الوحدة الأولى: الأشعة في الفراغ

تذكرة

1. تعريف الشعاع: لكل شعاع في الفراغ منحى وطويلة وجهة.
2. الأشعة المتساوية: نقول عن شعاعين أنهما متساويين إذا كان لهما المنحى ذاته والطويلة ذاتها والجهة ذاتها.
3. الأشعة المتعاكسة: نقول عن شعاعين أنهما متعاكسين إذا كان لهما المنحى ذاته والطويلة ذاتها ومختلفين بالجهة.

مجموع شعاعين متعاكسين يساوي الصفر.

تساوي شعاعين يعطي متوازي أضلاع.

4. جمع الأشعة: يمكن استخدام طريقتين لجمع أشعة وهما:

a) طريقة شال: وتفيد في حساب مجموع شعاعين متتالين (أشعة متتالية) ويكون المجموع هو بداية الشعاع الأول ونهاية الشعاع الثاني.

b) طريقة متوازي الأضلاع: وتفيد في حساب مجموع شعاعين لهما المبدأ ذاته ويكون المجموع هو قطر متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين.

6. طرح الأشعة: كل شعاع مسبوق بإشارة ناقص نوجد معكوسه فيتحول الطرح إلى جمع ويؤول إلى الحالتين السابقتين.

علاقات شعاعية مهمة

1. علاقة المتوسط: إذا كانت I منتصف $[BC]$ في المثلث ABC فإن $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$
2. علاقة مركز ثقل المثلث: إذا كانت G مركز ثقل المثلث ABC فإن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

الارتباط الخطي لشعاعين

نقول عن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما مرتبطين خطياً إذا وجد عدد حقيقي k يحقق $\vec{u}=k\vec{v}$

يفيد الارتباط الخطي لشعاعين في:

1. إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة (إذا كان الشعاعين مؤلفين من ثلاث نقاط).
2. إثبات توازي مستقيمين (إذا كان الشعاعين مؤلفين من أربع نقاط).

نتيجة: من ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر مستوٍ ومستوٍ واحد فقط.

الارتباط الخطي لثلاث أشعة

نقول عن الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أنها مرتبطة خطياً إذا تحقق أحد الشرطين التالية:

1. إذا كان شعاعين من الأشعة الثلاثة مرتبطين خطياً ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ مثلاً) فإن الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً.
2. إذا لم يكن شعاعين مرتبطين خطياً ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ مثلاً) نبحث عن عددين حقيقيين a و b بحيث $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

يفيد الارتباط الخطي لثلاث أشعة في:

1. إثبات أن أربع نقاط في مستوٍ واحد.
2. إثبات وقوع ثلاث أشعة في مستوٍ واحد.
3. إثبات أن مستقيم يوازي مستوٍ (يكفي إثبات الارتباط الخطي لشعاع توجيه المستقيم وشعاعين من المستوي)

المعلم في الفراغ

1. المعلم المتجانس: أشعة الأساس متعامدة ومتساوية وطول كل منها واحد.
2. المعلم الكيفي: أشعة الأساس غير متعامدة أو غير متساوية

تعطى إحداثيات نقطة في الفراغ بالشكل $M(x,y,z)$ حيث x فاصلة النقطة ، y ترتيب النقطة ، z علو (راقم) النقطة.

الهندسة التحليلية في الفراغ

1. إذا كانت النقاط $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ و $C(x_C,y_C,z_C)$ فإن:

a) مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ تعطى بالشكل: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$.

b) طول القطعة المستقيمة $[AB]$ يعطى بالشكل: $[AB]=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

c) منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ يعطى بالشكل: $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ و $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$ و $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

d) إذا كانت A نظيرة B بالنسبة إلى C أي أن C منتصف $[AB]$

e) مركز ثقل المثلث ABC يعطى بالشكل:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \text{ و } y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3} \text{ و } z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}.$$

تذكرة:

- مركز ثقل المثلث هو نقطة تلاقي المتوسطات
- يبعد مركز ثقل المثلث عن كل رأس ضعفي بعده عن منتصف الضلع المقابلة.

2. إذا كان الشعاعين $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ فإن:

a) ضرب شعاع بعدد: $k\vec{u}(kx,ky,kz)$

b) جمع وطرح شعاعين: $\vec{u}\pm\vec{v}(x\pm x',y\pm y',z\pm z')$

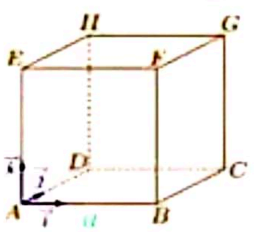
c) الشرط التحليلي للارتباط الخطي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يحقق: $\dfrac{x}{x'}=\dfrac{y}{y'}=\dfrac{z}{z'}$.

احداثيات شكل في الفراغ

1. في المعلم المتجانس:

a) إحداثيات رؤوس مكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه a في المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

حيث $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD}=a\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=a\vec{k}$ تعطى بالشكل:

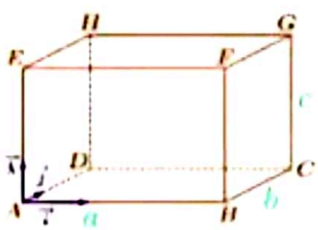


$A(0,0,0)$ و $B(a,0,0)$ و $C(a,a,0)$ و $D(0,a,0)$

$E(0,0,a)$ و $F(a,0,a)$ و $G(a,a,a)$ و $H(0,a,a)$

b) إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ أبعاده a و b و c في المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

حيث $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD}=b\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=c\vec{k}$ تعطى بالشكل:

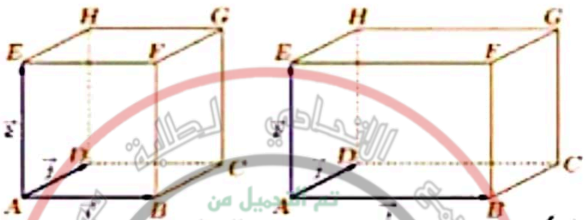


$A(0,0,0)$ و $B(a,0,0)$ و $C(a,b,0)$ و $D(0,b,0)$

$E(0,0,c)$ و $F(a,0,c)$ و $G(a,b,c)$ و $H(0,b,c)$

2. في المعلم الكيفي:

a) إحداثيات رؤوس مكعب (متوازي المستطيلات) $ABCDEFGH$ في المعلم الكيفي $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

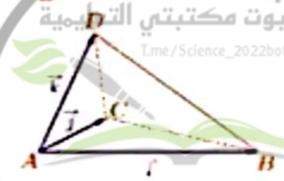


حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=\vec{k}$ تعطى بالشكل:

$A(0,0,0)$ و $B(1,0,0)$ و $C(1,1,0)$ و $D(0,1,0)$

$E(0,0,1)$ و $F(1,0,1)$ و $G(1,1,1)$ و $H(0,1,1)$

b) إحداثيات رؤوس رباعي الوجوه $ABCD$ في المعلم الكيفي $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$



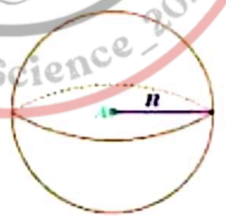
حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{AD}=\vec{k}$ تعطى بالشكل:

$A(0,0,0)$ و $B(1,0,0)$ و $C(0,1,0)$ و $D(0,0,1)$

معادلة الكرة

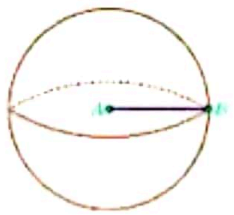
1. معادلة كرة مركزها A ونصف قطرها R تعطى بالشكل:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2$$

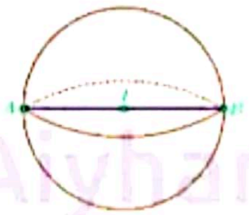


2. معادلة كرة مركزها A وتمر بالنقطة B تعطى بالشكل:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=[AB]^2 \text{ حيث } R=[AB]$$



3. معادلة كرة قطرها $[AB]$ تعطى بالشكل:



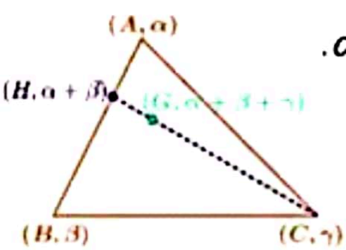
$$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=[AI]^2$$

حيث I منتصف $[AB]$ و $R=\frac{1}{2}[AB]=[AI]=[BI]$

مركز الأبعاد المتناسبة

1. مركز الأبعاد للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) هو النقطة G التي تحقق:

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ بشرط $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$



2. إذا كانت M نقطة كيفية من الفراغ فإن: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

3. الخاصة التجميعية:

إذا كان H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) و (B,β) فإن:

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(H,\alpha+\beta)$ و (C,γ).

4. لإنشاء النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) و (B,β) نستخدم العلاقة $\overrightarrow{AH}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

5. احداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) تعطى بالعلاقات:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ و } y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ و } z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

خواص:

a) إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين (A,α) و (B,α) فإن G منتصف $[AB]$

b) إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,α) و (C,α) فإن G مركز ثقل المثلث ABC

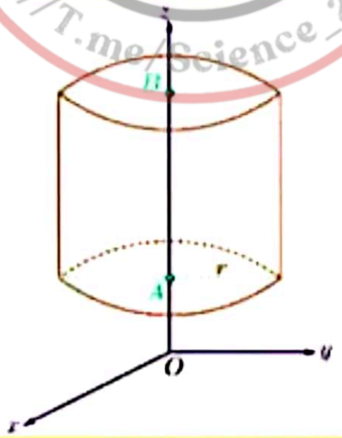
c) إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,α) و (C,α) و (D,α) فإن G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$

- يبعد مركز ثقل رباعي الوجوه عن كل رأس ثلاث أضعاف بعده عن مركز ثقل الوجه المقابل.

يفيد مركز الأبعاد المتناسبة في:

1. إثبات أن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة (إحدى النقاط مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المتبقيتين).
2. إثبات أن أربع نقاط تقع في مستوٍ واحد (إحدى النقاط مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاثة المتبقية).

معادلة اسطوانة



تعطى معادلة الاسطوانة

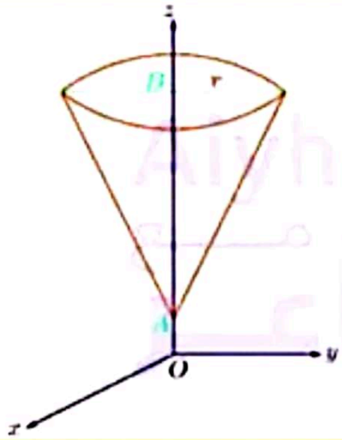
محورها OZ

ومركز قاعدتيها $A(0,0,a)$ و $B(0,0,b)$

ونصف قطر قاعدتيها r بالشكل:

$$x^2+y^2=r^2 \text{ و } a\le z\le b$$

معادلة مخروط



تعطى معادلة المخروط الذي

محوره OZ

ورأسه $A(0,0,a)$

ومركز قاعدته $B(0,0,b)$

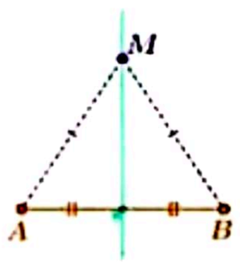
ونصف قطرها r بالشكل:

$$x^2+y^2-\frac{r^2}{(b-a)^2}z^2=0 \text{ و } a\le z\le b$$

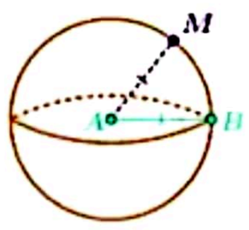
مجموعة نقاط الفراغ

مجموعة النقاط M التي تحقق:

1. $\|\overrightarrow{MA}\|=\|\overrightarrow{MB}\|$ تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$. (الشكل 1)
2. $\|\overrightarrow{MA}\|=\|\overrightarrow{AB}\|$ تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها $R=[AB]$. (الشكل 2)



الشكل 1



الشكل 2

قوانين مهمة (المحيط ، المساحة ، الحجم)

في الهندسة المستوية

الشكل	محيطه P	مساحته L	ملاحظات
مثلث	مجموع أطوال أضلاع	$\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$	
مثلث قائم الزاوية	مجموع أطوال أضلاع	$\frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2}$	
مثلث متساوي الأضلاع	طول الضلع × 3	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	a طول الضلع
شبه منحرف	مجموع أطوال أضلاع	$\frac{(\text{القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى}) \times \text{الارتفاع}}{2}$	
متوازي أضلاع	(الطول + العرض) × 2	القاعدة × الارتفاع	
مستطيل	(الطول + العرض) × 2	الطول × العرض	
معين	طول الضلع × 4	$\frac{\text{جداء قطريه}}{2}$	
مربع	طول الضلع × 4	(طول الضلع)^2	
دائرة	$2\pi r$	πr^2	r نصف قطر الدائرة

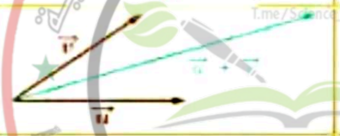
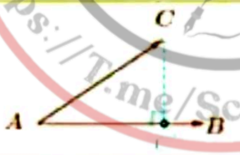
في الهندسة الفراغية

الشكل	المساحة الجانبية S_L	المساحة الكلية S_T	الحجم V	ملاحظات
مكعب	$4a^2$	$6a^2$	a^3	a طول الحرف
متوازي مستطيلات	$2ab+2ac$	$2ab+2ac+2bc$	abc	a و b و c أبعاده
موشور	$P\times h$	S_L+2S_p	$S_p\times h$	h ارتفاع الموشور P محيط القاعدة S_p مساحة القاعدة
الاسطوانة	$P\times h$	S_L+2S_p	$S_p\times h$	h ارتفاع الاسطوانة P محيط القاعدة S_p مساحة القاعدة
هرم			$\frac{1}{3}S_p\times h$	S_p مساحة القاعدة
كرة		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	r نصف قطر الكرة
مخروط			$\frac{1}{3}S_p\times h$	S_p مساحة القاعدة

انتهت أفكار الوحدة الأولى: الأشعة في الفراغ

عبارات الجداء السلمي

تعطى علاقات الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالشكل:

العبارة	متى تستخدم	رسم توضيحي
$\vec{u}.\vec{v}=\lVert\vec{u}\rVert.\lVert\vec{v}\rVert.\cos(\vec{u},\vec{v})$	تستخدم في حال معرفة الزاوية بين الشعاعين	
$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\lVert\vec{u}\rVert^2+\lVert\vec{v}\rVert^2-\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2\right)$	تستخدم في حال معرفة مجموع الشعاعين	
$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$	تستخدم في حال معرفة مركبات الشعاعين	
إذا كان C' المسقط القائم للنقطة C على المستقيم (AB) فإن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$	تستخدم في حال وجود تعامد	

يفيد الجداء السلمي لشعاعين في:

1. إثبات تعامد مستقيمين (إذا كان $\vec{u}.\vec{v}=0$).
2. إيجاد جيب تمام زاوية (cos) من العلاقة $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\lVert\vec{u}\rVert.\lVert\vec{v}\rVert}$.

