)$ ,  $\vec{U}(0,0,b)$  فهذان

الشعاعان دوماً مرتبطان خطياً.

❖ تنويه 3: الشعاعان الصفريان مرتبطان

خطياً

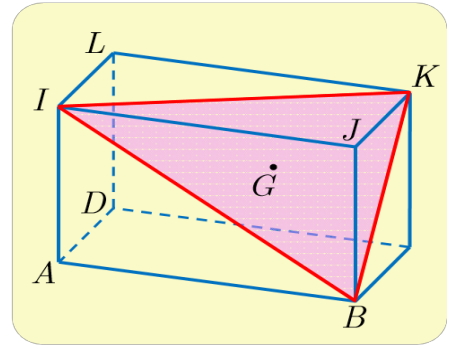
## السؤال 12: كيف نتثبت الارتباط الخطي للشعاعين شعاعياً؟

مثال ليكن  $ABCDIJKL$  متوازي سطوح. وليكن  $G$  مركز ثقل المثلث  $BIK$ . أثبت

$\vec{DG}$   $\vec{DZ}$  مرتبطان خطياً

نستفيد من المعطيات في نص المسألة لكتابة علاقة شعاعية وننطلق منها ونطبق قوانين الأشعة التي مرت معنا ك شال وخاصة متوازي الاضلاع وغيرها حتى نتوصل الى علاقة الارتباط الخطي للشعاعين

$\vec{u} = k\vec{v}$  حيث  $k$  عدد حقيقي أو يمكن اخذ معلم مناسب واثبات ذلك تحليلاً



الحل: بما ان  $G$  مركز ثقل المثلث  $BIK$  كان  $\vec{GB} + \vec{GI} + \vec{GK} = \vec{0}$  وحسب شال سوف أظهر الشعاع  $\vec{DG}$  فنجد:

$$3\vec{GD} + \vec{DB} + \vec{DI} + \vec{DK} = \vec{0} \text{ ومنه } \vec{GD} + \vec{DB} + \vec{GD} + \vec{DI} + \vec{GD} + \vec{DK} = \vec{0}$$

ولنظهر في العلاقة الملونة بالأحمر الشعاع  $\overrightarrow{DJ}$  فيكون:

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{2DJ} + \underbrace{\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JI}}_{\vec{0}} = 2\overrightarrow{DJ}$$

ومنه يكون:  $3\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DK} = 3\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{DJ} \Rightarrow 3\overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{JD}$

أي  $3\overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{JD}$  فالشعاعان  $\overrightarrow{DG}$  و  $\overrightarrow{DJ}$  مرتبطان خطياً

طريقة ثانية: يمكن اخذ معلم مناسب واثبات ذلك تحليلاً.

### السؤال 13: كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط على استقامة؟

**مثال:** لتكن النقاط  $A(-4,1,3), B(-2,0,5), C(0,-1,7)$

أثبت أن النقاط  $A, B, C$  تقع على استقامة واحدة.

الحل: لنكتب الشعاعين  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

$$\overrightarrow{AB}(-2 + 4, 0 - 1, 5 - 3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{BC}(0 + 2, -1 - 0, 7 - 5) \Rightarrow \overrightarrow{BC}(2, -1, 2)$$

نلاحظ ان الشعاعين  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  مرتبطان خطياً لأن مركباتهما متناسبة

$$\text{أي: } \frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} = \frac{2}{2} \text{ وبالتالي فالنقاط } A, B, C \text{ على استقامة واحدة.}$$

على استقامة واحدة.

**مثال:** ليكن  $ABCDIJKL$  متوازي سطوح. وليكن  $G$  مركز ثقل المثلث  $BIK$ . أثبت أن النقاط  $D, J, G$  تقع على

استقامة واحدة.

**الحل:** طريقة 1 بما ان  $G$  مركز ثقل المثلث  $BIK$  كان  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$  وحسب شمال

سوف أظهر الشعاع  $\overrightarrow{DG}$  فنجد:

$$3\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DK} = \vec{0} \text{ ومنه } \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DK} = \vec{0}$$

ولنظهر في العلاقة الملونة بالأحمر الشعاع  $\overrightarrow{DJ}$  فيكون:

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{2DJ} + \underbrace{\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JI}}_{\vec{0}} = 2\overrightarrow{DJ}$$

ومنه يكون:  $3\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DK} = 3\overrightarrow{GD} + 2\overrightarrow{DJ} \Rightarrow 3\overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{JD}$

أي  $3\overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{JD}$  فالشعاعان  $\overrightarrow{DG}$  و  $\overrightarrow{DJ}$  مرتبطان خطياً وبالتالي فإن النقاط  $D, J, G$  تقع على استقامة واحدة.

طريقة 2: نختار على سبيل المثال المعلم:  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI})$  فتكون أحداثيات النقاط كالتالي:

$$A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), I(0,0,1), J(1,0,1), K(1,1,1)$$

لتكن النقاط  $A, B, C$  م لإثبات

ان النقاط الثلاثة تقع على استقامة واحدة يكفي ان نثبت

أن الشعاعين  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  مرتبطين خطياً إن كان تحليلاً او شعاعياً كما تعلمنا في السؤالين السابقين وفي حال لم يكونا مرتبطين خطياً فالنقاط ليست على استقامة واحدة

$$G\left(\frac{1+0+1}{3}, \frac{0+0+1}{3}, \frac{0+1+1}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

لنكتب الشعاعين  $\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DJ}$

$$\overrightarrow{DG}\left(\frac{2}{3}-0, \frac{1}{3}-0, \frac{2}{3}-0\right) \Rightarrow \overrightarrow{DG}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{DJ}(1-0, 0-1, 1-0) \Rightarrow \overrightarrow{DJ}(1, -1, 1)$$

نلاحظ أن الشعاعين  $\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DJ}$  مرتبطان خطياً لأن مركباتهما متناسبة أي:  $\frac{2}{3} = \frac{-2}{-1} = \frac{2}{1}$  وبالتالي فإن النقاط  $D, J, G$  تقع على استقامة واحدة.

### السؤال 14: كيف نكتب معادلة كرة؟

**مثال:** نتأمل في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقطة  $A$  التي إحداثياتها  $(1, 2, -4)$ .

1) جد معادلة الكرة  $S$  التي مركزها  $O$  ونصف قطرها يساوي 5.

2) جد معادلة الكرة  $S'$  التي مركزها  $O$  وتمر بالنقطة  $A$ .

**الحل: 1**

$$S: (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 5^2$$

فتكون معادلة الكرة

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

2) إن نصف قطر الكرة  $S'$  يساوي  $OA$

لنحسب المسافة بين  $O$  و  $A$

$$R^2 = OA^2 = 1^2 + 2^2 + (-4)^2 = 21$$

$$S': (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 21$$

$$S': x^2 + y^2 + z^2 = 21$$

### السؤال 15: كيف نثبت أن نقطة ما ولتكن $C$ تنتمي للمستوي المحوري للنقطة المستقيمة

ولتكن مثلاً  $AB$

إن المستوي المحوري لقطعة مستقيمة هو مجموعة النقاط التي تبعد عن طرفيها نفس المسافة.

مثال:

لدينا النقطتان  $A(5,2,-1), B(3,0,1)$  بين أي النقاط  $C$  أو  $E$

تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة  $[AB]$ ،

في حالة  $C(-2,5,-2), E(3,2,1)$

الحل:

إذن لإثبات أن نقطة ما ولتكن  $C$  تنتمي للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة ولتكن مثلاً  $AB$

يكفي أن نثبت أن بُعد  $C$  عن  $A$

هو نفسه بُعد  $C$  عن  $B$

أي:  $AC = BC$

$$AC = \sqrt{49 + 9 + 1} = \sqrt{59} \quad \bullet$$

$$BC = \sqrt{25 + 25 + 9} = \sqrt{59}$$

ومنه  $AC = BC$  أي أن  $C$  متساوية البُعد

عن طرفي القطعة المستقيمة  $[AB]$

فهي واقعة في المستوي المحوري للقطعة

المستقيمة  $[AB]$

$$AE = \sqrt{4 + 0 + 4} = \sqrt{8} \quad \bullet$$

$$BE = \sqrt{0 + 4 + 0} = 2$$

نلاحظ أن  $AE \neq BE$  أي أن  $E$  لا تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[AB]$

**السؤال 16:** كيف نثبت أن مجموعة نقاط مثلاً  $A, B, C$  تقع جميعها على كرة واحدة

مركزها  $D$  مثلاً؟

يكفي أن نثبت أن بُعد  $C$  عن  $D$  هو نفسه بُعد  $B$  عن  $D$  ونفسه

بُعد  $A$  عن  $D$  أي يجب أن يكون

$$DC = DB = DA$$

نقول أن النقاط  $A, B, C$  تقع جميعها على كرة واحدة مركزها  $D$  ونصف

$$R = DC = DB = DA$$

مثال: نتأمل النقاط:

$$A(2,3,-1), B(2,8,-1), C(7,3,-1),$$

$$D(-1,3,3), E(5,3,3)$$

أثبت أن  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  تقع على كرة واحدة مركزها  $A$ .

$$AB = \sqrt{(2-2)^2 + (8-3)^2 + (-1+1)^2} = 5$$

$$AC = \sqrt{(7-2)^2 + (3-3)^2 + (-1+1)^2} = 5$$

$$AE = \sqrt{(5-2)^2 + (3-3)^2 + (3+1)^2} = 5$$

$$AD = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-3)^2 + (3+1)^2} = 5$$

نلاحظ أن جميع النقاط  $B, C, D, E$  تبعد عن  $A$  مسافة 5

وبالتالي فهي تقع على الكرة التي مركزها  $A$

ونصف قطرها 5

**السؤال 17:** كيف نعيين على محور الفواصل نقطة ولتكن  $C$  متساوية البعد عن النقطتين  $A, B$  مثلاً.

إن النقطة  $C$  تقع على المحور الفواصل فتكون احداثياتها  $C(x, 0, 0)$  وبما انها متساوية البعد عن النقطتين  $A, B$  فيكون

$$CA = CB$$

نعوض ونحل معادلة من الدرجة الأولى فنحصل على قيمة  $x$  وبالتالي نكون قد عينا النقطة  $C$

**مثال:**

جد على محور الفواصل نقطة  $C$  متساوية البعد

عن النقطتين  $A(2, -1, 3)$  و  $B(0, 5, -1)$

**الحل:**

$$CA = CB \Rightarrow CA^2 = CB^2$$

$$(x - 2)^2 + (-1 - 0)^2 + (3 - 0)^2 = (x - 0)^2 + (0 - 5)^2 + (-1 - 0)^2$$

$$x^2 - 4x + 14 = x^2 + 26 \Rightarrow -4x = 12 \Rightarrow x = -3$$

إذاً احداثيات النقطة  $C(-3, 0, 0)$ .

**ملاحظة:** لتعيين نقطة على محور الترتيب بنفس الأسلوب لكن تكون  $C(0, y, 0)$

**السؤال 18:** كيف نثبت أن ثلاث نقاط ولتكن  $A, B, C$  تعين مستوى ( كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط في مساتو واحد)؟

**مثال:**

لتكن النقاط  $A(1, 2, 3)$

,  $B(0, 1, 4)$ ,  $C(-1, -3, 2)$

بين أن النقاط  $A, B, C$  تعين مستوي  $(ABC)$

**الحل:**

$$\vec{AB}(-1, -1, 1)$$

$$\vec{AC}(-2, -5, -1)$$

نلاحظ ان الشعاعين  $\vec{AB}, \vec{AC}$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة أي:  $\frac{-1}{-2} \neq \frac{-1}{-5} \neq \frac{1}{-1}$

وبالتالي فالنقاط  $A, B, C$  لا تقع على استقامة واحدة وبالتالي فهي تعين مستوي  $(ABC)$

**السؤال 19:** كيف نثبت الارتباط الخطي لثلاث اشعة ولتكن مثلاً  $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$  شعاعياً

**وتحليلاً؟**

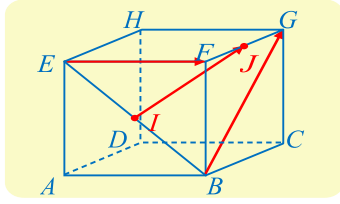
شعاعياً كان ام تحليلاً سنثبت ان  $\vec{U}, \vec{V}$  مثلاً غير مرتبطين خطياً

ثم نثبت أنه يوجد عددين  $a$  و  $b$  يحققان ان:

$$\vec{W} = a\vec{U} + b\vec{V}$$

إذا تم تعيين  $a$  و  $b$  وبالتالي نكون قد عبرنا عن الشعاع بدلالة الشعاعين

الثلاثة مرتبطة خطياً



**مثال:** مكعب  $ABCDEFGH$ . النقطة  $I$  منتصف  $[BE]$

و  $J$  منتصف  $[FG]$

أثبت ان الأشعة  $\overrightarrow{EF}$  و  $\overrightarrow{BG}$  و  $\overrightarrow{IJ}$  مرتبطة خطياً.

**الحل:** شعاعياً: ليس واضحاً من الشكل وجود شعاعين مرتبطين خطياً من بين الأشعة الثلاثة

وقد لا يكون ذلك صحيحاً. لنحاول إذن التعبير عن  $\overrightarrow{IJ}$  بدلالة  $\overrightarrow{EF}$  و  $\overrightarrow{BG}$  وهما

غير مرتبطين خطياً لأنهما متعامدان. لأجل ذلك نستفيد من علاقة شال.

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ}$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GJ}$$

$$\text{بجمع } \textcircled{1} \text{ مع } \textcircled{2} \text{ نجد: } 2\overrightarrow{IJ} = \underbrace{\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} + \underbrace{\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{GJ}}_{\vec{0}}$$

$$\text{ومنه: } 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$

وهذا يثبت الارتباط الخطي للأشعة  $\overrightarrow{EF}$  و  $\overrightarrow{BG}$  و  $\overrightarrow{IJ}$  حيث تمكنا من كتابة شعاع بدلالة الشعاعين الباقيين أي عينا

$$\text{قيمة } a = b = \frac{1}{2}$$

يمكن حل هذا السؤال بطريقة ثانية وذلك تحليلاً بأخذ معلم مناسب على سبيل المثال  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

$$\text{فيكون } A(0,0,0), B(1,0,0), G(1,1,1), F(1,0,1), J\left(1, \frac{1}{2}, 1\right), E(0,0,1)$$

$$I \text{ منتصف } [EB] \text{ فتكون احداثياتها } \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

نوجد الأشعة  $\overrightarrow{EF}$  و  $\overrightarrow{BG}$  و  $\overrightarrow{IJ}$

نلاحظ ان  $\overrightarrow{EF}(1,0,0)$ ,  $\overrightarrow{BG}(0,1,1)$ ,  $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  و  $\overrightarrow{EF}$  و  $\overrightarrow{BG}$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير

متناسبة الآن لنثبت وجود عددين حقيقيين  $a, b$  يحققان ان:  $\overrightarrow{IJ} = a\overrightarrow{EF} + b\overrightarrow{BG}$

$$\text{وهذا يثبت الارتباط الخطي للأشعة } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} = a \Rightarrow \frac{1}{2} = b \Rightarrow \frac{1}{2} = b$$

و  $\overrightarrow{IJ}$  و  $\overrightarrow{BG}$  و  $\overrightarrow{EF}$  حيث تمكنا من كتابة شعاع بدلالة الشعاعين الباقيين أي عينا قيمة  $a = b = \frac{1}{2}$

**السؤال 20** كيف نثبت أن أربع نقاط تقع في مستوى واحد  $P$  ولتكن النقاط  $A, B, C, D$  وكيف نبين إذا كانت نقطة ما ولتكن  $E$  تنتمي الى المستوى  $P$  ؟

فكرة الحل: لاثبات أن النقاط  $A, B, C, D$  تنتمي الى مستوى واحد نثبت أن الاشعة  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  مرتبطة خطياً وذلك كما تعلمنا في السؤال 19

نتأمل، في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط الآتية

$$A(2,0,1), B(1, -2,1), C(5,5,0), D(-3, -5,6)$$

أثبت انتماء النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  إلى مستوى واحد  $P$ ، وتبين إذا كانت النقطة  $E$  تنتمي إلى المستوى  $P$ .

**الحل:**

لنوجد الاشعة  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ :

$$\vec{AB}(-1, -2,0), \vec{AC}(3,5, -1), \vec{AD}(-5, -5,5)$$

نلاحظ أن الشعاعين  $\vec{AB}, \vec{AC}$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

أي:  $\frac{-1}{3} \neq \frac{-2}{5} \neq \frac{0}{-1}$  وبالتالي النقاط  $C, B, A$  ليست على استقامة واحدة.

فهي تعين مستوى  $(ABC)$ .

ولنثبت ان  $D$  تنتمي

الى المستوي

$(ABC)$  وتكون  $D$  نقطة

من المستوي  $(ABC)$

إذا وجد عددا  $a, b$  يحققان ان:

$$\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -5 = -a + 3b \dots\dots\dots (1) \\ -5 = -2a + 5b \dots\dots\dots (2) \\ 5 = -b \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

من (3) نجد أن  $b = -5$  نعوضها في (1) نجد

$a = -10$  نعوض قيمة  $a, b$  في (2) للتحقق

$$-5 = -2(-10) + 5(-5)$$

**شرح موسع** ان إثبات ان الاشعة  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$

مرتبطة خطياً هو فعلياً له المعنى التالي

بداية نحن نثبت ان  $\vec{AB}, \vec{AC}$  مثلاً غير مرتبطة خطياً وهذا يعني ان النقاط  $A, B, C$  تعين مستوى  $(ABC)$

ثانياً نثبت انه يوجد عددين  $a$  و  $b$  يحققان ان:

$$\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$$

وهنا نحن نثبت انتماء النقطة  $D$

الى المستوي  $(ABC)$  عندها تكون النقاط الأربعة في مستوى واحد

**بمعنى آخر:** لإثبات ان أربع نقاط تقع في مستوى واحد نثبت ان ثلاث نقاط تعين مستوى ثم نثبت انتماء النقطة الرابعة الى المستوي

➤ ولو اردنا اثبات ان نقطة خامسة  $E$  تنتمي الى المستوي  $ABCD$  نثبت انها تنتمي الى المستوي  $(ABC)$  او نعوض احد اثبات هذه النقطة في معادلة المستوي فإذا تحققت فأنها تنتمي وأن لم تحقق فهي لا تنتمي وسنتعلم لاحقاً طرق كتابة معادلة مستو لجميع الحالات.

$-5 = -5$  محققة إذاً  $\vec{AD} = -10\vec{AB} + 5\vec{AC}$  وبالتالي فالنقطة  $D$  تنتمي الى المستوي  $(ABC)$

والاشعة  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  مرتبطة خطياً وبالتالي فالنقاط  $A, B, C, D$  تقع في مستوي واحد  $P$

➤ لنبحث عن عددين  $a, b$  يحققان أن:  $\vec{AE} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = -a + 3b \dots\dots\dots (1) \\ 1 = -2a + 5b \dots\dots\dots (2) \\ 1 = -b \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

من (3) نجد أن  $b = -1$  نعوضها في (1) نجد

$a = -4$  نعوض قيمة  $a, b$  في (2) للتحقق

$$1 = -2(-4) + 5(-1)$$

$3 \neq 1$  غير محققة وبالتالي فالنقطة  $E$  لا تنتمي الى المستوي  $(ABC)$  أي انها لا تنتمي الى المستوي  $P$  والاشعة  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE}$  غير مرتبطة خطياً.

### السؤال 21: ماذا يفيد مفهوم مركز الابعاد المتناسبة؟

يفيد في إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة

ويفيد في إثبات وقوع نقاط في مستوي واحد.

ويفيد في إثبات تقاطع مستقيمات.

سأحاول أن اطرح امثلة عن كل واحدة ولكن سنذكر معاً مفهوم مركز الابعاد المتناسبة

#### 1. مركز الابعاد المتناسبة لنقطتين مثقلتين:

-مركز الابعاد المتناسبة  $G$  للنقطتين المثقلتين  $(A, \alpha), (B, \beta)$  بشرط:

$$\alpha + \beta \neq 0 \text{ يحقق العلاقة } \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0} \text{ عندئذ يكون}$$

$$\vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{BA} = \mu\vec{BA} \text{ أو } \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB} = K\vec{AB}$$

أي ان  $G$  نقطة من المستقيم  $(AB)$  وهي علاقة الارتباط الخطي بين شعاعين ومن هنا تكمن

أهمية الابعاد المتناسبة في اثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة.

• في حال كان  $\alpha = \beta$  فإن  $G$  تقع منتصف القطعة المستقيمة  $[AB]$

• أيأ كانت  $M$  نقطة من المستوي فإن  $(\alpha + \beta)\vec{MG} = \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}$

يُستفاد من هذه العلاقة في سؤال ماذا تمثل مجموعة النقاط  $M$  الذي سوف نتكلم عنه في الأسئلة القادمة.

## 2. مركز الابعاد المتناسبة لثلاث نقاط مثقلة:

-مركز الابعاد المتناسبة  $G$  للنقاط المثقلة  $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$  بشرط:

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ عندئذ يكون } \alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC} = a \overrightarrow{AB} + b \overrightarrow{AC}$$

وهذه العلاقة تذكرنا بان الاشعة  $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  مرتبطة خطياً أي ان  $G$  تنتمي الى المستوي  $(ABC)$  أي النقاط  $G, A, B, C$  تقع في مستوٍ واحد ومن هنا تكمن أهمية مركز الابعاد المتناسبة في إثبات وقوع نقاط في مستوٍ واحد.

• **الخاصة التجميعية:**  $G$  مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:  
 $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$

لو افترضنا أن  $H$  مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, \alpha), (B, \beta)$  عندئذٍ حسب الخاصة التجميعية يكون  $G$  مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين:  $(C, \gamma), (H, \alpha + \beta)$

• **مبرهنة الاختزال:** أيًا كانت  $M$  فإن:

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$$

• يُستفاد من هذه العلاقة في سؤال ماذا تمثل مجموعة النقاط  $M$  الذ سوف نتكلم عنه في الأسئلة القادمة.

## 3. مركز الابعاد المتناسبة لأربع نقاط مثقلة:

-مركز الابعاد المتناسبة  $G$  للنقاط المثقلة  $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (D, \delta)$  بشرط:

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} = \vec{0} \text{ يحقق العلاقة } \alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$$

• حيث  $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (D, \delta)$

لو افترضنا أن  $H$  مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, \alpha), (B, \beta)$

و  $K$  مركز ابعاد متناسبة للنقطتين:  $(C, \gamma), (D, \delta)$

عندئذٍ حسب الخاصة التجميعية يكون  $G$  مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(K, \delta + \gamma), (H, \alpha + \beta)$$

• أو  $G$  مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:  $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (D, \delta)$

لو افترضنا أن  $H$  مركز الابعاد المتناسبة للنقاط  $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$

عندئذٍ حسب الخاصة التجميعية يكون  $G$  مركز الابعاد المتناسبة للنقطتين:

$$(H, \alpha + \beta + \gamma), (D, \delta)$$

• أيًا كانت  $M$  فإن:

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} + \delta \overrightarrow{MD} = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \overrightarrow{MG}$$

**تنويه:**  $G$  منتصف  $(AB)$   $\Leftrightarrow G$  مركز ابعاد متناسبة للنقطتين

$$\alpha = \beta \text{ حيث } (A, \alpha), (B, \beta)$$

$G \Leftarrow ABC$  مثلث ثقل مركز  $G$  ابعاد متناسبة للنقاط  
 $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$  حيث:  $\alpha = \beta = \gamma$   
 $G \Leftarrow ABCD$  مركز ثقل رباعي الوجوه  $G$  ابعاد متناسبة  
 للنقاط  $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (D, \delta)$  حيث:  $\alpha = \beta = \gamma = \delta$   
 ملاحظة: في العادة نأخذ نحن تثقيلة 1 في الحل لكن ليس شرط حسب الحاجة أي:  
 $G \Leftarrow (AB)$  منتصف  $G$  مركز ابعاد متناسبة للنقطتين  $(A, 1), (B, 1)$   
 $G \Leftarrow ABC$  مركز ثقل المثلث  $G$  مركز ابعاد متناسبة للنقاط  $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$   
 $G \Leftarrow ABCD$  مركز ثقل رباعي الوجوه  $G$  مركز ابعاد متناسبة  
 للنقاط  $(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)$

تتوييه هام: نعلم أن  $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \vec{AB}$

$G$  مركز ابعاد متناسبة للنقطتين  $(A, \alpha), (B, \beta)$  و  $\alpha + \beta \neq 0$  فمثلاً

ومنه  $\vec{AK} = \frac{1}{3} \vec{AB} = \frac{1}{2+1} \vec{AB}$  ومركز ابعاد متناسبة للنقطتين:  $(A, 2), (B, 1)$  حيث  $2 + 1 \neq 0$

وايضاً لدينا العلاقة  $\vec{AD} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$  عندئذ نقول ان  $D$  مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:  $(A, 1 - a - b), (B, a), (C, b)$

فمثلاً لو كان لدينا العلاقة  $\vec{AD} = -\frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{AC}$  عندئذ نقول ان  $D$  مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

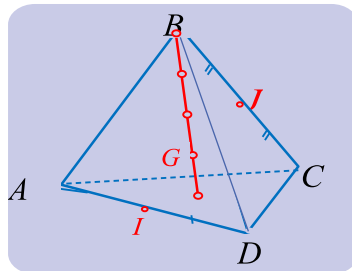
:  $(A, 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}), (B, -\frac{1}{3}), (C, \frac{2}{3})$

اعتماداً على ما شرحته سأطرح الأسئلة الآتية:

**السؤال 22:** كيف نثبت ان ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة اعتماداً على مركز الابعاد المتناسبة؟

**مثال:**

- نثبت ان إحدى هذه النقاط هو مركز ابعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين. نستفيد من التتوييه والخاصة التجميعية في اثبات المطلوب سأطرح عدة امثلة.



