الوحدة الأولى: تذكرة بالمتتاليات والإثبات بالتدريج

تعريف متتالية

1. بتعريف صريح للحد ذي الدليل n : $u_n = f(n)$.
2. بعلاقة تدريجية : $u_{n+1} = f(u_n)$.

الاثبات بالتدريج

لإثبات صحة العلاقة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq n_0$ نتبع الخطوات التالية:

1. نثبت صحة العلاقة من أجل أول قيمة للعدد الطبيعي $n = n_0$: $E(n_0)$.
2. نفرض صحة العلاقة من أجل n : $E(n)$.
3. نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$: $E(n)$.

دراسة اطراد متتالية معرفة بدلالة العدد الطبيعي n

لدراسة اطراد متتالية معرفة بالشكل $u_n = f(n)$ نستخدم إحدى الطرق الآتية:

1. دراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ ونميز الحالات الثلاث الآتية: a) $u_{n+1} - u_n > 0$ المتتالية u_n متزايدة تماماً.
   b) $u_{n+1} - u_n < 0$ المتتالية u_n متناقصة تماماً.
   c) $u_{n+1} - u_n = 0$ المتتالية u_n ثابتة.
2. مقارنة المقدار $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع الواحد ونميز الحالات الثلاث الآتية: a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ المتتالية u_n متزايدة تماماً.
   b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ المتتالية u_n متناقصة تماماً.
   c) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ المتتالية u_n ثابتة.
3. ندرس اطراد التابع f الممثل للمتتالية ونميز الحالات الثلاث الآتية: a) $f' > 0$ التابع f متزايد تماماً فالمتتالية u_n متزايدة تماماً.
   b) $f' < 0$ التابع f متناقص تماماً فالمتتالية u_n متناقصة تماماً.
   c) $f' = 0$ التابع f ثابت فالمتتالية u_n ثابتة.

دراسة اطراد متتالية معرفة بالتدريج

لدراسة اطراد متتالية معرفة بالشكل $u_{n+1} = f(u_n)$. نتبع الخطوات التالية:

1. نوجد الحدود الأولى للمتتالية $u_{n+1} = f(u_n)$ ونخمن جهة اطراد المتتالية (متزايدة أو متناقصة أو ثابتة).
2. إذا كانت الحدود الأولى متزايدة نثبت بالتدريج صحة العلاقة $u_{n+1} > u_n$ فتكون المتتالية u_n متزايدة تماماً
3. إذا كانت الحدود الأولى متناقصة نثبت بالتدريج صحة العلاقة $u_{n+1} < u_n$ فتكون المتتالية u_n متناقصة تماماً.
4. إذا كانت الحدود الأولى ثابتة نثبت بالتدريج صحة العلاقة $u_{n+1} = u_n$ أو $u_n = u_0$ فتكون المتتالية u_n ثابتة.

المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
التعريف	كل حد ينتج عن الحد السابق بإضافة عدد حقيقي ثابت r يسمى الأساس	كل حد ينتج عن الحد السابق بضربه بعدد حقيقي ثابت q يسمى الأساس
الحد العام	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 q^n$
العلاقة بين حدين مختلفين	$u_n - u_m = (n-m)r$	$\dfrac{u_n}{u_m} = q^{n-m}$
إثبات أنها متتالية	$u_{n+1} - u_n = r$	$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$
العلاقة بين ثلاث حدود متوالية a,b,c	$a+c=2b$	$ac=2b$
المجموع	لإيجاد مجموع الحدود $u_i+\dots+u_j$	
	$S=\dfrac{a+\ell}{2}n$ $a=u_i$ الحد الأول بالمجموع $\ell=u_j$ الحد الأخير بالمجموع $n=j-i+1$ عدد الحدود	$S=a\dfrac{1-q^n}{1-q}$ $a=u_i$ الحد الأول بالمجموع q الأساس $n=j-i+1$ عدد الحدود

تخمين الحد العام لمتتالية

لتخمين الحد العام للمتتالية u_n المعرفة بالعلاقة التدريجية $u_{n+1}=au_n+b$ يمكن استخدام إحدى الطريقتين الآتيتين:

الطريقة الأولى:

1. نوجد الحدود الخمس الأولى.
2. نطرح كل حدين متتالين ، ومنه تكون المتتالية $u_{n+1}-u_n$ هندسية نعين حدها الأول وأساسها.
3. نكتب الحد العام للمتتالية $u_{n+1}-u_n$ بدلالة n.
4. نعوض عبارة u_{n+1} في العلاقة $u_{n+1}-u_n$ فنحصل على عبارة u_n بدلالة n.
5. نثبت بالتدريج صحة الحد العام للمتتالية u_n أياً كان العدد الطبيعي n.

الطريقة الثانية:

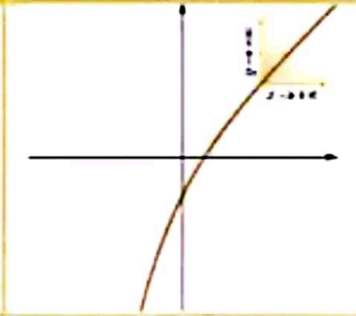
1. نعيّن التابع $f(x)$ الممثل للمتتالية u_n.
2. نوجد ℓ حل المعادلة $f(x)=x$.
3. نثبت أن المتتالية $v_n=u_n-\ell$ هندسية ، نكتب حدها العام بدلالة n.
4. ومنه نحصل على عبارة u_n بدلالة n حيث $u_n=v_n+\ell$.
5. نثبت بالتدريج صحة الحد العام للمتتالية u_n أياً كان العدد الطبيعي n.

... بالمتتاليات والإثبات بالتدريج

أشكال النهايات

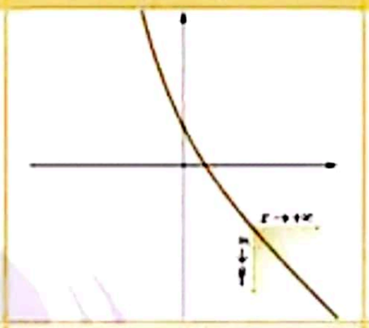
النهاية عند اللانهاية الموجبة ($+\infty$) ممكن أن تكون:

($+\infty$)



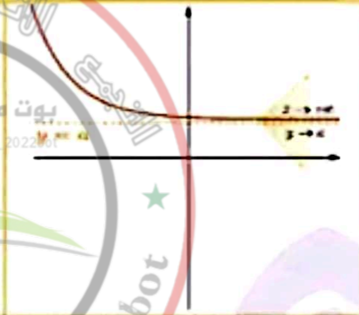
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

($-\infty$)



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

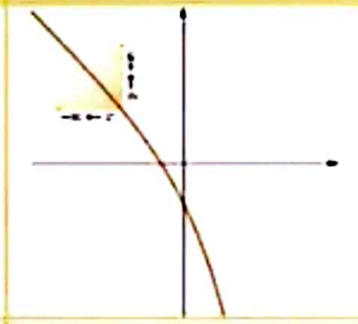
عدد



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$

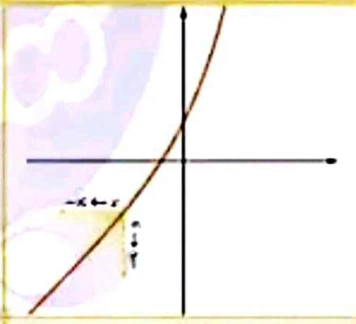
النهاية عند اللانهاية السالبة ($-\infty$) ممكن أن تكون:

($+\infty$)



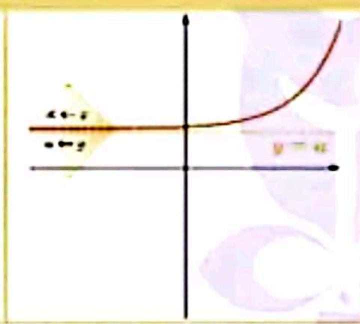
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

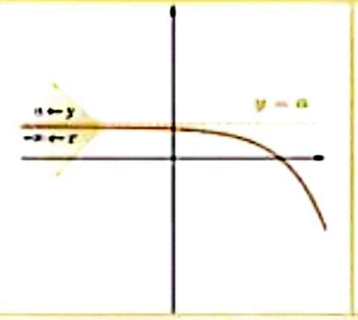
($-\infty$)



