Online center

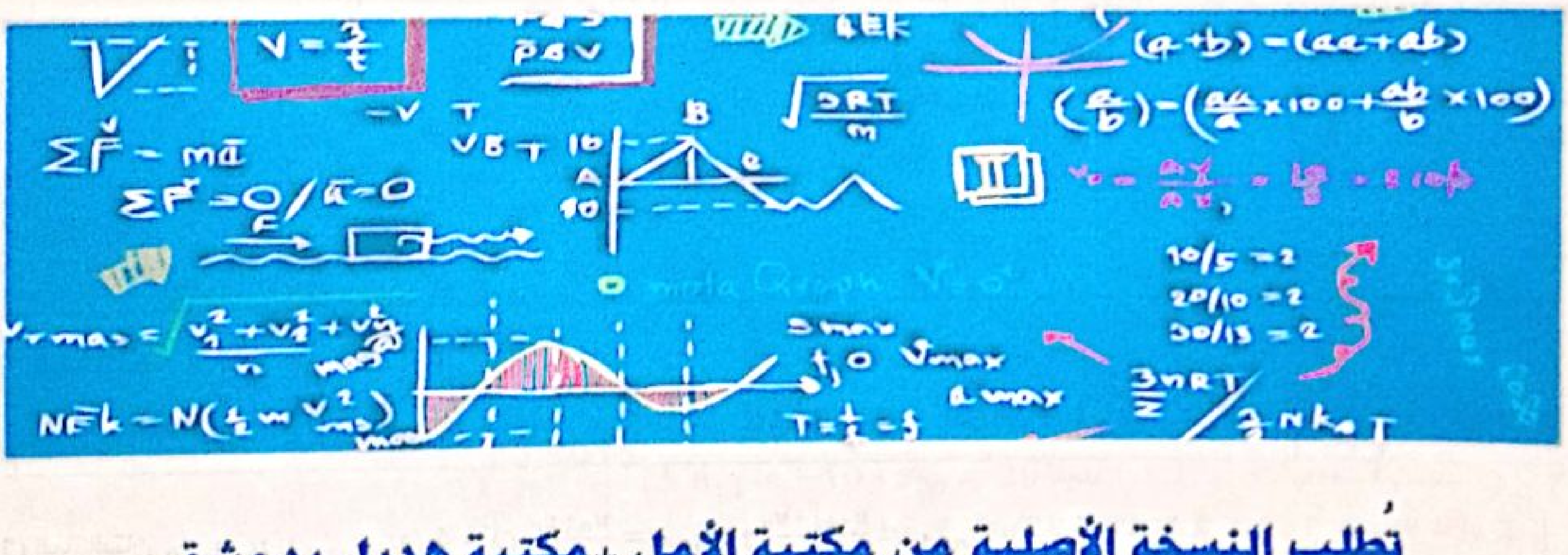
مركز اونلاين التعليمي

طريــقــك نحو الــ 600

أ. فارس جقل

رياضيات - للصف الثالث الثانوي العلمي

دورة المراجعة لطلاب مركز أونلاين لعام2025...مع نماذج أتمتة شاملة



تُطلب النسخة الأصلية من مكتبة الأمل +مكتبة هديل بدمشق

مكتبة الأمل

0981968984

هام جدا :هذه المكثفة لا تنوب عن الكتاب المدرسي إنما يستفيد منها الطالب بعد أن يتمّ دراسة المنهاج المقرر للتركيز على الفقرات الهامّة وأنماط المسائل التي تأتي في الامتحان النهائي

اختبار المتتاليات بكالوريا 2025
نموذج (A)

1) a, b, c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية حيث $a < b < c$, $a + b + c = 21$
$abc = 216$,فإن قيمة $a + c$:

A	18	B	15	C	12	D	9	E	6

2) قيمة المجموع: $S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$

A	$S = 2058$	B	$S = 2047$	C	$S = 2048$	D	$S = 2046$	E	$S = 2064$

3) $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 10 وفيها $u_1 = -2$ عندئذ u_n بدلالة n

A	$u_n = 10 - 2n$	B	$u_n = 10n - 2$	C	$u_n = 2n - 10$	D	$u_n = 10n - 12$	E	$u_n = 10n + 2$

4) لأن $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + a^{n-1})$
فإن $3^{2n} - 2^n$ مضاعف للعدد

A	7	B	5	C	6	D	3	E	2

5) ليكن P تابعا تآلفيا (من الدرجة الأولى) بحيث تحقق المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $t_n = \mathrm{P}(\mathrm{n})$ العلاقة التدريجية $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n$ أيا كانت n عندئذ :