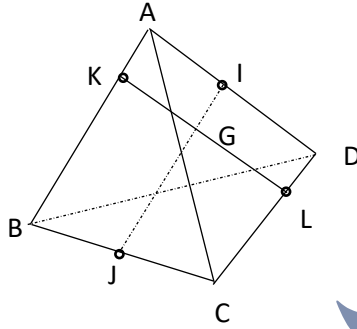
$ABCD$  رباعي وجوه مركز ثقله  $G$ .  
 $I$  منتصف  $[AD]$   
 $J$  منتصف  $[BC]$ . اثبت ان  $I, J, G$  تقع على استقامة واحدة.

**الحل:**

لكي نثبت ان النقاط  $I$  و  $J$  و  $G$  تقع على استقامة واحدة يمكننا أن نثبت مثلاً ان  $G$  هي

مركز ابعاد متناسبة للنقطتين  $(I, \alpha)$  و  $(J, \beta)$

لما كان  $G$  مركز ثقل  $ABCD$ ، فهو إذن مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(C, 1), (A, 1), (B, 1), (D, 1)$  ولكن  $I$  منتصف  $[AD]$ ، هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1), (D, 1)$  و  $J$  هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B, 1), (C, 1)$  واستناداً إلى الخاصّة التجميعيّة، النقطة  $G$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(I, 2)$  و  $(J, 2)$ . فالنقاط  $I$  و  $J$  و  $G$  تقع على استقامة واحدة، وتكون  $G$  في منتصف  $[IJ]$ .



**مثال:**

لتكن  $ABCD$  رباعي وجوه النقطة  $K$  من  $[AB]$  تحقق:  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  و  $L$  نقطة من  $[CD]$  تحقق:  $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$  وأخيراً  $I$  منتصف  $[AD]$

$J$  منتصف  $[BC]$  ونعرف  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 2), (D, 2), (C, 1), (B, 1)$

اثبت ان

$L, K, G$  على استقامة واحدة.

ثم اثبت ان  $I, J, G$  تقع على استقامة واحدة.

**الحل:** من العلاقة  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  نستنتج أن  $K$  مركز ابعاد متناسبة للنقطتين:  $(A, 2), (B, 1)$

ومن العلاقة  $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$  نستنتج أن  $L$  مركز ابعاد متناسبة للنقطتين:  $(C, 1), (D, 2)$

وبما ان  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:  $(A, 2), (B, 1), (C, 1), (D, 2)$  فحسب الخاصّة التجميعية فإن

$G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:  $(L, 3), (K, 3)$  وبالتالي فإن  $L, K, G$  على استقامة واحدة.

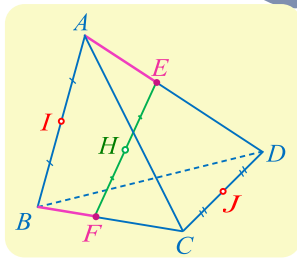
•  $I$  منتصف  $[AD]$ ، هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(A, 2), (D, 2)$  و  $J$  هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(B, 1), (C, 1)$  واستناداً إلى الخاصّة التجميعيّة، النقطة  $G$  هي مركز

الأبعاد المتناسبة للنقطتين:  $(I, 4), (J, 2)$  أي ان  $I, J, G$  تقع على استقامة

واحدة.



**مثال:**  $ABCD$  رباعي وجوه، و  $a$  عددٌ حقيقي  $I$  و  $J$  هما، بالترتيب منتصفا

$[AB]$  و  $[CD]$ . و  $E$  و  $F$  نقطتان تحققان العلاقتين:

$$\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$$

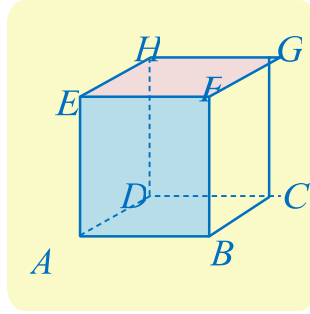
. وأخيراً  $H$  هي منتصف  $[EF]$ .

أثبت أن  $I$  و  $J$  و  $H$  تقع على استقامة واحدة.

**الحل:** يُترك للطالب بنفس أسلوب المثال السابق تماماً.

**السؤال 23:** كيف نثبت وقوع نقاط في مستوٍ واحد اعتماداً على مركز الأبعاد المتناسبة؟

مثال:



مكعب  $ABCDEFGH$ .

أثبت أن النقطة  $K$  المعرفة بالعلاقة

$$2\vec{KA} = \vec{CB} + \vec{CA} + 3\vec{AG}$$

تنتمي إلى المستوي  $(BCG)$  ثم ارسم  $K$

لإثبات أن نقطة  $K$  تنتمي إلى مستوي  $(BCG)$ ،

يكفي إثبات أن  $K$  هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط  $(B, \alpha)$  و  $(C, \beta)$  و  $(G, \gamma)$

لإثبات أن  $K$  هي نقطة من المستوي  $(BCG)$ ، نبحث عن علاقة بين الأشعة  $\vec{KG}$ ،  $\vec{KB}$ ،  $\vec{KC}$

باستخدام علاقة شال، تكتب العلاقة المفروضة  $2\vec{KA} - \vec{CB} - \vec{CA} - 3\vec{AG} = \vec{0}$  بالصيغة

$$2\vec{AK} - \vec{CK} - \vec{KB} - \vec{CK} - \vec{KA} - 3\vec{AK} - 3\vec{KG} = \vec{0}$$

ومنه:  $0 = -\vec{AK} + \vec{AK} - \vec{KB} - 2\vec{CK} - 3\vec{KG}$  أي:

$$\vec{KB} - 2\vec{KC} + 3\vec{KG} = \vec{0}$$

ولما كان  $0 \neq 3 + (-2) + 1$ ، استنتجنا أن  $K$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(B, 1)$ ،  $(C, -2)$ ،  $(G, 3)$  وهذا يثبت انتماء  $K$  إلى المستوي  $(BCG)$ .

لرسم النقطة  $K$ ، نبدأ برسم  $L$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(C, -2)$ ،  $(G, 3)$  إذ تكتب

$$3\vec{LG} - 2\vec{LC} = \vec{0} \text{ ومنه } \vec{GL} = -2\vec{GC} \text{ فنرسم } L \text{ على امتداد } [CG] \text{ على أن}$$

تقع  $G$  بين  $C$  و  $L$  وتحقق  $GL = 2GC$  وأخيراً نرسم  $K$ ، مركز النقطتين

$(B, 1)$ ،  $(L, 1)$  أي منتصف القطعة  $[BL]$ .

مثال:

ABCD رباعي وجوه،  $a$  عدد حقيقي،  $I$ ،  $J$  هما على الترتيب منتصفا

$$\vec{BF} = a\vec{BC} \text{ ، } \vec{AE} = a\vec{AD} \text{ ونقطتان تحققان } [CD], [AB]$$

و  $H$  منتصف  $[EF]$  كما أن النقطة  $M$  تحقق العلاقة  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{DA}$

أثبت أن النقاط  $I$  و  $J$  و  $H$  تقع على استقامة واحدة

• أثبت أن النقاط  $M, B, C, D$  تقع في مستوٍ واحد ثم وضع النقطة  $M$

الحل:

نثبت أن نقطة ما هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط البقية يكون في السؤال علاقة شعاعية ننطلق منها حتى الوصول إلى علاقة مركز الأبعاد

أو معطيات تفيدنا في استخدام الخاصة التجميعية والوصول إلى علاقة مركز الأبعاد

$$\begin{aligned} (F, 1) &\Leftarrow \overrightarrow{BF} = \alpha \overrightarrow{BC} \\ (E, 1) &\Leftarrow \overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{AD} \quad \text{و} \quad (C, \alpha), (B, 1 - \alpha) \\ &\text{مركز الأبعاد المتناسبة ل} (A, 1 - \alpha), (D, \alpha) \end{aligned}$$

وبالتالي H مركز الأبعاد المتناسبة (E, 1), (F, 1) (هو نفسه هو مركز الأبعاد المتناسبة ل  
(A, 1 - \alpha), (B, 1 - \alpha), (C, \alpha), (D, \alpha)

بما أن C, D لهما نفس التثقيل فإن مركز الأبعاد المتناسبة لهما هو J منتصف [CD].  
بما أن A, B لهما نفس التثقيل فإن مركز الأبعاد المتناسبة لهما هو I منتصف [AB].

\Leftarrow مركز الأبعاد المتناسبة H للنقاط (A, 1 - \alpha), (B, 1 - \alpha), (C, \alpha), (D, \alpha)  
هو نفسه مركز الأبعاد المتناسبة ل I, J وهذا  
يعني أن النقاط I, J, H تقع على استقامة  
واحدة

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{DA} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA} \\ \Rightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

أي أن M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (B, 1), (C, 1), (D, 1)

فالنقاط الأربع تقع في مستوى واحد

حيث M هي مركز ثقل المثلث DBC

**مثال**

مكعب ABCDEFGH، I و J منتصف الحرفين [AB] و [BC] بالترتيب، و K هي

مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A, 1), (B, 2), (C, 1), (H, 1) أثبت وقوع النقاط I

و J و K و H في مستو

الجل:

استناداً إلى الفرض I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A, 1), (B, 1) و J هي

مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B, 1), (C, 1) ولأن K هي مركز الأبعاد المتناسبة

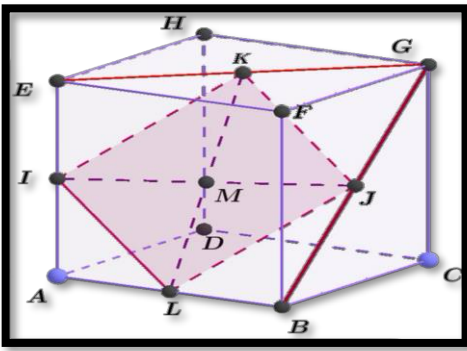
للنقاط (A, 1), (B, 2), (C, 1), (H, 1). استنتجنا من الخاصة التجميعية أن K هي

مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (H, 1), (J, 2), (I, 2) وهكذا نرى أن K واقعة في

المستوي (IJH) والنقاط I, J, K, H تقع في مستو واحد.

**السؤال 24:** كيف نثبت تقاطع مستقيمين او تلاقي مستقيمين في نقطة واحدة  
باستخدام مركز الابعاد المتناسبة؟

يكفي ان نثبت ان مركز الابعاد المتناسبة لنقطتين من المستقيم الأول هو نفسه مركز الابعاد المتناسبة  
لنقطتين من المستقيم الثاني



اثبت ان المستقيمان  $IJ, KL$  متلاقين في  $M$   
**الحل:**

النقطة  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة

للنقاط  $(A, 1)$  و  $(B, 1)$  و  $(G, 1)$  و  $(E, 1)$

ولأن  $I$  منتصف  $[AE]$  فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المتثلتين  $(A, 1)$  و  $(E, 1)$   
 ولأن  $J$  منتصف  $[BG]$  فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المتثلتين  $(B, 1)$  و  $(G, 1)$   
 فيكون  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المتثلتين  $(I, 2)$  و  $(J, 2)$  إذاً  $M$  منتصف  $[IJ]$   
 لأن  $K$  منتصف  $[EG]$  فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المتثلتين  $(E, 1)$  و  $(G, 1)$   
 و  $L$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المتثلتين  $(A, 1)$  و  $(B, 1)$  لان  $L$  منتصف  $[AB]$   
 فيكون  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المتثلتين  $(K, 2)$  و  $(L, 2)$  إذاً  $M$  منتصف  $[KL]$   
 ومنه يتلاقى المستقيمان  $(IJ)$  و  $(KL)$  في  $M$  فالنقاط  $I, J, K, L$  تقع في مستوي واحد  
 والرباعي  $ILJK$  متوازي أضلاع لأن قطريه متناصفان

**السؤال 25: كيف نثبت تلاقي ثلاث مستقيما في نقطة واحدة اعتماداً على**

**مركز الأبعاد المتناسبة؟**

نثبت وجود مركز ابعاد واحد هو نفسه نقطة تلاقي

المستقيما

• **بوجه عام:** ليكن المثلث  $ABC$  ولتكن

$G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$  ونفترض

أن  $A'$  هو مركز الأبعاد المتناسبة

لنقطتين  $(B, \beta), (C, \gamma)$  وأن  $B'$  هو

مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المتثلتين

$(A, \alpha), (C, \gamma)$  وكذلك أن  $C'$  هو مركز

الأبعاد المتناسبة للنقطتين المتثلتين

$(A, \alpha), (B, \beta)$ .

عندئذٍ تتلاقى المستقيما

$(AA')$  و  $(BB')$  و  $(CC')$  في نقطة واحدة هي  $G$

تأمل رباعي وجوه  $ABCD$ . لتكن  $x$  من  $]0,1[$ ,

ولتكن  $P, Q, R, S$  لنقاط التي تحقق:

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CR} = x\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CS} = x\overrightarrow{CB}$$

النقطتان  $I$  و  $J$  هما منتصفا الحرفين  $[AC]$  و  $[BD]$ .

أثبت تلاقي المستقيما  $(IJ)$  و  $(PR)$  و  $(QS)$  في نقطة واحدة.

**الحل:**

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{PA} + x(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{PA} + x\overrightarrow{AP} + x\overrightarrow{PB} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{PA} - x\overrightarrow{PA} + x\overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

$$(1-x)\overrightarrow{PA} + x\overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

إذاً  $P$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1-x)$  و  $(B, x)$

ونجد بالمثل أن  $Q$  هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(D, x)$  و  $(A, 1-x)$

وكذلك  $R$  هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(D, x)$  و  $(C, 1-x)$  وأخيراً

$S$  هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B, x)$  و  $(C, 1-x)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية  $G$  هي مراكز الأبعاد المتناسبة لكل من

$[PR]$  ومن جهة أخرى  $G$  هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(Q, 1)$  و  $(S, 1)$  فهي أيضاً تقع في

منتصف  $[SQ]$  وأخيراً لأن  $I$  هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1-x)$  و  $(C, 1-x)$  وكذلك  $J$  هي

مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(D, x)$  و  $(B, x)$

استنتجنا أن  $G$  هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(I, 2-2x)$

$(J, 2x)$  فالنقطة  $G$  تنتمي أيضاً إلى القطعة المستقيمة  $[IJ]$

نستنتج مما سبق أن  $G$  نقطة تلاقي القطع المستقيمة  $[IJ]$   $[PR]$   $[SQ]$  فالمستقيما  $(IJ)$

و  $(PR)$  متلاقية في نقطة واحدة  $(QS)$

**السؤال 26:** كيف نعين  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  لتكون  $M$  مثلاً مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:  $(A, \alpha)$ ,  $(B, \beta)$ ,  $(C, \gamma)$  (تُعطى علاقة شعاعية فقط)؟

مثال: أعط في الحالات الآتية  $\alpha$  و  $\beta$  لتكون  $M$

مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$ .

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} \quad 1$$

$$2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \quad 2$$

$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \quad 3$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} \quad \text{الحل:}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \left( \begin{array}{l} \beta=2 \\ \alpha+\beta=7 \end{array} \right) \Rightarrow \alpha = 5 \quad 1 \text{ الطريقة}$$

$$7\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \quad 2 \text{ الطريقة حسب شال}$$

$$7\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$$

$$\rightarrow 5\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \rightarrow -5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \rightarrow 5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$$

بالمقارنة مع علاقة مركز الأبعاد العامة نجد:  $\alpha = 5$  و  $\beta = 2$  بنفس الأسلوب.  $2$  و  $3$

مثال: جداولاً عداد  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  لتكون  $M$  مركز

المتناسبة للنقاط  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \gamma)$

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad 1$$

$$\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} \quad 2$$

الحل:  $1$

$$\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC} \quad \text{حسب شال}$$

$$\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

$$-2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \quad \text{بالمقارنة مع علاقة مركز الأبعاد العامة } \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \text{ نجد}$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = -2 \quad \gamma = 1:$$

طريقة  $2$  يمكننا أيضاً تعيين  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  حسب التنويه الهام الذي اشرت اليه في السؤال 18

بنفس الأسلوب  $2$

في حال طلب تعيين  $\alpha$  و  $\beta$  نوصل علاقة الشعاعية المعطاة الى

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \text{ الشكل}$$

بالمقارنة نحصل على  $\alpha$  و  $\beta$  وذلك عن طريق استخدام خواص الاشعة وغالباً نستخدم شال

اما في حال طلب تعيين  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  فينفس الأسلوب لكن نوصل العلاقة

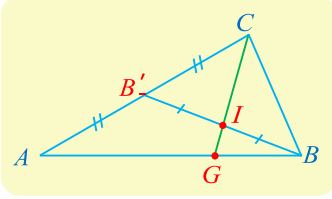
$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \text{ الشعاعية الى}$$

وبالمقارنة نصل الى المطلوب

ويمكن ك طريقة ثانية اللجوء الى التنويه الهام الذي اشرت له في الصفحة

18

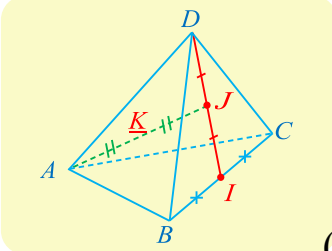
**السؤال 27:** كيف نعيين  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  لتكون مثلاً  $M$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:  $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$  (يعطى شكل)؟ مثال:



❖ انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  لتكون  $I$  مركز الأبعاد

المتناسبة للنقاط  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \gamma)$

واستنتج  $\lambda$  التي تحقق  $\vec{GA} + \lambda \vec{GB} = \vec{0}$



❑ انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  لتكون  $K$

مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \gamma)$  و  $(D, \delta)$ .

❖ الحل:

$B'$  منتصف  $[AC]$  ومنه  $B'$  مركز ابعاد متناسبة للنقطتين:  $(A, 1), (B, 1)$  و  $I$  منتصف  $[BB']$  ومنه  $I$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين:  $(B, \beta), (B', 2)$  ومنه حتماً  $\beta = 2$  لتكون  $I$  منتصف  $[BB']$  وبالتالي فإن:  $\alpha = 1$  و  $\gamma = 1$  وبما ان  $G$  تنتمي الى  $[AB]$  فتكون  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 1), (B, 2)$  ومنه نكتب  $\vec{GA} + 2\vec{GB} = \vec{0}$  بالمقارنة نجد  $\lambda = 2$

❑  $I$  منتصف  $[BC]$  ومنه  $I$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(B, 1), (C, 1)$  و  $J$  منتصف  $[DI]$  ومنه  $J$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(D, 2), (I, 2)$  أي ومنه  $J$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(D, 2), (C, 1), (B, 1)$  و  $K$  منتصف  $[AJ]$  ومنه  $K$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين  $(A, 4), (J, 4)$  ومنه  $K$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 4), (B, 1), (C, 1), (D, 2)$  أي ان:  $\alpha = 4$  و  $\beta = 1$  و  $\gamma = 1$  و  $\delta = 2$

**السؤال 28** كيف نوجد احداثيات مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط  $A, B, C$  مثلاً؟

إذا كان  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$

فإن:

$$X_G = \frac{\alpha X_A + \beta X_B + \gamma X_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$Y_G = \frac{\alpha Y_A + \beta Y_B + \gamma Y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

مثال: احسب احداثيات  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

المثقلة:  $(A, 1), (B, -2), (C, 3)$  حيث:  $A(1, 1, -1), B(0, 2, 1), C(-1, 0, 0)$

الحل: ان احداثيات  $G$  هي

$$X_G = \frac{\alpha X_A + \beta X_B + \gamma X_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{1 \times 1 - 2 \times 0 + 3 \times -1}{1 - 2 + 3} = -1$$

$$Y_G = \frac{\alpha Y_A + \beta Y_B + \gamma Y_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{1 \times 1 - 2 \times 2 + 3 \times 0}{2} = \frac{3}{2}$$

$$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{1 \times -1 - 2 \times 1 + 3 \times 0}{2} = -\frac{3}{2}$$

ومنه  $G(-1, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

**السؤال 29:** كيف نعيين مجموعة النقاط  $M$  مثلاً في الفراغ التي تحقق (سيكتب علاقة شعاعية)؟

سنوصل هذه العلاقة الشعاعية الى احدى هذه الحالات التي وردت معنا:

$\ \vec{MG}\  = K$ تمثل كرة مركزها $G$ ونصف قطرها $K$
$\ \vec{MA}\  = \ \vec{BA}\ $ تمثل كرة مركزها $A$ ونصف قطرها $AB$
$\ \vec{MA}\  = \ \vec{MB}\ $ تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$
$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ تمثل كرة مركزها منتصف $[AB]$ وقطرها $[AB]$
$\vec{MA} \cdot \vec{BC} = 0$ تمثل مستوي مار من $A$ ويقبل $BC$ شعاع ناظم له.

**مثال:**

لنكن  $G(2,1,0)$  مركز ثقل المثلث  $ABC$  و  $G'(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3})$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 3), (B, -1), (C, 1)$  عين مجموعة النقاط  $M$  التي تحقق:

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 6 \quad (1)$$

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| \quad (2)$$

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| \quad (3)$$

$$(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})(3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}) = 0 \quad (4)$$

سنعتمد على مبرهنة الاختزال التي نوهت عليها سابقاً سنذكر هذه المبرهنة معاً وسأقد بعض الملاحظات

عليها

➤ بفرض  $A, B, C$  ثلاث نقاط متمایزة من الفراغ فمهما تكن  $M$

من الفراغ فإن:  $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\vec{MG}$

حيث  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:  $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$

حيث  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

➤ في حال كان  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  فإن الشعاع  $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC}$  شعاع مستقل عن  $M$  نبحث

عنه لنرى ما هو باستخدام مهارتنا في الأشعة (تحليل أحد الأشعة-استخدام شال-استخدام خاصية متوازي

الاضلاع... الخ)

➤  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$  حيث  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$

في  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:  $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$

➤  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MG}$  حيث  $G$  منتصف  $[AB]$

بما ان  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$  ومنه فحسب الملاحظة فإن  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$  نعوض

$$\|3\vec{MG}\| = 6 \Rightarrow 3\|\vec{MG}\| = 6 \Rightarrow \|\vec{MG}\| = 2$$

وهي تمثل كرة مركزها  $G$  ونصف قطرها 2

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| \quad (2)$$

بما ان  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$  ومنه فحسب الملاحظة فإن  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

و  $G'$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 3), (B, -1), (C, 1)$  فيكون

$$\|3\vec{MG}\| = \|3\vec{MG}'\| \text{ فيكون في العلاقة نعوض في } 3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}:$$

$$\Rightarrow 3\|\vec{MG}\| = 3\|\vec{MG}'\| \Rightarrow \|\vec{MG}\| = \|\vec{MG}'\|$$

وهي تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[GG']$

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| \quad (3)$$

بما ان  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$  ومنه فحسب الملاحظة فإن  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

وبما ان مجموع الامثال في الطرف الايمن يساوي الصفر أي:  $2 - 1 - 1 = 0$  وبالتالي فالشعاع

$2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$  مستقل عن  $M$  لنبحث عنه لنرى ما هو:

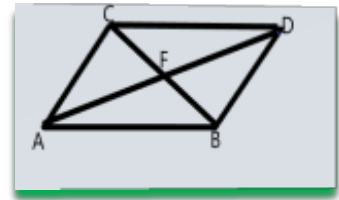
$$\begin{aligned} 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} &= \vec{MA} + \vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = \\ &= -\vec{AM} - \vec{AM} - \vec{MB} - \vec{MC} = -(\vec{AM} + \vec{MB}) - (\vec{AM} + \vec{MC}) = -\vec{AB} - \vec{AC} = \\ &= -(\vec{AB} + \vec{AC}) = -2\vec{AF} \end{aligned}$$

حيث أن  $F$  منتصف  $[AD]$  حسب قاعة متوازي الاضلاع

بالتعويض في العلاقة نجد:

$$\|3\vec{MG}\| = \|-2\vec{AF}\| \Rightarrow \|\vec{MG}\| = \frac{2}{3}\|\vec{AF}\| = K = \text{ثابت}$$

ومنه مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها  $G$  ونصف قطرها  $\frac{2}{3}AF$



$$(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})(3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}) = 0 \quad (4)$$

ما ان  $G$  مركز ثقل المثلث  $ABC$  ومنه فحسب الملاحظة فإن  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

و  $G'$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A, 3), (B, -1), (C, 1)$

$$3\vec{MG} \cdot 3\vec{MG}' = 0 \Rightarrow 9\vec{MG} \cdot \vec{MG}' = 0 \text{ فيكون في العلاقة نعوض في } 3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}:$$

$$\vec{MG} \cdot \vec{MG}' = 0 \text{ تمثل كرة مركزها منتصف } [GG'] \text{ وقطرها } [GG']$$

**السؤال 30: كيف نعين طبيعة المجموعة M مثلاً (تُعطي معادلة فقط)؟**

**مثال:**

نرد هذه المعادلة الى الصيغة العامة وذلك من طريق الاتمام الى مربع كامل ثم يتبين لنا ماهي طبيعة المعادلة من شكلها

في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  عيّن طبيعة مجموعة

النقاط:  $M(x, y, z)$  الحالات الآتية:

- فائدة:
- $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R > 0$  تمثل كرة
  - $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0$  تمثل نقطة
  - $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R < 0$  تمثل مجموعة خالية

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2 = 0 \quad ①$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2z + 26 = 0 \quad ②$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 0 \quad ③$$

**الحل:**

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2 = 0 \quad ①$$

$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 6y + (3)^2 - (3)^2 + z^2 - 2 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 - 12 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 12$$

مجموعة النقاط  $M(x, y, z)$  تمثل كرة مركزها  $\omega(1, -3, 0)$  ونصف قطرها  $R = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

② و ③ بنفس الأسلوب تماماً

**مثال:** في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نتأمل النقطتين  $A(2, 1, 2)$ ,  $B(-2, 0, 2)$

❖ أعط معادلة للمجموعة  $M$  المكونة من النقاط  $M(x, y, z)$  التي تحقق:  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

ما طبيعة المجموعة  $M$  ?