$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

عدد

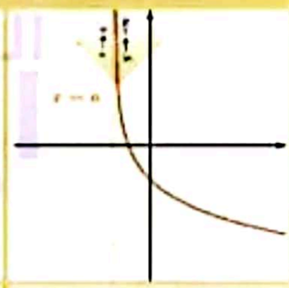




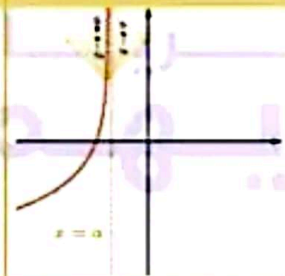
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$

النهاية عند عدد ممكن أن تكون:

($+\infty$)

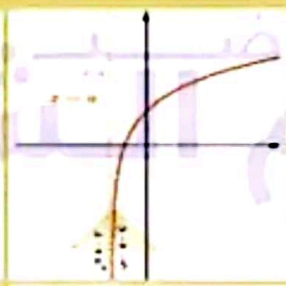


$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

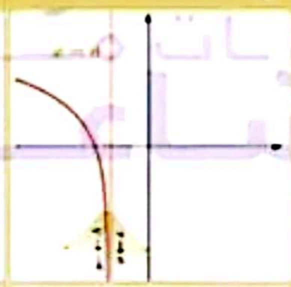


$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

($-\infty$)

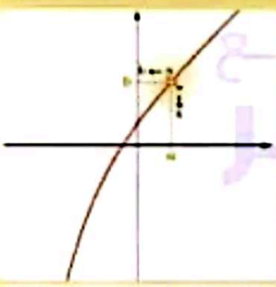


$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

عدد



$\lim_{x\to a} f(x)=b$

تابع الجزء الصحيح

1. تابع الجزء الصحيح $E(x)$ هو التابع الذي يقرن كل عدد حقيقي x بالعدد الصحيح α حيث $\alpha \le x < \alpha+1$.
2. تابع الجزء الصحيح $E(x)$ يحقق العلاقة $x-1 < E(x) \le x$.
3. لرسم الخط البياني لتابع الجزء الصحيح على مجال $[a,b]$ حيث a و b أعداد صحيحة ، نقسم المجال $[a,b]$ إلى مجالات طول كل منها يساوي الواحد حيث بداية المجال مغلقة ونهايته مفتوحة.

حالات عدم التعيين

من حالات عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ و $\infty-\infty$ و $0\times\infty$ ولإزالة حالة عدم التعيين نسعى لتغيير شكل التابع بإحدى الطرق الآتية:

الحالة	طرق الإزالة		
$\frac{\infty}{\infty}$	نهاية الحد المسيطر إذا كان البسط والمقام كثيري حدود	إخراج عامل مشترك	
$\infty-\infty$	نهاية الحد المسيطر إذا المقدار كثير حدود	إخراج عامل مشترك	الضرب بالمرافق
$\frac{0}{0}$	تحليل البسط والمقام إذا كانا كثيري حدود	الضرب بالمرافق	
$0\times\infty$	نشر الأقواس		

ملاحظة: توجد طرق كثيرة لتغيير شكل التابع ، كل طريقة تزيل حالة عدم التعيين مقبولة. (عدا قاعدة أوبيتال لأنها خارج المنهاج)

مبرهنات الإحاطة والمقارنة

1. مبرهنة الإحاطة: إذا كان $g(x)\le f(x)\le h(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\ell$ فإن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell$.
2. مبرهنة المقارنة الأولى: إذا كان $f(x)\le h(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.
3. مبرهنة المقارنة الثانية: إذا كان $g(x)\le f(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$.
4. مبرهنة المقارنة الثالثة: إذا كان $|f(x)-\ell|\le g(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell$.

- **نستخدم مبرهنات الإحاطة والمقارنة في الحالات التالية:**

a) المقدارين $\sin x$ و $\cos x$ حيث $-1\le \sin x\le 1$ و $-1\le\cos x\le 1$.

b) المقدار $E(x)$ تابع الجزء الصحيح حيث $x-1<E(x)\le x$.

c) المقدار $(-1)^n$ حيث $-1\le(-1)^n\le 1$.

ملاحظة: ليس بالضرورة أن تكون النهاية عن اللانهاية عند استخدام مبرهنات الإحاطة والمقارنة.

المقاربات

1. المقارب المائل: نقول عن $\Delta: y=ax+b$ أنه مقارب مائل للخط البياني للتابع f إذا كان: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$.
2. المقارب الأفقي: نقول عن $y=b$ عن أنه مقارب أفقي للخط البياني للتابع f إذا كان: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$.
3. المقارب الشاقولي: نقول عن $x=a$ عن أنه مقارب شاقولي للخط البياني للتابع f إذا كان: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$.

ملاحظة: لدراسة وضع C بالنسبة للمقارب الأفقي أو المائل ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_\Delta$.

طرق إيجاد معادلة المقارب المائل

1. إذا كان التابع من الشكل $f(x)=\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}+a_nx^n+\dots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0}$ (البسط والمقام كثيري حدود ودرجة البسط أكبر من درجة المقام بمقدار واحد ، نستخدم القسمة الإقليدية وناتج القسمة من الشكل $\Delta: y=ax+b$ وهو المقارب المائل.
2. إذا كان التابع من الشكل $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ ، نكتب المقدار ax^2+bx+c بالصيغة القانونية لتكون بالشكل $ax^2+bx+c=(a'x+b')^2+c'$ عندها التابع يقبل مقاربين مائلين من الشكل $\Delta_1: y=a'x+b'$ و $\Delta_2: y=-a'x-b'$

3. **الطريقة العامة:** لإيجاد معادلة المقارب المائل للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$ (مثلاً) نتبع الخطوات التالية:

a. نتأكد أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty$.

b. نعيّن العددين الحقيقين a و b حيث: $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$.

c. عندئذٍ تكون معادلة المقارب المائل من الشكل: $\Delta: y=ax+b$.

الاستمرار

1. نقول عن التابع f أنه مستمر عن نقطة a إذا تحققت العلاقة $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.
2. نقول عن f انه مستمر على مجال I إذا كان مستمر عند كل نقطة من نقاط هذا المجال.
3. جميع التوابع المرجعية مستمرة على المجالات التي تشكل مجموعة التعريف.

عدد حلول معادلة

نقول أن للمعادلة $f(x)=k$ حل وحيد على المجال $]a,b[$ إذا تحقق الشرطين:

1. f مطرد تماماً على المجال $]a,b[$.
2. $k\in f(]a,b[)$.

نهاية مهمة

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1 \quad و \quad \lim_{x\to0}\frac{ax}{\sin ax}=1 \quad و \quad \lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}=1$$

نهاية تابع مركب

إذا كان $\lim_{x\to a} g(x)=b$ وكان $\lim_{x\to b} f(x)=c$ فإن $\lim_{x\to a} f(g(x))=c$.

التابع العكسي

1. إذا كان لدينا التابع $y=f(x): I\to J$ وأمكننا إيجاد $x=g(y)$ (نكتب x بدلالة y) عندئذٍ نسمي التابع $g(x)$ تابع عكسي للتابع f يرمز له بالرمز f^{-1} ويحقق $f^{-1}(x): J\to I$
2. الخط البياني للتابع f وتابعه العكسي f^{-1} متناظران بالنسبة إلى منصف الربع الأول ($y=x$).

انتهت أفكار الوحدة الثانية: النهايات والاستمرار

مشتقات التوابع المرجعية

التابع f	التابع المشتق f'	مجال الاشتقاق I
a	0	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
x^a	ax^{a-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^a}$	$-\frac{a}{x^{a+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

مشتقات التوابع المركبة

	التابع f	التابع المشتق f'
	ag	ag'
	g^a	$ag^{a-1}g'$
	$\frac{1}{g^a}$	$-\frac{ag'}{g^{a+1}}$
	$\sqrt{g}$	$\frac{g'}{2\sqrt{g}}$
	$\sin g$	$g'\cos g$
	$\cos g$	$-g'\sin g$
حالات	$\sin ax$	$a\cos ax$
خاصة	$\cos ax$	$-a\sin ax$

العمليات على المشتق

العملية	التابع	التابع المشتق
الجمع	$f+g$	$f'+g'$
الطرح	$f-g$	$f'-g'$
الضرب	fg	$f'g+g'f$
القسمة	$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}$

العدد المشتق

1. نقول عن f أنه اشتقاقي عند a إذا حقق $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$ ويسمى العدد ℓ العدد المشتق و يكون $f'(a)=\ell$.
2. نقول عن f أنه اشتقاقي على مجال I إذا كان اشتقاقي عند كل نقطة من نقاط هذا المجال.
3. إذا كان f غير مستمر عند a فهو غير اشتقاقي عند a.
4. جميع التوابع المرجعية اشتقاقية على مجالات مجموعة التعريف ما عدا التابع الجذري اشتقاقي على المجالات المفتوحة لمجموعة التعريف.