A	$t_n = 2n - 4$	B	$t_n = 4n + 2$	C	$t_n = 4n - 2$	D	$t_n = 2n + 4$	E	$t_n = 2n + 2$

6) $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 12$ و $u_5 = 27$ عندئذ قيمة u_{20} هي:

A	60	B	72	C	82	D	92	E	102

7) $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $u_1 = -2$ عندئذ:

A	$u_n = -2^n$	B	$u_n = -2^{n-1}$	C	$u_n = -2^{n+2}$	D	$u_n = 2^{2n-1}$	E	$u_n = -2^{n+1}$

8) $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $u_1 = -2$ عندئذ قيمة المجموع $u_1 + u_2 + \cdots + u_8$

A	-256	B	-500	C	-510	D	-257	E	128

9) قيمة المجموع $S = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^5$

A	999999	B	111111	C	111110	D	11111111	E	99999999

10) المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$و$(v_n)_{n\geq 0}$ تحققان $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ و $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$ ،ولنعرف المتتالية $w_n = v_n - u_n$ ، عندئذw_n:

A	هندسية أساسها 2	B	حسابية أساسها 2	C	هندسية أساسها $\frac{1}{2}$	D	هندسية أساسها $\frac{1}{4}$	E	حسابية أساسها $\frac{1}{2}$

11) ليكن θ عدد حقيقي من المجال $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. ثم نعرّف المتتالية$(u_n)_{n\geq 0}$وفق $u_0 = 2\cos\theta$، $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ في احالة $n \in N$. فإن عبارة u_n بدلالة n:

اختبار المتتاليات بكالوريا 2025

نموذج (A)

A		B		C		D		E	
A	$u_n = -2\cos(\frac{\theta}{2^n})$	B	$u_n = 2n\cos(\frac{\theta}{2})$	C	$u_n = -2\sin(\frac{\theta}{2^n})$	D	$u_n = 2\sin(\frac{\theta}{2^n})$	E	$u_n = -2\cos^2(\frac{\theta}{2^n})$

12) لتكن المتتالية المعرفة تدريجيا $u_0 = 8$ و $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$ فإن (u_n):

A	حسابية	B	هندسية	C	متناقصة تماماً	D	ثابتة	E	غير مطردة

13) نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية « $3^n \geq 2^n + 5 \times n^2$ » عندئذ أصغر عدد طبيعي غير معدوم n تكون $E(n)$ صحيحة عنده هو:

A	6	B	5	C	4	D	3	E	2

14) مجموع الحدود الخمسة الأولى من متتالية حسابية حدها الأول 2 وأساسها r يساوي:

A	$5 + 5r$	B	$10 + 10r$	C	$5 - 5r$	D	$10 - 5r$	E	$10 + 5r$

15) في حالة عدد طبيعي غير معدوم n المقدار $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n!$ يساوي :

A	$(n-1)! - 1$	B	$(n-1)! + 1$	C	$(n+1)! + 1$	D	$(n+1)! - 1$	E	$(n+1)!$

16) مجموع أول عشرين عدد طبيعي:

A	190	B	210	C	200	D	380	E	273

17) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$:

A	غير مطردة	B	متزايدة تماما	C	حسابية أساسها 5	D	متناقصة تماما	E	ثابتة

18) مجموع المتتالية $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \cdots + 10$ هو:

A	210	B	105	C	55	D	110	E	100

19) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = (\frac{-1}{n})^n$:

A	متناقصة تماماً	B	متزايدة تماما	C	حسابية أساسها5	D	ثابتة	E	غير مطردة

20) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$:

A	حسابية	B	متزايدة تماماً	C	متناقصة تماماً	D	ثابتة	E	غير مطردة

21) لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$، $(v_n)_{n\geq 0}$ تحققان $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ و $v_n = \frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} + \sqrt{2}}$ فإن:

A	$v_{n+1} = 2v_n$	B	$v_{n+1} = {v_n}^2$	C	$v_{n+1} = {v_n}^3$	D	$v_{n+1} = v_n$	E	$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

22) في المتتالية الحسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ لدينا $u_{30} = 20$ و $u_{15} = -10$، إن قيمة المجموع $s = u_8 + u_9 + u_{10} + u_{20} + u_{21} + u_{22}$ يساوي:

A	-60	B	30	C	-30	D	-150	E	60

23) لتكن لدينا المتتالية الهندسية $(u_n)_{n\geq 0}$ وليكن $q = -2$ و $u_0 = 3$ عندئذٍ الحد ذي الدليل n هو:

A	$u_n = 3(2)^n$	B	$u_n = 3 - 2n$	C	$u_n = 3(-2)^n$	D	$u_n = 3 + 2n$	E	$u_n = -3(2)^n$