**الحل:** لنوجد الشعاعين  $\vec{MA}$  و  $\vec{MB}$

$$\left( \begin{array}{l} \vec{MA}(2 - x, 1 - y, 2 - z) \\ \vec{MB}(-2 - x, 0 - y, 2 - z) \end{array} \right) \Rightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

$$(2 - x)(-2 - x) + (1 - y)(-y) + (2 - z)(2 - z) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4 + y^2 - y + (z - 2)^2 = 0$$

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - 2)^2 = \frac{17}{4}$$

هي كرة مركزها  $\omega(0, \frac{1}{2}, 2)$  ونصف قطرها

$$R = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

### السؤال 31: كيف نوجد الجداء السلمي لشعاعين في المستوى؟

يجري التعبير عن الجداء السلمي لشعاعين  $\vec{u}, \vec{v}$  كما في حالة المستوي أي:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

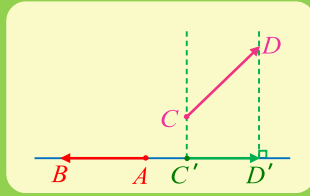
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$$

تحليلاً إذا كانت مركبات الشعاعين  $\vec{u}, \vec{v}$  في معلم متجانس هي  $(x, y)$  ,  $(x', y')$  بالترتيب كان:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y'$$

شعاعياً إذا كان  $\vec{C'D'}$  المسقط القائم للشعاع  $\vec{CD}$  على المستقيم  $(AB)$

(نستخدمها عندما نريد حساب الجداء السلمي في حال اعطانا شكل هندسي)

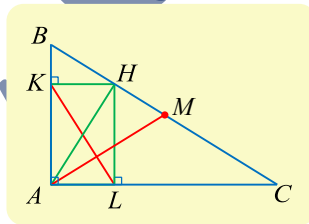


ملاحظة: الجداء السلمي لشعاعين يساوي الصفر يعني ان الشعاعين متعامدين

**مثال:** ليكن لدينا الشعاعين  $\vec{u}(2, 1)$  ,  $\vec{v}(0, 5)$  احسب الجداء السلمي للشعاعين ثم احسب  $\cos \alpha$  حيث  $\alpha$  الزاوية الهندسية للشعاعين  $\vec{u}, \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(0) + 5(1) = 5$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



**مثال:** مثلث قائم في A، و M منتصف [BC]،

و H موقع الارتفاع المرسوم من A. ليكن K و L المسقطين

القائمين للنقطة H على [AB] و [AC] بالترتيب.

احسب  $\vec{AM} \cdot \vec{KL}$  ماذا تستنتج؟

الحل:

حسب قاعدة متوازي الاضلاع لدينا:

$$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM} \Rightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC})$$

. [BC]

ومنه يكون:

$$\vec{AM} \cdot \vec{KL} = \left[ \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) \right] \cdot \vec{KL} = \frac{1}{2} (\vec{AB} \cdot \vec{KL} + \vec{AC} \cdot \vec{KL}) \quad \textcircled{1}$$

لنحسب  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KL}$  و  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KL}$

بالاستفادة من خاصية المسقط القائم حيث بالاستفادة من المسقط القائم على  $(AB)$  نجد:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA}$  وبالاستفادة من المسقط القائم

على  $(AC)$  نجد:  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$  ومنه بالتعويض في 1

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KL}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}) =$$

$$\frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$$

لأنه استناداً إلى الفرض  $(AH)$  عمودي على  $(BC)$ . ومنه نستنتج تعامد المستقيمين  $(AM)$  و  $(KL)$ .

### السؤال 32: كيف نوجد الجداء السلمي لشعاعين في الفراغ؟

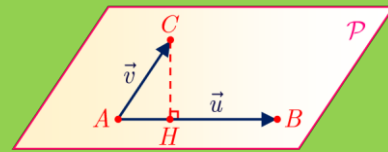
يجري التعبير عن الجداء السلمي لشعاعين  $\vec{u}, \vec{v}$  كما في حالة الفراغ أي:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$$

شعاعياً دون معلم وإذا كانت  $H$  هي المسقط القائم في المستوي  $P$  للنقطة  $C$  على

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \quad \text{كان} \quad (AB) \quad \text{المستقيم}$$



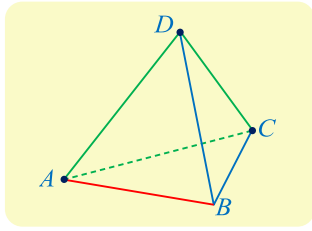
العبارة التحليلية للجداء السلمي لشعاعين في الفراغ: نفترض أن مركبات الشعاعين  $\vec{u}, \vec{v}$  في معلم متجانس

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' \quad \text{عندئذ: } (x', y', z') \text{ بالترتيب عندئذ: } (x, y, z) \text{ هي}$$

مثال:  $ABCD$  رباعي وجوه منتظم. كل وجه فيه مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه  $a$ .

$$\text{احسب } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \text{ و } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

الحل:



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a^2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$$

$\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$  لأن المثلث  $ABC$  متساوي الاضلاع.

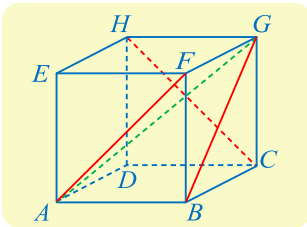
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

حسب شال

مثال:  $ABCDEFGH$  مكعب طول ضلعه  $a$  احسب  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC}$  و  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$  و  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CH}$  و  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$

الحل:



لأن  $E$  هي المسقط القائم للنقطة  $F$  على  $(AE)$  استنتجنا أن

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = a^2$$

ولأن  $A$  هي المسقط القائم للنقطة  $B$  على  $(AE)$  و  $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$

$$\text{استنتجنا أن } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = a^2$$

ولأن  $H$  هي المسقط القائم للنقطة  $G$  على المستوى  $(ADH)$ ، و  $E$  هي المسقط القائم للنقطة  $H$

$$\text{على } (AE) \text{ وجدنا ان: } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = a^2$$

$$\text{واحيراً } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$$

مثال: نُعطى في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط  $A(1,0,0)$  و  $B(0,1,0)$  و  $C(0,0,1)$  و

$D(0,2,0)$  و  $E(1,1,1)$ . النقطة  $M$  هي منتصف  $AB$  احسب  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD}$  و  $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CM}$

الحل: لنوجد الاشعة

$$\overrightarrow{AE}(0,1,1), \overrightarrow{AD}(-1,2,0), \overrightarrow{AC}(-1,0,1), \overrightarrow{AB}(-1,1,0) \text{ و } M \text{ منتصف } [AB] \text{ فتكون } M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \text{ ومنه يكون}$$

$$\overrightarrow{OE}(1,1,1), \overrightarrow{CM}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) \text{ وبالتالي يكون } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$$

$$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \text{ و } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = 2$$

❖ مثال: نتأمل هرماً  $ABCD - S$  قاعدته مَرَبَع وأُرسه  $S$ . وطول كل حرف من حروفه وأضلاع قاعدته

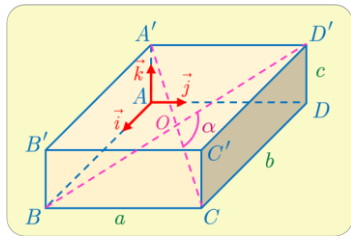
يساوي

$a$  احسب  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$  و  $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$

❖  $ABCDEFGH$  مكعب طول ضلعه  $a$ . فيه  $I$  منتصف  $[EF]$  و  $J$  منتصف  $[CG]$ .

احسب  $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EA}$  و  $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{FC}$  و  $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{GJ}$  و  $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{IA}$  و  $\overrightarrow{JH} \cdot \overrightarrow{JD}$

يترك الحل لكم بنفس الأسلوب



مثال:  $ABCD A' B' C' D'$  متوازي مستطيلات. يتقاطع قطراه  $[BD']$  و  $[CA']$  في  $O$ .  
 نضع  $\alpha = \widehat{COD'}$  ونفترض أن  $BC = a$  و  $CD = b$  و  $DD' = c$ . نهدف في هذه المسألة  
 إلى حساب  $\cos \alpha$ . نختار معلماً متجانساً  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  بحيث يكون  $\vec{AB}$  و  $\vec{AD}$   
 خطياً، و  $\vec{AD}$  و  $\vec{AA'}$  مرتبطين خطياً، وكذلك  $\vec{AA'}$  و  $\vec{AC}$  مرتبطين خطياً. أعط إحداثيات  
 جميع رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات مركزه  $O$ .

أثبت أن  $\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$  ادرس على وجه الخصوص حالة المكعب.

### السؤال 33: كيف نحسب بُعد نقطة عن مستقيم في المستوى؟

مثال:

احسب بُعد النقطة  $A$  عن المستقيم  $d: 2x + y - 5$  و  $A(-2, 4)$

في معلم متجانس بُعد النقطة  $A(\alpha, \beta)$  عن المستقيم  
 الذي معادلته  $ax + by + c = 0$  يساوي

$$dis(A, d) = \frac{|a.\alpha + b.\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$dis(A, d) = \frac{|a.\alpha + b.\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(-2) + 1(4) - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = 5$$

### السؤال 34: كيف نحسب بُعد نقطة عن مستوى؟

مثال:

احسب بُعد النقطة  $A$  عن المستوي  $p$

$P: 2x - y + 3z - 5 = 0$  و  $A(5, -3, 4)$ :

الحل:

$$dis(A, P) = \frac{|a.\alpha + b.\beta + c.\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(5) - 1(-3) + 3(4) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{20}{\sqrt{14}}$$

### السؤال 35: كيف نثبت أن مستقيمين متعامدين؟

مثال: في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط:

اثبت أن المستقيمان  $(OE)$  و  $(CM)$  متعامدين.

الحل:  $\vec{OE} \cdot \vec{CM} = 0 \Rightarrow \vec{OE} \left(1, 1, 1\right), \vec{CM} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$  وبالتالي المستقيمان  $(OE)$  و  $(CM)$  متعامدين.

مثال:

$ABCD$  مربع.  $I$  منتصف  $[AB]$  و  $J$  منتصف  $[BC]$ . أثبت أن المستقيمين  $(DI)$  و  $(CJ)$  متعامدان

نثبت أن الجداء السلمي لشعاعي توجيه المستقيمين  
 يساوي الصفر.

### السؤال 36: كيف نكتب معادلة مستوي مار من نقطة ويقبل $\vec{n}$ شعاعاً ناظماً

عليه؟

مثال: نتأمل، في معلم متجانس  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  النقطة  $A(2,1,-3)$

ليكن المستوي  $P$  ويقبل  $\vec{n}(a, b, c)$  شعاعاً ناظماً عليه ويمر بالنقطة

$A(x_0, y_0, z_0)$  عندئذ تكون معادلة المستوي  $P$

$$P: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

والشعاع  $\vec{n}(1,1,2)$  أعط معادلة للمستوي  $P$

المر بالنقطة  $A$  ويقبل  $n$  شعاعاً ناظماً.

الحل: تُعطى معادلة المستوي بالعلاقة

$$P: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$$

بالتعويض تكون معادلة المستوي  $P$

$$P: 1(x - 2) + 1(y - 1) + 2(z + 3) \Rightarrow P: x + y + 2z + 3 = 0$$

### السؤال 37: كيف نكتب معادلة مستوي $Q$ مثلاً مار من نقطة ويوازي مستوي

معلوم  $P$  مثلاً؟

بما أن المستويين  $P, Q$  متوازيين فيكون ناظم المستوي  $Q$  المراد كتابة معادلته هو نفسه ناظم المستوي  $P$  أي

$$\vec{n}_p = \vec{n}_q$$

فنكتب معادلة المستوي  $Q$  كما تعلمنا في السؤال 36

مثال: اكتب معادلة للمستوي  $Q$  المر من  $A(1,0,1)$  موازياً

المستوي  $P$  حيث:  $P: 2x - y + 3z - 4 = 0$

الحل:

بما أن المستويين  $P, Q$  متوازيين

فيكون  $\vec{n}_p = \vec{n}_q(2, -1, 3)$

تُعطى معادلة المستوي بالعلاقة

$$Q: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$$

بالتعويض تكون معادلة المستوي  $Q$  المر من  $A$

$$Q: 2(x - 1) - 1(y - 0) + 3(z - 1) = 0 \Rightarrow Q: 2x - y + 3z - 5 = 0$$

### السؤال 38: كيف نكتب معادلة مستوي $(ABC)$ يمر من ثلاث نقاط مثلاً

$A, B, C$ ؟

هناك عدة طرق سأقدم شرحها جميعاً واطرح أمثلة وانت مخير باختيار احداها.

الطريقة الأولى: نثبت أن الشعاعين  $\vec{AB}, \vec{AC}$  غير مرتبطين خطياً فهذه النقاط تعيين مستوي ونكتب حسب تعريف

المستوي هو مجموعة النقاط  $M(x, y, z)$  التي تُحقق:

$$\vec{AM} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$$

**مثال:** نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط  $A(1,0,-1), B(2,2,3), C(3,1,-2)$  المار من هذه النقاط.

الحل: لنوجد الشعاعين  $\vec{AB}, \vec{AC}$

$\vec{AB}(1,2,4), \vec{AC}(2,1,-1)$  نلاحظ أن الشعاعين  $\vec{AB}, \vec{AC}$  غير مرتبطين خطياً لأن

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{4}{-1}$$

ونكتب حسب تعريف المستوي هو مجموعة النقاط  $M(x, y, z)$  التي تُحقق:

$$\vec{AM} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$$

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z+1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x-1 = a+2b & .(1) \\ y = 2a+b & .(2) \\ z+1 = 4a-b & .(3) \end{cases}$$

بجمع (2) و(3) نجد:  $a = \frac{y+z+1}{6}$  نعوض قيمة  $a$  في (3) فنجد:

$$b = \frac{-2y+z+1}{-3}$$

$$x-1 = \frac{y+z+1}{6} + 2 \left( \frac{-2y+z+1}{-3} \right) \xrightarrow{\text{نضرب العلاقة بـ 6}} 6x-6 = y+z+1+8y-4z-4$$

ومنه فإن معادلة المستوي  $P$  تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة:  $P: 2x - 3y + z - 1 = 0$

**الطريقة الثانية:** نثبت أن  $\vec{AB}, \vec{AC}$  غير مرتبطين خطياً

ونفرض أن:  $\vec{n}(a, b, c)$  ناظم على المستوي المطلوب إيجاد معادلته

والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي  $\vec{AB}, \vec{AC}$

لذلك نضع:  $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$  و  $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$  نحل معادلتين بثلاث مجاهيل  $a, b, c$  حيث نُعطي قيمة اختيارية لإحدى هذه المجاهيل ومنه نحصل على مركبات الشعاع الناظم  $\vec{n}$  نعوض في الشكل العام للمعادلة المستوي حيث عُلم ناظمه

ويمر بثلاث نقاط نختار إحدى هذه النقاط (الأسهل في التعويض)

أي عُدنا إلى السؤال 36

**مثال:** نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط  $A(1,0,-1), B(2,2,3), C(3,1,-2)$  المار من هذه النقاط.

الحل: لنوجد الشعاعين  $\vec{AB}, \vec{AC}$

نلاحظ أن الشعاعين  $\vec{AB}(1,2,4), \vec{AC}(2,1,-1)$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة أي:  $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{4}{-1}$

ونفرض أن:  $\vec{n}(a, b, c)$  ناظم على المستوي  $P$  والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيهه المستوي  $\vec{AB}, \vec{AC}$

لذلك نضع:  $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$  و  $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(1, 2, 4) = 0 \Rightarrow a + 2b + 4c = 0 \quad (1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(2, 1, -1) \Rightarrow 2a + b - c = 0 \quad (2)$$

نضع  $c = 1$  نعوض في (1) و (2) فيكون

$$\begin{cases} a + 2b + 4 = 0 \\ 2a + b - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{نضرب المعادلة الثانية بـ } -2} \begin{cases} a + 2b + 4 = 0 \\ -4a - 2b + 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالجمع}} -3a + 6 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -3$$

ومنه  $\vec{n}(2, -3, 1)$  ناظم على المستوي  $P$  ويمر المستوي  $P$  بالنقاط الثلاثة نختار  $A(1, 0, -1)$  ونعوض في

$$P: a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \Rightarrow P: 2(x - 1) - 3(y - 0) + 1(z + 1) = 0$$

ومنه فإن معادلة المستوي  $P$  تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة:  $P: 2x - 3y + z - 1 = 0$

#### الطريقة الثالثة:

نكتب شكل معادلة المستوي المعروف  $ax + by + cz + d = 0$

نعوض إحداثيات النقاط  $A, B, C$  في المعادلة فنحصل على ثلاث معادلات بأربع مجاهيل  $a, b, c, d$  نعطي قيمة اختيارية لإحدى هذه المجاهيل ونحل جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل وبالتالي نحصل بذلك على قيمة كلاً من  $a, b, c, d$  نعوضهم في المعادلة فنكون قد حصلنا على معادلة المستوي المراد بثلاث نقاط.

مثال: نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط

$A(1, 0, -1), B(2, 2, 3), C(3, 1, -2)$  المراد من هذه النقاط.

الحل:

نكتب شكل معادلة المستوي المعروف  $ax + by + cz + d = 0$  ..... (M)

نعوض  $A(1, 0, -1), B(2, 2, 3), C(3, 1, -2)$  في المعادلة:

$$A(1,0,-1) : a - c + d = 0$$

$$B(2,2,3) : 2a + 2b + 3c + d = 0$$

$$C(3,1,-2) : 3a + b - 2c + d = 0$$

نعوض  $d = 1$  مثلاً في المعادلات الثلاثة السابقة:

$$\begin{cases} a - c + 1 = 0 & \textcircled{1} \\ 2a + 2b + 3c + 1 = 0 & \textcircled{2} \\ 3a + b - 2c + 1 = 0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

من  $\textcircled{1}$  نجد  $a = c - 1$  نعوضها في  $\textcircled{2}$  فيكون:

$$2(c - 1) + 2b + 3c + 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{1 - 5c}{2}$$

نعوض قيمة  $a, b$  في  $\textcircled{3}$  فنجد:

$$3(c - 1) + \frac{1 - 5c}{2} - 2c + 1 = 0 \xrightarrow{\text{نضرب بـ 2}} 6c - 6 + 1 - 5c - 4c + 2 = 0$$

ومنه  $c = -1$  ومنه يكون  $a = -2$  و  $b = 3$  نعوض قيمة كلاً من  $a, b, c, d$  في  $(M)$

فيكون:  $P : -2x + 3y - z + 1 = 0$  ومنه  $P : 2x - 3y + z - 1 = 0$

**السؤال 39:** كيف نكتب معادلة مستوي يمر بنقطة وُعَلَم شعاعي توجيهه

$\vec{u}, \vec{v}$  ؟

ونفرض أن:  $\vec{n}(a, b, c)$  ناظم على المستوي المطلوب إيجاد معادلته

والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي  $\vec{u}, \vec{v}$

لذلك نضع:  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  و  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$  نحل معادلتين بثلاث مجاهيل حيث نُعطي قيمة اختيارية لإحدى هذه المجاهيل ومنه نحصل على مركبات الشعاع الناظم  $\vec{n}$  نعوض في الشكل العام للمعادلة المستوي حيث عُلم ناظمه ويمر بنقطة أي عُدنا الى السؤال 36

مثال: أوجد معادلة المستوي  $P$  المار من  $A(1,0,-1)$  والشعاعيين  $\vec{v}(2,1,-1), \vec{u}(1,2,4)$  شعاعي

توجيه له.

**الحل:**

نفرض أن:  $\vec{n}(a, b, c)$  ناظم على المستوي  $P$  والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي  $\vec{u}, \vec{v}$

لذلك نضع:  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  و  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(1,2,4) = 0 \Rightarrow a + 2b + 4c = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(2,1,-1) \Rightarrow 2a + b - c = 0 \quad \textcircled{2}$$

نضع  $C = 1$  نعوض في 1 و 2 فيكون

$$\begin{cases} a + 2b + 4 = 0 \\ 2a + b - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{نضرب المعادلة الثانية بـ } -2} \begin{cases} a + 2b + 4 = 0 \\ -4a - 2b + 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالجمع}} -3a + 6 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -3$$

ومنه  $\vec{n}(2, -3, 1)$  ناظم على المستوي  $P$  ويمر المستوي  $P$  بالنقطة  $A(1, 0, -1)$  ونعوض في

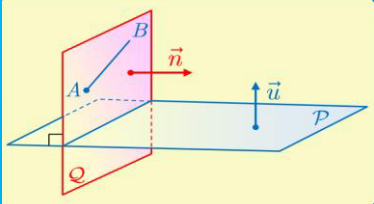
$$P: a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \Rightarrow P: 2(x - 1) - 3(y - 0) + 1(z + 1) = 0$$

ومنه فإن معادلة المستوي  $P$  تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة:  $P: 2x - 3y + z - 1 = 0$

**السؤال 40:** كيف نكتب معادلة مستوي  $Q$  مثلاً العمودي على المستوي

$P$  المعلوم ويمر بنقطتين مثلاً  $A, B$  ؟

نفرض أن  $\vec{n}_Q(a, b, c)$  شعاع ناظم على المستوي  $Q$  والمستويان  $P, Q$  متعامدان فرضاً إذن يكون كل شعاع ناظم  $\vec{u}$  على  $P$  شعاعاً عمودياً على  $\vec{n}_Q$  كما إن المستقيم  $(AB)$  محتوي في  $Q$  فالشعاع  $\overline{AB}$  عمودي أيضاً على  $\vec{n}_Q$



أي: نضع  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ ,  $\overline{AB} \cdot \vec{n} = 0$  فنحصل على معادلتين بثلاث مجاهيل  $a, b, c$

ولأنه يوجد عدد لا نهائي من الأشعة النازمة على مستوي فبممكننا إعطاء قيمة اختيارية لإحدى هذه المجاهيل فنحل جملة معادلتين بمجهولين فنحصل على الشعاع  $\vec{n}_Q$  لناظم على المستوي  $Q$

نعوض في الشكل العام للمعادلة المستوي حيث عُلم ناظمه ويمر بنقطتين نختار احدهما أي عُدا الى السؤال 36

**مثال:** نتأمل، في المعلم المتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقطتين الآتيتين:  $A(1, -1, 2)$  و

$B(2, 0, 4)$  والمستوي  $P$  الذي معادلته  $x - y + 3z - 4 = 0$ . جد معادلةً للمستوي

$Q$  العمودي على  $P$  ويمر بالنقطتين  $A$  و  $B$ .