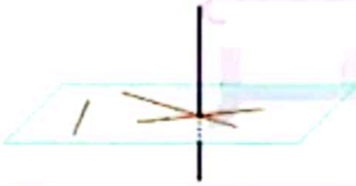
حالات خاصة

1. إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً وفي جهة واحدة فإن: $\vec{u}.\vec{v}=\lVert\vec{u}\rVert.\lVert\vec{v}\rVert$.

2. إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً وفي جهتين مختلفتين فإن: $\vec{u}.\vec{v}=-\lVert\vec{u}\rVert.\lVert\vec{v}\rVert$.

نتائج

1. نقول عن مستقيم أنه عمودي على مستو إذا وفقط إذا كان عمودياً على شعاعين متقاطعين فيه.
2. إذا كان مستقيم عمودي على مستوي فهو عمودي على أي مستقيم محتوى في المستوي



نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث

لإثبات أن النقطة H ي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC يكفي إثبات تحقق علاقتين من العلاقات الثلاث الآتية:

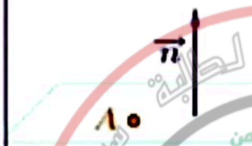
$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0 \text{ و } \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \text{ و } \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$$

مجموعة نقاط

مجموعة نقاط الفراغ $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي كرة قطرها $[AB]$

معادلة مستو

1. معادلة مستوي مار بالنقطة A ويقبل $\vec{n}(a,b,c)$ بالشكل $ax+by+cz+d=0$ ولإيجاد d نعوض A.
2. معادلة مستوي مار بالنقطة A ويقبل $\vec{n}(a,b,c)$ (طريقة ثانية) هو مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.
3. معادلة مستوي مار بثلاث نقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة وفق الخطوات التالية:

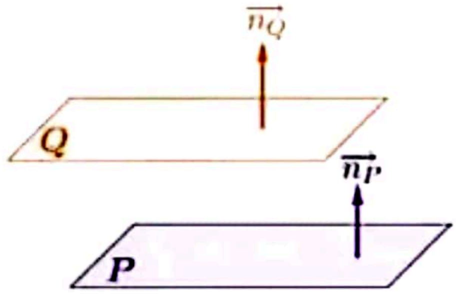
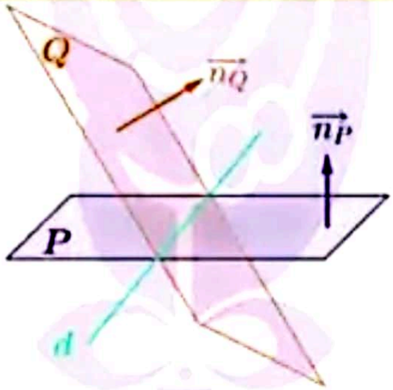
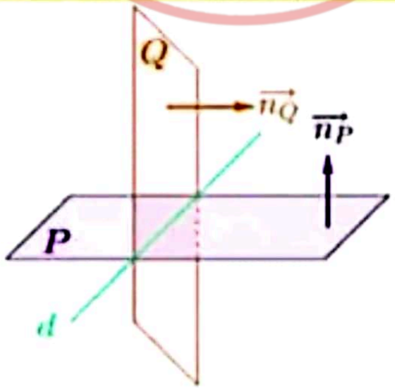


a. نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي فيحقق العلاقتين $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0$.

b. نعطي أي قيمة لـ a (مثلاً) فنحصل على معادلتين بمجهولين b و c بحلهما نحصل على الناظم $\vec{n}(a,b,c)$.

c. تصبح معادلة المستوي بالشكل $ax+by+cz+d=0$ ولإيجاد d نعوض A.

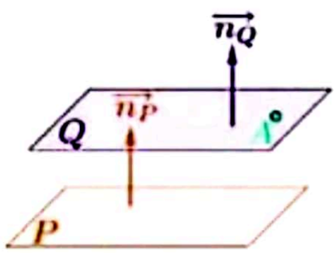
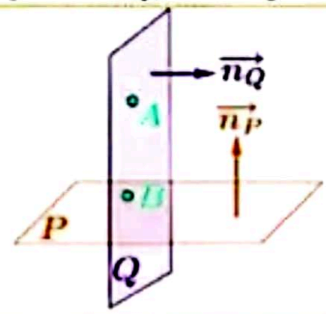
الوضع النسبي لمستويين

المستويين متوازيين	المستويين متقاطعين	المستويين متعامدين
$\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ مرتبطين خطياً	$\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطين خطياً	$\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ متعامدين
		

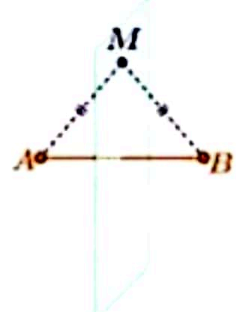
ملاحظة مهمة :

يتقاطع مستويين بمستقيم d يسمى الفصل المشترك لتقاطع المستويين.

إيجاد معادلة مستوي موازي أو عمودي على مستو آخر

معادلة مستوي يوازي مستوي ويمر من نقطة	معادلة مستوي عمودي على مستو ويمر بنقطتين
لإيجاد معادلة المستوي Q الموازي للمستوي P ويمر بالنقطة A لدينا $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}$ وبالتالي معادلة Q تعطى بالشكل: $ax+by+cz+d=0$ ولإيجاد d نعوض A.	لإيجاد معادلة المستوي Q العمودي على المستوي P ويمر بالنقطتين A و B: $\overrightarrow{n_Q}$ يحقق العلاقتين $\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_P}=0$ و $\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{AB}=0$ بحل جملة المعادلتين نحصل على $\overrightarrow{n_Q}$ وبالتالي معادلة Q تعطى بالشكل: $ax+by+cz+d=0$ ولإيجاد d نعوض A أو B
	