24) عند إثبات صحة متراجحة برنولي بالتدريج $(1+x)^n \geq 1 + nx$ من أجل $x > -1$ نجد أن

مركز أونلاين التعليمي | اختبار المتتاليات بكالوريا 2025
المدة : ساعتان | نموذج (A)

$(1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2$ العلاقة الصحيحة للوصول إلى المطلوب هي:

A	$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$	B	$(1+x)^n \geq 1 + (n+1)x$	C	$(1+nx) \geq 1 + (n+1)x$
D	$(1+x)^{n+1} \leq 1 + (n+1)x$	E	$(1+x)^{n+1} \leq 1 + nx^2$		

25) نعرّف المتتالية ($u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$ ، $u_1 = 3$, $u_0 = 2$) والمتتالية $v_n = u_{n+1} - 5u_n$.إن المتتالية v_n هي:

A	حسابية أساسها 5	B	حسابية أساسها 2	C	هندسية أساسها 5	D	هندسية أساسها 2	E	ليست حسابية و ليست هندسية

26) المتتالية $(U)_{n\geq0}$ حيث $u_n = 3n + 1$

A	هندسية	B	حسابية	C	متناقصة	D	غير مطردة	E	ثابتة

27) من أجل كل عدد طبيعي إذا علمت أن $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$.فإن العدد $3^{30} - 2^{10}$ هو مضاعف للعدد:

A	150	B	100	C	25	D	50	E	10

28) المتتالية المتزايدة من بين المتتاليات الآتية هي:

A	$v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$	B	$u_n = \frac{n+2}{2n+5}$	C	$w_n = (\frac{2}{5})^n$	D	$s_0 = -2$, $s_{n+1} = -3s_n$	E	$t_0 = 3$, $t_{n+1} = t_n - 2$

29) بالمتتاليات الحسابية في حالة n عدد طبيعي موجب تماما فان: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ هو

A	$1 + 2 + \dots + n$	B	$(1 + 2 + \dots + n)^2$	C	$\frac{n(n+1)^2}{4}$	D	$\frac{n(n+1)^2}{2}$	E	$\frac{(n+1)^2}{2}$

30) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ حيث $u_0 = 3$ والعلاقة التدريجية $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ ان آحاد جميع حدود المتتالية التي دليلها أكبر من 1 تساوي:

A	7	B	3	C	4	D	5	E	6

مسودة

اختبار النهايات والاشتقاق 2025

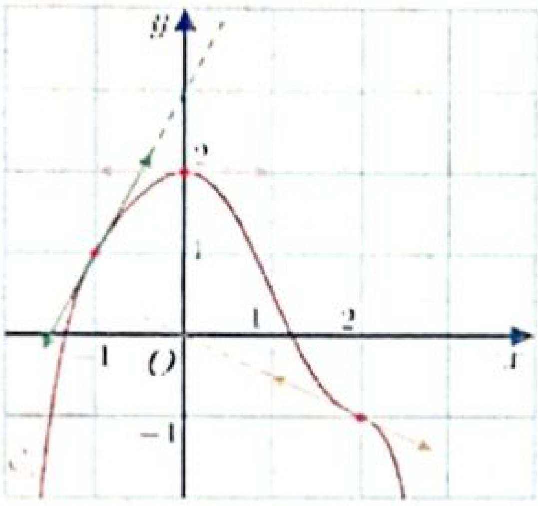
1. ليكن التابع f المعرف على المجال $]1,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$ عندئذ عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

A	0	B	1	C	2	D	3

2. ليكن f تابع مستمر ومتناقص على المجال $I=[a,b]$ عندئذ $f(I)$ يساوي :

A	$[f(a),f(b)]$	B	$]f(a),f(b)[$	C	$[f(b),f(a)]$	D	$]f(b),f(a)[$

3. الشكل المرافق، C_f هو الخط البياني لتابع f تأمل الشكل



قيمة $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ هي:

A	-4	B	2	C	-2	D	$-\frac{1}{2}$

4. نتأمل التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ المعطى وفق: $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$ التابع f

A	فردي ويقبل العدد 2π دورا له	B	زوجي ويقبل العدد 2π دورا له	C	ليس فردي وليس زوجي يقبل العدد 2π دورا له	D	زوجي وغير دوري

5. f هو التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{2x^2+1}{x+3}$ العددين $c\,,b$ يحققان $f(x)=2x+b+\frac{c}{x+3}$ أيا كان $x\geq 0$ فإن قيمة كل من العددين $c\,,b$ هي