**الحل:**  $P: x - y + 3z - 4 = 0$  فيكون ناظم المستوي  $P$  هو  $\vec{u}(1, -1, 3)$  والشعاع المحتوي في

المستوي  $Q$  هو  $\overline{AB}(1, 1, 2)$  ولنفرض أن  $\vec{n}_Q(a, b, c)$  شعاع ناظم على المستوي  $Q$

وبما أن المستويين  $P, Q$  متعامدان فرضاً إذن نكتب:

$$\vec{u}, \vec{n}_Q = 0 \Rightarrow (1, -1, 3)(a, b, c) = 0 \Rightarrow a - b + 3c = 0 \quad (1)$$

$$\vec{AB}, \vec{n}_Q = 0 \Rightarrow (1, 1, 2)(a, b, c) = 0 \Rightarrow a + b + 2c = 0 \quad (2) \quad \text{و}$$

لنضع  $C = 2$  ونعوض في المعادلتين (1) و (2) فيكون:

$$\left. \begin{array}{l} a - b + 6 = 0 \\ a + b + 4 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{بالجمع}} 2a + 10 = 0 \Rightarrow a = -5 \Rightarrow b = 1$$

$\vec{n}_Q(-5, 1, 2)$  شعاع ناظم على المستوي  $Q$  ويمر المستوي  $Q$  في نقطتين لنختار  $B(2, 0, 4)$  نعوض

$$Q: a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$$

$$\Rightarrow Q: -5(x - 2) + 1(y - 0) + 2(z - 4) = 0$$

ومنه فإن معادلة المستوي  $Q$  تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة:  $Q: -5x + y + 2z + 2 = 0$

**السؤال 41: كيف معادلة مستوي وليكن  $R$  العمودي على المستويين  $P$  و  $Q$  المعلومات ويمر بالنقطة  $A$  مثلاً (الحالة العامة)؟**

نفرض أن ناظم المستوي  $R$  هو  $\vec{n}_R(a, b, c)$  وبما أن المستوي  $R$  عمودي على المستويين  $P$  و  $Q$  فيكون ناظم المستوي  $R$  عمودي على ناظم المستوي  $P$  وعلى ناظم المستوي  $Q$  لذلك نضع:  $\vec{n}_R \cdot \vec{n}_P = 0$  و  $\vec{n}_R \cdot \vec{n}_Q = 0$  فنحصل على معادلتين بثلاث مجاهيل  $a, b, c$  نعطي قيمة اختيارية لإحدى هذه المجاهيل فنحل جملة معادلتين بمجهولين فنحصل على الشعاع

$\vec{n}_R$  لناظم على المستوي  $R$

نعوض في الشكل العام للمعادلة المستوي حيث عُلم ناظمه ويمر بنقطة أي عُدنا الى السؤال 36

**مثال:**

نتأمل في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  المستويين  $P$  و  $Q$ :

$$Q: x + y + z + 1 = 0 \quad \text{و} \quad P: x - 2y + 3z - 5 = 0$$

اكتب معادلة للمستوي  $R$  العمودي على كل من  $P$  و  $Q$  ويمر بالنقطة  $A(2, 5, -2)$

**الحل:** بفرض شعاع ناظم على المستوي  $R$   $\vec{n}_R(a, b, c)$

ولدينا: بفرض شعاع ناظم على المستوي  $P$   $\vec{n}_P(1, -2, 3)$  و  $\vec{n}_Q(1, 1, 1)$  وشعاع ناظم على المستوي  $Q$

وبما أن المستوي  $R$  عمودي على المستويين  $P$  و  $Q$  لذلك نكتب:

$$\vec{n}_R \cdot \vec{n}_P = 0 \Rightarrow (a, b, c)(1, -2, 3) = 0 \Rightarrow a - 2b + 3c = 0 \quad (1)$$

$$\vec{n}_R \cdot \vec{n}_Q = 0 \Rightarrow (a, b, c)(1, 1, 1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \quad (2) \quad \text{و}$$

نضع:  $c = 1$  ونعوض في المعادلتين (1) و (2) فيكون:

$$\left. \begin{array}{l} a - 2b + 3 = 0 \\ a + b + 1 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{بالطرح}} 3b - 2 = 0 \Rightarrow b = \frac{2}{3} \Rightarrow a = -\frac{5}{3}$$

$A(2,5,-2)$  في النقطة  $R$  ويمر المستوي  $R$  على ناظم شعاع  $\vec{n}_R(\frac{-5}{3}, \frac{2}{3}, 1)$

نعوض

$$R: a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Rightarrow R: \frac{-5}{3}(x - 2) + \frac{2}{3}(y - 5) + 1(z + 2) = 0$$

ومنه فإن معادلة المستوي  $R$  تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة:  $R: -5x + 2y + 3z + 6 = 0$

**السؤال 42:** كيف نكتب معادلة مستوي وليكن  $R$  العمودي على المستويين  $P$  و  $Q$  المتقاطعين بفصل مشترك  $d$  علم شعاع  $\vec{u}_d$  توجيهه ويمر  $R$  بالنقطة  $A$  مثلاً (الحالة الخاصة)؟

حالة خاصة وهامة (في حال كان المستويين  $P$  و  $Q$  متقاطعين بفصل مشترك  $d$  (مستقيم) شعاع توجيهه  $\vec{u}_d$  وكان هناك مستوي ثالث  $R$  عامودي على هذين المستويين  $P$  و  $Q$  المتقاطعين عندئذ فإن ناظم المستوي  $R$  هو شعاع توجيه الفصل المشترك  $\vec{u}_d = \vec{n}_R$

نعوض في الشكل العام للمعادلة المستوي حيث علم ناظمه ويمر بنقطة أي عُدا الى السؤال

36

**مثال:**

نتأمل في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  المستويين  $P$  و  $Q$ :

$$Q: x + y + z + 1 = 0 \text{ و } P: x - 2y + 3z - 5 = 0$$

المتقاطعين بفصل مشترك  $d$  شعاع توجيهه هو  $\vec{u}_d(-5, 2, 3)$  اكتب معادلة للمستوي  $R$  العمودي على كل

من  $P$  و  $Q$  ويمر بالنقطة  $A(2, 5, -2)$

**الحل:** بما أن  $R \perp P$  و  $R \perp Q$  ومنه فإن  $\vec{u}_d(-5, 2, 3)$  شعاعاً ناظماً على المستوي

$$R \text{ اي: } \vec{u}_d = \vec{n}_R(-5, 2, 3)$$

ويمر المستوي  $R$  في النقطة  $A(2, 5, -2)$

نعوض

$$R: a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Rightarrow R: -5(x - 2) + 2(y - 5) + 3(z + 2) = 0$$

ومنه فإن معادلة المستوي  $R$  تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة:  $R: -5x + 2y + 3z + 6 = 0$

**السؤال 43: كيف نكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة**  
**مثلاً [AB]؟**

**مثال:** اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [AB]:

**الحل:** حيث:  $A(4,0,-2), B(2,2,2)$

بفرض  $I$  منتصف [AB] ومنه فإن  $I(3,1,0) \Rightarrow I(\frac{4+2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{-2+2}{2})$

نكتب الشعاع الناظم على المستوي حيث:  $\vec{n} = \vec{AB}(-2,2,4)$

**نعوض**  $-2(x-3) + 2(y-1) + 4(z-0)$

فإن معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [AB]  $x - y - 2z - 2 = 0$

**مثال:** اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [AB]:

**الحل:** حيث:  $A(4,0,-2), B(2,2,2)$

نفرض أن:  $M(x,y,z)$  نقطة تنتمي الى المستوي المحوري

للقطعة المستقيمة [AB] عندئذ يكون  $MA = MB$

**نعوض:**  $\sqrt{(4-x)^2 + (0-y)^2 + (-2-z)^2} = \sqrt{(2-x)^2 + (2-y)^2 + (2-z)^2}$

نربع  $(4-x)^2 + (0-y)^2 + (-2-z)^2 = ((2-x)^2 + (2-y)^2 + (2-z)^2)$

نفك الاقواس ونصلح فنكون معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [AB]  $x - y - 2z - 2 = 0$

**السؤال 44: كيف نكتب معادلة كرة التي مركزها W مثلاً وتمس المستوي**

**P المعلوم؟**

**مثال:** في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نتأمل النقطة  $A(2, -2, 2)$  والمستوي  $P: x + 2y + 3z = 5$ .

اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي P.

**الحل:**

$$R = \text{dis}(A, P) = \frac{|2(1) - 2(2) + 2(3) - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

ومن معادلة الكرة تكون:  $S: (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{14}$

**مثال:**

اثبت أن المستوي P الذي معادلته:  $2x + y - 2z + 9 = 0$

يمس الكرة التي مركزها  $A(2, -1, 0)$  ونصف قطرها 4

**الحل:**

$$\text{dis}(A, P) = \frac{|2(2) - 1(1) + 0(-2) + 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 4$$

بما أن  $R = \text{dis}(A, P) = 4$  فإن المستوي P يمس الكرة

**الطريقة الأولى:** نوجد إحداثيات  $I$  منتصف [AB] ونكتب

الشعاع الناظم على المستوي حيث:  $\vec{n} = \vec{AB}$

نعوض في الشكل العام للمعادلة المستوي حيث

علم ناظمه ويمر بالنقطة  $I$  أي عدنا الى السؤال

36

**الطريقة الثانية:** نفرض أن:  $M(x,y,z)$  نقطة تنتمي الى المستوي المحوري للقطعة

المستقيمة [AB] عندئذ يكون  $MA = MB$  وقد وضحت ذلك في السؤال 15

نعوض فنحصل على المعادلة المطلوبة

تعلمنا سابقاً في السؤال 14 لكتابة معادلة كرة يلزمنا

نصف قطرها ومركزها

هنا المركز معلوم لكن نصف القطر مجهول!

بما ان الكرة تمس المستوي فإن بُعد مركز الكرة W عن

المستوي P يمثل نصف قطر الكرة أي:

$$R = \text{dis}(A, P)$$

ومنه ايضاً نستنتج السؤال التالي لإثبات أن مستوي يمس كرة

نتثبت أن بُعد مركز الكرة عن المستوي هو نفسه نصف قطر الكرة

## السؤال 45: كيف نكتب معادلة أسطوانة؟

### الحالة الأولى:

معادلة أسطوانة التي محورها  $(o, \vec{i})$  ونصف قطرها  $R$  ومركزها قاعدتها  $A'(b, 0, 0)$

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = R^2 \\ a \leq x \leq b \end{cases} \text{ هي } A(a, 0, 0)$$

مثال: لتكن لدينا الأسطوانة التي محورها  $(o, \vec{i})$  ومركزها قاعدتها  $A'(8, 0, 0)$  و

$A(4, 0, 0)$  ونصف قطر قاعدتها  $2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 8 \\ 4 \leq x \leq 8 \end{cases} \text{ فتكون معادلة الأسطوانة}$$

### الحالة الثانية: معادلة أسطوانة التي محورها $(o, \vec{j})$ ونصف قطرها $R$ ومركزها

قاعدتها  $A'(0, b, 0)$  و

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = R^2 \\ a \leq y \leq b \end{cases} \text{ هي } A(0, a, 0)$$

مثال: لتكن لدينا الأسطوانة التي محورها  $(o, \vec{j})$  ومركزها قاعدتها  $A'(0, 6, 0)$  و

$A(0, 3, 0)$  ونصف قطر قاعدتها  $\sqrt{6}$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 6 \\ 3 \leq y \leq 6 \end{cases} \text{ فتكون معادلة الأسطوانة}$$

### الحالة الثالثة:

معادلة أسطوانة التي محورها  $(o, \vec{k})$  ونصف قطرها  $R$  ومركزها قاعدتها  $A'(0, 0, b)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ a \leq z \leq b \end{cases} \text{ هي } A(0, 0, a)$$

مثال: لتكن لدينا الأسطوانة التي محورها  $(o, \vec{k})$  ومركزها قاعدتها  $A'(0, 0, 6)$  و

$A(0, 0, 3)$  ونصف قطر قاعدتها  $\sqrt{6}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ 3 \leq z \leq 6 \end{cases} \text{ فتكون معادلة الأسطوانة}$$

## السؤال 46: كيف نكتب معادلة مخروط؟

### الحالة الأولى:

رأس المخروط هو  $O$  مركز القاعدة من النمط  $(0, 0, a)$  ونصف قطرها  $r$  فتكون معادلة المخروط من

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{r^2}{a^2} z^2 = 0 \\ 0 \leq z \leq a \end{cases} \text{ النمط:}$$

مثال: مخروط رأسه  $O$  ومحوره  $(O, \vec{k})$  وقاعدته الدائرة التي مركزها  $(0, 0, 4)$  ونصف قطرها

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{9}{16} z^2 = 0 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases} \text{ 3 فتكون معادلة المخروط}$$

### الحالة الثانية:

رأس المخروط هو  $O$  مركز القاعدة من النمط  $(a, 0, 0)$  ونصف قطرها  $r$  فتكون معادلة المخروط من

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{r^2}{a^2}x^2 = 0 \\ 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

مثال: مخروط رأسه  $O$  ومحوره  $(O, \vec{i})$  وقاعدته الدائرة التي مركزها  $(4, 0, 0)$  ونصف قطرها

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{9}{16}x^2 = 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

الحالة الثالثة: رأس المخروط هو  $O$  مركز القاعدة من النمط  $(0, a, 0)$  ونصف قطرها  $r$  فتكون معادلة

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{r^2}{a^2}y^2 = 0 \\ 0 \leq y \leq a \end{cases}$$

مثال: مخروط رأسه  $O$  ومحوره  $(O, \vec{j})$  وقاعدته الدائرة التي مركزها  $(0, 4, 0)$  ونصف قطرها

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{9}{16}y^2 = 0 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

### السؤال 47: كيف نكتب التمثيل الوسيطي لمستقيم $d$ يمر بنقطة

مثلاً  $A$  وشعاع توجيهه  $\vec{u}_d$ ؟

إن المستقيم  $d$  المار بالنقطة  $A(x_0, y_0, z_0)$  والموجه بالشعاع

$$\vec{u}(a, b, c) \text{ هو مجموعة النقاط } M(x, y, z)$$

$$(S) \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ التي تحقق}$$

تسمى الجملة  $(S)$  تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $d$  في المعلم

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ ويسمى } t \text{ وسيطاً}$$

مثال: نُعطي معلم متجانس  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم  $d$  الذي يمر

بالنقطة  $A(-1, 2, 0)$  والموجه بالشعاع

$$\vec{u}(0, 1, -1)$$

الحل:

إن التمثيل الوسيطي للمستقيم  $d$  المار

بالنقطة  $A(-1, 2, 0)$  والموجه

بالشعاع  $\vec{u}(0, 1, -1)$  هو

$$(d) \begin{cases} x = -1 \\ y = t + 2 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

### السؤال 48: كيف نكتب التمثيل الوسيطي لمستقيم $d$ مار بنقطتين

$A, B$  مثلاً؟

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم  $d$  المار من النقطة  $A$

والموجه بالشعاع

$\vec{AB}$  او نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم  $d$  المار من النقطة

$B$  والموجه بالشعاع

$$\vec{BA}$$

يجب أن تكون بداية شعاع التوجيه هي نفسها النقطة التي

نختارها للتعويض

مثال:

في حالة  $A(1, 2, 3), B(2, 3, 1)$

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم  $d$

المار بالنقطتين  $A$  و  $B$

الحل:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم  $d$  المار

بالنقطة  $A(1, 2, 3)$  والموجه

بالشعاع  $\overrightarrow{AB}(1,1,-2)$  هو

$$(d) \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

بالنقطة  $B(2,3,1)$  والموجه

بالشعاع  $\overrightarrow{BA}(-1,-1,2)$  هو

$$(d) \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = -t + 3 \\ z = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**السؤال 49:** كيف نكتب التمثيل الوسيطي لقطعة مستقيمة ولنصف مستقيم؟

لنكن لدينا النقطتان  $A(x_0, y_0, z_0), B(x_1, y_1, z_1)$  من الفراغ ولنضع

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}(a, b, c)$$

عندئذ القطعة المستقيمة  $[AB]$  هي مجموعة النقاط  $M(x, y, z)$  التي تحقق:

$$(S) \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}, t \in [0, 1]$$

ونصف المستقيم  $[AB]$  الذي مبدؤه  $A$  ويمر بالنقطة  $B$  هو مجموعة النقاط  $M(x, y, z)$  التي تحقق:

$$(S) \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}, t \in [0, +\infty[$$

**مثال:**

نتأمل النقطتين  $A(-2,1,0), B(2,3,1)$  أعط تمثيلاً

وسيطياً لكل من القطعة المستقيمة  $[AB]$  و نصف المستقيم

$[AB]$  و نصف المستقيم  $[BA]$

**الحل:**

التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة  $[AB]$  حيث الشعاع الموجه

$$\overrightarrow{AB}(4,2,1)$$

$$[AB] \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = t \end{cases}, t \in [0, 1]$$

التمثيل الوسيطي لنصف المستقيم  $[AB]$  حيث الشعاع الموجه  $\overrightarrow{AB}(4,2,1)$  والمار من  $A$

$$[AB) \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = 2t + 1, t \in [0, +\infty[ \\ z = t + 0 \end{cases}$$

التمثيل الوسيط لنصف المستقيم  $[AB)$  حيث الشعاع الموجه  $(-1, -2, -4)$  و  $\vec{BA}$  والمار من  $B$

$$[AB) \begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = -2t + 3, t \in [0, +\infty[ \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

**السؤال 50: كيف نختار نقطة من مستوي  $P$ ؟**

**مثال:** ليكن المستوي  $P$  الذي معادلته:

$$P: 2x - y + z + 4 = 0$$

أعط نقطة  $A$  من المستوي  $P$

**الحل:** بفرض  $x = 0, y = 0$  نعوض في

$$\text{معادلة المستوي } P \text{ فنجد: } z + 4 = 0 \Rightarrow z = -4$$

فتكون النقطة  $A(0, 0, -4)$  نقطة من المستوي  $P$

**السؤال 51: كيف ندرس الوضع النسبي لمستويين مثلاً  $P$  و  $Q$ ؟**

المستويان متقاطعان	المستويان متوازيان ومختلفان	المستويان منطبقان

ليكن  $\vec{n}_P$  شعاعاً ناظماً على مستوي  $P$  وليكن  $\vec{n}_Q$  شعاعاً ناظماً على مستوي  $Q$ .  
 إذا كان  $\vec{n}_P, \vec{n}_Q$  مرتبطين خطياً كان المستويان  $P$  و  $Q$  متوازيين أو منطبقين وإذا كانا غير مرتبطين خطياً كان المستويان متقاطعين بفصل مشترك (مستقيم)  $d$  سنتعلم كتابة التمثيل الوسيط له لاحقاً وإذا كان  $\vec{n}_P, \vec{n}_Q$  متعامدين كان المستويان  $P$  و  $Q$  متعامدين، والعكس صحيح أيضاً. (التعامد حالة خاصة من التقاطع يطلب منا دراسة تعامد أو إثبات التعامد للمستويين)

كيف نعرف إذا كان المستويين متوازيين أو منطبقين؟  
 نختار نقطة من المستوي الأول ثم نعوضها بالمستوي الثاني في حال تحققت يكون المستويان منطبقين وإن لم تتحقق يكون المستويان متوازيين

معادلة المستوي  $ax + by + cz + d$  نعطي قيمة اختيارية ل  $x, y$   
 نعوضهم في المعادلة فنحصل على  $z$   
 فتكون النقطة  $A(x, y, z)$  نقطة من المستوي جاهزة

مثال: في الحالات الآتية نعطي المستويين  $P$  و  $Q$  ادرس الوضع النسبي للمستويين

$$Q: x + 2y - z + 1 = 0, \quad P: x - 4y + 7 = 0 \quad 1$$

$$Q: 2x - 4y + 6z = 0, \quad P: x - 2y + 3z - 1 = 0 \quad 2$$

$$Q: 2x + y - z + 1 = 0, \quad P: x + 2y + 4z - 5 = 0 \quad 3$$

الحل:

1 نلاحظ أنّ شعاع  $\vec{n}_p(1, -4, 0)$  شعاع ناظم على  $P$ ، و  $\vec{n}_q(1, 2, -1)$  شعاع ناظم على  $Q$ . الشعاعان  $\vec{n}_q, \vec{n}_p$  ليسا مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما ليست متناسبة، أي  $\frac{1}{1} \neq \frac{-4}{2} \neq \frac{0}{-1}$ . إذن المستويان  $P$  و  $Q$  متقاطعان بفصل مشترك  $d$  ومن الطبيعي أن نتساءل إذا كانا متعامدين. فنحسب  $\vec{n}_q \cdot \vec{n}_p = -7 \neq 0$  فنرى أنّ  $\vec{n}_q, \vec{n}_p$  ليسا متعامدين. فالمستويان  $P$  و  $Q$  غير متعامدين

2 نلاحظ أنّ شعاع  $\vec{n}_p(1, -2, 3)$  شعاع ناظم على  $P$ ، و  $\vec{n}_q(2, -4, 6)$  شعاع ناظم على  $Q$ . الشعاعان  $\vec{n}_q, \vec{n}_p$  مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما متناسبة، أي  $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6}$ . إذن المستويان  $P$  و  $Q$  متوازيين أو منطبقان ولمعرفة ذلك سنختار نقطة من المستوي  $Q$  كما تعلمنا في السؤال

50

فالنقطة  $A(0, 0, 0)$  من المستوي  $Q$  نعوضها في المستوي  $P$  فنجد:  $0 \neq -1$  غير محققة

وبالتالي فالمستويان  $P$  و  $Q$  متوازيين وليسا منطبقين

3 نلاحظ أنّ شعاع  $\vec{n}_p(1, 2, 4)$  شعاع ناظم على  $P$ ، و  $\vec{n}_q(2, 1, -1)$  شعاع ناظم على  $Q$ . الشعاعان  $\vec{n}_q, \vec{n}_p$  ليسا مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما ليست متناسبة، أي  $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{4}{-1}$ . إذن المستويان  $P$  و  $Q$  متقاطعان بفصل مشترك  $d$  ومن الطبيعي أن نتساءل إذا كانا متعامدين. فنحسب  $\vec{n}_q \cdot \vec{n}_p = 2 + 2 - 4 = 0$  فنرى أنّ  $\vec{n}_q, \vec{n}_p$  متعامدين. فالمستويان  $P$  و  $Q$  متعامدين

## السؤال 52: كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيمين $d_2, d_1$ ؟

نكتب التمثيل الوسيط للمستقيمين في حال لم يكونا مكتوبين ونرى شعاعي توجيه المستقيمين  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  في حال كان:

(1) في حال كانا الشعاعين مرتبطين خطياً كانا **المستقيمان متوازيان أو منطبقين**

(2) في حال كانا الشعاعين غير مرتبطين خطياً كانا **المستقيمان إما**

**متقاطعين أو متخالفين (ليسا في مستوي واحد)**

لمعرفة فيما إذا كان المستقيمان متوازيان أو منطبقين نسوي المركبات لهذين المستقيمين مع بعضهما فنحصل على جملة ثلاث معادلات

بمجهولين  $s$  و  $t$  نختزل المعادلات الى ابسط شكل إذا تحولت الجملة إلى ثلاث معادلات لها نفس الشكل تماماً عندها يكون حل هذه الجملة أنها تملك عدد غير منته من الحلول وبالتالي المستقيمان منطبقان  
اما إذا لم تتحول الجملة الى ثلاث معادلات لها نفس الشكل عندها تكون الجملة مستحيلة الحل والمستقيمان متوازيين.

ولمعرفة فيما إذا كان المستقيمان متخالفين أو متقاطعين نسوي المركبات لهذين المستقيمين مع بعضهما فنحصل على ثلاث معادلات

بمجهولين  $s$  و  $t$  حيث نختار معادلتين ونحلها ونعوض المجهولين في

المعادلة الثالثة للتحقق فإذا كانت محققة كان المستقيمان متقاطعين

بنقطة تقاطع  $I$  يُطلب تعينها (نعوض قيمة  $t$  في احد التمثيلين الوسيطين للمستقيمين  $d, d'$  فنحصل على فاصلة وترتيب وراقم نقطة التقاطع أي عينا نقطة التقاطع  $I$  وإذا لم تتحقق ف المستقيمين متخالفين (ليسا في مستوي واحد)

مثال: ادرس الوضع النسبي للمستقيمين  $d$  و  $d'$  المعرفين كما يأتي:

$$d: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases}, t \in \mathcal{R} \quad \text{و} \quad d': \begin{cases} x = t \\ y = -3t - 3 \\ z = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathcal{R}$$

**الحل:**

لتعيين وضع مستقيمين معرفين وسيطياً ندرس أولاً الارتباط الخطي لأشعثهما الموجهة  $\vec{u}, \vec{u}'$

للمستقيمين  $d$  و  $d'$  شعاعين موجّهين  $\vec{u}(1, -3, -3), \vec{u}'(1, -3, -1)$  بالترتيب. ولأنّ

مركّبات هذين الشعاعين ليست متناسبة استنتجنا أنّ الشعاعين  $\vec{u}, \vec{u}'$  غير مرتبطين خطياً.

وعليه، إمّا أن يكون المستقيمان  $d$  و  $d'$  **متقاطعين** أو أن يكونا متخالفين (أي غير واقعين في

مستوي واحد). ولمعرفة ذلك نكتب:

$$\begin{cases} t + 1 = s & \textcircled{1} \\ -3t + 2 = -3s - 3 & \textcircled{2} \\ -3t + 3 = -s + 1 & \textcircled{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{نعوض 1 في 2}} -3t + 2 + 3t + 3 + 3 = 0 \Rightarrow 8 \neq 0$$

ومنه فالمستقيمان  $d$  و  $d'$  متخالفيين أي لا يقعان في مستوٍ واحد.