معادلة المماس

تعطى معادلة المماس للخط البياني للتابع f في نقطة منه فاصلتها a بالشكل: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ ...(1)

حالات خاصة:
1. معادلة المماس للخط البياني للتابع f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب: عندها تكون $a=0$ ونعوض في (1).
2. معادلة المماس للخط البياني للتابع f في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل: نحل المعادلة $f(x)=0$ لإيجاد قيمة (قيم) a ونعوض في المعادلة (1).
3. معادلة المماس للخط البياني للتابع f الذي يمر بالنقطة $A(x_0,y_0)$: نحل المعادلة $y_0=f'(a)(x_0-a)+f(a)$ لإيجاد قيمة a ونعوض في المعادلة (1).
4. معادلة المماس للخط البياني للتابع f الذي يوازي المستقيم Δ: نحل المعادلة $f'(a)=m_\Delta$ لإيجاد قيمة a ونعوض في المعادلة (1).
5. معادلة المماس للخط البياني للتابع f الذي يعامد المستقيم Δ: نحل المعادلة $m_\Delta\times f'(a)=-1$ لإيجاد قيمة a ونعوض في المعادلة (1).
6. معادلة المماس المشترك للخطين البيانيين للتابعين f و g: نحل جملة المعادلتين $f(a)=g(a)$ و $f'(a)=g'(a)$ لإيجاد قيمة a ونعوض في المعادلة (1).

ملاحظة: ميل المستقيم (AB) يعطى بالعلاقة: $m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$

المماس الأفقي

إذا كانت $f'(a)=0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ عندئذ نقول أن التابع f يقبل مماساً أفقياً في النقطة $(a,f(a))$ معادلته $y=f(a)$

المماس الشاقولي

إذا كانت $\infty=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ عندئذ نقول أن f غير اشتقاقي عند a ويقبل مماساً شاقولياً في النقطة $(a,f(a))$ معادلته $x=a$

نصف المماس من اليمين ونصف المماس من اليسار

1. نقول أن f اشتقاقي من اليمين عند a إذا حقق $\ell=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. وعندها يقبل نصف مماس من اليمين
2. نقول أن f اشتقاقي من اليسار عند a إذا حقق $\ell=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. وعندها يقبل نصف مماس من اليسار
3. نقول أن f اشتقاقي عند a إذا حقق $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

اطراد تابع

لدراسة اطراد التابع f على المجال I نوجد تابعه المشتق f' وندرس اشارته على المجال I ونميز الحالات التالية:

1. إذا كان $f'>0$ على I أو على أي مجال جزئي من I فإن التابع f متزايد تماماً على هذا المجال.
2. إذا كان $f'<0$ على I أو على أي مجال جزئي من I فإن التابع f متناقص تماماً على هذا المجال.
3. إذا كان $f'=0$ على I أو على أي مجال جزئي من I فإن التابع f ثابت على هذا المجال.

القيم الحدية

1. **القيمة الحدية الكبرى:** نقول عن $f(c)$ أنها قيمة حدية كبرى للتابع f على المجال I إذا وجد مجال مفتوح J من I يحوي c ويحقق: مهما تكن $x \in J$ فإن $f(x) \le f(c)$
2. **القيمة الحدية الصغرى:** نقول عن $f(c)$ أنها قيمة حدية صغرى للتابع f على المجال I إذا وجد مجال مفتوح J من I يحوي c ويحقق: مهما تكن $x \in J$ فإن $f(x) \ge f(c)$

التابع الفردي

1. نقول عن التابع f أنه تابع فردي إذا حقق الشرطين : أياً كانت $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ فإن $f(-x)=-f(x)$.
2. في هذه الحالة يكون الخط البياني للتابع f متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

التابع الزوجي

1. نقول عن التابع f أنه تابع زوجي إذا حقق الشرطين : أياً كانت $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ فإن $f(-x)=f(x)$.
2. في هذه الحالة يكون الخط البياني للتابع f متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

التابع الدوري:

1. نقول عن التابع f أنه تابع دوري ويقبل T دوراً له إذا حقق الشرطين : أياً كانت $x \in D_f$ و $x+T \in D_f$ فإن $f(x+T)=f(x)$.

ملاحظة:

إذا كان التابع f دوري ويقبل T دوراً له عندئذٍ يمكن دراسة تغيراته على مجال طوله T ، وإذا كان فردي أو زوجي أيضاً فيمكن دراسة تغيراته على مجال طوله $\frac{T}{2}$.

مركز التناظر

نقول عن النقطة $A(a,b)$ أنها مركز تناظر للخط البياني للتابع f تحقق الشرطين :

أياً كانت $a+h \in D_f$ و $a-h \in D_f$ حيث h عدد حقيقي فإن $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$.

محور التناظر

نقول عن المستقيم $x=a$ أنه محور تناظر للخط البياني للتابع f تحقق الشرطين :

أياً كانت $a+h \in D_f$ و $a-h \in D_f$ حيث h عدد حقيقي فإن $f(a+h)=f(a-h)$.

التقريب التآلفي

يمكن حساب قيمة تقريبية للعدد $f(a+h)$ من العلاقة $f(a+h)\approx f(a)+h\times f'(a)$

دراسة التغيرات

لدراسة تغيرات التابع f نتبع الخطوات التالية:

1. نوجد D_f مجموعة تعريف التابع f.
2. نوجد النهايات عند أطراف المجالات المفتوحة لمجموعة التعريف.
3. نحدد المقاربات الأفقية والشاقولية.
4. نوجد f' وقيم x التي تعدمه.
5. ندرس اشارة المشتق f' وننظم جدولاً بما سبق.

رسم الخط البياني لتابع

لرسم C الخط البياني للتابع f (بعد دراسة التغيرات) نتبع الخطوات التالية:

1. نرسم جميع مقاربات C (الأفقية والشاقولية والمائلة) إن وجدت.
2. نرسم جميع مماسات C (الأفقية والشاقولية) إن وجدت.
3. نرسم مماسات C (المائلة) في حال طلب إيجاد معادلة مماس.
4. نعيّن القيم الحدية للتابع f.
5. نحدد مركز التناظر أو محور التناظر (إن وجد).
6. نبدأ برسم الخط من اليسار إلى اليمين بالمطابقة مع جدول تغيرات التابع.

المشتقات من مراتب عليا

المشتق الأول: $f'(x)$

المشتق الثاني: $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$

المشتق الثالث: $f'''(x)=\left(f''(x)\right)'$

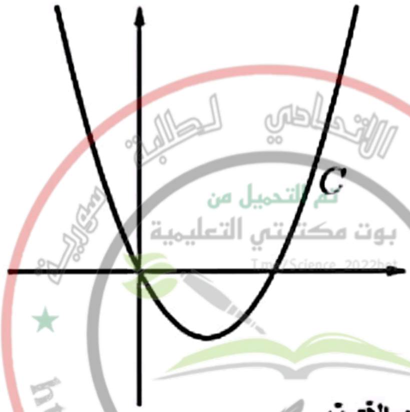
....