إيجاد معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة

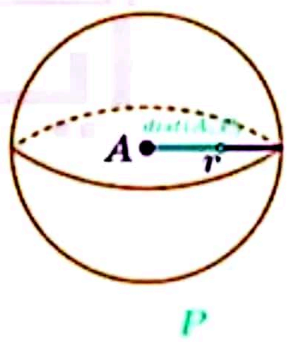
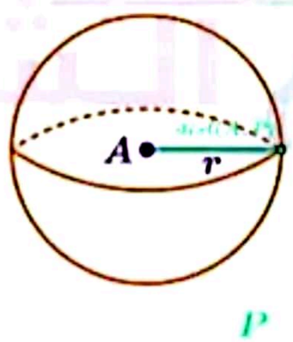
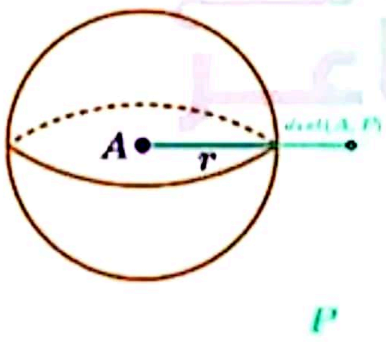
الطريقة الأولى	الطريقة الثانية
هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة: $MA = MB$	ناظم المستوي المحوري هو $\overrightarrow{AB}(a,b,c)$ وبالتالي معادلة المستوي تعطى بالشكل: $ax+by+cz+d=0$ ولإيجاد d نعوض I منتصف $[AB]$
	

بعد نقطة عن مستو

تعطى علاقة بعد النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ عن المستوي $P: ax+by+cz+d=0$ بالشكل:

$$dist(A,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

الوضع النسبي لكرة ومستو

المستوي يقطع الكرة	المستوي يمس الكرة	المستوي خارج الكرة
$dist(A,P) < r$	$dist(A,P) = r$	$dist(A,P) > r$
		

خاصة مهمة:

إذا طلب إيجاد معادلة الكرة التي مركزها $A(x_0,y_0,z_0)$ وتمس المستوي P . عندها يكون $dist(A,P)=r$

المسقط القائم لنقطة على مستوٍ

لإيجاد إحداثيات $C'(x,y,z)$ المسقط القائم للنقطة C على المستوي P نتبع الخطوات التالية:

1. الشعاعين $\overrightarrow{CC'}$ و $\overrightarrow{n_P}$ مرتبطين خطياً ومنه: $\overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{n_P}$ وبالتالي نحصل على احداثيات $C'(x,y,z)$ بدلالة k وفق:

$$\overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{n_P}$$

$$(x - x_C, y - y_C, z - z_C) = k(a,b,c)$$

$$(1) \quad z = ck + z_C \text{ و } y = bk + y_C \text{ و } x = ak + x_C$$

2. C' نقطة من المستوي P فهي تحقق معادلته

نعوض المعادلات (1) في معادلة المستوي فنحصل على قيمة k.

3. نعوض قيمة k في (1) فنحصل على إحداثيات C'.

المسقط القائم لنقطة على مستقيم

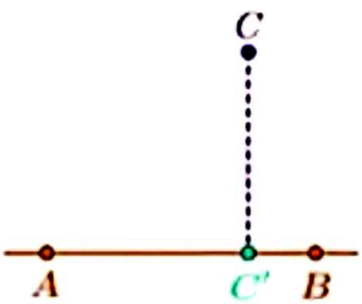
لإيجاد إحداثيات $C'(x,y,z)$ المسقط القائم للنقطة C على المستقيم (AB) نتبع الخطوات التالية:

1. الشعاعين $\overrightarrow{CC'}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدين ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = 0$ (نحصل على معادلة (1) بدلالة x و y و z).
2. الشعاعين $\overrightarrow{AC'}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطياً ومنه: $\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB}$ وبالتالي نحصل على احداثيات $C'(x,y,z)$ بدلالة k وفق:

$$\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB}$$

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = k(a,b,c)$$

$$(2) \quad z = ck + z_A \text{ و } y = bk + y_A \text{ و } x = ak + x_A$$

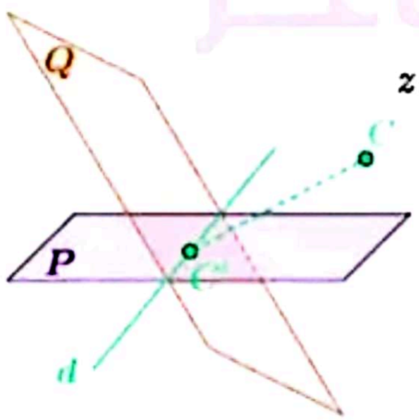


3. نعوض العلاقات السابقة في المعادلة (1) فنحصل على قيمة k.
4. نعوض قيمة k في (2) فنحصل على إحداثيات C'.

المسقط القائم لنقطة على الفصل المشترك لتقاطع مستويين

لإيجاد إحداثيات $C'(x,y,z)$ المسقط القائم للنقطة C على المستقيم (d) الفصل المشترك لتقاطع المستويين P و Q

نتبع الخطوات التالية:



1. نوجد نقطتين A و B من الفصل المشترك (d) بإعطاء قيمة لأحد المتغيرات x أو y أو z

ثم حل جملة المعادلتين لإيجاد قيمة المتغيرين الآخرين.

2. عندها تؤول الحالة إلى حالة إيجاد المسقط القائم لنقطة على مستقيم (الحالة السابقة)

انتهت أفكار الوحدة الثانية: الجداء السلمي في الفراغ

المستقيم والمستوى بصفتها مراكز أبعاد متناسبة

1. المستقيم (AB) هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,a) و $(B,1-a)$.
2. المستوي (ABC) هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقط المثقلة (A,a) و (B,b) و $(C,1-a-b)$.

التمثيل الوسيطي لمستقيم

1. التمثيل الوسيطي لمستقيم معلوم منه نقطة A وشعاع توجيه $\vec{u}(a,b,c)$ يعطى بالشكل: $d:\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$.

2. التمثيل الوسيطي لمستقيم معلوم منه نقطتين A و B يعطى بالشكل: $d:\begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + y_A \\ z = (z_B - z_A)t + z_A \end{cases} : t \in \mathbb{R}$.

التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لتقاطع مستويين

ليكن d الفصل المشترك لتقاطع المستوين P و Q ولإيجاد التمثيل الوسيطي للمستقيم d نتبع الخطوات التالية:

1. نعطي قيمة بدلالة t لأي متحول (x أو y أو z)

مثلاً: نفرض $x = t$ ونعوضها في معادلتي المستويين فنحصل على معادلتين بمجهولين y و z.

2. بالحل المشترك للمعادلتين السابقتين نوجد قيمة كل من y و z بدلالة t ومنه نحصل على التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d.

التمثيل الوسيطي لنصف مستقيم ، قطعة مستقيمة

1. التمثيل الوسيطي لنصف المستقيم $[AB)$ يعطى بالشكل: $d:\begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + y_A \\ z = (z_B - z_A)t + z_A \end{cases} : t \in [0,+\infty[$.

2. التمثيل الوسيطي لنصف المستقيم $[BA)$ يعطى بالشكل: $d:\begin{cases} x = (x_A - x_B)t + x_B \\ y = (y_A - y_B)t + y_B \\ z = (z_A - z_B)t + z_B \end{cases} : t \in [0,+\infty[$.

3. التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة $[AB]$ يعطى بالشكل:

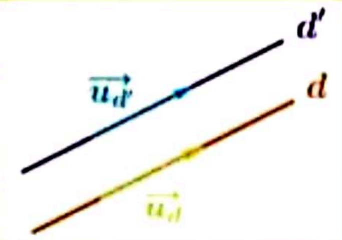
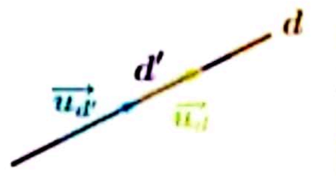
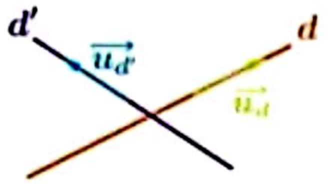
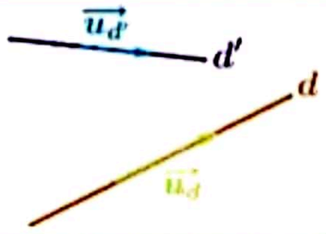
$$d:\begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + y_A \\ z = (z_B - z_A)t + z_A \end{cases} : t \in [0,1]$$

أو

$$d:\begin{cases} x = (x_A - x_B)t + x_B \\ y = (y_A - y_B)t + y_B \\ z = (z_A - z_B)t + z_B \end{cases} : t \in [0,1]$$

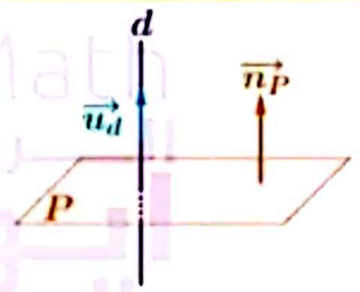
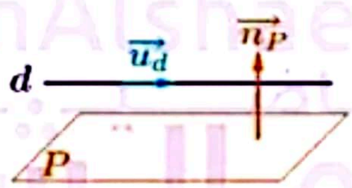
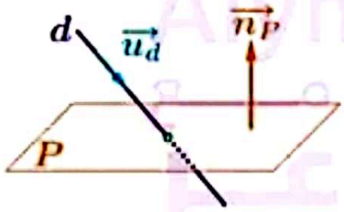
الوضع النسبي لمستقيمين

لدراسة الوضع النسبي للمستقيمين d و d' نميز الحالات التالية:

متوازيين	منطبقين	متقاطعين	متخالفين
$\overrightarrow{u_d}$ و $\overrightarrow{u_{d'}}$ مرتبطين خطياً		$\overrightarrow{u_d}$ و $\overrightarrow{u_{d'}}$ غير مرتبطين خطياً	
			
نوجد نقطة من المستقيم d ونعوضها في d': - إذا حققت معادلة d' كان المستقيمين منطبقين - وإذا لم تحقق معادلة d' كان المستقيمين متوازيين		بالحل المشترك لجملة المعادلات الوسيطية للمستقيمين d و d': - إذا كان للمعادلات حل ونتجت قيمة لكل وسيط كان المستقيمين متقاطعين وللحصول على نقطة التقاطع نعوض قيمة كل وسيط في معادلاته الوسيطية - وإذا لم نجد قيمتين للوسيطين تحقق المعادلات كان المستقيمين متخالفين	

الوضع النسبي لمستقيم ومستو

لدراسة الوضع النسبي للمستقيم d والمستوي P نميز الحالات التالية:

المستقيم عمودي على المستوي	المستقيم يوازي المستوي	المستقيم يقطع المستوي
$\overrightarrow{u_d}$ و $\overrightarrow{n_P}$ مرتبطين خطياً	$\overrightarrow{u_d}$ و $\overrightarrow{n_P}$ متعامدين	$\overrightarrow{u_d}$ و $\overrightarrow{n_P}$ غير متعامدين
		

لإيجاد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي P نتبع الخطوات التالية:

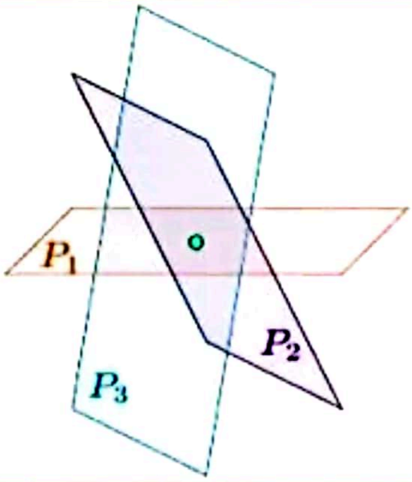
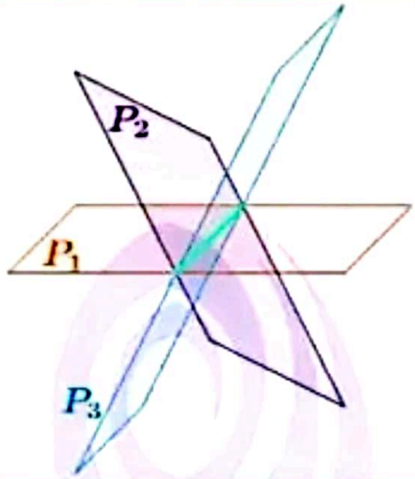
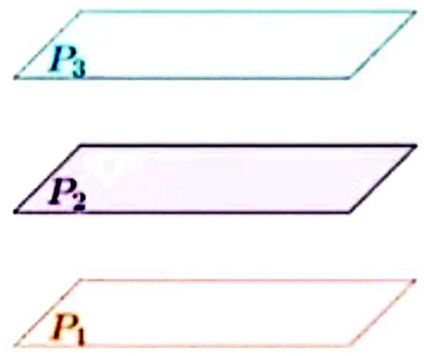
1. نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي P فنحصل على قيمة t.
2. نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية للمستقيم d نحصل على إحداثيات نقطة التقاطع.

ملاحظة:

التعامد هو حالة خاصة من تقاطع مستقيم مع مستو

الوضع النسبي لثلاث مستويات

لدراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات P_1 و P_2 و P_3 ، نحل جملة معادلات المستويات ونميز الحالات الآتية:

المستويات تتقاطع بنقطة واحدة	المستويات تتقاطع بفصل مشترك	المستويات لا تتقاطع
للجملة حل وحيد	للجملة عدد لا نهائي من الحلول	ليس للجملة حل
		

يمكن حل جملة المعادلات الخطية للمستويات الثلاثة

$$P_1 : a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$P_2 : a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$P_3 : a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

بإحدى الطريقتين الآتيتين:

<u>الطريقة الأولى:</u> طريقة غاوص

1. بالحل المشترك للمعادلتين الأولى والثانية نحذف x من المعادلة الثانية لتصبح $\begin{pmatrix} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ b_2'y+c_2'z=d_2' \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{pmatrix}$.
2. بالحل المشترك للمعادلتين الأولى والثالثة نحذف x من المعادلة الثالثة لتصبح $\begin{pmatrix} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ b_2'y+c_2'z=d_2' \\ b_3'y+c_3'z=d_3' \end{pmatrix}$.
3. بالحل المشترك للمعادلتين الثانية والثالثة نحذف y من المعادلة الثالثة لتصبح $\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{pmatrix} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ b_2'y+c_2'z=d_2' \\ c_3''z=d_3'' \end{pmatrix}$.
4. ونميز الحالات التالية:
   a. إذا كانت المعادلة (3) من الشكل $c_3''z=d_3''$ نوجد قيمة z ثم نعوض في المعادلة (2) لنحسب قيمة y ثم نعوض في المعادلة الأولى لنحصل على قيمة x فيكون للجملة حل وحيد وهو النقطة (x,y,z).
   b. إذا كانت المعادلة (3) من الشكل $\alpha=\alpha$ (محققة دوماً) فإن للجملة عدد لانهائي من الحلول.
   c. إذا كانت المعادلة (3) من الشكل $\alpha=\beta$ (غير محققة) فإنه ليس للجملة حل.