**مثال:** ادرس الوضع النسبي للمستقيمين  $d$  و  $d'$  المعرفين كما يأتي:

$$d: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathcal{R} \quad \text{و} \quad d': \begin{cases} x = 4 - 5s \\ y = 3 - 2s \\ z = -1 + 2s \end{cases}, s \in \mathcal{R}$$

**الحل:**

للمستقيمين  $d$  و  $d'$  شعاعين موجهين  $\vec{u}(-5, -2, 2)$ ,  $\vec{u}'(0, -1, -2)$  بالترتيب. ولأن مركبات هذين الشعاعين ليست متناسبة استنتجنا أن الشعاعين  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}'$  غير مرتبطين خطياً. وعليه، إما أن يكون المستقيمان  $d$  و  $d'$  **متقاطعين** أو أن يكونا متخالفيين (أي غير واقعين في مستوٍ واحد). ولمعرفة ذلك نكتب:

$$\begin{cases} -1 = 4 - 5s & \textcircled{1} \\ 1 - t = 3 - 2s & \textcircled{2} \\ 1 - 2t = -1 + 2s & \textcircled{3} \end{cases}$$

من  $\textcircled{1}$  نجد:  $s = 1$  نعوض في  $\textcircled{2}$  نجد:  $t = 0$  نعوض قيمة  $s$ ,  $t$  في  $\textcircled{3}$  للتحقق فنجد:

تقاطع  $I(x, y, z)$  **يُطلب تعيينها:** نعوض قيمة  $t = 0$  في التمثيل الوسيطي للمستقيم

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - 0 = 1 \\ z = 1 - 2(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow I(-1, 1, 1) \quad \text{وهي نقطة التقاطع} \quad \text{فيكون: } d$$

أو يمكن تعويض قيمة  $s = 1$  في التمثيل الوسيطي للمستقيم  $d'$  فنحصل على نقطة التقاطع  $I(-1, 1, 1)$ .

**مثال:** ادرس الوضع النسبي للمستقيمين  $d$  و  $d'$  المعرفين كما يأتي:

$$d: \begin{cases} x = 4t \\ y = -1 \\ z = 2t + 2 \end{cases}, t \in \mathcal{R} \quad \text{و} \quad d': \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2 \\ z = t + 1 \end{cases}, t \in \mathcal{R}$$

**الحل:**

للمستقيمين  $d$  و  $d'$  شعاعين موجَّهين  $\vec{u}(2,0,1)$ ,  $\vec{u}'(4,0,2)$  بالترتيب. ولأنَّ مركَّبات هذين الشعاعين متناسبة استنتجنا أنَّ الشعاعين  $\vec{u}, \vec{u}'$  مرتبطين خطياً. وعليه، إمَّا أن يكون المستقيمان  $d$  و  $d'$  متوازيين أو أن يكونا منطبقين ولمعرفة ذلك نكتب:

$$\begin{cases} 4t = 2s - 1 & \textcircled{1} \\ -1 \neq 2 & \textcircled{2} \\ 2t + 2 = s + 1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

متوازيين

**مثال:** ادرس الوضع النسبي للمستقيمين  $d$  و  $d'$  المعرفين كما يأتي:

$$d: \begin{cases} x = -9t + 4 \\ y = -12t + 4 \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathcal{R} \quad \text{و} \quad d': \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 4t \\ z = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathcal{R}$$

**الحل:**

للمستقيمين  $d$  و  $d'$  شعاعين موجَّهين  $\vec{u}(-9, -12, 3)$ ,  $\vec{u}'(3, 4, -1)$  بالترتيب. ولأنَّ مركَّبات هذين الشعاعين متناسبة استنتجنا أنَّ الشعاعين  $\vec{u}, \vec{u}'$  مرتبطين خطياً. وعليه، إمَّا أن يكون المستقيمان  $d$  و  $d'$  متوازيين أو أن يكونا منطبقين ولمعرفة ذلك نكتب:

$$\begin{cases} 3t + s - 1 = 0 \\ 3t + s - 1 = 0 \\ 3t + s - 1 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \text{نختزل} \\ \iff \\ \end{matrix} \begin{cases} -9t + 4 = 3s + 1 & \textcircled{1} \\ -12t + 4 = 4t & \textcircled{2} \\ 3t = -s + 1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

متساوية وبالتالي الجملة هي المعادلة  $3t + s - 1 = 0$  لها عدد غير منتهٍ من الحلول فالمستقيمان منطبقان.

## السؤال 53: كيف نكتب التمثيل الوسيطى للفصل المشترك $d$ الناتج عن

### تقاطع المستويين $P$ و $Q$ ؟

**الطريقة الأولى:** نحل جملة معادلتى المستويين حيث نستخدم غالباً الحذف بالتعويض نعبر عن  $y$  و  $x$  بدلالة  $z$  حيث يأخذ المجهول

$z$  أية قيمة حقيقية فنعتبر بالنهاية

$z = t$  تسهيلاً للكتابة فنكون قد حصلنا على التمثيل الوسيطى للفصل بدلالة الوسيط  $t$

**الطريقة الثانية:** نعطي قيمة لاحد المتغيرات وليكن  $z$  مثلاً ونعوضه في معادلتى المستويين

فنحصل على جملة معادلتين بمجهولين  $y$  و  $x$  بالحل المشترك نحصل عليهما

فنحصل على نقطة  $A(x, y, z)$

نعيد إعطاء قيمة اختيارية أخرى لنفس المتغير  $z$  ونعوضها في معادلتى المستويين

فنحصل على جملة معادلتين بمجهولين  $y$  و  $x$  بالحل المشترك نحصل عليهما

فنحصل على نقطة  $B(x, y, z)$  فيكون الشعاع  $\vec{AB}$  هو شعاع توجيه الفصل المشترك فنكتب تمثيله الوسيطى كما تعلمنا سابقاً

ملاحظة: فى الطريقة الثانية ليس بالضرورة ان نختار المتغير  $z$  دائماً يمكنك اختيار  $y$  او  $x$

نتأمل المستويين  $P_1: 2x + y - z + 2 = 0$  و  $P_2: x + 2y - z + 1 = 0$ .

نتيقن أن هذين المستويين متقاطعان،

ثم جد تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك  $d$ .

**الحل:** للمستويين  $P_1, P_2$  الشعاعين الناظرين  $\vec{n}_1(2, 1, -1), \vec{n}_2(1, 2, -1)$  بالترتيب.

الشعاعان  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة،

**الطريقة الأولى:** إذن المستويان  $P_1, P_2$  متقاطعان. تنتمي  $M(x, y, z)$  الى

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \text{ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:}$$

لحل هذه الجملة، نستعمل طريقة الحذف بالتعويض، فنعتبر مثلاً عن  $x$  و  $y$  بدلالة  $z$  :

$$\begin{cases} 2x + y = z - 2 & L_1 \\ x + 2y = z - 1 & L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = z - 2 & L_1 \\ \frac{3}{2}y = \frac{1}{2}z & (L_2 - \frac{1}{2}L_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = z - 2 & (L_1') \\ y = \frac{1}{3}z & (L_2') \end{cases}$$

ومنه  $y = \frac{1}{3}z$  و  $x = \frac{1}{3}z - 1$  يأخذ المجهول  $z$  أية قيمة حقيقية. يمكننا إذن أن نرمز إليه

بالرمز  $z = t$  تسهيلاً للكتابة ليصبح انتماء  $M(x, y, z)$  إلى  $d$  مكافئاً للشرط

$$(d) \text{ وهو التمثيل الوسيطى للفصل المشترك } d \begin{cases} x = \frac{1}{3}t - 1 \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**الطريقة الثانية:** نعطي قيمة إختيارية ل  $z = 0$  نعوض في معادلتى المستويين فيكون:

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{نضرب المعادلة الثانية بـ } -2} \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ -2x - 4y - 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالجمع}} \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ -3y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -1$$

ومنه  $A(-1,0,0)$

نعطي قيمة إختيارية ل  $z = 1$  نعوض في معادلتى المستويين فيكون:

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{نضرب المعادلة الثانية بـ } -2} \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالجمع}} \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ -3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

ومنه  $B(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1)$  ومنه يكون  $\overrightarrow{AB}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$  شعاع توجيه الفصل المشترك  $d$  نكتب

$$(d): \begin{cases} x = \frac{1}{3}t - 1 \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}; t \in \mathbb{R} \text{ وهو نفسه التمثيل الوسيطى الذي كتبناه.}$$

### السؤال 54: كيف نكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم $d$ المار بنقطة مثلاً

بما أن المستقيم  $d$  عامودي على المستوي  $P$  ومنه يكون ناظم المستوي  $P$

هو نفسه شعاع توجيه المستقيم  $d$  أي  $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_P}$  ومنه نكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم  $d$  شعاع توجيهه هو ناظم المستوي  $P$  ويمر بالنقطة  $I$

### $I$ وعمودي على مستوي $P$ مثلاً؟

**مثال:** اكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم

$d$  المار من  $J(2,1,0)$  والعمودي على المستوي  $P$  الذي معادلته:

$$P: x + y - 4z = 0 \text{ الحل: } \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_P}(1,1,-4) \text{ لأن } d \perp P \text{ ومنه يكون}$$

$$(d) \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = -4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ هو: } J(2,1,0) \text{ والنقطة } d \text{ والمار بالنقطة}$$

## السؤال 55: كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيم $d$ مع مستوي $P$ ؟

اما ان يكون المستقيم موازي للمستوي أو محتوي فيه أو قاطع له

المستقيم يتقاطع مع المستوي	المستقيم يوازي المستوي	المستقيم محتوي في المستوي

**ملاحظة:** التعامد حالة خاصة من التقاطع.

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم  $d$  ثم نكتب كلاً من شعاع توجيه المستقيم  $\vec{u}_d$  و الشعاع الناطم على المستوي  $\vec{n}_p$

إذا كان  $\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$  فالمستقيم قاطع للمستوي بنقطة تقاطع  $I$  يطلب تعيينها ولتعيينها نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة المستوي فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى بدلالة الوسيط  $t$  نحلها فنحصل على قيمة  $t$

نعوض قيمة  $t$  في معادلة التمثيل الوسيطي للمستقيم فنحصل على نقطة تقاطع  $I$  هذا المستقيم مع المستوي.

اما إذا كان  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  فالمستقيم إما يوازي المستوي أو محتوي فيه نعوض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي اذا كانت المعادلة مستحيلة الحل أي  $0t = a$  فيكون المستقيم يوازي المستوي اما في حال توصلت المعادلة الى الشكل  $0=0$  عندها يكون المستقيم محتوي في المستوي

## دراسة تقاطع المستقيم والمستوي وتعيين نقطة التقاطع؟

**مثال:** نتأمل النقطتين  $A(2,1,-2)$  و  $B(-1,2,1)$ . والمستوي  $P: 2x - y + z - 2 = 0$  تبين أن  $(AB)$  يقطع المستوي  $P$  في نقطة  $I$  يُطلب تعيين إحداثياتها.

**الحل:**

المستقيم  $(AB)$  شعاع موجّه  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(-3,1,3)$  و يمر من  $A(2,1,-2)$  فيكون التمثيل الوسيطي ل  $(AB)$ :

$$(AB): \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 3t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ونلاحظ أنّ  $\vec{n}(2,-1,1)$  هو وناظم المستوي  $P$  ونلاحظ أنّ

$\vec{n} \cdot \vec{u} = -4 \neq 0$  فالشعاعان  $\vec{n}, \vec{u}$  غير متعامدين مما يثبت تقاطع المستقيم  $(AB)$  والمستوي  $P$

لإيجاد نقطة تقاطع  $I(x, y, z)$  المستقيم  $(AB)$  مع المستوي  $P$  نعوض التمثيل الوسيطى للمستقيم في معادلة المستوي فينتج:  $2(-3t + 2) - t - 1 + 3t - 2 - 2 = 0 \Rightarrow -4t - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} x = -3\left(-\frac{1}{4}\right) + 2 = \frac{11}{4} \\ y = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \\ z = 3\left(-\frac{1}{4}\right) - 2 = -\frac{11}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{نقطة التقاطع تكون}} I\left(\frac{11}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{11}{4}\right)$$

**مثال:** في الحالات الآتية ادرس تقاطع المستقيم  $d$  والمستوي  $P$ .

$$d: \begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s + 1, s \in \mathbb{R}, P: 2x + 3y - z = 0 \end{cases} \quad 2, \quad d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t, t \in \mathbb{R}, P: x - y + z = 1 \end{cases} \quad 1$$

**الحل:** 1) إن شعاع توجيه المستقيم  $d$  هو  $\vec{u}_d(2, 1, -3)$  وناظم المستوي  $P$  هو  $\vec{n}(1, -1, 1)$  ونلاحظ أن  $\vec{n} \cdot \vec{u} = -2 \neq 0$  فالشعاعان  $\vec{n}, \vec{u}$  غير متعامدين مما يثبت تقاطع المستقيم  $(d)$  والمستوي  $P$  لإيجاد نقطة تقاطع  $I(x, y, z)$  المستقيم  $(d)$  مع المستوي  $P$  نعوض التمثيل الوسيطى للمستقيم في معادلة المستوي فينتج:

$$2t - 1 - t + 1 - 3t - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{نقطة التقاطع تكون}} I\left(-2, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

(2) بنفس الأسلوب

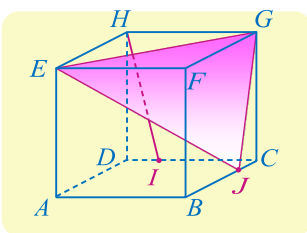
### السؤال 56: كيف نثبت أن مستقيم يوازي مستوي؟

طريقة أولى: نثبت أن شعاع توجيه  $\vec{u}$  للمستقيم  $d$  وشعاعي توجيه المستوي  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$

تقع جميعها في مستوي واحد أي: نثبت أن  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  مرتبطة خطياً وذلك كما تعلمنا في السؤال 19

طريقة ثانية: نثبت أن شعاع توجيه  $\vec{u}$  للمستقيم  $d$  يعامد الشعاع الناظم  $\vec{n}$  على المستوي  $P$  أي نثبت أن:  $\vec{n}_P \cdot \vec{u}_d = 0$

**مثال:**



لنتأمل المكعب  $ABCDEFGH$ . النقطة  $I$  من الحرف  $[CD]$  تحقق المساواة  $\vec{DI} =$

$\frac{1}{4}\vec{DC}$ ، والنقطة  $J$  من  $[BC]$  تحقق المساواة

$\vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{BC}$ . أثبت أن المستقيم  $(HI)$  يوازي المستوي  $(EGJ)$ .

**الحل:**

لإثبات ان المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ)، باستعمال الأشعة، يكفي، على سبيل المثال

إثبات ان الأشعة  $\vec{EJ}, \vec{EG}, \vec{HI}$  واقعة في مستو واحد ونثبت ذلك كما تعلمنا في السؤال 19

نختار  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$  معلماً في الفراغ فيكون

$$A(0,0,0), E(0,0,1), G(1,1,1), J\left(1, \frac{3}{4}, 0\right), I\left(\frac{1}{4}, 1, 0\right), H(0,1,1)$$

$$\vec{EJ}\left(1, \frac{3}{4}, -1\right), \vec{EG}(1,1,0), \vec{HI}\left(\frac{1}{4}, 0, -1\right) \text{ فيكون:}$$

نلاحظ أن الشعاعين  $\vec{EG}, \vec{EJ}$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة أي:

$$\vec{HI} = a\vec{EG} + b\vec{EJ} \text{ بالشكل: ولنثبت أن } \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{0}{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} = a + b & (1) \\ 0 = a + \frac{3}{4}b & (2) \\ -1 = -b & (3) \end{cases}$$

من (3) نجد أن  $b = 1$  نعوضها في (1) نجد

$$0 = a - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}(1) \text{ نعوض قيمة } a, b \text{ في (2) للتحقق } a = -\frac{3}{4}$$

$0 = 0$  محققة إذاً  $\vec{HI} = \vec{EG} - \frac{3}{4}\vec{EJ}$  وبالتالي الأشعة  $\vec{HI}, \vec{EG}, \vec{EJ}$  مرتبطة خطياً أي واقعة في مستو واحد ومنه (HI) يوازي المستوي (EGJ)

طريقة ثانية: لنوجد ناظم المستوي كما تعلمنا سابقاً

الحل: لنوجد الشعاعين  $\vec{EJ}, \vec{EG}$

$$\vec{EG}(1,1,0), \vec{EJ}\left(1, \frac{3}{4}, -1\right), \text{ نلاحظ أن الشعاعين } \vec{EG}, \vec{EJ} \text{ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة أي: } \frac{1}{1} \neq \frac{1}{\frac{3}{4}} \neq \frac{0}{-1}$$

ونفرض أن:  $\vec{n}(a, b, c)$  ناظم على المستوي P والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي  $\vec{EJ}, \vec{EG}$

$$\text{لذلك نضع: } \vec{n} \cdot \vec{EG} = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \vec{EJ} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{EG} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(1,1,0) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{EJ} = 0 \Rightarrow (a, b, c)\left(1, \frac{3}{4}, -1\right) \Rightarrow a + \frac{3}{4}b - c = 0 \quad (2)$$

نضع  $C = 1$  نعوض في (2) فيكون

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + \frac{3}{4}b - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالطرح}} \begin{cases} -\frac{1}{4}b - 1 = 0 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

ومنه: أن  $\vec{n}(4, -4, 1)$  ناظم المستوي p و  $\vec{HI}\left(\frac{1}{4}, 0, -1\right)$  شعاع توجيه المستقيم (HI)

$$P \text{ يوازي المستوي (HI) ومنه فالمتجه } \vec{n} \cdot \vec{HI} = (4, -4, 1) \cdot \left(\frac{1}{4}, 0, -1\right) = 1 - 1 = 0$$

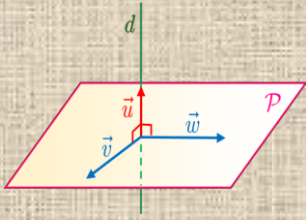
مثال: اثبت ان المستقيم  $d$  ,  $t \in \mathbb{R}$   $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t + 3 \\ z = t \end{cases}$  يوازي المستوي  $p: x - 2y - 6z - 3 = 0$

الحل: أن شعاع توجيه المستقيم  $d$  و  $\vec{u}(2, -2, 1)$  ناظم المستوي  $p$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = (1, -2, -6) \cdot (2, -2, 1) = 2 + 4 - 6 = 0$$

**السؤال 57: كيف نثبت أن مستقيم  $d$  عامودي مستوي  $P$ ؟**

**طريقة أولى:** يكفي أن نثبت أن شعاع توجيه



$\vec{u}$  لمستقيم  $d$  يعامد زوج  $(\vec{v}, \vec{w})$

من الاشعة المستقلة خطياً في مستوي  $P$

**طريقة ثانية:**

نثبت أن شعاع توجيه  $\vec{u}$  للمستقيم  $d$

مرتبط خطياً مع شعاع الناظم  $\vec{n}$

على المستوي  $P$

**مثال:**

في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نتأمل نقطتين  $A(2, 5, 3)$  و  $B(-1, 0, 1)$  ومستوي  $P$  يقبل

$\vec{v}(3, -1, -1)$  , شعاعين موجيين. أثبت أن المستقيم  $(AB)$  عمودي على المستوي  $P$

**الحل:**

لنوجد شعاع توجيه المستقيم  $(AB)$  وليكن  $\vec{w}$

$$\vec{w}(-3, -5, -4)$$

نلاحظ أن الشعاعين  $\vec{u}, \vec{v}$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

$$\text{أي: } \frac{1}{3} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{-1}$$

لنثبت أن شعاع توجيه المستقيم  $\vec{w}$  يعامد الشعاع  $\vec{u}$  أي لنثبت أن  $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (1, 1, -2) \cdot (-3, -5, -4) = -3 - 5 + 8 = 0$$

المستقيم  $\vec{w}$  يعامد الشعاع  $\vec{u}$

ولنثبت أن شعاع توجيه المستقيم  $\vec{w}$  يعامد الشعاع  $\vec{v}$  , أي لنثبت أن

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (3, -1, -1) \cdot (-3, -5, -4) = -9 + 5 + 4 = 0$$

وبالتالي فإن المستقيم  $(AB)$  عامودي على المستوي  $P$  كون شعاع توجيهه يعامد زوج

$(\vec{v}, \vec{w})$  من الاشعة المستقلة خطياً في المستوي.

**طريقة ثانية** يمكننا إيجاد ناظم هذا المستوي  $\vec{n}$  كما تعلمنا سابقاً ونثبت أنه مرتبط خطياً مع شعاع توجيه

المستقيم  $(AB)$

نفرض أن  $\vec{n}(a, b, c)$  ناظم على المستوي  $P$  والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي  $\vec{u}, \vec{v}$  لذلك

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(1, 1, -2) = 0 \Rightarrow a + b - 2c = 0 \quad \text{①}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(3, -1, -1) \Rightarrow 3a - b - c = 0 \quad \text{②}$$

نضع  $C = 1$  نعوض في ① و ② فيكون

$$\begin{cases} a + b - 2 = 0 \\ 3a - b - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالجمع}} 4a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{5}{4}$$

ومنه  $\vec{n}(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 1)$  ناظم على المستوي  $P$  وشعاع توجيه المستقيم  $(AB)$  وليكن  $\vec{w}$

نلاحظ ان الشعاعين  $\vec{n}, \vec{w}$  مرتبطين خطياً لأن مركباتهما متناسبة أي:

$$\frac{-3}{\frac{3}{4}} = \frac{-5}{\frac{5}{4}} = \frac{-4}{1}$$

وبالتالي فإن المستقيم  $(AB)$  عامودي على المستوي  $P$ .

**مثال:**

نتأمل في معمل  $M$  متجانس  $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  النقاط:

$A(2, 1, 3)$  و  $B(1, 0, -1)$  و  $C(4, 0, 0)$  و  $D(0, 4, 0)$  و  $E(1, -1, 1)$  أثبت أن النقاط  $C$

و  $D$  و  $E$  ليست واقعة على استقامة واحدة.

أثبت أن المستقيم  $(AB)$  عمودي على المستوي  $(CDE)$

**الحل:** لنوجد الشعاعين  $\vec{CD}, \vec{CE}$

$$\vec{CD}(-4, 4, 0), \vec{CE}(-3, -1, 1)$$

نلاحظ ان الشعاعين  $\vec{CD}, \vec{CE}$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة أي:

$$\frac{-4}{-3} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{0}{1}$$

ولإثبات أن المستقيم  $(AB)$  عمودي على المستوي  $(CDE)$  نثبت أن شعاع توجيه المستقيم  $(AB)$  وليكن

$$\vec{u} \text{ يعامد كلاً من } \vec{CD}, \vec{CE}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{CE} = (-1, -1, -4)(-3, -1, 1) = 3 + 1 - 4 = 0$$

و

$$\vec{u} \cdot \vec{CD} = (-1, -1, -4)(-4, 4, 0) = 4 - 4 = 0$$

وبالتالي فإن المستقيم  $(AB)$  عامودي على المستوي  $(CDE)$  كون شعاع توجيهه يعامد

زوج  $(\vec{v}, \vec{w})$  من الأشعة المستقلة خطياً في المستوي.

**طريقة ثانية:** يمكننا إيجاد ناظم هذا المستوي  $\vec{n}$  كما تعلمنا سابقاً ونثبت أنه مرتبط خطياً مع

شعاع توجيه المستقيم  $(AB)$

ونفرض أن:  $\vec{n}(a, b, c)$  ناظم على المستوي  $P$  والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي  $\vec{CD}, \vec{CE}$

$$\vec{n} \cdot \vec{CD} = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \vec{CE} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{CE} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(-3, -1, 1) = 0 \Rightarrow -3a - b + c = 0 \quad \text{①}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{CD} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(-4, 4, 0) \Rightarrow -4a + 4b = 0 \quad \text{②}$$

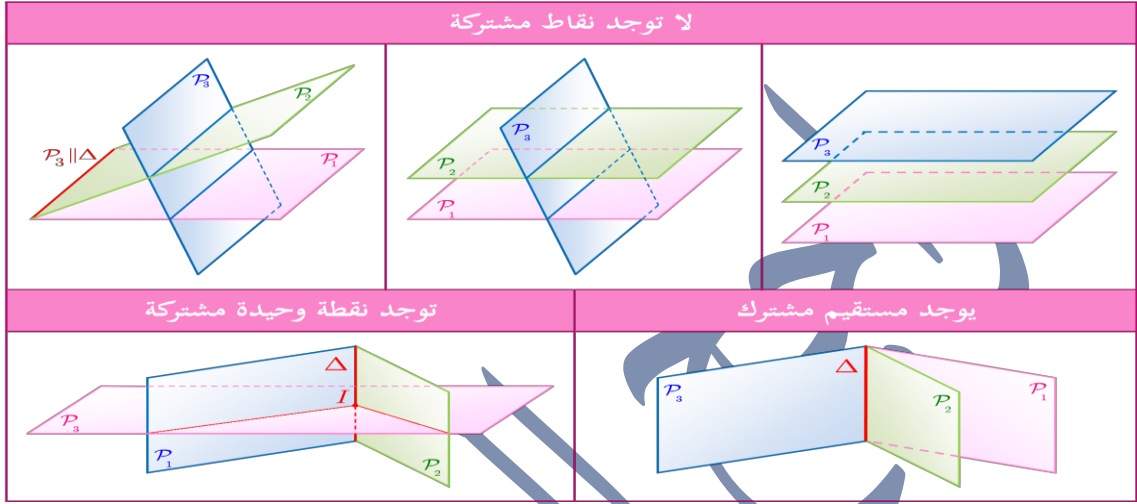
نضع  $a = 1$  نعوض في ② فيكون  $b = 1$  نعوض قيمة  $b$  و  $a$  في ① نجد  $c = 4$

ومنه  $\vec{n}(1,1,4)$  ناظم على المستوي  $P$  و أن شعاع توجيه المستقيم  $(AB)$  وليكن  $\vec{u}(-1,-1,-4)$

نلاحظ ان الشعاعين  $\vec{n}, \vec{u}$  مرتبطين خطياً لأن مركباتهما متناسبة أي:  $\frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} = \frac{4}{-4}$

وبالتالي فإن المستقيم  $(AB)$  عامودي على المستوي  $P$ .