المشتق من المرتبة $n-1$: $f^{(n-1)}(x)=\left(f^{(n-2)}(x)\right)'$

المشتق من المرتبة n: $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

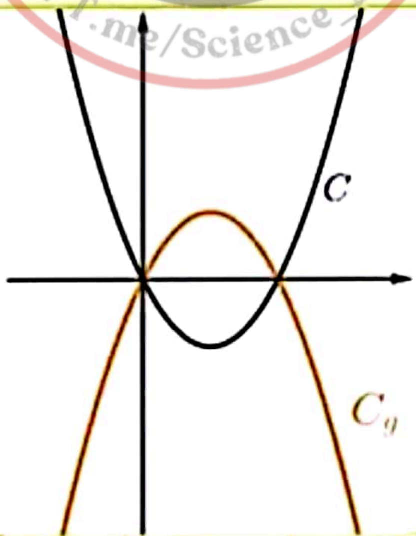
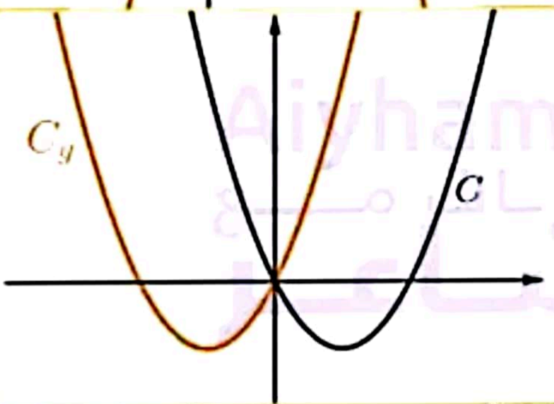
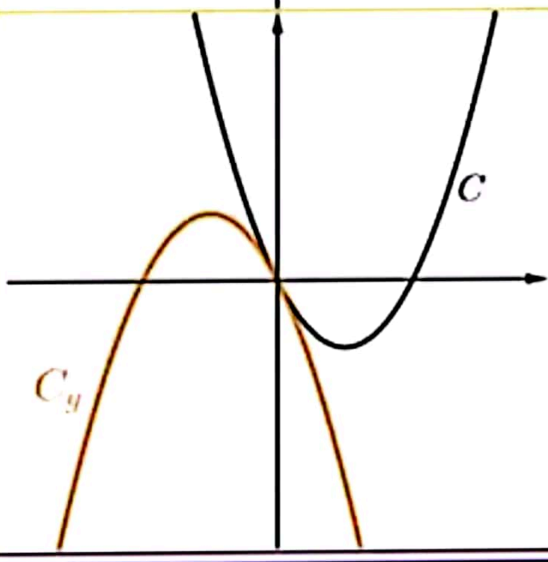
ملحق رقم (1)

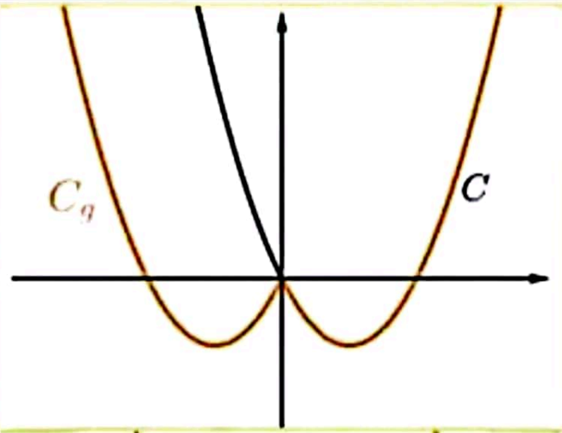
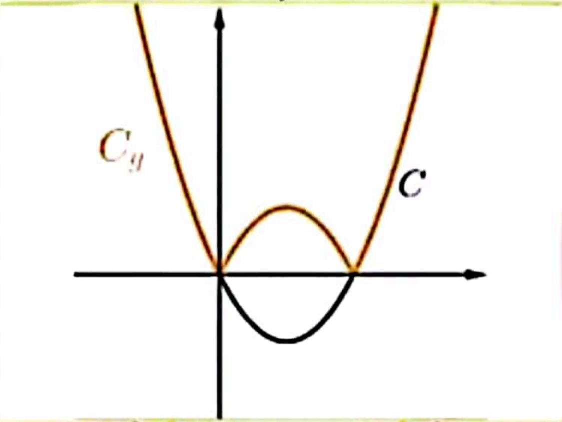
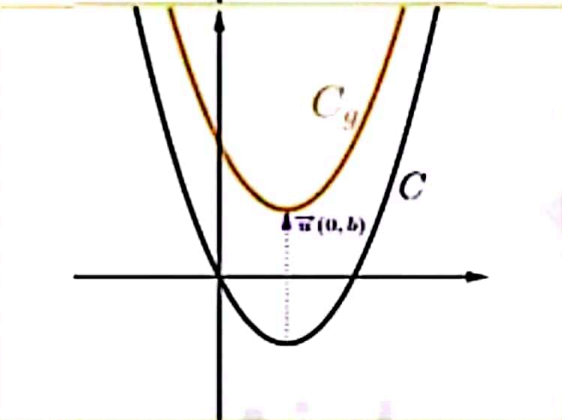
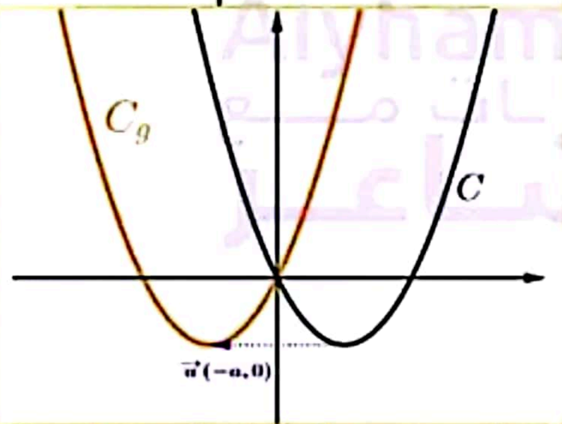
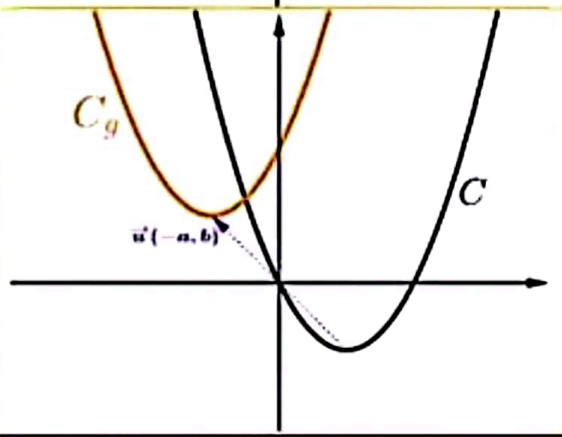
استنتاج رسم خط بياني من خط بياني آخر



إذا كان C الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً

فإنه يمكن استنتاج رسم C_g الخط البياني للتابع g وفق الحالات الآتية:

علاقة التابع	علاقة الخطين C_g و C	الرسم
$g(x)=-f(x)$	C_g نظير C بالنسبة لمحور الفواصل	
$g(x)=f(-x)$	C_g نظير C بالنسبة لمحور التراتيب	
$g(x)=-f(-x)$	C_g نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات	

$g(x)=f(\lvert x\rvert)$	C_g هو الجزء من الخط C عندما $x>0$ ومعكوس هذا الجزء بالنسبة لمحور التراتيب	
$g(x)=\lvert f(x)\rvert$	C_g هو الجزء من الخط C عندما $f(x)>0$ ومعكوس الجزء من الخط C عندما $f(x)<0$	
$g(x)=f(x)+b$	C_g انسحاب C وفق الشعاع $\vec{u}(0,b)$	
$g(x)=f(x+a)$	C_g انسحاب C وفق الشعاع $\vec{u}(-a,0)$	
$g(x)=f(x+a)+b$	C_g انسحاب C وفق الشعاع $\vec{u}(-a,b)$	