A	$b=6\,,c=19$	B	$b=6\,,c=-19$	C	$b=-6\,,c=-19$	D	$b=-6\,,c=19$

6. ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$ عندئذ معادلة مقاربه المائل في جوار $-\infty$ هي:

A	$y=-x$	B	$y=x-1$	C	$y=3x$	D	$y=-3x$

7. لنعرف $f\,,g,h$ التوابع وفق ① $g(x)=x\sqrt{x}$ ② $h(x)=x|x|$ ③ $f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$ عندئذ

A	f اشتقاقي عند الصفر	B	$h\,,g$ اشتقاقيان عند الصفر	C	g اشتقاقي عند الصفر	D	h,f,g اشتقاقية عند الصفر

8. إذا علمت أن $\sin x\leq x$ أيا كان $x\geq 0$ عندئذ في حالة $x\in\mathbb{R}$ المتراجحة المحققة هي:

A	B	C	D
$\cos x \le 1-\frac{x^2}{2}$	**$\cos x \ge 1-\frac{x^2}{2}$**	$-\cos x \ge -\frac{x^2}{2}$	$\cos x \ge 1+\frac{x^2}{2}$

9. ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ وفق الصيغة $f(x)=\frac{1}{x}$ في حالة $x \neq 0$ يعطى المشتق من المرتبة n بالصيغة:

A	B	C	D
$\frac{n!}{(x)^{n+1}}$	$\frac{(-1)^n(n-1)!}{(x)^{n+1}}$	$\frac{(-1)^n n!}{(x)^{n-1}}$	**$\frac{(-1)^n n!}{(x)^{n+1}}$**

10. ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وكان $f`(x)=x$ وكان $g(x)=f(\cos x)$ عندئذ $g`(x)$ يساوي:

A	B	C	D
$\sin x$	**$-\cos x \sin x$**	$\cos x \sin x$	$-\cos x$

11. عندما x تسعى إلى $+\infty$ فإن التابع $x \to \sin x$

A	B	C	D
يسعى إلى $+\infty$	يسعى إلى 0	يسعى إلى 1	**غير موجودة**

12. ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\cos x \sin x$ فإن $f`(x)$ هو:

A	B	C	D
$\cos 2x$	$\sin^2 x - \cos^2 x$	0	$\sin^2 x \cos^2 x$

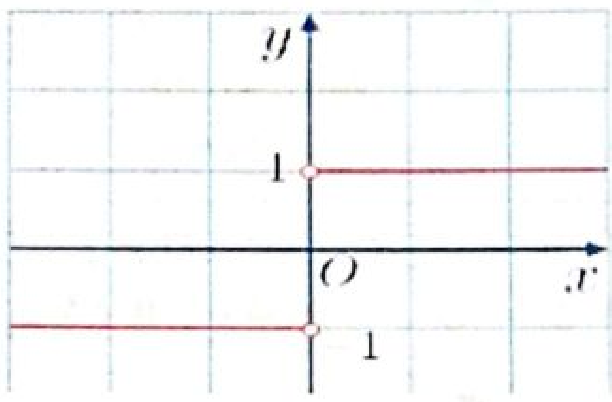
13. ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}+2x$ الخط البياني للتابع f يقبل مقاربا مائلا عند $-\infty$ معادلته:

A	B	C	D
$y=2x+1$	**$y=2x-1$**	$y=2x+3$	$y=-2x+1$

14. ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x)=x\sqrt{x-x^2}$ عندئذ الخط البياني للتابع f

A	B	C	D
له مماس أفقي عند 1	**له مماس شاقولي عند 1**	ليس له مماس عند1	له مماس ميله 1عند 1

15. التابع f المعرف وفق $f(x)=-1$ عندما $x<0$ و $f(x)=1$ عندما $x>0$ اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$ ،فإن تابع f



A	B	C	D
زوجي	ليس فردي	ليس زوجي وليس فردي	**ليس ثابتا**

16. التابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{1}{-2x+3}-\frac{1}{x}+\sqrt{2x+3}-\frac{1}{\sqrt{x}}+x$ وفق التابع:

A	B	C	D
متناقص تماما على I	زوجي	فردي	**متزايد تماماً على I**

17. ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=x^2$ ولتكن $A(u,f(u))$ و $B(v,f(v))$ نقطتان من الخط c حيث $u \neq v$ ولتكن النقطة D من الخط c فاصلتها $\frac{u+v}{2}$ فإن ميل المماس T المار من D للخط c والموازي للمستقيم (AB) يساوي:

A	B	C	D
$u+v$	$2u$	$2v$	$u-v$

18. إذا علمت أن $x-\frac{x^3}{6} \le \sin x \le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ أياً كانت $x>0$ فإن $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