### السؤال 58: كيف ندرس الوضع النسبي لثلاث مستويات؟



نحل جملة ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل.  
 إذا كان لها حل وحيد كانت المستويات تشترك بنقطة واحدة.  
 إذا كان لها عدد غير منته من الحلول كانت المستويات تشترك بمستقيم.  
 إذا لم تكن لها أي حل فإنها لا تشترك معاً بأي نقطة.  
 ملاحظة: يتم حل جملة ثلاث معادلات بطريقة غاوس أو طريقة الحذف بالتعويض أو الحذف بالجمع.

سأشرح كل طريقة على حدى:

❖ طريقة (المزج بالتعويض): تعتمد هذه الطريقة على إرجاع هذه الجملة إلى جملة معادلتين خطيتين

بمجهولين وذلك عن طريق معاملة أحد هذه المجاهيل بصفته مقداراً ثابتاً حيث سنختار معادلتين 1 و 2 ونعزل مجهول في الطرف الآخر وليكن  $z$  ونتعامل معه على انه مقدار ثابت ونحل جملة المعادلتين حلاً مشتركاً حيث سنوجد قيمة  $x$  بدلالة  $z$  وكذلك سنوجد  $y$  بدلالة  $z$  نعوض هذه القيم في المعادلة 3 سنحصل على أحد الاشكال الثلاثة:

➤  $0. z = \alpha \in \mathbb{R}^*$  نستنتج أن الجملة مستحيلة الحل.

➤  $0. z = 0$  نستنتج ان المعادلة لها عدد غير منتهٍ من الحلول.

➤  $\alpha z = \beta \in \mathbb{R}^*$  نستنتج أن للمعادلة حل وحيد

مثال: بين إذا كانت هذه المستويات تشترك في نقطة فقط أو في مستقيم مشترك أو لا تشترك في أي نقطة:

$$\begin{cases} P_3: x + y - z = 2 & \text{1} \\ P_2: x - 2y + z = 1 & \text{2} \\ P_3: 2x - y + 3z = 0 & \text{3} \end{cases}$$

الحل: سنحل هذه الجملة بطريقة الحذف بالتعويض كما شرحنا

نختار المعادلتين 1 و 2 ونحلهم حل مشترك

$$\begin{cases} x + y = 2 + z & \text{بالطرح} \\ x - 2y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow 3y = 1 + 2z \Rightarrow y = \frac{1+2z}{3} \Rightarrow x = \frac{5+z}{3}$$

نعوض قيمة  $x$  و  $y$  في 3 فينتج:

$$2\left(\frac{5+z}{3}\right) - \frac{1+2z}{3} + 3z = 0 \xrightarrow{\text{بالضرب ب3}} 10 + 2z - 1 - 2z + 9z = 0 \Rightarrow z = -1$$

ومنه يكون  $x = \frac{4}{3}$  و  $y = -\frac{1}{3}$  وبذلك يكون قد أثبتنا أن الجملة حلاً وحيداً هو  $(x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$

ومنه فالمستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة وحيدة احداثياتها هي  $I\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$

❖ طريقة غاوس: نكتب المعادلات الخطية بالشكل النهائي ويفضل أن تكون المعادلة الخطية الأولى

ذات أمثال  $x$  إما  $1$  أو  $-1$

نحذف  $x$  من المعادلة  $L_2$  و  $L_3$  وهذه المرحلة الأولى فنحصل على  $L_1, L_2', L_3'$  والمرحلة الثانية

نحذف  $y$  من  $L_3'$

نحل جملة المعادلات الأخيرة بدءاً من الأدنى وباتجاه الأعلى .

بأسلوب آخر نجعل المعادلة التي أمثال  $x$  فيها  $1$  هي المعادلة الأولى ثم : نضرب المعادلة الأولى بمعاكس أمثال  $x$

في المعادلة الثانية ونضيف الناتج للمعادلة الثانية ونضرب المعادلة الأولى بمعاكس أمثال  $x$  في المعادلة الثالثة ونضيف الناتج

للمعادلة الثالثة فنحصل على جملة جديدة لا تحوي المتحول  $x$  في المعادلتين الثانية والثالثة نطبق نفس العملية بالنسبة

للمعادلتين الثانية والثالثة في الجملة الجديدة فنحصل على جملة جديدة تحوي متحول واحد في الثالثة ومتحولين في

الثانية وثلاثة متحولات في الأولى نوجد القيم بدءاً من الثالثة ثم الثانية ثم الأولى

مثال: تتأمل المستويات : 
$$\begin{cases} P_1: -x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ P_2: 3x - y - 4z + 5 = 0 \\ P_3: 2x + 3y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$
 أثبت أن هذه المستويات تتقاطع في نقطة واحدة يُطلب تعيين

احداثياتها.

الحل: سنحل هذه الجملة اعتماداً على طريقة غاوس كما شرحنا:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & L_1 \\ 3x - y - 4z = -5 & L_2 \\ 2x + 3y - 2z = -2 & L_3 \end{cases}$$

نحذف  $x$  من المعادلتين  $L_2$  و  $L_3$  وذلك عن طريق جمع ثلاثة أمثال الأولى إلى  $L_2$  و جمع مثلي الأولى إلى  $L_3$  أي:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & (L_1) \\ 5y + 5z = 10 & (L_2 + 3L_1) \\ 7y + 4z = 8 & (L_3 + 2L_1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & (L_1) \\ 5y + 5z = 10 & (L'_2) \\ 7y + 4z = 8 & (L'_3) \end{cases}$$

ثم نحذف  $y$  من المعادلة  $L'_3$  وذلك عن طريق طرح منها سبعة أمثال  $L'_2$  فنجد:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & (L_1) \\ y + z = 2 & (L'_2) \\ -3z = -6 & (L'_3 - 7L'_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & (L_1) \\ y + z = 2 & (L'_2) \\ z = 2 & (L'_3) \end{cases}$$

ومنه  $y = 0$  و  $x = 1$  فالجملة تقبل حلاً وجيداً  $(x, y, z) = (1, 0, 2)$  ومنه فالمستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة وحيدة احداثياتها هي  $I(1, 0, 2)$

مثال: بين إذا كانت هذه المستويات تشارك في نقطة فقط أو في مستقيم مشترك أو لا تشارك في أي نقطة:

$$\begin{cases} P_3: 2x - y + 3z = 0 \\ P_2: x + 2y + z = 0 \\ P_1: 3x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & L_1 \\ 2x - y + 3z = 0 & L_2 \\ 3x - 4y + 5z = 0 & L_3 \end{cases}$$

الحل سنحل هذه الجملة اعتماداً على طريقة غاوس كما شرحنا:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & (L_1) \\ -5y + z = 0 & (-2L_1 + L_2) \\ -10y + 2z = 0 & (-3L_1 + L_3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 & (L_1) \\ -5y + z = 0 & (L'_2) \\ -10y + 2z = 0 & (L'_3) \end{cases}$$

$$\text{ومنه } x + 2y + 5y = 0 \Rightarrow x = -7y \text{ وبالتالي: } -5y = -z \Rightarrow z = 5y \text{ ومنه } \begin{cases} x + 2y + z = 0 & (L_1) \\ -5y + z = 0 & (L'_2) \\ 0 = 0 & (-2L'_2 + L'_3) \end{cases}$$

فالجملة تقبل عدد غير منته من الحلول  $S = \{(-7y, y, 5y) ; y \in \mathcal{R}\}$  فالمستويات الثلاثة تتقاطع بفصل مشترك.

## السؤال 59: كيف نوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستويات الثلاثة $P_1, P_2, P_3$ ؟

**الطريقة الأولى:** كما تعلمنا سابقاً وذلك بحل جملة المعادلات الثلاثة

**الطريقة الثانية:** بما ان المستويات الثلاثة تتقاطع بنقطة يُطلب إيجاد إحداثياتها لذلك سنكتب التمثيل الوسيطى للفصل المشترك بين المستويين  $P_1, P_2$  ونعوض هذا التمثيل في معادلة المستوي

الثالث  $P_3$  فنحصل على معادلة بمجهول واحد  $t$  نحلها ونقوم بتعويض قيمة  $t$  في التمثيل الوسيطى للفصل المشترك الناتج عن تقاطع المستويين  $P_1, P_2$  فنحصل على إحداثيات نقطة التقاطع  $I$

$$\begin{cases} P_1: -x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ P_2: 3x - y - 4z + 5 = 0 \\ P_3: 2x + 3y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

مثال: عين نقطة تقاطع المستويات الثلاثة:

**الحل:** الطريقة الأولى: سنحل هذه الجملة اعتماداً على طريقة غاوس كما شرحنا:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & L_1 \\ 3x - y - 4z = -5 & L_2 \\ 2x + 3y - 2z = -2 & L_3 \end{cases}$$

حذف  $x$  من المعادلتين  $L_2$  و  $L_3$  وذلك عن طريق جمع ثلاثة أمثال الأولى إلى  $L_2$  و جمع مثلي

الأولى إلى  $L_3$  أي:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & (L_1) \\ 5y + 5z = 10 & (L_2 + 3L_1) \\ 7y + 4z = 8 & (L_3 + 2L_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & (L_1) \\ 5y + 5z = 10 & (L'_2) \\ 7y + 4z = 8 & (L'_3) \end{cases}$$

ثم نحذف  $y$  من المعادلة  $L'_3$  وذلك عن طريق طرح منها سبعة أمثال  $L'_2$  فنجد:

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & (L_1) \\ y + z = 2 & (L'_2) \\ -3z = -6 & (L'_3 - 7L'_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3z = 5 & (L_1) \\ y + z = 2 & (L'_2) \\ z = 2 & (L'_3) \end{cases}$$

ومنه  $y = 0$  و  $x = 1$  فالجملة تقبل حلاً وجيداً  $(x, y, z) = (1, 0, 2)$  ومنه فالمستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة وحيدة إحداثياتها هي  $I(1, 0, 2)$

**الطريقة الثانية:**

لنوجد التمثيل الوسيطى للفصل المشترك  $d$  الناتج عن تقاطع المستويين  $P_1, P_2$  وذلك كما تعلمنا

سابقاً وكتابته لدينا طريقتين:

طريقة أولى لكتابة التمثيل الوسيطى للفصل المشترك:

المستويان  $P_1$  و  $P_2$  متقاطعان. تنتمي  $M(x, y, z)$  الى

$d$  إذا وفقط إذا تحقق الشرطان: 
$$\begin{cases} -x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ 3x - y - 4z + 5 = 0 \end{cases}$$
 لحل هذه الجملة، نستعمل طريقة الحذف بالتعويض، فنعتبر مثلاً عن  $x$  و  $y$  بدلالة  $z$ :

$$\begin{cases} -x + 2y = 5 - 3z & L_1 \\ 3x - y = -5 + 4z = 0 & L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 5 - 3z & L_1 \\ 5y = 10 - 5z & L_2 + 3L_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 5 - 3z & L_1' \\ y = 2 - z & L_2' \end{cases}$$

ومنه  $x = -1 + z$  و  $y = 2 - z$  يأخذ المجهول  $z$  أية قيمة حقيقية. يمكننا إذن أن نرمز

إليه بالرمز  $z = t$  تسهيلاً للكتابة ليصبح انتماء  $M(x, y, z)$  إلى  $d$  مكافئاً للشرط

$$(d) \text{ وهو التمثيل الوسيطى للفصل المشترك } d. \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -t + 2, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

نعوض التمثيل الوسيطى للفصل المشترك في معادلة المستوي الثالث  $P_3$  ينتج:

$$2(t - 1) + 3(-t + 2) - 2(t) + 2 = 0 \Rightarrow -3t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2$$

نعوض قيمة  $t$  في التمثيل الوسيطى للفصل المشترك  $d$ :

$$\begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = -2 + 2 = 0 \\ z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ومنه نقطة التقاطع تكون}} I(1, 0, 2)$$

طريقة ثانية لكتابة الفصل المشترك: نعطي قيمة إختيارية ل  $z = 0$  نعوض في معادلتى المستويين فيكون:

$$\begin{cases} -x + 2y - 5 = 0 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب المعادلة الثانية بـ 2}} \begin{cases} -x + 2y - 5 = 0 \\ 6x - 2y + 10 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالجمع}} 5x + 5 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$$

ومنه  $A(-1,2,0)$

نعطي قيمة إختيارية ل  $Z = 1$  نعوض في معادلتى المستويين فيكون:

$$\begin{cases} -x + 2y - 2 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{عبر المعادلة الثانية بـ } 2} \begin{cases} -x + 2y - 2 = 0 \\ 6x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالجمع}} 5x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$$

ومنه  $B(0,1,1)$  وممنه يكون  $\overrightarrow{AB}(1, -1, 1)$  شعاع توجيه الفصل المشترك  $d$  نكتب التمثيل الوسيطى

$$(d): \begin{cases} x = t - 1 \\ -t + 2 \\ t \end{cases} ; t \in \mathcal{R} \text{ له: نعوض التمثيل الوسيطى للفصل المشترك في معادلة المستوى الثالث } P_3 \text{ ننتج:}$$

$$2(t - 1) + 3(-t + 2) - 2(t) + 2 = 0 \Rightarrow -3t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2$$

نعوض قيمة  $t$  في التمثيل الوسيطى للفصل المشترك  $d$ :

$$\begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = -2 + 2 = 0 \\ z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ومنه نقطة التقاطع تكون}} I(1,0,2)$$

## السؤال 60: كيف نوجد إحداثيات المسقط القائم $A'$ لنقطة $A$ على مستقيم $d$ ؟

**الطريقة الأولى:** نكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم  $d$  وهو:  $(d): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$  في حال

لم يكن مكتوب ثم نفرض أن  $A'(at + x_0, bt + y_0, ct + z_0)$  مسقط القائم ل  $A$  على  $d$  ثم نوجد الشعاعين  $\overrightarrow{AA'}$ ,  $\overrightarrow{u_d}$  ونكتب:  $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$  فنحصل على معادلة بمجهول واحد  $t$  نحلها ونعوض قيمة  $t$  في  $A'$  فنحصل على احداثياتها.

**الطريقة الثانية:** نكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم  $d$  وهو:  $(d): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$  في حال

لم يكن مكتوب ثم نفرض أن  $A'$  المسقط القائم ل  $A$  على  $d$  فيكون ثها الاحداثيات:  $A'(at + x_0, bt + y_0, ct + z_0)$  ونشكل التابع  $f(t) = AA'^2$  ندرس اطراد هذا التابع ونحدد قيمة  $t$  الموافقة لاصغر قيمة للتابع  $f$  ثم نعوض قيمة  $t$  في  $A'$  فنحصل على احداثياتها

مثال: اوجد المسقط القائم لنقطة  $A(3, -1, 2)$  على المستقيم

$$(d): \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \text{ حيث}$$

الحل: نفرض أن

المسقط القائم  $A'(-t + 3, -t + 2, t)$  على  $A$  على  $d$  ولنوجد

الشعاعين  $\vec{AA'}$  و  $\vec{u_d}$ :

$$\vec{u_d} \cdot \vec{AA'} = 0 \text{ ولنكتب: } \vec{AA'}(-t, -t + 3, t - 2) \text{ و } \vec{u_d}(-1, -1, 1)$$

$$(-t, -t + 3, t - 2) \cdot (-1, -1, 1) = 0 \Rightarrow t + t - 3 + t - 2 = 0 \text{ فيكون}$$

ومنه:  $t = \frac{5}{3}$  نعوض قيمة  $t$  في  $A'$  فتكون احداثيات المسقط القائم

$$A'(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$$

الطريقة الثانية: نفرض ان  $A'(-t + 3, -t + 2, t)$  سقط القائم ل  $A$  على  $d$  ونشكل

$$f(t) = AA'^2 \text{ التابع ندرس اطراد هذا التابع حيث: } f(t) = 3t^2 - 10t + 13$$

$$f'(t) = 6t - 10 \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{14}{3} \text{ ومنه:}$$

ومنه :

$t$	$\frac{5}{3}$
$f'(t)$	- 0 +
$f(t)$	$\frac{14}{3}$

ومنه:  $t = \frac{5}{3}$  نعوض قيمة  $t$  في  $A'$  فتكون احداثيات المسقط القائم

$$A' \left( \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

**السؤال 61:** كيف نوجد بُعد النقطة  $A$  عن المستقيم  $d$  أو عن الفصل المشترك

**$d$  الناتج من تقاطع مستويين؟**

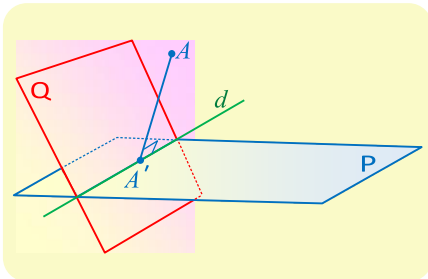
نوجد المسقط القائم  $A'$  للنقطة  $A$  على المستقيم  $d$  كما تعلمنا سابقاً  
ثم نوجد البعد بُعد  $A$  عن  $A'$  حيث أن  $AA'$  يمثل بعد النقطة  $A$  عن المستقيم  $d$

**مثال:** المستويين  $P$  و  $Q$  حيث:  $\begin{cases} P: 2x - y + z - 4 = 0 \\ Q: x + y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$  متقاطعان أوجد بُعد

$A(3, -1, 2)$  عن الفصل المشترك  $d$  الناتج عن تقاطع المستويين.

**الحل:** لنوجد التمثيل الوسيط للفصل المشترك  $d$  كما تعلمنا سابقاً

بما ان: المستويان  $P$  و  $Q$  متقاطعان. تنتمي  $M(x, y, z)$  الى



$d$  إذا فقط إذا تحقق الشرطان:  $\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x + y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$  لحل هذه الجملة، نستعمل طريقة الحذف بالتعويض، فنعبّر مثلاً عن  $x$  و  $y$  بدلالة  $z$ :

$$\begin{cases} 2x - y = 4 - z & L_1 \\ x + y = 5 - 2z & L_2 \end{cases} \xrightarrow{L_2 + L_1} \{3x = 9 - 3z \Rightarrow x = 3 - z \Rightarrow y = 2 - z$$

بالرمز  $z = t$  تسهياً للكتابة ليصبح انتماء  $M(x, y, z)$  إلى  $d$  مكافئاً للشرط  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  وهو  $(d)$  وهو

$$\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = t \end{cases}$$

التمثيل الوسيطي للفصل المشترك  $d$

نفرض أن  $A'(-t + 3, -t + 2, t)$  سقط القائم  $A$  على  $d$  ونوجد

الشعاعين  $\vec{u}_d, \vec{AA}'$ :

$$\vec{u}_d \cdot \vec{AA}' = 0: \text{ونكتب: } \vec{AA}'(-t, -t + 3, t - 2) \text{ و } \vec{u}_d(-1, -1, 1)$$

$$(-t, -t + 3, t - 2)(-1, -1, 1) = 0 \Rightarrow t + t - 3 + t - 2 = 0: \text{فيكون}$$

ومنه:  $t = \frac{5}{3}$  نعوض قيمة  $t$  في  $A'$  فتكون إحداثيات المسقط القائم  $A'(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

$$dis(A, d) = AA' = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{16}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3} \text{ هو } d \text{ عن } A \text{ فيكون بُعد}$$



$$\text{بالرمز } y = t \text{ تسهياً للكتابة ليصبح انتماء } M(x, y, z) \text{ إلى } d \text{ مكافئاً للشرط } t \in \mathbb{R} \text{ وهو } (d) \text{ وهو } \begin{cases} x = -t + \frac{1}{3} \\ y = t \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

التمثيل الوسيطي للفصل المشترك  $d$

نفرض أن  $A'(-t + \frac{1}{3}, t, -\frac{1}{3})$  سقط القائم ل  $A$  على  $d$  ولنوجد الشعاعين  $\overrightarrow{AA'}$  و  $\overrightarrow{u_d}$ :

$$\overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0 \text{ ونكتب: } \overrightarrow{AA'}(-t - \frac{5}{3}, t - 1, \frac{-7}{3}) \text{ و } \overrightarrow{u_d}(-1, 1, 0)$$

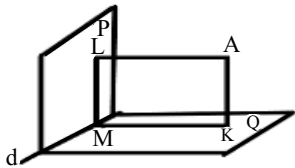
$$(-t - \frac{5}{3}, t - 1, \frac{-7}{3}) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \Rightarrow 2t + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3} \text{ فيكون:}$$

نعوض قيمة  $t$  في  $A'$  فتكون احداثيات السقط القائم  $A'(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$

$$\text{فيكون بُعد } A \text{ عن } d \text{ هو } \text{dis}(A, d) = AA' = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{49}{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

الطريقة الثانية: ان بُعد النقطة  $A$  عن المستقيم  $d$  هو نفسه طول الوتر  $AM$

فيلزمنا إذن حساب طول الضلعين القائمتين  $KM$  و  $AK$  إن  $AK$  هو نفسه بُعد النقطة  $A$  عن المستوي  $Q$  أي



$$\text{dis}(A, Q) = AK = \frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1(2) + 1(1) + 1(2)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

وايضاً إن  $KM$  هو نفسه بُعد النقطة  $A$  عن المستوي  $P$  أي  $\text{dis}(A, P) =$

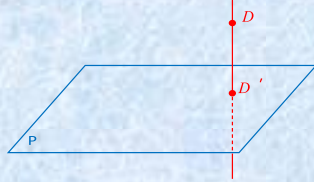
$$KM \text{ أن } KM = AL \text{ حيث } ALMK \text{ مستطيل } \frac{|1(2) + 1(1) - 2(2) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\text{ومنه حسب فيثاغورث نكتب: } \text{dist}(A, d) = AM = \sqrt{AK^2 + KM^2} = \sqrt{\frac{25}{3} + \frac{4}{6}} = 3$$

## السؤال 63: كيف نكتب المسقط القائم $D'$ لنقطة $D$ على مستوي $P$ ؟

هناك عدة طرق لكن سأذكر اسهلها وهي ان نكتب التمثيل الوسيط للمستقيم  $(DD')$  المار من

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \text{ وليكن } \vec{u} = \vec{n}_P$$



ثم نعوض هذا التمثيل في معادلة المستوي  $P$  فنحصل على معادلة بمجهول وحيد  $t$  نحلها ونقوم بتعويض قيمة  $t$  في التمثيل الوسيط للمستقيم فنحصل على احداثيات المسقط القائم  $D'$

مثال: في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نتأمل النقاط  $A(1,2,0)$  و  $B(0,0,1)$  و  $C(1,5,5)$ . يُطلب تعيين  $D'$  المسقط القائم للنقطة  $D(-11,9,-4)$  على المستوي  $(ABC)$ .