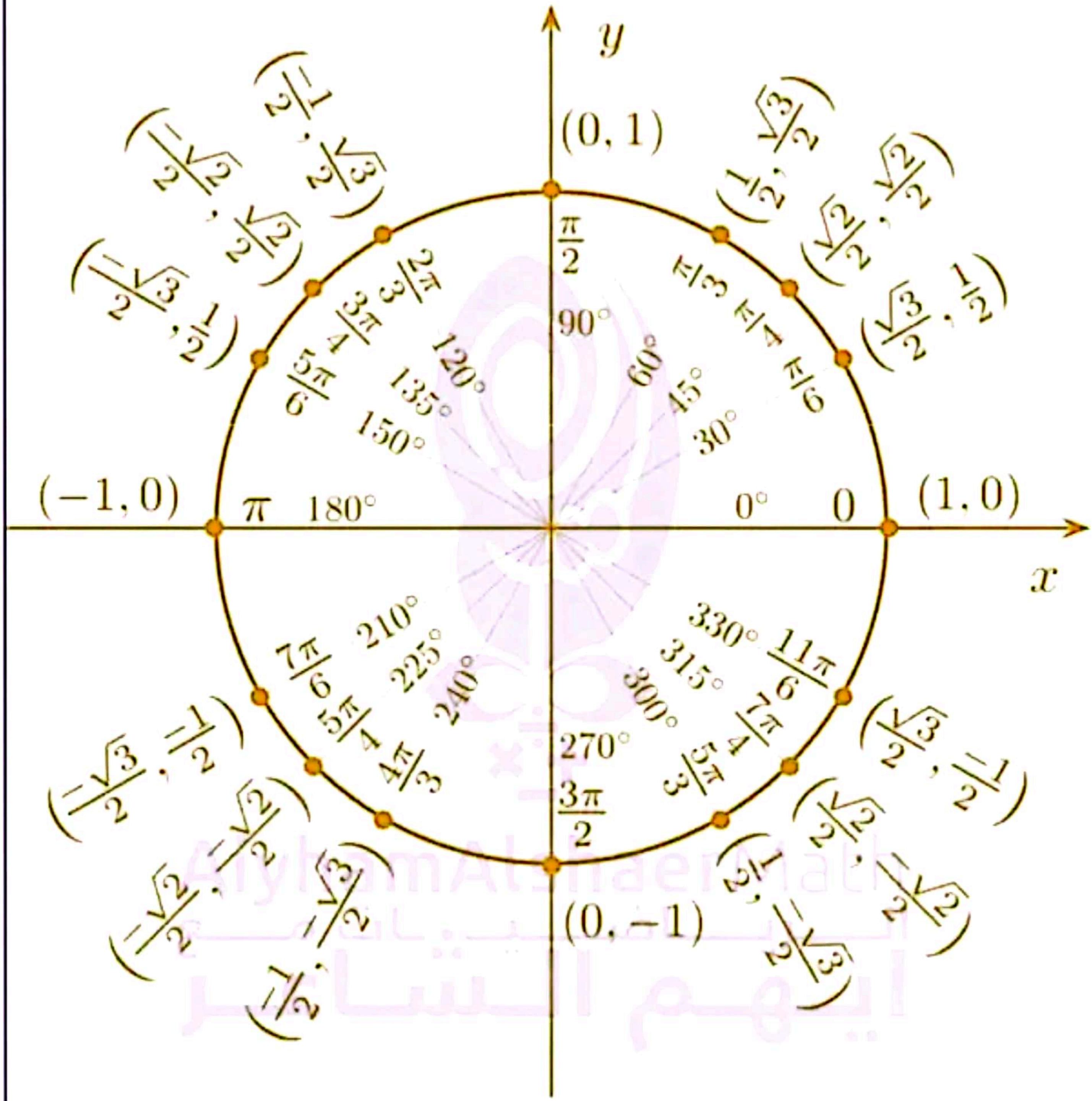
ملحق رقم (2)

بعض الدساتير المثلثية الهامة

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$	دساتير الجمع (جمع/طرح زاويتين)
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$	
$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$	
$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$	
$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$	دساتير الجداء
$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$	
$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$	
$\cos a\sin b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$	
$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$	دساتير الجمع (جمع/طرح نسبتين مثلثيتين)
$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$	
$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$	
$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$	
$\sin 2a=2\sin a\cos a$	دساتير المضاعفة (ضعفي زاوية)
$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$	
$\cos 2a=2\cos^2 a-1$	
$\cos 2a=1-2\sin^2 a$	
$\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$	دساتير المضاعفة (ثلاثة أضعاف زاوية)
$\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$	
$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$	دساتير التربيع
$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$	
$\sin^3 a=\frac{3}{4}\sin a-\frac{1}{4}\sin 3a$	دساتير التكعيب
$\cos^3 a=\frac{1}{4}\cos 3a+\frac{3}{4}\cos a$	

ملحق رقم (3)

الدائرة المثلثية



انتهت أفكار الوحدة الثالثة: الاشتقاق

الوحدة الرابعة: نهاية متتالية

تقارب متتالية معرفة بدلالة n

1. نقول عن المتتالية $u_n = f(n)$ أنها متقاربة من العدد الحقيقي ℓ إذا كانت $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = \ell$.
2. إذا كانت $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ عندها نقول عن المتتالية $u_n = f(n)$ أنها متباعدة إلى ∞.

ملاحظة: يمكن تطبيق جميع القواعد التي تخص نهاية تابع عند إيجاد نهاية متتالية معرفة بدلالة n.

تقارب متتالية هندسية أساسها q

1. إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ و المتتالية u_n متقاربة من العدد 0.
2. إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ و المتتالية u_n متباعدة إلى اللانهاية.
3. إذا كان $q < -1$ فإنه ليس للمتتالية u_n نهاية.

المتتالية المحدودة

1. نقول عن المتتالية u_n أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M يحقق $u_n < M$ ونسمي M حد راجح على u_n.
2. نقول عن المتتالية u_n أنها محدودة من الأدنى إذا وجد عدد حقيقي N يحقق $u_n > N$ ونسمي N حد قاصر عن u_n.
3. نقول عن المتتالية u_n أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى.

تقارب متتالية معرفة بالتدريج

نقول عن المتتالية u_n أنها متقاربة إذا تحقق أحد الشرطين الآتيين:

1. المتتالية u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى.
2. المتتالية u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى.

و تكون نهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$.

المتتاليتين المتجاورتين

نقول عن المتتاليتين u_n و v_n أنهما متجاورتين إذا تحقق الشرطين الآتيين:

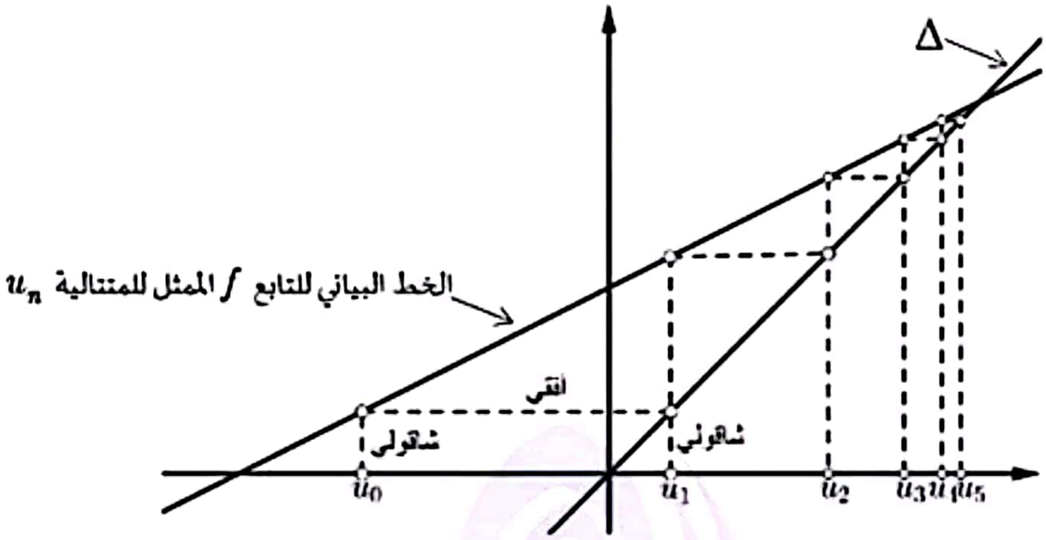
1. جهتي اطراد المتتاليتين مختلفة (إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة).
2. $\lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0$ (لهما النهاية ذاتها).

التمثيل الهندسي لحدود متتالية

لتمثيل الحدود الأولى للمتتالية u_n نتبع الخطوات التالية:

1. نرسم الخط البياني للتابع f الممثل للمتتالية u_n.
2. نرسم المستقيم $\Delta : y = x$.
3. نحدد على محور الفواصل الحد الأول u_0.
4. من u_0 (نرسم مستقيم شاقولي) ← الخط البياني (نرسم مستقيم أفقي) ← Δ (نرسم مستقيم شاقولي) ← محور الفواصل u_1.
5. نعيد الخطوات السابقة لنحصل على الحدود التالية.

الشكل التالي يوضح خطوات التمثيل:



يمكن متابعة فيديو توضيحي للتمثيل الهندسي لمتتالية على الرابط: https://www.youtube.com/watch?v=IDP6SlzYXhc

أو يمكن البحث على قناتنا على اليوتيوب **Aiyham Alshaer**

يفيد التمثيل الهندسي لمتتالية في:

1. جهة الاطراد (التزايد أو التناقص).
2. المحدودية (من الأعلى أو من الأدنى).
3. تقارب المتتالية.
4. نهاية المتتالية.