A	0	B	$\frac{1}{3}$	C	$\frac{1}{2}$	D	$\frac{1}{6}$

19. التابع المعرف وفق: $f(x)=\begin{cases}ax^2+2x+2 & x<1\\ 8x+b & x\ge 1\end{cases}$،ويقبل الاشتقاق على R ،عندئذٍ:

A	$a=3\,,b=1$	B	$a=3\,,b=-1$	C	$a=2\,,b=1$	D	$a=1\,,b=2$

20. مشتق التابع f هو $f'(x)=\frac{-2x}{3x^2-x+1}$،نعرف التابع g بالشكل $g(x)=f(\sqrt{x})$ ،كان المشتق $g'(x)$ يساوي:

A	$\frac{-2x}{3x^2-x+1}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$	B	$\frac{-2}{-3x-\sqrt{x}+1}$	C	$\frac{-1}{3x-\sqrt{x}+1}$	D	$\frac{-2x}{2\sqrt{x}+1}$

21. إذا كان التابع f المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{1+\sin x+3\cos^2 x}-2$ ،كان $f'(0)$ يساوي:

A	0	B	1	C	-2	D	$\frac{1}{4}$

22. التابع f المعرف على $I=]1,2[$ ومعطى بالعلاقة: $f(x)=-2x^2+4x+\sqrt{-2x^2+4x}-\frac{1}{-2x^2+4x}$،هو تابع:

A	متناقص تماماً على I	B	متزايد تماماً على I	C	غير مطرد على I	D	فردي

23. C_f الخط البياني للتابع f المعرف وفق: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$،عندئذٍ C_f يقبل مماساً أفقياً وحيداً إذا كان:

A	$b^2-5ac=0$	B	$b^2-3ac=0$	C	$b^2-4ac=0$	D	$b^2-ac=0$

24. التابع f معرف على $R/\{-2\}$ وفق $f(x)=\frac{x-5}{x+2}$، إن أصغر قيمة للعدد الحقيقي A الذي يحقق الشرط:
إذا كان $x>A$ كان $f(x)\epsilon]0.98\,,1.02[$ هي:

A	48	B	350	C	348	D	349

25. ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $]-1\,,3[$ وفق جدول تغيراته

x	-1		0		3
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↘	-3 ‖

إن $f(]-1\,,3[)$

A	$]-3\,,0[$	B	$]-\infty,-3[$	C	$]-\infty\,,0\,]$	D	$]-1\,,3[$

26. ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ فإن المقارب المائل للتابع f في جوار ال $+\infty$ هو:

A	$y=x+2$	B	$y=-x+2$	C	$y=x-2$	D	$y=-(x+2)$

27. ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$ فإن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))$:

A	$+\infty$	B	$-\infty$	C	0	D	-1

28. ليكن التابع f المعرف على $]2,+\infty[$ وفق $f(x)=x-4+\sqrt{x-2}$ فإن $f'(x)$ يساوي:

A	$1-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$	B	$1+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$	C	$\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$	D	$\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

29. ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$ _ إنَّ معادلة نصف المماس من اليمين ل C_f في النقطة $(0,0)$ هي:

A	$y=-x$	B	$x=0$	C	$y=x+1$	D	$y=x$

30. نفترض وجود تابع f معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها ويحقق $f(0)=0$ و $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ عند كل x من $\mathbb{R}$
وليكن h التابع المعرف والاشتقاقي على $]0,+\infty[$ وفق $h(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})$
العبارة الصحيحة مما يأتي هي:

A	$\lim_{x\to\infty} h(x)=2f(1)$	B	$h'(x)=1$	C	$h'(x)=-1$	D	h عند اشتقاقي 0

31. ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(0)=0$ ، $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ في حالة $x\neq 0$ فإن $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$ يساوي:

A	$2x\cos x-\sin\frac{1}{x}$	B	$2x\sin x+\cos\frac{1}{x}$	C	$2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$	D	$2x\cos x+\sin\frac{1}{x}$

32. نتأمل التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x-\sin x$
التابع f :

A	متزايد على $]0,+\infty[$	B	متزايد على $[-1,+\infty[$	C	متناقص على $[0,+\infty[$	D	يقبل قيمة حديه محليا

33. إذا كان للخط البياني مماس شاقولي في النقطة $(a,f(a))$ عندئذ يكون $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

A	0	B	1	C	a	D	$\pm\infty$

34. التابع $f(x)=|x+1|$ غير اشتقاقي عند:

A	0	B	1	C	-1	D	2

35. ليكن التابع f المعرف على R وفق: $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$ فإنَّ $f(x)$:

A	$\frac{x}{2}(1-x^4)f'(x)$	B	$\frac{x}{2}(-1-x^4)f'(x)$	C	$\frac{x}{2}f'(x)$	D	$\frac{x}{2}(1+x^4)f'(x)$

36. ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على $R/\{-1\}$ وفق: $f(x)=ax+\frac{b}{x+1}$ فإنه ليمر الخط البياني للتابع بالنقطة $(0,3)$ ويكون ميل المماس في هذه النقطة $f'(0)=4$، عندئذٍ فإن قيمة a و b هي:

A	$a=-2, b=6$	B	$a=1, b=4$	C	$a=3, b=7$	D	$a=7, b=3$

37. إن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{3+\cos x}$ هي:

A	0	B	1	C	$-\infty$	D	$+\infty$

38. ليكن f التابع المعرف على R وفق: $f(x)=\begin{cases}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & ;x\neq 0\\ m & ;x=0\end{cases}$ فإن قيمة m ليكون التابع f مستمر على R

A	0	B	1	C	-1	D	2

39. ليكن f التابع المعرف على $]-5,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$

A	$-\frac{2}{3}$	B	$\frac{2}{3}$	C	$\frac{1}{3}$	D	$-\frac{1}{3}$

40. ليكن تابعاً معرفاً على المجال $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=x+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ فإنَّ معادلة المقارب المائل للخط البياني للتابع f عند $+\infty$:

A	$y=-x+1$	B	$y=-x-1$	C	$y=x$	D	$y=-x$

اختبار المتتاليات ونهاية متتالية 2025

1. ليكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ ، إنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ تساوي:

A	0	B	$\frac{1}{2}$	C	$+\infty$	D	1

2. المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$،$(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان، إذا كانت $x_n = \frac{n+1}{n+2}$ فإن y_n تعطى بالعلاقة:

A	$y_n = \frac{2n+1}{2n-1}$	B	$y_n = \frac{2n}{n+1}$	C	$y_n = \frac{2n-1}{2n+1}$	D	$y_n = \frac{3n}{n+5}$

3. لتكن المتتالية المعرفة وفق $u_n = \frac{5^{2n}+2^n}{3^{3n}+1}$ فإن نهاية المتتالية هي:

A	$\frac{25}{27}$	B	$\frac{7}{4}$	C	0	D	$+\infty$

4. ليكن f التابع الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي P النقطة $M`(9x+10y, 3x+5y)$ أي $f(M) = M`$ لتكن S_0 النقطة التي إحداثياتها $(0,1)$ عندئذ: $f(S_0)$ هي

A	$(0,10)$	B	$(5,0)$	C	$(5,10)$	D	$(10,5)$

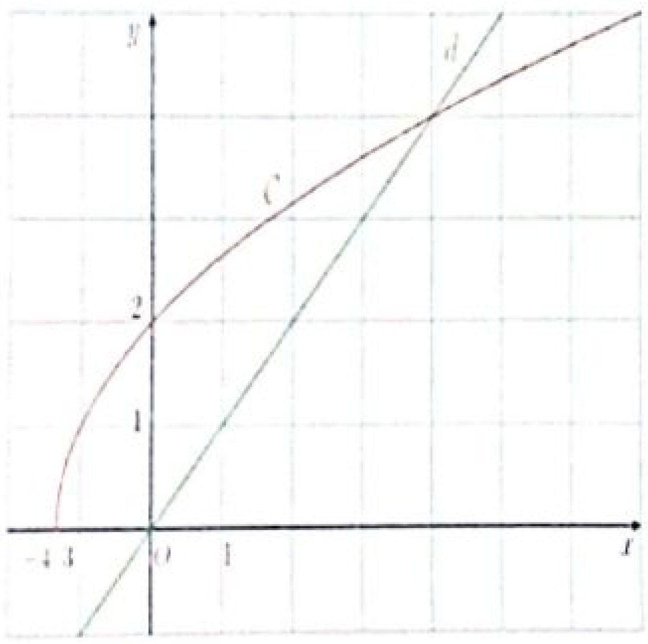
5. قيمة المجموع $S = 1+3+5+\ldots\ldots+99$ يساوي:

A	99×99	B	2500	C	5050	D	10000

6. في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$، ليكن $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ و $t_n = u_{2n} - u_n$ عندئذ

A	$t_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n}$	B	$t_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n-1}$	C	$t_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n-1}$	D	$t_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n+1}$

7. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 6$ و $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$ عند كل عدد طبيعي n .نجد في الشكل أدناه، الخط البياني c للتابع f المعرف على المجال $\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$ وفق $f(x) = \sqrt{4+3x}$.والمستقيم d الذي معادلته $y = x$.