الحل: لنكتب أولاً معادلة المستوي  $(ABC)$  كما تعلمنا سابقاً لنوجد الشعاعين  $\vec{AB}, \vec{AC}$

نلاحظ أن الشعاعين  $\vec{AB}, \vec{AC}$  غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة أي:  $\frac{0}{-1} \neq \frac{3}{-2} \neq \frac{5}{1}$

ونفرض أن  $\vec{n}(a, b, c)$  ناظم على المستوي  $P$  والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي  $\vec{AB}, \vec{AC}$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(-1, -2, 1) = 0 \Rightarrow -a - 2b + c = 0 \quad (1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(0, 3, 5) = 0 \Rightarrow 3b + 5c = 0 \quad (2)$$

نضع  $C = 3$  نعوض في (2) فيكون

$$-a + 10 + 3 = 0 \Rightarrow a = 13 \text{ فيكون (1) نعوض في } 3b + 15 = 0 \Rightarrow b = -5$$

ومنه  $\vec{n}(13, -5, 3)$  ناظم على المستوي  $P$  ويمر المستوي  $P$  بالنقاط الثلاثة نختار  $B(0,0,1)$  ونعوض في

$$(ABC): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow (ABC): 13(x - 0) - 5(y - 0) + 3(z - 1) = 0$$

ومنه فإن معادلة المستوي  $P$  تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة:  $(ABC): 13x - 5y + 3z - 3 = 0$

نكتب التمثيل الوسيط للمستقيم  $(DD')$  المار من  $D(-11,9,-4)$  وشعاع توجيهه هو ناظم المستوي  $\vec{n}(13,-5,3)$  أي

$$(DD'): \begin{cases} x = 13t - 11 \\ y = -5t + 9 \\ z = 3t - 4 \end{cases} ; t \in \mathcal{R} \text{ فيكون } \vec{u} = \vec{n}_p(13, -5, 3)$$

نعوض هذا التمثيل في معادلة المستوي  $(ABC)$  فيكون:

$$13(13t - 11) - 5(-5t + 9) + 3(3t - 4) - 3 = 0 \Rightarrow 203t - 203 = 0 \Rightarrow t = 1$$

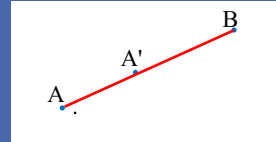
نعوض قيمة  $t = 1$  في التمثيل الوسيط للمستقيم  $(DD')$  فيكون:

$$\begin{cases} x = 13 - 11 = 2 \\ y = -5 + 9 = 4 \\ z = 3 - 4 = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فتكون احداثيات المسقط القائم}} D'(2, 4, -1)$$

**السؤال 64:** كيف نثبت أن المسقط القائم  $A'$  لنقطة  $A$  يقع على القطعة المستقيمة  $AB$  مثلاً

**[AB] ؟**

بافتراض ان  $A'$  تقع على القطعة المستقيمة  $[AB]$



فتكون النقاط  $B$  و  $A$  و  $A'$  على استقامة واحدة وبالتالي لإثبات أن المسقط القائم

$A'$  لنقطة  $A$  يقع على القطعة المستقيمة  $[AB]$  سنوجد احداثيات  $A'$  المسقط القائم لنقطة

$A$  كما تعلمنا سابقاً ثم نثبت وقوع النقاط  $B$  و  $A$  و  $A'$  على استقامة واحدة

**مثال:** اثبت ان المسقط القائم للنقطة  $D(-11,9,-4)$  على المستوي  $P: 13x - 5y + 3z - 3 = 0$

يقع على القطعة المستقيمة  $[AB]$  حيث:  $A(1,2,0)$  و  $B(0,0,1)$

**الحل:** سنوجد احداثيات  $D'$  المسقط القائم لنقطة  $D$  كما تعلمنا سابقاً ثم نثبت وقوع النقاط  $B$  و  $A$  و  $D'$

على استقامة واحدة

نكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم  $(DD')$  المار من  $D(-11,9,-4)$  وشعاع توجيهه هو ناظم المستوي أي

$$(DD'): \begin{cases} x = 13t - 11 \\ y = -5t + 9 \\ z = 3t - 4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \text{ فيكون } \vec{u} = \vec{n}_p(13, -5, 3)$$

نعوض هذا التمثيل في معادلة المستوي  $(ABC)$  فيكون:

$$13(13t - 11) - 5(-5t + 9) + 3(3t - 4) - 3 = 0 \Rightarrow 203t - 203 = 0 \Rightarrow t = 1$$

نعوض قيمة  $t = 1$  في التمثيل الوسيطى للمستقيم  $(DD')$  فيكون:

$$\begin{cases} x = 13 - 11 = 2 \\ y = -5 + 9 = 4 \\ z = 3 - 4 = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فتكون احداثيات المسقط القائم}} D'(2, 4, -1)$$

لنوجد الشعاعين  $\vec{AD}'$ ,  $\vec{AB}$

نلاحظ أن الشعاعين  $\vec{AB}, \vec{AD}'$  مرتبطين خطياً لأن مركباتهما متناسبة أي:  $\frac{-1}{1} = \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1}$

وبالتالي فالنقاط  $B$  و  $A$  و  $D'$  تقع على استقامة واحدة وبالتالي فالمسقط القائم  $D'$  للنقطة  $D$  على المستوي  $P$  يقع على القطعة المستقيمة  $[AB]$

**السؤال 65:** كيف نحسب المسافة (البعد) بين مستويين متوازيين  $P_1, P_2$ ؟

نختار نقطة من المستوي  $P_1$  كما تعلمنا في السؤال 50

ثم نحسب بُعد هذه النقطة عن المستوي  $P_2$

$$\begin{cases} p_1: 2x - y - z + 4 = 0 \\ p_2: -6x + 3y + 3z + 3 = 0 \end{cases} \text{ مثال: احسب البعد بين المستويين المتوازيين:}$$

**الحل:** نختار نقطة من المستوي  $P_1$  بفرض  $x = 0, y = 0$  نعوض في

$$\text{معادلة المستوي } P \text{ فنجد: } -z + 4 = 0 \Rightarrow z = 4$$

فتكون النقطة  $A(0,0,4)$  نقطة من المستوي  $P_1$

لنحسب بُعد  $A$  عن  $P_2$ :

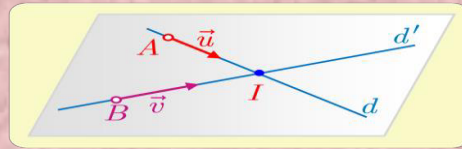
$$\text{وهو يمثل البُعد بين الصنويين } dist(A, P_2) = \frac{|(0)(-6) + (3)(0) + (3)(4) + 3|}{\sqrt{(-6)^2 + (3)^2 + (3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{54}}$$

**السؤال 66:** كيف نكتب معادلة مستوي  $P$  المحدد بالمستقيمين  $d'$  و  $d$  المتقاطعين؟

ليكن المستقيمان  $d'$  و  $d$  حيث:

$$(d') \begin{cases} x = a't + x_0' \\ y = b't + y_0' \\ z = c't + z_0' \end{cases} ; t \in \mathcal{R} \text{ و } (d): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ; t \in \mathcal{R}$$

المتقاطعان في  $I$  ومنه من التمثيل الوسيط يمكن إيجاد شعاعي توجيه المستقيمان  $\vec{u}(a, b, c)$  و  $\vec{v}(a', b', c')$  ونقطتان يمر منهما المستقيمان حيث المستقيم  $d$  يمر من



$B(x_0', y_0', z_0')$  والمستقيم  $d'$  يمر من  $A(x_0, y_0, z_0)$

ومنه عُدنا إلى السؤال 39 حيث نكتب معادلة المستوي غام شعاعي توجيهه  $\vec{u}, \vec{v}$  ويمر بالنقطة  $I$  او  $B$  او  $A$  اي نقطة تختارها صحيحة

**مثال:** المستقيمان  $L$  و  $L'$  المتقاطعان في معرفان  $I(-1,1,1)$  سيطياً وفق:

$$(L') : \begin{cases} x = 4 - 5s \\ y = 3 - 2s \\ z = -1 + 2s \end{cases} ; s \in \mathcal{R} \quad (L) : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2s \end{cases} ; s \in \mathcal{R} \text{ و}$$

اكتب معادلة المستوي  $P$  المحدد بالمستقيمين **الحل** لنفرض أن:  $\vec{n}(a, b, c)$  ناظم على

المستوي  $P$  والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_L = 0 \Rightarrow (a, b, c)(0, -1, -2) = 0 \Rightarrow -b - 2c = 0 \quad \text{①}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_{L'} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(-5, -2, 2) \Rightarrow -5a - 2b + 2c = 0 \quad \text{②}$$

نضع  $C = 1$  نعوض في ①  $-b - 2 = 0 \Rightarrow b = -2$

نعوض في ② فيكون:  $-5a + 4 + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{6}{5}$  ومنه  $\vec{n}(\frac{6}{5}, -2, 1)$  ناظم على

المستوي  $P$  المحدد بالمستقيمين  $L$  و  $L'$  والمتقاطعين ومنه فإن معادلة المستوي  $P$  المار من  $I(-1, 1, 1)$

$$P: a(x - x_I) + b(y - y_I) + c(z - z_I) = 0$$

$$\Rightarrow P: \frac{6}{5}(x + 1) - 2(y - 1) + 1(z - 1) = 0$$

ومنه فإن معادلة المستوي  $P$  تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة:

$$P: 6x - 10y + 5z + 11 = 0$$

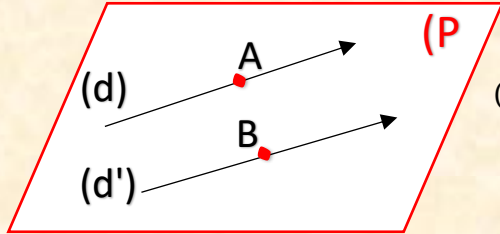
**ملاحظة:** يمكن أخذ النقطة  $B(4, 3, -1)$  أو  $A(-1, 1, 1)$  لتعويض في معادلة المستوي  $P$  بدلاً من

نقطة التقاطع  $I$  أي لسنا مضطرين عند كتابة معادلة مستوي محدد بمستقيمين متقاطعين ان نوجد نقطة التقاطع

يكفي إيجاد الناظم والتعويض في  $A$  و  $B$  الموجودتين في التمثيل الوسيط للمستقيمين

السؤال 66: كيف نكتب معادلة مستوي  $P$  مجدد بمستقيمين معلومين  $d$  و  $d'$  ؟

ليكن المستقيمان  $d'$  و  $d$  حيث:



$$(d') \begin{cases} x = a't + x_0' \\ y = b't + y_0' \\ z = c't + z_0' \end{cases} ; t \in \mathcal{R} \text{ و } (d): \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ; t \in \mathcal{R}$$

نأخذ  $\vec{u}_d(a, b, c)$  شعاع توجيه المستقيم  $d$

هو نفسه شعاع توجيه المستوي  $P$  والمستقيم  $d$

يمر من  $A(x_0, y_0, z_0)$  والمستقيم  $d'$  يمر من  $B(x_0', y_0', z_0')$  فيكون  $\vec{AB}$  هو ايضاً شعاع توجيه المستوي  $P$

نفرض  $\vec{n}(a, b, c)$  شعاع ناظم على المستوي  $P$  ومنه نكتب:  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  و  $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

نحصل معادلتين بثلاث مجاهيل  $a, b, c$  نعطي قيمة اختيارية لاحدى المجاهيل ونوجد المجهولين الباقيين وبذلك نكون قد عينا  $\vec{n}(a, b, c)$  فنكتب معادلة مستوي  $P$  عَلم ناظمه ويمر من  $A$  او  $B$

مثال: اكتب معادلة المستوي  $P$  المار من  $d'$  و  $d$  المعطى بالتمثيل الوسيطى:

$$(d') \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = -2 - t' \\ z = 2t' \end{cases} ; t' \in \mathcal{R} \text{ و } (d): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases} ; t \in \mathcal{R}$$

الحل: نأخذ  $\vec{u}_d(1, -1, 2)$  شعاع توجيه المستقيم  $d$  هو نفسه شعاع توجيه المستوي  $P$  والمستقيم  $d$

يمر من  $A(0, 1, -2)$  والمستقيم  $d'$  يمر من  $B(1, -2, 0)$  فيكون  $\vec{AB}(1, -3, 2)$  هو ايضاً شعاع توجيه المستوي  $P$

نفرض  $\vec{n}(a, b, c)$  شعاع ناظم على المستوي  $P$  ومنه نكتب:  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  و  $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(1, -1, 2) = 0 \Rightarrow a - b + 2c = 0 \quad \text{①}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(1, -3, 2) \Rightarrow a - 3b + 2c = 0 \quad \text{②}$$

نضع  $C = 1$  نعوض في ① و ②

$$\left. \begin{aligned} a - b + 2 = 0 \\ a - 3b + 2 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{بالطرح} \\ \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = -2 \end{array}$$

ومنه  $\vec{n}(-2,0,1)$  ناظم على المستوي  $P$  المحدد بالمستقيمين  $d$  و  $d'$  ومنه فإن معادلة المستوي  $P$  المار من

$$A(0,1,-2)$$

$$P: a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Rightarrow P: -2(x - 0) + 0(y - 1) + 1(z + 2) = 0$$

ومنه فإن معادلة المستوي  $P$  تُعطى بعد الإصلاح بالعلاقة:

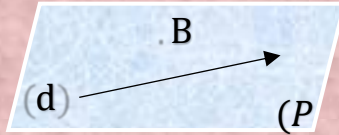
$$P: -2x + z + 2 = 0$$

**السؤال 67** كيف نكتب معادلة مستوي  $p$  يحوي مستقيم ونقطة خارجة عنه

ولكن  $B$  ؟

النقطة  $B$  لا تنتمي الى المستقيم  $(d)$  ويمر هذا المستقيم من النقطة  $A(x_0, y_0, z_0)$  لذلك نكتب  $\vec{AB}$  هو شعاع توجيه المستوي  $P$  و  $\vec{u}_d(a, b, c)$  شعاع توجيه المستقيم  $d$  هو نفسه شعاع توجيه المستوي  $P$  نفرض  $\vec{n}(a, b, c)$  شعاع ناظم على المستوي  $P$  ومنه نكتب:  $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$  و  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

نحصل معادلتين بثلاث مجاهيل  $a, b, c$  نعطي قيمة اختيارية لاحدى المجاهيل ونوجد المجاهولين الباقيين وبذلك نكون قد عينا  $\vec{n}(a, b, c)$  فنكتب معادلة مستوي  $P$  غلم ناظمه ويمر من  $A$  او  $B$



مثال: اكتب معادلة المستوي  $P$  الذي يحوي المستقيم  $(d)$  ويمر  $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = t \end{cases}$  ;  $t \in \mathbb{R}$

المستوي من النقطة  $B(2,0,1)$  الحل: النقطة  $B$  لا تنتمي الى المستقيم لانها لا تحقق التمثيل الوسيط له

ويمر هذا المستقيم من النقطة  $A(1, -1, 0)$  لذلك نكتب  $\overrightarrow{AB}(1, 1, 1)$  هو شعاع توجيه

المستوي  $P$  و  $\overrightarrow{u_d}(1, 2, 1)$  شعاع توجيه المستقيم  $d$  هو نفسه شعاع توجيه المستوي  $P$  نفرض

المستوي  $P$  و  $\overrightarrow{n}(a, b, c)$  شعاع ناظم على المستوي  $P$  ومنه نكتب:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(1, 2, 1) = 0 \Rightarrow a + 2b + c = 0 \quad (1)$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(1, 1, 1) \Rightarrow a + b + c = 0 \quad (2)$$

نضع  $C = 1$  نعوض في (1) و (2)

$$\left. \begin{array}{l} a + 2b + 1 = 0 \\ a + b + 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{بالطرح} \\ \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = -1 \end{array}$$

ومن  $\vec{n}(-1, 0, 1)$  ناظم على المستوي  $P$  ومنه فإن معادلة المستوي  $P$  المار من  $B(2, 0, 1)$

$$P: a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$$

$$\Rightarrow P: -1(x - 2) + 0(y - 0) + 1(z - 1) = 0$$

ومنه فإن معادلة المستوي  $P$  تُعطى بعد الإصحاح بالعلاقة:

$$P: -x + z + 1 = 0$$

**السؤال 68:** كيف نكتب معادلة مستوي يمرس كرة معلومة في نقطة منها ولتكن  $A$  ؟

معادلة الكرة  $R^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$  حيث  $\omega(a, b, c)$  مركز الكرة و  $A$  نقطة التماس

ومنه فالمستقيم  $\omega A$  المار من مركز الكرة  $\omega$  ونقطة التماس  $A$  عمودي على المستوي المماس في نقطة التماس

$\vec{n} = \overrightarrow{\omega A}$  فيكون  $A$

فنكتب معادلة مستوي عُلْم ناظمه ويمر من  $A$

مثال: لتكن لدينا الكرة  $S$  التي معادلتها  $S: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3$  والنقطة  $A(3, 0, 1)$  نقطة منها. اكتب

معادلة المستوي  $P$  المماس للكرة  $S$  في النقطة  $A$  الحل: المستقيم  $\omega A$  المار من مركز الكرة  $\omega$  ونقطة التماس  $A$  عمودي على

المستوي المماس في نقطة التماس  $A$  فيكون:  $\vec{n} = \overrightarrow{AW}(-1,1,-1)$  حيث  $\omega(2,1,0)$  مركز الكرة ومنه فإن معادلة

المستوي  $P$  الذي نأظمه  $\vec{n}(-1,1,-1)$  ويمر من النقطة  $A(3,0,1)$

$$P: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow P: -1(x - 3) + 1(y - 0) - 1(z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow P: -x + y - z + 4 = 0$$

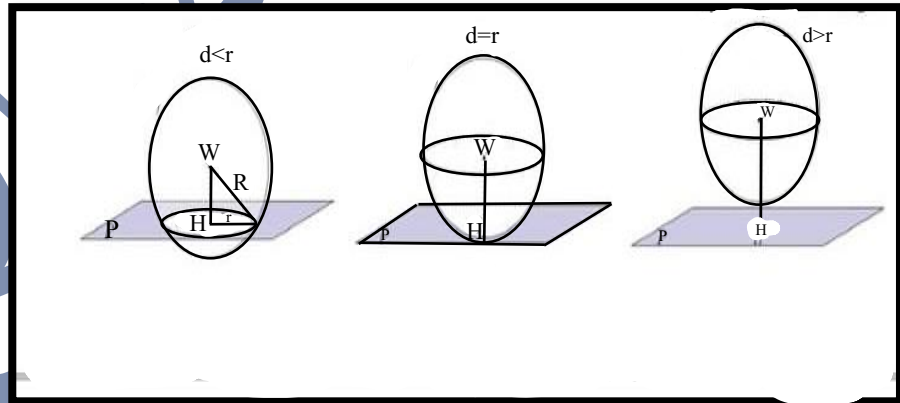
**السؤال 69:** كيف ندرس الوضع النسبي بين المستوي  $P$  والكرة  $S$  ؟

نحسب بُعد مركز الكرة  $S$  عن المستوي  $P$  ونقارنه مع نصف قطر الكرة ونميز الحالات التالية:

$dis(\omega, P) > R$  فالمستوي  $P$  خارج الكرة  $S$  ولا يمسيها

$dis(\omega, P) < R$  المستوي  $P$  يقطع الكرة بدائرة يطلب إيجاد نصف قطرها

$dis(\omega, P) = R$  المستوي  $P$  يمسي الكرة  $S$



**مثال:** ادرس الوضع النسبي بين المستوي  $p: x + y - z + 6 = 0$  والكرة التي

مركزها  $\omega(-1,-2,6)$  ونصف قطرها  $R = 4$

الحل: نحسب بُعد مركز الكرة  $S$  عن المستوي  $P$

$$dis(\omega, P) = \frac{|a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$\frac{|1(1) - 2(1) + 6(-1) + 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

**مثال:** ادرس الوضع النسبي بين المستوي  $p: 2x + y - 2z + 9 = 0$  والكرة التي مركزها  $\omega(2, -1, 0)$  ونصف قطرها  $R = 4$ : الحل:

$$dis(A, P) = \frac{|2(2) - 1(1) + 0(-2) + 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 4$$

بما أن  $R = dis(A, P) = 4$  فإن المستوي  $P$  يمس الكرة

**مثال:** ادرس الوضع النسبي بين المستوي  $p: x - z - 2 = 0$  والكرة التي مركزها  $\omega(-1, 1, 1)$  ونصف قطرها  $R = 1$

**الحل:** نحسب بُعد مركز الكرة  $S$  عن المستوي  $P$

$$dis(\omega, P) = \frac{|a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$\frac{|1(-1) + 0(1) - 1(1) - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$dis(\omega, P) > R$  المستوي  $P$  خارج الكرة  $S$  ولا يمسها

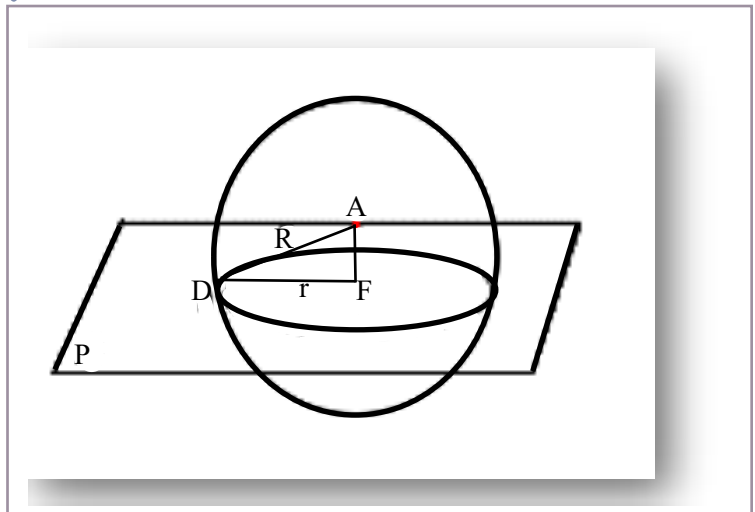
**السؤال 70:** كيف نوجد نصف قطر مقطع الدائرة الناتج عن تقاطع المستوي مع الكرة؟

حساب  $r$  كما نلاحظ من المثلث لقائم حسب فيثاغورث حيث يمثل  $AD = R$  نصف قطر الكرة و يمثل

$$AF = dis(a, p)$$

بُعد  $A$  مركز الكرة عن المستوي  $P$

كما هو موضح في الشكل المرسوم جانباً

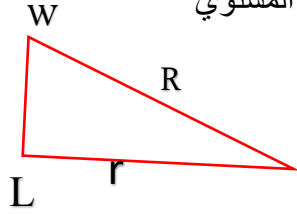


**مثال:** اثبت ان لمستوي  $p: x + y - z + 6 = 0$  يقطع الكرة التي مركزها  $\omega(1, -2, 6)$  ونصف قطرها  $R = 4$  ثم احسب طول نصف قطر دائرة المقطع.

نحسب بُعد مركز الكرة  $S$  عن المستوي  $P$

$$dis(\omega, P) = \frac{|a.\alpha + b.\beta + c.\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{|-1(1) - 2(1) + 6(-1) + 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$



$P$  يقطع الكرة بدائرة

وحسب فيثاغورث نكتب:

$$R^2 = r^2 + WL^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - WL^2} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

حيث ان  $WL = dis(\omega, P)$

### السؤال 71: كيف ندرس الوضع النسبي بين المستقيم $d$ والكرة $S$ ؟

نتقوم بتعويض التمثيل الوسيطى للمستقيم في معادلة الكرة نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بدلالة المتحول  $t$  لعلها تستخدم المميز مثلاً في حال كان

- $\Delta = 0$  للمعادلة جذر مضاعف وحيد المستقيم  $d$  يمس الكرة  $S$  بنقطة لايجاد احداثياتها نعوض قيمة الحل  $t$  في التمثيل الوسيطى للمستقيم فنحصل عليها.
- $\Delta < 0$  فالمستقيم  $d$  خارج الكرة  $S$  ولا يمسها

$\Delta > 0$  للمعادلة حلان 2 المستقيم  $d$  يقطع الكرة بنقطتين يطلب إيجاد احداثياتهما  $A, B$  نعوض التمثيل الوسيطى للمستقيم في معادلة الكرة نحصل على معادلة درجة ثانية بالمجهول الوسيطى نحلها فيما ان المستقيم  $d$  يقطع الكرة  $S$  فحصرا سيكون للمعادلة جذران (حلان) نعوضهما في التمثيل الوسيطى للمستقيم نحصل على احداثيات  $A, B$

مثال: ادرس الوضع النسبي بين المستقيم  $d$  والكرة  $S$  حيث:

$$(d): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}, S: (x + 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 25$$

الحل: نعوض التمثيل الوسيطى للمستقيم في معادلة الكرة فنجد:

$$(2 - t + 1)^2 + (2 + 2t + 3)^2 + (-3 + 2t + 4)^2 = 25$$

$$t^2 - 6t + 9 + 4t^2 + 20t + 25 + 4t^2 + 4t + 1 = 25$$

$$9t^2 + 18t + 10 = 0$$

$$\Delta = 324 - 360 = -36 < 0$$

فالمستقيم  $d$  خارج الكرة  $S$  ولا يمسها

مثال: ادرس الوضع النسبي بين المستقيم  $d$  والكرة  $S$  حيث:

$$(d): \begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -4 + 4t \\ z = -5 + t \end{cases}; t \in \mathbb{R}, S: (x + 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 25$$

الحل: نعوض التمثيل الوسيطى للمستقيم في معادلة الكرة فنجد:

$$(6 - 3t + 1)^2 + (-4 + 4t + 3)^2 + (-5 + t + 4)^2 = 25$$

$$9t^2 - 42t + 49 + 16t^2 - 8t + 1 + t^2 - 2t + 1 = 25$$

$$26t^2 - 52t + 26 = 0$$

$$\Delta = 2704 - 2704 = 0$$

• للمعادلة جذر مضاعف وحيد  $t = 1$  المستقيم  $d$  يمس الكرة  $S$  بنقطة لايجاد احداثياتها نعوض قيمة الحل  $t = 1$  في التمثيل الوسيطى للمستقيم فيكون

$$\begin{cases} x = 6 - 3(1) \\ y = -4 + 4(1) \\ z = -5 + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{نقطة التماس هي}} A(3, 0, -4)$$

مثال: ادرس الوضع النسبي بين المستقيم  $d$  والكرة  $S$  حيث:

$$(d): \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}; t \in \mathbb{R}, S: (x + 1)^2 + (y)^2 + (z + 2)^2 = 6$$

الحل: نعوض التمثيل الوسيطى للمستقيم في معادلة الكرة فنجد:

$$(0 + 1)^2 + (-t)^2 + (1 + t + 2)^2 = 6$$

$$t^2 + 3t + 2 = 0$$

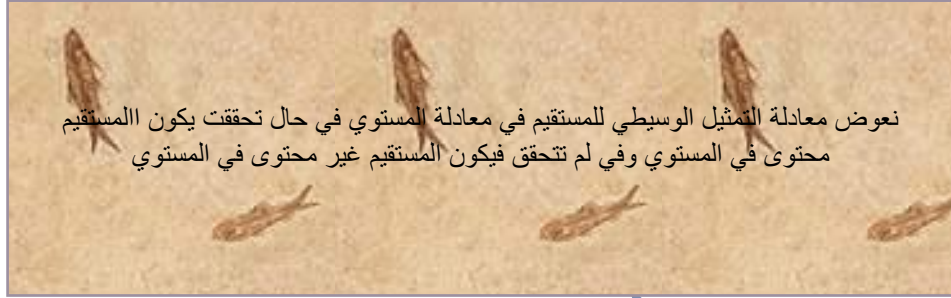
$$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-3 + 1}{2} = -1 \\ t_2 = \frac{-3 - 1}{2} = -2 \end{cases}$$