انتهت أفكار الوحدة الرابعة: نهاية متتالية

تعريف التابع اللوغاريتمي

التابع اللوغاريتمي: يرمز له بالرمز $\ln$ وهو معرّف بشرط ما داخل اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر.

$$f(x)=\ln(g(x)) \quad : \quad g(x)>0$$

التابع ln(x)

1. معرف على المجال $]0,+\infty[$.
2. ينعدم عندما $x=1$: $\ln 1=0$.
3. موجب تماماً عندما $]1,+\infty[$.
4. سالب تماماً عندما $]0,1[$.

جدول الإشارة

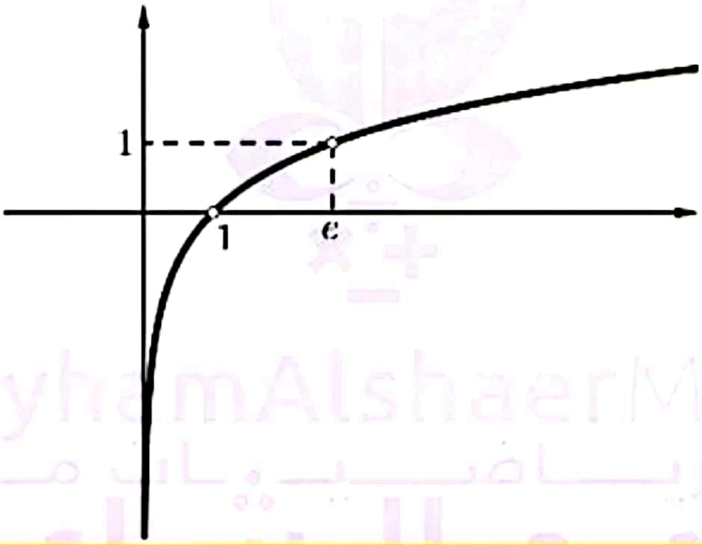
x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x=-\infty$.
6. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ موجب تماماً على مجموعة تعريفه فهو متزايد تماماً.

جدول التغيرات

x	0		$+\infty$
$(\ln x)'$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

7. $\ln e=1$ ويسمى العدد $e\approx 2.7$ العدد النيبري.
8. خطه البياني:



خواص

1. $a=b \Leftrightarrow \ln a=\ln b$.
2. $a<b \Leftrightarrow \ln a<\ln b$.
3. $a>b \Leftrightarrow \ln a>\ln b$.
4. $\ln ab=\ln a+\ln b$.
5. $\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$.
6. $\ln a^n=n\ln a$ وبحالة خاصة $\ln\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\ln a$.

حل معادلة أو متراجحة لوغاريتمية

لحل معادلة من الشكل $\ln f = \ln g$ أو متراجحة لوغاريتمية من الشكل $\ln f < \ln g$ (مثلاً) نتبع الخطوات التالية:

1. نحدد شرط الحل بالشكل: $D = \{f > 0 \cap g > 0\}$.
2. نحل المعادلة (المتراجحة) $f = g$.
3. نحدد قيم x التي تحقق شرط الحل.

خاصة ومعادلة

لدينا الخاصة $a = \ln e^a$ وتفيد في حل المعادلات (المتراجحات) من الشكل $\ln g = a$ وفق الخطوات:

1. نحدد شرط الحل الذي يحقق $D = \{g > 0\}$.
2. نكتب المعادلة بالشكل $\ln g = \ln e^a$ (وفق الخاصة).
3. نحل المعادلة $g = e^a$ ونحدد قيم x التي تحقق شرط الحل.

التابع f(x)=ln(g(x))

1. معرّف بشرط $g(x) > 0$.
2. اشتقاقي على المجال $D_{g'}$ وتابعه المشتق يعطى بالشكل $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$.

نهايات التابع اللوغاريتمي

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\ln(x+1)} = 1$.
3. $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$.

انتهت أفكار الوحدة الخامسة: التابع اللوغاريتمي

تعريف التابع الأسي

التابع الأسي: وهو التابع العكسي للتابع للوغاريتمي يرمز له بالرمز e وهو معرّف على $\mathbb{R}$.

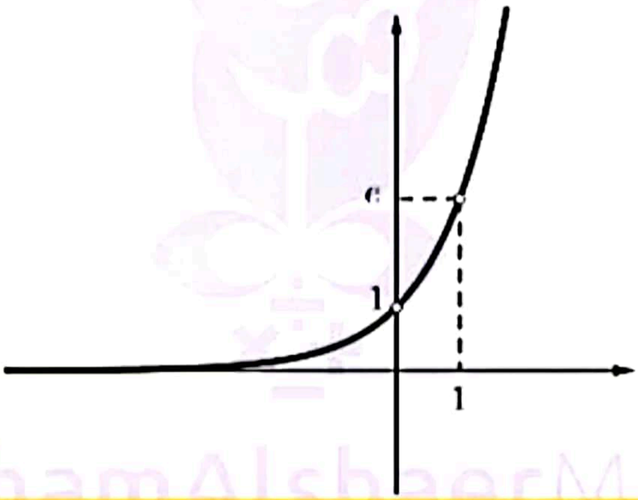
$$f(x)=e^{g(x)} \quad : \quad D_f=D_g$$

التابع e^x

1. معرف على $\mathbb{R}$.
2. لا ينعدم أبداً.
3. موجب تماماً أياً كانت $x\in\mathbb{R}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.
5. $(e^x)'=e^x$ موجب تماماً على مجموعة تعريفه فهو متزايد تماماً.
6. $e^0=1$ و $e^1=e$ ويسمى العدد $e\approx 2.7$ العدد النيبري.
7. خطه البياني:

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)'$		$+$	
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$



خواص

1. $a=b \Leftrightarrow e^a=e^b$.
2. $a<b \Leftrightarrow e^a<e^b$.
3. $a>b \Leftrightarrow e^a>e^b$.
4. $e^{a+b}=e^a\times e^b$.
5. $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$.
6. $(e^a)^b=e^{a\times b}$.

حل معادلة أو متراجحة أسية

لحل معادلة من الشكل $e^f = e^g$ أو متراجحة لوغاريتمية من الشكل $e^f < e^g$ (مثلاً) نتبع الخطوات التالية:

1. نحدد شرط الحل بالشكل: $D = \{D_f \cap D_g\}$.
2. نحل المعادلة (المتراجحة) $f = g$.
3. نحدد قيم x التي تحقق شرط الحل.

خاصة ومعادلة

لدينا الخاصة $a = e^{\ln a}$ وتفيد في حل المعادلات (المتراجحات) من الشكل $e^g = a$ وفق الخطوات:

1. نحدد شرط الحل الذي يحقق $D = \{D_g\}$.
2. نكتب المعادلة بالشكل $e^g = e^{\ln a}$ (وفق الخاصة).
3. نحل المعادلة $g = \ln a$ ونحدد قيم x التي تحقق شرط الحل.

التابع $f(x)=e^{g(x)}$

1. لدينا $D_f = D_g$.
2. اشتقاقي على المجال $D_{g'}$ وتابعه المشتق يعطى بالشكل $f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$.

نهايات التابع الأسي

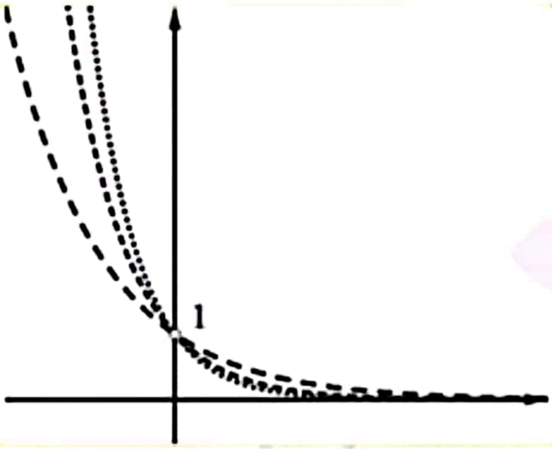
1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

المعادلات التفاضلية البسيطة

1. المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay$ تقبل حلاً من الشكل $y = f(x) = ke^{ax}$.
2. المعادلة التفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ تقبل حلاً من الشكل $y = f(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

التابع a^x

يكتب هذا التابع بالشكل $a^x = e^{x\ln a}$ ويحقق $a > 0$ ونميز الحالتين الآتيتين:

التابع	$a^x = e^{x\ln a}$	
قيم a	$a > 1$	$0 < a < 1$
المشتق	$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = \ln a\, e^{x\ln a}$	
	$a > 1 \Rightarrow \ln a > 0 \Rightarrow \ln a\, e^{x\ln a} > 0$ والتابع متزايد تماماً	$0 < a < 1 \Rightarrow \ln a < 0 \Rightarrow \ln a\, e^{x\ln a} < 0$ والتابع متناقص تماماً
النهايات	$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = 0$
جدول التغيرات	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline (a^x)' & & + & \\ \hline a^x & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline (a^x)' & & - & \\ \hline a^x & +\infty & \searrow & 0 \end{array}$
خطه البياني		

انتهت أفكار الوحدة السادسة: التابع الأسي

التكامل (التابع الأصلي) هو المفهوم العكسي للاشتقاق

التابع الأصلي

نقول عن F أنه تابع أصلي للتابع f على المجال I إذا تحقق الشرطين:

1. F اشتقاقي على I.
2. $F'(x)=f(x)$.

خواص

1. إذا كان $F(x)$ تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال I فإن $F(x)+k$ تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال I.
2. إذا كان $F(x)$ تابع أصلي للتابع $f(x)$ على المجال I فإن $\lambda F(x)$ تابع أصلي للتابع $\lambda f(x)$ على المجال I.
3. إذا كان $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان للتابعين $f(x)$ و $g(x)$ بالترتيب على المجال I فإن $F(x)\pm G(x)$ تابع أصلي للتابع $f(x)\pm g(x)$ على المجال I.

التوابع الأصلية للتوابع المرجعية

التابع f	تابعه العكسي F	المجال I	ملاحظات
a	ax	$\mathbb{R}$	a عدد ثابت
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$	n عدد طبيعي
		$]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$	n عدد صحيح أصغر تماماً من -1
		$]0,+\infty[$	n عدد حقيقي لا يساوي -1
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$]0,+\infty[$	
	$\ln(-x)$	$]-\infty,0[$	
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$	
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right[$	k عدد صحيح
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\cot x$	$]\pi k,\pi(k+1)[$	k عدد صحيح

التوابع الأصلية للتوابع المركبة

	التابع f	التابع الأصلي F
	ag'	ag
	$g'g^a$	$\dfrac{g^{a+1}}{a+1}$
	$\dfrac{g'}{2\sqrt{g}}$	$\sqrt{g}$
	$\dfrac{g'}{g}$	$\ln g$ عندما $g>0$
		$\ln(-g)$ عندما $g<0$
	$g'e^g$	e^g
	$g'\cos g$	$\sin g$
	$g'\sin g$	$-\cos g$
حالات خاصة	$\cos ax$	$\dfrac{1}{a}\sin ax$
	$\sin ax$	$-\dfrac{1}{a}\cos ax$

التكامل المحدد

إذا كان $F(x)$ تابع أصلي للتابع $f(x)$ فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

خواص التكامل المحدد

1. $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.
2. $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$.
3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.
4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (علاقة شال).

التكامل بالتجزئة

$$\int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b + \int_a^b uv'\,dx$$

حالات نستخدم فيها التكامل بالتجزئة

الحالة	u	v'
$x^n \sin x$	x^n	$\sin x$
$x^n \cos x$	x^n	$\cos x$
$x^n e^x$	x^n	e^x
$x^n \ln x$	$\ln x$	x^n

تكامل التوابع الكسرية

$$\int_a^b \frac{g}{f}\,dx$$

1. **إذا كانت درجة g أصغر من درجة f نميز حالتين:**

a) إذا كان g مشتق f فإن: $\int_a^b \frac{g}{f}\,dx = \left[\ln|f|\right]_a^b$.

b) إذا أمكن تفريق f إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى بحيث $f = f_1 \times f_2$

نبحث عن عددين α و β بحيث $\frac{g}{f} = \frac{g}{f_1 \times f_2} = \frac{\alpha}{f_1} + \frac{\beta}{f_2}$ عندها يكون $\int_a^b \frac{g}{f}\,dx = \int_a^b \frac{\alpha}{f_1}\,dx + \int_a^b \frac{\beta}{f_2}\,dx$

ملاحظة: يمكن تعميم الحالة السابقة إلى كتب f كجداء أكثر من عاملين من الدرجة الأولى.

c) إذا أمكن تفريق f إلى جداء عاملين f_1 من الدرجة الأولى و f_2 من الدرجة الثانية بحيث $f = f_1 \times f_2$

نبحث عن ثلاث أعداد عددين α و β و γ بحيث $\frac{\beta x + \gamma}{f_2} + \frac{\alpha}{f_1} = \frac{g}{f_1 \times f_2} = \frac{g}{f}$ عندها يكون

$$\int_a^b \frac{g}{f}\,dx = \int_a^b \frac{\alpha}{f_1}\,dx + \int_a^b \frac{\beta x + \gamma}{f_2}\,dx$$

d) إذا أمكن تفريق f إلى جداء عاملين f_1 من الدرجة الأولى و f_2 من الدرجة الثانية مكرر بحيث $f = f_1 \times (f_2)^2$

نبحث عن ثلاث أعداد عددين α و β و γ بحيث $\frac{\gamma}{(f_2)^2} + \frac{\beta}{f_2} + \frac{\alpha}{f_1} = \frac{g}{f_1 \times (f_2)} = \frac{g}{f}$ عندها يكون

$$\int_a^b \frac{g}{f}\,dx = \int_a^b \frac{\alpha}{f_1}\,dx + \int_a^b \frac{\beta}{f_2}\,dx + \int_a^b \frac{\gamma}{(f_2)^2}\,dx$$

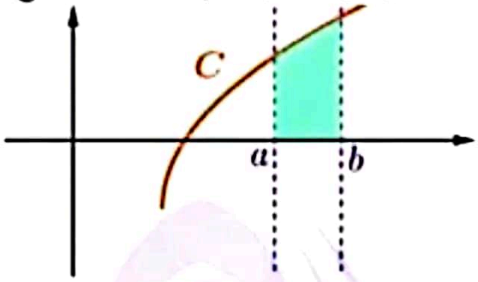
2. **إذا كانت درجة g أكبر من درجة f** نستخدم القسمة الإقليدية لنكتب الكسر بالشكل $\frac{g}{f} = h + \frac{k}{f}$ ويكون

$\int_a^b \frac{g}{f}\,dx = \int_a^b h\,dx + \int_a^b \frac{k}{f}\,dx$ وعندها حساب $\int_a^b \frac{k}{f}\,dx$ يؤول إلى إحدى الحالات السابقة.

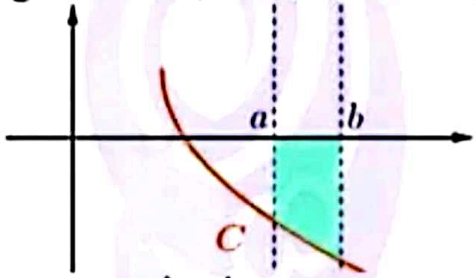
ليكن C الخط البياني للتابع f

1. مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ حيث $b>a$. نميز الحالات الآتية:

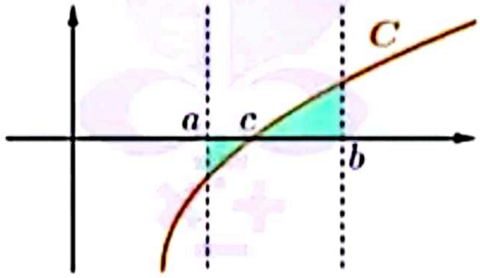
a) إذا كان C يقع فوق محور الفواصل على المجال $[a,b]$ فإن مساحة السطح تعطى بالعلاقة $S=\int_a^b f(x)\,dx$



b) إذا كان C يقع تحت محور الفواصل على المجال $[a,b]$ فإن مساحة السطح تعطى بالعلاقة $S=-\int_a^b f(x)\,dx$

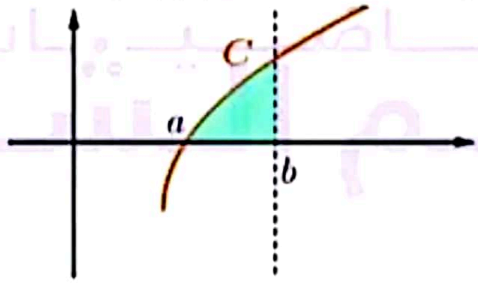


c) إذا كان C يقع فوق وتحت محور الفواصل على المجال $[a,b]$ فإن مساحة السطح تعطى بالعلاقة $S=\int_a^b |f(x)|dx$



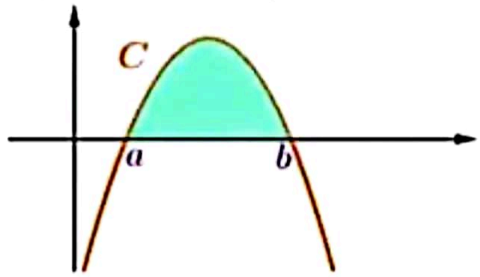
2. مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=b$

لإيجاد a الحد الثاني من حدود التكامل نوجد حل المعادلة $f(x)=0$ وتؤول عندها الحالة إلى الحالة الأولى.