من التمثيل الهندسي للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ نخمن أن:

A	B	C	D
متزايدة ومحدودة من الأعلى	متناقصة ومحدودة من الأدنى	متزايدة وغير محدودة من الأعلى	متناقصة وغير محدودة من الأدنى

8. المتتالية المتزايدة أياً كانت $n \ge 0$ هي

A	B	C	D
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n \end{cases}$	$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$	$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = -2u_n \end{cases}$	$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

9. $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $u_1 = \frac{3}{2}$ ،عندئذٍ قيمة المجموع $u_2 + u_4 + \dots + u_{20}$ هي:

A	B	C	D
$4^{19} - 1$	$3(4^{10} - 1)$	$4^{10} - 1$	$2^{19} - 1$

10. $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = \frac{1}{5}$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{1-2u_n}$ ،عندئذٍ المتتالية $(t_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق $t_n = \frac{1}{u_n}$

A	B	C	D
حسابية أساسها 2	حسابية أساسها -2	هندسية أساسها 2	هندسية أساسها -2

11. $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية حسابية معرفة وفق $u_n = 2n + 4$ عندئذٍ تعرف بالتدريج وفق:

A	B	C	D
$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$	$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$	$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$	$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$

12. لنتأمل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق $u_0 = 2 , u_{n+1} = au_n + 5$ ،قيمة a التي تجعل $(u_n)_{n\ge0}$ حسابية هي:

A	B	C	D
2	1	-1	5

13. حدود المتتالية $u_n = 3^{2n} - 1$ مضاعفة للعدد:

A	B	C	D
2	3	5	7

14. $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية حسابية فيها $u_5 = 5$ عندئذٍ قيمة المجموع $S = u_1 + u_4 + u_5 + u_6 + u_9$

A	B	C	D
5	10	15	25

15. نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة تدريجياً وفق: $u_0 = -5$ و $u_{n+1} = u_n + n$ عندئذٍ:

A	B	C	D
$u_{50} = 1220$	$u_{50} = 1225$	$u_{50} = 1235$	$u_{50} = 1250$

16. قيمة المجموع $S_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{11}}$ هي:

A	B	C	D
$\sqrt{11}$	$\sqrt{11} - 1$	$\sqrt{10} + 1$	$\sqrt{10}$

17. لنتأمل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بشرط البدء $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ في حالة $n \ge 0$.
إذا علمت أنّ $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة وأنها محدودة من الأعلى بالعدد 2 عندئذٍ ℓ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ هي

A	B	C	D
2	$\ell = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$	$\ell = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	$\ell = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

18. $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية عند كل $n \ge 0$ وتحقق $u_n < 5 \le \frac{1}{n} + u_n$ عندئذٍ المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$

A	B	C	D
متقاربة من 0	متباعدة إلى $+\infty$	متقاربة من 5	متقاربة من -5

19. نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ التي حدها العام $u_n = 2n + (-1)^n n$

A	B	C	D
0	1	-1	$+\infty$

20. نهاية المتتالية $(x_n)_{n\ge0}$ حيث $x_n = \frac{3^n - 2^n}{3^{n+2} - 1}$ هي:

A	0	B	9	C	$\frac{1}{9}$	D	$-\infty$

21. المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \ldots\ldots - \frac{1}{2^n}$ عندئذٍ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

A	هندسية أساسها $\frac{1}{2}$	B	هندسية أساسها $\frac{-1}{2}$	C	حسابية أساسها $\frac{1}{2}$	D	حسابية أساسها $\frac{-1}{2}$

22. لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ والمتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق:
$t_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ عندئذٍ

A	$t_n = \sqrt{n}$	B	$t_n = -\sqrt{n+1}$	C	$t_n = \sqrt{n} - 1$	D	$t_n = -\sqrt{n} + 1$

23. a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية علماً أن $a + b + c = 14$, $abc = 64$ أصغر هذه الحدود يساوي:

A	-8	B	-4	C	4	D	2

24. المتتالية $(u_n)_{n\geq 4}$ معرفة وفق $u_n = \frac{2n+1}{n-3}$، وتساوي نهايتها 2.
عندئذٍ أصغر عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n \in]1.9\,, 2.1[$ عند كل n أكبر تماما من n_0 هو:

A	71	B	72	C	73	D	74

25. ليكن $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n.
وليكن $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ عندئذ:

A	$s_n = \frac{n}{n+1}$	B	$s_n = \frac{n+1}{n}$	C	$s_n = \frac{1}{n(n+1)}$	D	$s_n = 1$