فالمستقيم  $d$  يقطع الكرة بنقطتين يطلب إيجاد احداثياتهما  $A, B$  نعوض قيمة  $t_1 = -1, t_2 = -2$  في التمثيل الوسيطى للمستقيم نجد:

$$t_1 = -1 \text{ من اجل } \begin{cases} x = 0 \\ y = -(-1) \\ z = 1 + (-1) \end{cases} \Rightarrow A(0, 1, 0)$$

$$t_2 = -2 \text{ من اجل } \begin{cases} x = 0 \\ y = -(-2) \\ z = 1 + (-2) \end{cases} \Rightarrow B(0, 2, -1)$$

## السؤال 72: كيف نثبت أن مستقيم ما محتوي في المستوي ؟



مثال: ليكن لدينا المستقيم  $d$  الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً:  $t \in \mathbb{R}$  ;  $(d): \begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$

اثبت أن المستقيم  $d$  محتوي في المستوي  $P: 3x + z - 4 = 0$  حيث  $P$  المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[BC]$

الحل: نعوض معادلة التمثيل الوسيطى للمستقيم في معادلة المستوي

محقة  $0 = 0 \Rightarrow 3t + 4 - 3t - 4 = 0$  وبالتالي فالمستقيم  $d$  محتوي في المستوي المحوري  $P$

## السؤال 73: كيف نثبت أن نقطة ما وتكن $J$ هي نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث وليكن $ABC$ ؟

لإثبات أن  $J$  هي نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث  $ABC$  يكفي أن نثبت أن:

$$\vec{Bj} \cdot \vec{Ac} = 0 \text{ و } \vec{Cj} \cdot \vec{Ab} = 0 \text{ و } \vec{Aj} \cdot \vec{Bc} = 0$$

مثال: في المعلم المتجانس لدينا التقاط:  $J(1,1,1), B(3,0,0), D(0,3,0), E(0,0,3)$

اثبت أن  $J$  هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث  $EBD$

الحل: لإثبات أن  $J$  هي نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث  $EBD$  يكفي أن نثبت أن:

$$\vec{Bj} \cdot \vec{Ed} = 0 \text{ و } \vec{Dj} \cdot \vec{Eb} = 0 \text{ و } \vec{Ej} \cdot \vec{Db} = 0$$

$$\vec{Bj} \cdot \vec{Ed} = (-2,1,1)(0,3,-3) = 3 - 3 = 0$$

$$\vec{Dj} \cdot \vec{Eb} = (1,-2,1)(3,0,-3) = 3 - 3 = 0$$

$$\vec{Ej} \cdot \vec{Db} = (1,1,-2)(3,-3,0) = 3 - 3 = 0$$

وبالتالي  $J$  هي نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث  $EBD$

## السؤال 74: كيف ثبت أن $\vec{n}(a, b, c)$ هو شعاع ناظم على المستوي $ABC$ ؟

**طريقة أولى:** الشعاع الناظم كما نعلم هو عامودي على شعاعي توجيه المستوي أي لو كان  $\vec{n}$  هو الشعاع الناظم على المستوي  $ABC$

لكان  $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$  و  $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$  ويكفي اثبات ذلك ليكون  $\vec{n}$  هو الشعاع الناظم على المستوي  $ABC$

**طريقة ثانية:** يمكننا ببساطة كتابة الشعاع الناظم ومقارنته مع الشعاع الناظم المعطى ولكن اتبه مرنا يظهر شعاع ناظم مكافئ له وليس نفسه تماما وهذا طبيعي حسب إعطاء القيمة الاختيارية

**مثال:** نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط

$A(1, 0, -1), B(2, 2, 3), C(3, 1, -2)$  اثبت أن  $\vec{n}(2, -3, 1)$  هو الشعاع الناظم على المستوي  $ABC$

**الحل: طريقة أولى:** لنثبت أن  $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$  و  $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = (2, -3, 1)(1, 2, 4) = 2 - 6 + 4 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = (2, -3, 1)(2, 1, -1) = 4 - 3 - 1 = 0$$

ومنه فإن  $\vec{n}(2, -3, 1)$  هو الشعاع الناظم على المستوي  $ABC$

**طريقة ثانية:** نفرض أن  $\vec{n}(a, b, c)$  ناظم على المستوي  $P$  والناظم يكون عامودي على شعاعي توجيه المستوي  $\vec{AB}, \vec{AC}$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(1, 2, 4) = 0 \Rightarrow a + 2b + 4c = 0 \quad (1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow (a, b, c)(2, 1, -1) \Rightarrow 2a + b - c = 0 \quad (2)$$

نضع  $C = 1$  نعوض في (1) و (2) فيكون

$$\begin{cases} a + 2b + 4 = 0 \\ 2a + b - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{نضرب المعادلة الثانية بـ } -2} \begin{cases} a + 2b + 4 = 0 \\ -4a - 2b + 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالجمع}} -3a + 6 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -3$$

ومنه  $\vec{n}(2, -3, 1)$  ناظم على المستوي  $P$  وهو نفسه المعطى

## السؤال 5 7 كيف نوجد حجم رباعي الوجوه؟

إن حجم رباعي الوجوه :

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$$

حيث ان  $S$  هي مساحة القاعدة حيث قد تكون مثلث او مربع او ... الخ ومساحة أي شكل هندسي معروف سنتذكرهم معاً في الفقرة التالية  
و  $h$  هو بُعد رأس رباعي الوجوه عن مستوي القاعدة .

مثال: لتكن النقاط  $D(1,0,-1)$  ,  $B(2,2,3)$  ,  $C(3,1,-2)$  ,  $A(-4,2,1)$

▪ اثبت ان المثلث  $BCD$  قائم واحسب مساحته

بفرض ان معادلة المستوي  $BCD$  هي:

$$2x - 3y + z - 1 = 0$$

احسب بُعد  $A$  عن المستوي  $DBC$

واحسب حجم رباعي الوجوه  $V_{A-BCD}$

الحل:

نلاحظ أن الشعاعين  $\vec{DB}(1,2,4)$  ,  $\vec{DC}(2,1,-1)$  ونلاحظ أن جدائهما السلمي يساوي الصفر أي :

$$\vec{DC} \cdot \vec{DB} = 0 \text{ فهما متعامدين فالمثلث } DBC \text{ قائم في } D$$

$$S = \frac{\|\vec{DC}\| \cdot \|\vec{DB}\|}{2} = \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{3}{2} \sqrt{14}$$

حساب بُعد  $A$  عن المستوي  $DBC$  :

$$\text{dist} = \frac{|a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(-4) + (-3)(2) + 1(1) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \sqrt{14}$$

إن حجم رباعي الوجوه  $ABCD$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} = 7$$

السؤال 76: كيف نوجد مقطع مكعب بمستوي؟

تذكرة: 1- يقطع مستوي  $P$  مستويين متوازيين  $P_1, P_2$  وفق مستقيمين  $d_1, d_2$

2- إذا احتوى مستويين متقاطعين  $P_1, P_2$  على مستقيمين متوازيين  $d_1, d_2$  كان الفصل المشترك  $d$  الناتج عن تقاطع المستويين موازياً لهذين المستقيمين  $d_1, d_2$  أي  $d_1 // d_2 // d$

3- إذا كان المستقيم  $d$  موازياً لمستويين متقاطعين  $P_1, P_2$  يكون المستقيم  $d$  موازياً لمستقيم  $\Delta$  الفصل المشترك الناتج عن تقاطع المستويين

4- إذا انتمت نقطتين الى مستوي ما  $P$  فإن المستقيم  $d$  المار بهما محتوي في المستوي  $P$

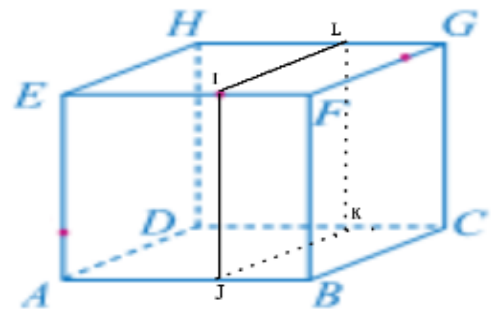
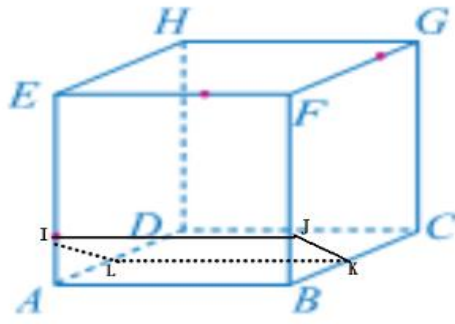
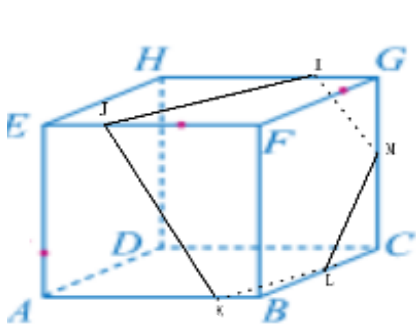
5- لإيجاد الفصل المشترك بين مستويين نبحث عن القاط المشتركة بين هذين المستويين

6- إذا كان  $P_1, P_2$  مستويين متوازيين فإن كل مستوي  $Q$  يقطع  $P_1$  ويقطع ايضاً  $P_2$  ويكون الفصلان المشتركان متوازيان.

7- المستويان يشتركان بنقطة فالفصل المشترك يمر بالنقطة, والمستويان يشتركان بنقطتين فالفصل المشترك يمر بالنقطتين.

مقطع مكعب بمستوي  $P$  هو:

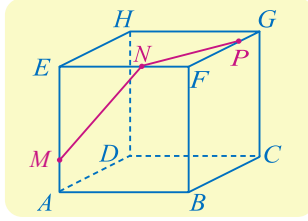
- مربع اذا كان المستوي  $P$  موازياً لوجه المكعب
- مستطيل او قطعة مستقيمة اذا كان المستوي  $P$  موازياً لاجد احرف المكعب
- نقطة- متوازي الاضلاع- مثلث- شبه منحرف- خماسي او سداسي في باقي الحالات.



مقطع المكعب بالمستوي  $(LJK)$  هو الخماسي  $(LJKLM)$

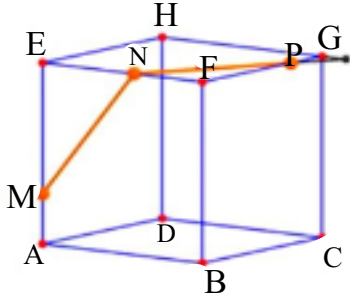
المستوي  $(LIT)$  يوازي الحرف  $[AB]$  هو المستطيل  $(LJKL)$

## مثال

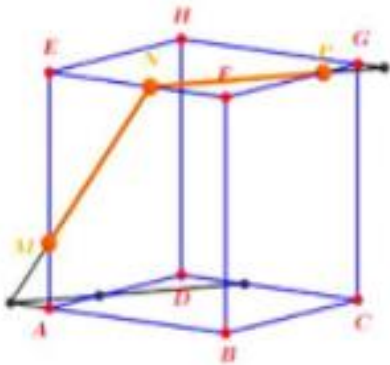
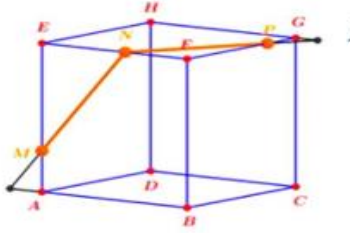


مكعب  $ABCDEFGH$  مكعب  $M$  و  $N$  و  $P$  ثلاث نقاط من الأحرف  
[AE] و [EF] و [FG] بالترتيب، كما في الشكل المجاور. يُطلب إيجاد مقطع  
المكعب بالمستوي  $(MNP)$ .

أولا: نعين نقطة تقاطع المستقيمين  $HG, NB$



ثانيا: نعين نقطة تقاطع المستقيمين  $AB, MN$



ثالثاً: نرسم من هذه النقطة مستقيماً يوازي  $NB$   
يقطع الضلعين  $AD, DC$

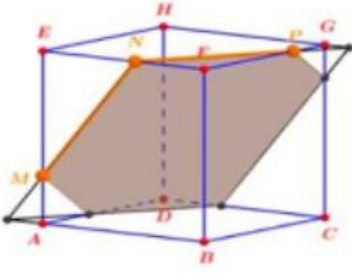
رسمنا المستقيم الموازي لأن الفصل المشترك

لتقاطع مستوي مع مستويين ينتج فصلين مشتركين

متوزيين كما ذكرنا في الواجهة.

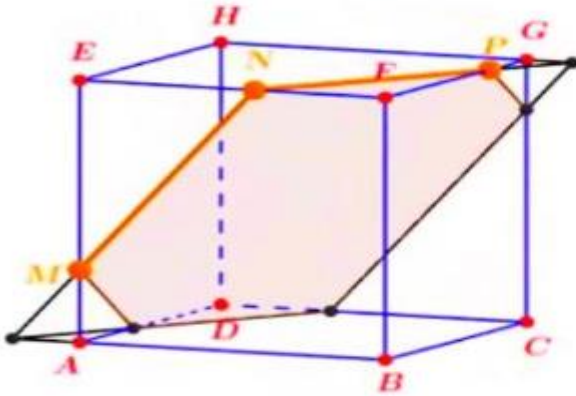
رابعاً: نرسم من نقطة تقاطعه مع  $DC$   
مستقيماً يوازي  $MN$  يقطع الضلع  $GC$

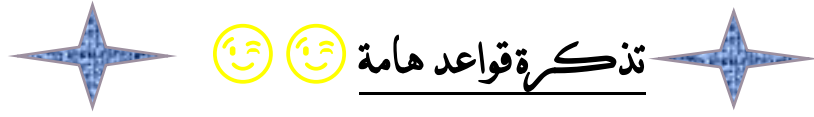
خامساً: نصل النقط المنبثقة.



سادساً: وبالتالي المضلع الذي يصل بين تقاطع النقاط مع أحرف المكعب هو المقطع المطلوب.

الشكل النهائي الموضح:





## تذكرة قواعد هامة

### ❖ لإثبات نوع الشكل الهندسي

➤ المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  يكفي أن تثبت:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ أو } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

➤ المثلث  $ABC$  متساوي الأضلاع يكفي أن تثبت أن  $AB = AC = BC$

➤ المثلث  $ABC$  متساوي الساقين رأسه  $B$  يكفي أن تثبت أن:

$$BA = BC$$

➤  $ABCD$  متوازي الأضلاع يكفي أن تثبت أن:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

➤  $ABCD$  مستطيل يكفي أن تثبت أن  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  واحد هذه الشروط

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ AC^2 = AB^2 + CB^2 \\ \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BD}\| \end{cases}$$

➤  $ABCD$  مربع يكفي أن تثبت أن  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  واحد هذه الشروط

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \text{ و } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BD}\| \text{ و } \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

➤  $ABCD$  شبه منحرف يكفي أن تثبت أن  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$  و

$$\|\overrightarrow{AB}\| \neq \|\overrightarrow{DC}\|$$

➤  $ABCD$  معين يكفي أن تثبت أن  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  واحد هذه الشروط

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \\ \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

## ❖ مساحة الاشكال الهندسية:

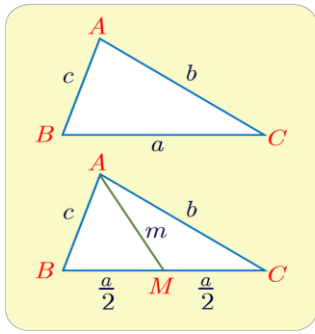
- المثلث:  $\frac{\text{الارتفاع} \times \text{القاعدة}}{2}$
- المثلث القائم:  $\frac{1}{2}$  جداء الضلعين القائمتين
- المثلث المتساوي الاضلاع:  $l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$  حيث  $l$  طول الضلع
- المربع:  $a^2$  حيث  $a$  طول ضلعه
- متوازي الاضلاع: القاعدة  $\times$  الارتفاع
- المستطيل: جداء بُعديه
- شبه المنحرف:  $\frac{\text{مجموع القاعدتين}}{2} \times \text{الارتفاع}$
- المعين:  $\frac{1}{2}$  جداء القطرين

## ❖ حساب حجم الهرم:

الهرم هو رباعي وجوه وبالتالي يكون حجمه هو نفس حجم رباعي الوجوه أي

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$$
 حيث  $S$  مساحة القاعدة و  $h$  ارتفاع الهرم

# رباعي الوجوه المنتظم: هو هرم جميع اوججه هي مثلثات متساوية الأضلاع وكل حرفان فيه متقابلان متعامدان وكل مستقيم يصل بين منتصفين حرفين متقابلين عامودي عليهما



❖ علاقة كاشي:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

❖ مبرهنة المتوسط:  $b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$

❖ علاقة التنجيب:  $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

❖ في متوازي الاضلاع مجموع مربعات اطوال

الاضلاع يساوي مجموع مربعي طولي

القطرين.

❖ تفيد علاقة كاشي وعلاقة التنجيب في تعيين

اضلاع وزوايا مثلث وتفيد مبرهنة المتوسط في

حساب المتوسطات والارتفاعات

@enbat1437



اليوم تبذل للمنى

وغداً سترضيك القطوف

أنت الصباح فلا تضق

مهما تكدرت الظروف



هناك شيء جهيل

يشترك في آخر الدرب



@enbat1437

رقم	السؤال	رقم	السؤال
1	كيف نعيين نقطة تحقق علاقة شعاعية؟	21	ماذا يُفيد مفهوم مركز الابعاد المتناسبة؟
2	كيف نثبت صحة علاقة شعاعية؟	22	كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة باستخدام مركز الابعاد المتناسبة؟
3	كيف نوجد مركبات شعاع؟	23	كيف نثبت وقوع نقاط في مستو واحد باستخدام مركز الابعاد المتناسبة؟
4	كيف نوجد طويلة شعاع او المسافة بين نقطتين؟	24	كيف نثبت تلاقي او تقاطع مستقيمين في نقطة واحدة باستخدام مركز الابعاد المتناسبة؟
5	كيف نوجد احداثيات منتصف قطعة مستقيمة؟	25	كيف نثبت تلاقي ثلاث مستقيمت في نقطة واحدة باستخدام مركز الابعاد المتناسبة؟
6	كيف نبين طبيعة مثلث؟ وكيف نوجد احداثيات مركز ثقله؟	26	كيف نوجد $\alpha, \beta, \gamma$ باستخدام علاقة مركز الابعاد تُعطى علاقة شعاعية؟
7	كيف نوجد احداثيات نقطة تحقق علاقة شعاعية؟	27	يف نوجد $\alpha, \beta, \gamma$ باستخدام علاقة مركز الابعاد يُعطى شكل؟
8	كيف نوجد احداثيان نقطة $D$ مثلاً تجعل النقاط الأربعة $A, B, C, D$ متوازي الاضلاع وكيف نوجد احداثيات مركز متوازي الاضلاع؟	28	كيف نوجد احداثيات مركز الابعاد المتناسبة لثلاث نقاط؟
9	كيف نوجد احداثيات نقاط رؤوس مكعب؟	29	كيف يتم تعيين مجموعة النقاط $M$ من الفراغ
10	كيف نوجد احداثيات رؤوس متوازي السطوح في حال عُلِمَ منها اربع منها؟	30	كيف نعيين مجموعة النقاط $M$ تعطى معادلة؟
11	كيف نثبت الارتباط الخطي للشعاعين تحليلاً؟	31	كيف نوجد الجداء السلمي للشعاعين في المستوي؟
12	كيف نثبت الارتباط الخطي للشعاعين شعاعياً؟	32	كيف نوجد الجداء السلمي لشعاعين في الفراغ؟
13	كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة؟	33	كيف نحسب بُعد نقطة عن مستقيم في المستوي
14	كيف نكتب معادلة كرة؟	34	كيف نوجد بُعد نقطة عن مستو في الفراغ
15	كيف نثبت ان نقطة ما تنتمي الى المستوي المحوري لقطعة مستقيمة؟	35	كيف نثبت تعامد مستقيمين؟
16	كيف نثبت ان مجموعة نقاط معلومة تقع جميعها على كرة واحدة معلومة المركز؟	36	كيف نكتب معادلة مستوٍ مار من نقطة وعُلِمَ ناظمه؟
17	كيف نعيين على محور الفواصل او تراتيب نقطة $C$ تكون متساوية البعد عن نقطتين $A, B$	37	كيف نكتب معادلة مستوٍ مار من نقطة ويوازي مستوٍ اخر
18	كيف نثبت ان ثلاث نقاط تعيين مستوٍ او كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط في مستوٍ واحد؟	38	كيف نكتب معادلة مستوٍ مار من ثلاث نقاط
19	كيف نثبت الارتباط الخطي لثلاث اشعة؟	39	كيف نكتب معادلة مستوٍ مار بنقطة وعُلِمَ شعاعي توجيهه
20	كيف نثبت انتماء أربعة نقاط الى مستوٍ واحد؟	40	كيف نكتب معادلة مستوٍ عامودي على مستوٍ اخر ومار بنقطتين؟

41	كيف نكتب معادلة مستو عامودي على مستويين ويمر بنقطة (حالة عامة)	62	كيف نوجد بُعد نقطة عن مستقيم الفصل المشترك الناتج عن تعامد مستويين؟
42	كيف نكتب معادلة مستو مار من نقطة عامودي على مستويين المتقاطعين بفصل مشترك عام شعاع توجيهه (الحالة الخاصة)	63	كيف نوجد احداثيات المسقط القائم لنقطة على مستو؟
43	كيف نكتب معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة؟	64	كيف نثبت أن المسقط القائم لنقطة على مستو يقع على القطعة المستقيمة [AB]؟
44	كيف نكتب معادلة كرة تماس المستوي؟ وكيف نثبت ان مستو يمس كرة؟	65	كيف نحسب البعد (المسافة) بين مستويين متوازيين؟
45	كيف نكتب معادلة أسطوانة ؟	66	كيف نكتب معادلة مسنو المحدد بالمستقيمين $d_1, d_2$ المتقاطعين؟
46	كيف نكتب معادلة مخروط ؟	67	كيف نكتب معادلة مستو محدد بمستقيمين $d_1, d_2$ معلومين؟
47	كيف نكتب التمثيل الوسيطى لمستقيم مار بنقطة وعلم شعاع توجيهه ؟	68	كيف نكتب معادلة مستو يحوي مستقيم ونقطة خارجة عنه؟
48	كيف نكتب التمثيل الوسيطى لمستقيم مار بنقطتين؟	69	كيف نكتب معادلة مستو يمس كرة معلومة في نقطة منها معلومة؟
49	كيف نكتب التمثيل الوسيطى لقطعة مستقيمة ولنصف مستقيم ؟	70	كيف ندرس الوضع النسبي بين المستوي والكرة ؟
50	كيف نعين نقطة من مستوي	71	كيف نوجد نصف قطر الدائرة الناتج عن تقاطع المستوي مع الكرة؟
51	كيف ندرس الوضع النسبي للمستويين؟	72	كيف ندرس الوضع النسبي بين المستقيم والكرة؟
52	كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيمين؟	73	كيف نثبت أن مستقيم ما محتوى في مستو ؟
53	كيف نكتب التمثيل الوسيطى لمستقيم الفصل المشترك الناتج عن تقاطع المستويين ؟	74	كيف نثبت أن هذا الشعاع هو شعاع ناظم على المستوي؟
54	كيف نكتب التمثيل الوسيطى لمستقيم المار من نقطة ويعامد مستو ؟	75	كيف نوجد حجم رباعي الوجوه ؟
55	كيف ندرس الوضع النسبي لمستقيم مع مستو؟ دراسة تقاطع مستقيم مع مستو .	76	كيف نوجد مقطع مكعب بمستو؟
56	كيف نثبت أن مستقيم يوازي مستو؟	77	تذكرة ومراجعات هامة
57	كيف نثبت أن مستقيم يعامد مستو؟		
58	كيف ندرس الوضع النسبي للمستويات الثلاث؟		
59	كيف نوجد احداثيات نقطة تقاطع المستويات؟		
60	كيف نوجد احداثيات المسقط القائم لنقطة على مستو؟		
61	كيف نوجد بُعد نقطة عن مستقيم او عن الفصل المشترك الناتج عن تقاطع المستويين؟		



لا يزرع اللد فيك

رغبنا الوصول للأمر معين

إلا لأننا نعلم أنك قادر

@enbat1437



عن زكري الطالب

بعد دراستك لهذا الملف تراجع النماذج الوزارية والدورات وستجدها اعتيادية وفي غاية السهولة إن شاء الله .

تنويه : إن هذا الملف متوفر pdf لجميع الطلبة فأنا نشرته على الانترنت ولست مسؤولاً عن نشر أي نسخة في أي مكتبة فهذا العمل نحتسبه خالصاً لوجه الله هذا الملف هو النسخة الاصلية وكل ما ينشر ويؤخذ من هذا الملف غير مسؤول عنه . اسأل الله العظيم ان أكون قد وفقت في هذا الشرح سأنا لكم الدعاء لوالدي ولي .

لا تشوني من صالح دعائكم لي ولكل



من أحب

لإستفساراتكم : 0996588614