الطريقة الثانية: باستخدام التمثيلات الوسيطية

1. نثبت تقاطع مستويين من المستويات الثلاثة
2. نوجد التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لتقاطع المستويين السابقين
3. نعوض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي الأخر ونميز الحالات التالية:

a) إذا وجدنا قيمة واحدة للوسيط l فإن للجملة حل وحيد (لإيجاد هذا الحل نعوض قيمة l في المعادلات الوسيطية)

b) إذا كانت المعادلة محققة أياً كانت قيمة l فإن للجملة عدد لا نهائي من الحلول

c) إذا كانت الجملة غير محققة أياً كانت قيمة l فإنه ليس للجملة حل

طرق وحالات أخرى

الحالة	الطريقة
إيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوٍ	نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي لإيجاد قيمة الوسيط l ثم نعوض قيمة l في المعادلات الوسيطية لإيجاد نقطة التقاطع
إيجاد المسقط القائم لنقطة على مستوٍ	نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم العمودي على المستوي ويمر بالنقطة المطلوبة ثم نوجد نقطة تقاطعه مع المستوي فنحصل على المسقط القائم

ملاحظة:

يوجد طرق كثير ومختلفة لحل أكثر من فكرة وجميعها مقبولة عند التصحيح

انتهت أفكار الوحدة الثالثة: المستقيمات والمستويات في الفراغ

الوحدة الرابعة: الأعداد العقدية

مجموعة الأعداد العقدية

مجموعة الأعداد العقدية: $\mathbb{C}$ وتحقق $\sqrt{-1} = i$ ومنه $i^2 = -1$.

الشكل الجبري للعدد العقدي

الشكل الجبري للعدد العقدي هو: $z = x + iy$ نسمي $x = \text{Re}(z)$ القسم الحقيقي ، $y = \text{Im}(z)$ القسم التخيلي

ويحقق الخواص الآتية:

1. طويلة العدد العقدي: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. مرافق العدد العقدي: $\bar{z} = x - iy$.
3. معكوس عدد عقدي: $z' = -x - iy$
4. كل عدد عقدي يُمثل في المستوي بالنقطة $M(x,y)$.
5. إذا كان $y = \text{Im}(z) = 0$ فإن العدد العقدي يكتب بالشكل $z = x$ وعندها يمكن القول أن z عدد حقيقي.
6. إذا كان $x = \text{Re}(z) = 0$ فإن العدد العقدي يكتب بالشكل $z = iy$ وعندها يمكن القول أن z عدد تخيلي بحت.

العمليات على الأعداد العقدية

ليكن لدينا العددان العقديان $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ فإن:

1. الجمع: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ (شكل جبري)
2. الطرح: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ (شكل جبري)
3. الجداء: $z_1 . z_2 = (x_1 + iy_1).(x_2 + iy_2)$ (شكل جبري)
4. القسمة: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$ (ليس شكل جبري) ، للكتابة بالشكل الجبري نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

خواص مرافق العدد العقدي

ليكن لدينا العدد العقدي $z = x + iy$ و مرافقه $\bar{z} = x - iy$ يحقق الخواص الآتية:

1. مرافق المرافق: $\overline{(\bar{z})} = z$.
2. مرافق المجموع (الفرق) : $\overline{(z \pm w)} = \bar{z} \pm \bar{w}$.
3. مرافق الجداء: $\overline{(zw)} = \bar{z} \times \bar{w}$.
4. مرافق القسمة: $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.
5. مرافق القوة: $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.
6. القسم الحقيقي: $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ، القول أن z عدد تخيلي بحت يكافئ أن $z = -\bar{z}$.
7. القسم التخيلي: $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ ، القول أن z عدد حقيقي يكافئ أن $z = \bar{z}$.
8. خاصة مهمة جداً: $z\bar{z} = |z|^2$.

الشكل المثلثي للعدد العقدي

الشكل المثلثي للعدد العقدي $z = x + iy$ يعطى بالشكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \arg(z) = \theta \quad \text{و} \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

خواص مهمة جداً:

1. إذا كانت $\theta = \arg(z)$ فإن $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ و $\arg(-z) = \pi + \arg(z)$.
2. يكون z حقيقي إذا وفقط إذا كان $\arg(z) = \theta + \pi k$.
3. يكون z تخيلي بحت إذا وفقط إذا كان $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

خواص طويلة وزاوية عدد عقدي

ليكن العددان العقديان z و z' ونميز الحالتين:

1. جداء عددين عقديين $z.z'$:
   a) الطويلة: $|z.z'| = |z|.|z'|$
   b) الزاوية: $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$
2. قسمة عددين عقديين $\frac{z}{z'}$:
   a) الطويلة: $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
   b) الزاوية: $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
3. قوة عدد عقدي z^n:
   a) الطويلة: $|z^n| = (|z|)^n$
   b) الزاوية: $\arg(z^n) = n\arg(z)$

الشكل الأسي للعدد العقدي

الشكل الأسي للعدد العقدي $z = x + iy$ يعطى بالشكل $z = re^{i\theta}$ حيث

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r}\\ \sin\theta &= \frac{y}{r}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \arg(z) = \theta \quad \text{و} \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

علاقات مهمة

1. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
2. دستور دوموافر: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ و $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
3. علاقتا أويلر: $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ و $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.

المعادلة من الدرجة الثانية بأمثال حقيقية

لحل المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية ، نوجد المميز $\Delta=b^2-4ac$ ونميز الحالات التالية:

1. $\Delta>0$ للمعادلة حلين حقيقيين مختلفين: $z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. $\Delta<0$ للمعادلة حلين عقديين مختلفين: $z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
3. $\Delta=0$ للمعادلة حل وحيد: $z_0=\frac{-b}{2a}$

الجذور التربيعية لعدد عقدي

الجذر التربيعي للعدد العقدي $\omega=a+ib$ هو العدد العقدي $z=x+iy$ الذي يحقق:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \\ x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$$

بحل جملة المعادلات نوجد على x و y ومنه نحصل على $z=x+iy$.