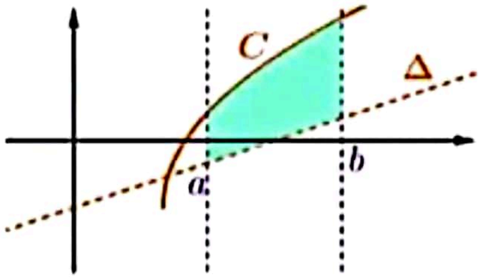
3. مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل

لإيجاد a و b حدود التكامل نوجد حل المعادلة $f(x)=0$ وتؤول عندها الحالة إلى الحالة الأولى.

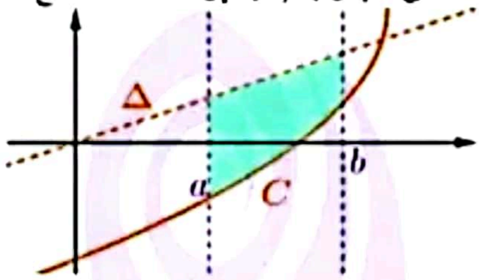


4. مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ حيث $b>a$. نميز الحالات الآتية:

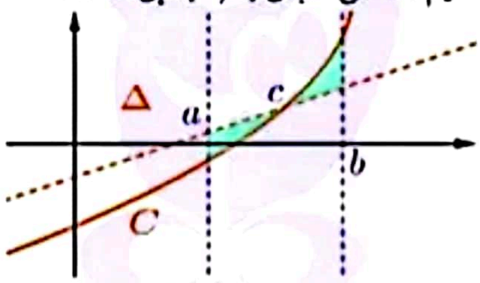
a) إذا كان C يقع فوق المستقيم Δ على المجال $[a,b]$ فإن مساحة السطح تعطى بالعلاقة $S=\int_a^b f(x)-y_\Delta\ dx$



b) إذا كان C يقع تحت المستقيم Δ على المجال $[a,b]$ فإن مساحة السطح تعطى بالعلاقة $S=-\int_a^b f(x)-y_\Delta\ dx$

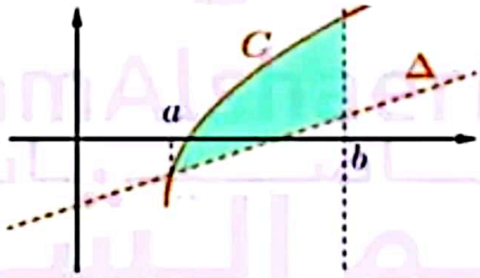


c) إذا كان C يقع فوق وتحت المستقيم Δ على المجال $[a,b]$ فإن مساحة السطح تعطى بالعلاقة $S=\int_a^b |f(x)-y_\Delta|dx$



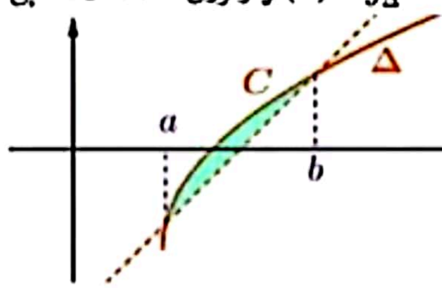
5. مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيم $x=b$

لإيجاد a الحد الثاني من حدود التكامل نوجد حل المعادلة $f(x)=y_\Delta$ وتؤول عندها الحالة إلى الحالة الرابعة.



6. مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ

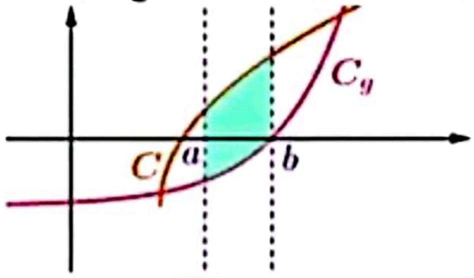
لإيجاد a و b حدود التكامل نوجد حل المعادلة $f(x)=y_\Delta$ وتؤول عندها الحالة إلى الحالة الرابعة.



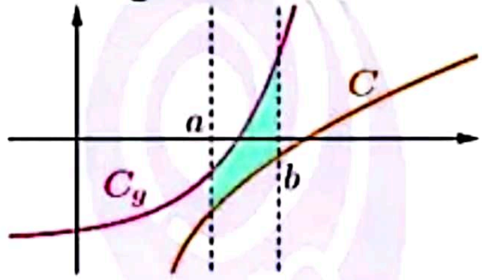
7. مساحة السطح المحصور بين C و C_g الخط البياني للتابع g والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ حيث $b>a$

نميز الحالات الآتية:

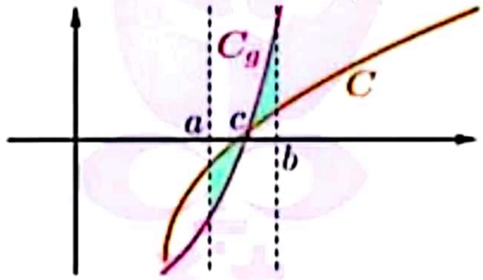
a) إذا كان C يقع فوق C_g على المجال $[a,b]$ فإن مساحة السطح تعطى بالعلاقة $S=\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$



b) إذا كان C يقع تحت C_g على المجال $[a,b]$ فإن مساحة السطح تعطى بالعلاقة $S=-\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$

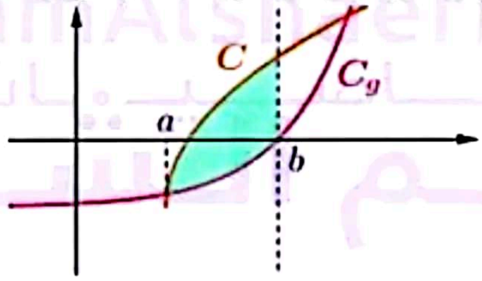


c) إذا كان C يقع فوق وتحت C_g على المجال $[a,b]$ فإن مساحة السطح تعطى بالعلاقة $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$



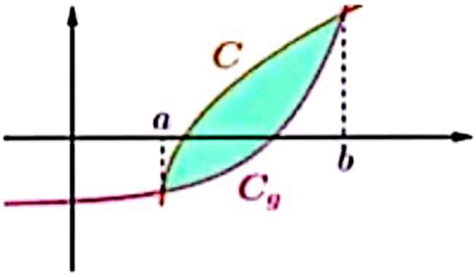
8. مساحة السطح المحصور بين C و C_g والمستقيم $x=b$

لإيجاد a الحد الثاني من حدود التكامل نوجد حل المعادلة $f(x)=g(x)$ وتؤول عندها الحالة إلى الحالة السابعة.



9. مساحة السطح المحصور بين C و C_g

لإيجاد a و b حدود التكامل نوجد حل المعادلة $f(x)=g(x)$ وتؤول عندها الحالة إلى الحالة السابعة.

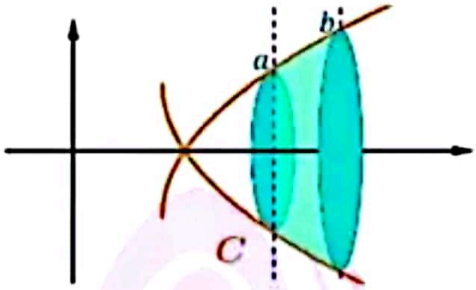


حساب الحجم

حجم المجسم الناتج عن دوران الجزء من الخط C المحصور بين المستقيمين $x = a$ و $x = b$ حيث $b > a$

حول محور الفواصل دورة كاملة يعطى بالعلاقة:

$$V = \pi \int_{a}^{b} (f(x))^2 \, dx$$



انتهت أفكار الوحدة السابعة: التكامل والتوابع الأصلية

انتهى ملف مراجعة الأفكار النظرية والقواعد الهامة في الجزء الأول

بالتوفيق للجميع ـ إعداد: أيهم الشاعر