المعادلة من الدرجة الثانية بأمثال غير حقيقية (عقدية)

لحل المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث واحد على الأقل من الأعداد الآتية a و b و c هو عدد عقدي:

1. نوجد المميز $\Delta=b^2-4ac$.
2. نوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي الموافق للمميز Δ .
3. ومنه تكون الحلول $z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

انتهت أفكار الوحدة الرابعة: الأعداد العقدية

الوحدة الخامسة: تطبيقات الأعداد العقدية

تمثيل الاشعة بأعداد عقدية

جميع العلاقات التالية في المستوي العقدي $(O,\vec{u},\vec{v})$:

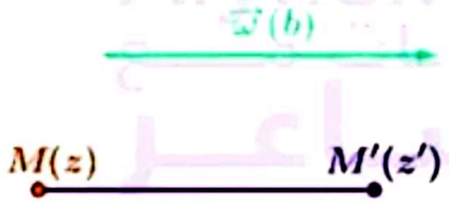
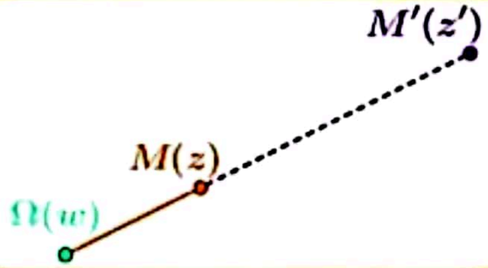
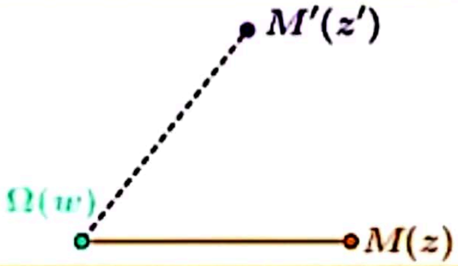
1. **تمثيل الأشعة بعدد عقدي:** العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو العدد $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
2. **المسافة:** طول القطعة المستقيمة $[AB]$ في المستوي العقدي يعطى بالعلاقة $AB = |z_B - z_A|$.
3. **العدد العقدي الممثل لمنتصف قطعة مستقيمة:** I منتصف $[AB]$ فإن $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.
4. **العدد العقدي الممثل لمركز ثقل مثلث:** G مركز ثقل المثلث ABC فإن $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.
5. **العدد العقدي الممثل لمركز أبعاد متناسبة:** G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) فإن:

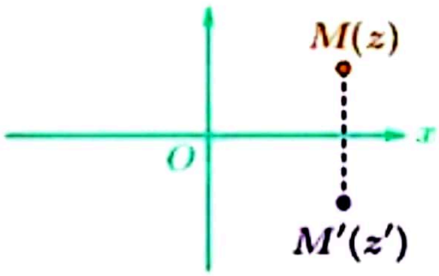
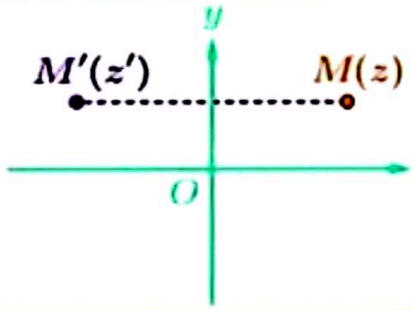
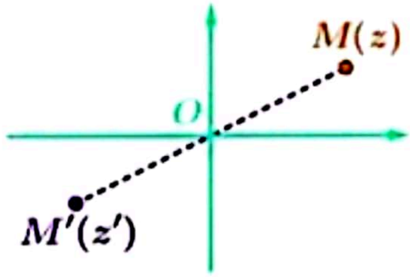
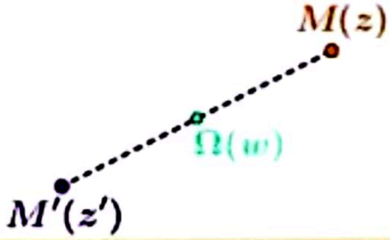
$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{3}$$

6. **الزاوية بين شعاعين:** $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$.
7. **تمثيل بعض المجموعات الخاصة:** لتكن لدينا النقاط $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $M(z)$
   a) $|z - z_A| = r$ مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل دائرة مركزها $A(z_A)$ ونصف قطرها r.
   b) $|z - z_A| = |z - z_B|$ مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

الصيغة العقدية للعدد العقدي z' صورة z وفق:

التحويل	الصيغة العقدية	الرسم
الانسحاب الذي شعاعه $\vec{\omega}(b)$	$z' = z + b$	
التحاكي الذي مركزه $\Omega(w)$ ونسبته k	$z' - w = k(z - w)$	
التحاكي الذي مركزه $\Omega(w)$ وزاويته θ	$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$	

التناظر الذي محوره Ox	$z' = \overline{z}$	
التناظر الذي محوره Oy	$z' = -\overline{z}$	
التناظر الذي مركزه O مبدأ الإحداثيات	$z' = -z$	
التناظر الذي مركزه $\Omega(w)$	$z' = 2w - z$	

قواعد وحالات خاصة

العدد العقدي z	$z = 1$	$z = -1$	$z = i$	$z = -i$
زاويته $\arg z$	$\arg z = 2\pi k$	$\arg z = \pi + 2\pi k$	$\arg z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$\arg z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
الشكل الأسي	$z = e^{2\pi k i}$	$z = e^{(\pi + 2\pi k)i}$	$z = e^{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)i}$	$z = e^{\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)i}$

العدد العقدي z	حقيقي موجب	حقيقي سالب	تخيلي موجب	تخيلي سالب
زاويته $\arg z$	$\arg z = 2\pi k$	$\arg z = \pi + 2\pi k$	$\arg z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$\arg z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

طبيعة مثلث باستخدام الأعداد العقدية

لمعرفة طبيعة المثلث ABC نكتب العدد العقدي $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل المثلثي (أو الأسي) ونميز الحالات:

$\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$	$\left\lvert\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\rvert$	نوع المثلث
$\pm\dfrac{\pi}{2}$	1	المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين رأسه A
$\pm\dfrac{\pi}{2}$	مختلف عن الواحد	المثلث ABC قائم في A
$\pm\dfrac{\pi}{3}$	1	المثلث ABC متساوي الأضلاع
غير معروفة	1	المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A

الارتباط الخطي والتعامد باستخدام الأعداد العقدية

إذا كان لدينا الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ ، نكتب الشكل الجبري العدد العقدي $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ وتميز الحالات الآتية:

العدد العقدي	حقيقي موجب	حقيقي سالب	تخيلي موجب	تخيلي سالب
زاويته	$\arg z = 2\pi k$	$\arg z = \pi + 2\pi k$	$\arg z = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$	$\arg z = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$
الخاصة	الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطياً		الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدين	

انتهت أفكار الوحدة الخامسة: تطبيقات الأعداد العقدية

طرائق العد

التباديل	التراتيب	التوافيق	المبدأ الأساسي في العد
نستخدم التباديل عند اختيار كامل المجموعة n وترتيبها	نستخدم التراتيب عند اختيار مجموعة جزئية r من المجموعة الكلية n وترتيبها	نستخدم التوافيق عند اختيار مجموعة جزئية r من المجموعة الكلية n بدون ترتيب	نستخدم المبدأ الأساسي في العد عند تكرار التجارب
$P_n = n!$	$P_n^r = \underbrace{n \times (n-1)..(n-r+1)}_{r}$	$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{P_r}$	عدد نتائج التجربة الأولى × عدد نتائج التجربة الثانية × ...
سحب كامل المجموعة بدون إعادة	السحب بدون إعادة	السحب معاً	السحب بدون إعادة السحب مع إعادة

ملاحظة مهمة جداً:

مجموعة تحوي الأحرف $S = \{a,a,a,b,b,c,c,c,c\}$ نختار منها ثلاث أحرف

1. عدد اختيار مجموعة تحوي a و b و c :

اختيار الحرف b

$$3 \times 2 \times 4 \times 3!$$

اختيار الحرف a — اختيار الحرف c — ترتيب الأحرف

2. عدد اختيار مجموعة تحوي a مرتين و b مرة: مع إعادة الحرف المختار

$$3 \times 3 \times 2 \times \binom{3}{2}$$

اختيار الحرف a — اختيار الحرف b — ترتيب الحرفين a

أو:

$$3 \times 3 \times 2 \times \binom{3}{1}$$

اختيار الحرف a — اختيار الحرف b — ترتيب الحرف b

3. عدد اختيار مجموعة تحوي a مرتين و b مرة: بدون إعادة الحرف المختار

$$3 \times 2 \times 2 \times \binom{3}{2}$$

اختيار الحرف a — اختيار الحرف b — ترتيب الحرفين a

أو:

$$3 \times 2 \times 2 \times \binom{3}{1}$$

اختيار الحرف a — اختيار الحرف b — ترتيب الحرف b

قواعد

1. $P_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ و $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!.r!}$.
2. $P_n^n = n!$ و $P_n^1 = n$ و $P_n^0 = 1$ و $\dbinom{n}{n} = 1$ و $\dbinom{n}{1} = n$ و $\dbinom{n}{0} = 1$.
3. إذا كان $\dbinom{n}{q} = \dbinom{n}{p}$ فإن $p = q$ أو $p + q = n$.
4. $\dbinom{n}{n-r} = \dbinom{n}{r}$.

منشور ذي الحدين (نيوتن)

$$(a+b)^n = a^n\binom{n}{0} + a^{n-1}b\binom{n}{1} + a^{n-2}b^2\binom{n}{2} + \ldots + ab^{n-1}\binom{n}{n-1} + b^n\binom{n}{n}$$

نتائج مهمة:

1. عدد المجموعات الجزئية المكونة من n عنصر يساوي 2^n.
2. الحد ذي الدليل في منشور ذي الحدين هو $T_r = \dbinom{n}{r} a^r b^{n-r}$.

شكل الجدول حسب نوع السحب

عند سحب عنصرين من مجموعة يمكن تنظيم جدول النتائج حسب نوع السحب وفق:

السحب مع إعادة

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	(x_1,x_1)	(x_1,x_2)	(x_1,x_3)	(x_1,x_4)
x_2	(x_2,x_1)	(x_2,x_2)	(x_2,x_3)	(x_2,x_4)
x_3	(x_3,x_1)	(x_3,x_2)	(x_3,x_3)	(x_3,x_4)
x_4	(x_4,x_1)	(x_4,x_2)	(x_4,x_3)	(x_4,x_4)

السحب بدون إعادة

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1		(x_1,x_2)	(x_1,x_3)	(x_1,x_4)
x_2	(x_2,x_1)		(x_2,x_3)	(x_2,x_4)
x_3	(x_3,x_1)	(x_3,x_2)		(x_3,x_4)
x_4	(x_4,x_1)	(x_4,x_2)	(x_4,x_3)	

السحب معاً

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1		(x_1,x_2)	(x_1,x_3)	(x_1,x_4)
x_2			(x_2,x_3)	(x_2,x_4)
x_3				(x_3,x_4)
x_4				

قواعد الاحتمال

1. **فضاء العينة:** هو مجموعة جميع العناصر الممكنة ويرمز له بالرمز Ω.
2. **احتمال حدث:** $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.
3. **احتمال الاجتماع:** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
4. **احتمال المتمم:** $P(A')=1-P(A)$.
5. **احتمال الفرق:** $P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A\cap B')$.
6. **قانونا دومورغان:** $P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$

   $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$
7. **الاحتمال المشروط:** (احتمال A بشرط B) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

الاستقلال الاحتمالي

نقول عن الحدثين A و B أنهما مستقلان احتمالياً إذا كان $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

ومن المسائل المستقلة احتمالياً:

a. تجارب النجاح والفشل.

b. تجارب الرمي على هدف.

c. تجارب رمي (قطعة نقود ، حجر نرد ...) عدة مرات متتالية.

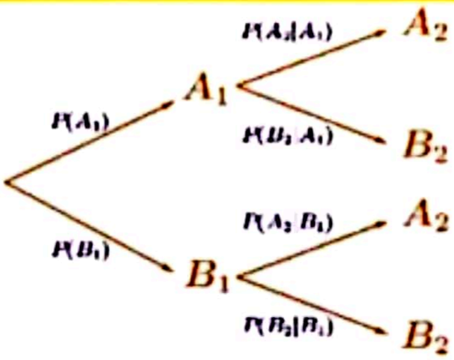
d. تجارب رمي (قطعتي نقود ، حجري نرد ...) أو أكثر.

e. تجارب السحب مع إعادة.

التقاطع والاجتماع

	التقاطع	الاجتماع
نقول	A و B	A أو B
العلاقة بين حدثين	$P(A\cap B)$	$P(A\cup B)$
العلاقة بين احتمالين	$P(A)\times P(B)$	$P(A)+P(B)$

مخطط الشجرة



الجدول

عندما لا يمكننا اكمال مخطط الشجرة نلجأ إلى استخدام الجدول الآتي:

	A_2	B_2	
A_1			
B_1			
			1

المتحولات العشوائية

1. مجموعة قيم المتحول العشوائي: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
2. القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي:

x_i	x_1	x_2	...	x_n	مجموع الاحتمالات
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	1

3. التوقع الرياضي: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.
4. التباين: $V(X) = E(X^2) - (E(x))^2$.
5. الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين

نقول عن المتحولين X و Y أنهما مستقلين احتمالياً إذا كان:

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

جدول القانون الاحتمالي للزوج (X, Y) يعطى بالشكل:

X / Y	x_1	x_2	$\dots$	x_n	قانون Y
y_1					p'_1
y_1					p'_2
$\vdots$					$\vdots$
y_n					p'_n
قانون X	p_1	p_2	$\dots$	p_n	1

التجارب البرنولية

تجربة برنولي: هي كل تجربة تتكرر n مرة

يعطى احتمال حدث في تجربة برنولية بالشكل $P(X=r)=\binom{n}{r}p^{r}q^{n-r}$ حيث:

n عدد مرات تكرار التجربة

r عدد مرات تكرار الحدث

p احتمال الحدث المطلوب في التجربة الواحدة

$q=1-p$

التوقع والتباين في تجربة برنولية:

1. التوقع $E(X)=np$.
2. التباين $V(X)=npq$.

انتهت أفكار الوحدة السابعة: الاحتمالات

انتهى ملف مراجعة الأفكار النظرية والقواعد الهامة في الجزء الثاني

بالتوفيق للجميع ـ إعداد: أيهم الشاعر