26. تحقق المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ من أجل كل عدد طبيعي n أن $|u_n + 2| \leq \frac{3+\cos n}{\sqrt{n}}$ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$تساوي:

A	2	B	-2	C	0	D	$+\infty$

27. المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $x_n = \frac{(-5)^n}{2^n}$ عند دراسة نهايتها نجد أنّ

A	1	B	غير موجودة	C	0	D	-1

28. المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{3n^2+2n+1}{3n+2}$ من أجل $n \geq 1$

A	$u_n \leq n$	B	$u_n \leq 1$	C	$u_n \geq 2n$	D	$u_n \leq 2n$

29. لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$المعرفة وفق $v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ عندئذ نهاية $\frac{1}{v_n}$ تساوي:

A	0	B	-1	C	1	D	$+\infty$

30. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 3$ وعند كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{u_n+1}$ والمتتالية$(t_n)_{n\geq 0}$ معرفة
عند كل عدد طبيعي n وفق $t_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$عندئذ المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$هندسية أساسها

A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{-1}{2}$	C	2	D	-2

31. لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = -\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{3}{\pi^3} - \ldots\ldots - \frac{n}{\pi^n}$ وبفرض $n \leq 2^n$ أياً كان $n \geq 1$ فإن العنصر القاصر عن المتتالية هو:

A		B		C		D	
A	0	B	$\frac{2}{\pi}$	C	$-\frac{2}{\pi-2}$	D	1

32. نتأمل المتتاليتين المتجاورتين $(t_n)_{n\geq 0}$و$(s_n)_{n\geq 0}$،المعرفتين تدريجياً وفق $t_0 = 1$ و $t_{n+1} = \frac{t_n+2s_n}{3}$ و$s_0 = 12$ و $s_{n+1} = \frac{t_n+3s_n}{4}$

إذا علمت أن المتتالية$(u_n)_{n\geq 0}$المعرفة وفق $u_n = 3t_n + 8s_n$ هي متتالية ثابتة عندئذٍ النهاية المشتركة للمتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$و$(s_n)_{n\geq 0}$ هي

A	0	B	1	C	99	D	9

33. لتكن $(u_n)_{n\geq 2}$معرفة وفق $u_n = \frac{n^2-4n+3}{n^2-4n+5}$ فإن أكبر العناصر القاصرة عنها هو:

A	0	B	-1	C	-2	D	$\frac{-1}{2}$

34. لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$المعرفة وفق $u_n = \frac{n^3}{n!}$: عندئذٍu_n

A	متقاربة من 0	B	متقاربة من 1	C	ليس لها نهاية	D	متباعدة نحو $+\infty$

35. نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة بالصيغة $u_n = \frac{2n+\sin 3n}{3n}$

A	0	B	$\frac{2}{3}$	C	1	D	غير موجود

36. المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$معرفة عند كل عدد طبيعي$n \geq 1$ وفق: $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \ldots\ldots + \frac{n}{n^2+n}$ عندئذٍ:

A	$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$	B	$\frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}$	C	$\frac{n^2}{n^2+1} \leq u_n$	D	$u_n \leq \frac{n^2}{n^2+n}$

37. $(v_n)_{n\geq 0}$متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تحقق حدودها العلاقة $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \frac{2}{3}$، إن نهاية المتتالية هي:

A	0	B	1	C	2	D	3

38. بفرض $(t_n)_{n\geq 0}$و$(s_n)_{n\geq 0}$ متتاليتان متجاورتان فإذا علمت أن $t_n = -\frac{1}{2n+4}$ عندئذٍ:

A	$s_n = \frac{n^2}{n+1}$	B	$s_n = \frac{1}{n+1}$	C	$s_n = \frac{2n}{n+1}$	D	$s_n = \frac{n}{n+1}$

39. قيمة المجموع $s = 2 + 4 + 6 + \ldots\ldots + 2n$ هو:

A	$\frac{(n+1)}{2}$	B	$\frac{n(n+1)}{2}$	C	$\frac{n(n+2)}{2}$	D	$n(n+1)$

40. المتتالية$(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $u_n = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{7^n}$ عندئذٍ قيمة $s = \lim_{x\to+\infty} u_n$ هي:

A	$\frac{7}{6}$	B	0	C	$\frac{6}{7}$	D	1

اختبار التابع اللوغاريتمي

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$ تساوي:

A	4	B	2	C	0	D	π

2) حل المعادلة $ln^3x - 2ln^2x + 3\ln x = 0$ هو:

A	$x = 0$	B	$x = e$	C	$x = 1$	D	$x = 2$

3) f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$ يحقق: $f(x.y) = f(x) + f(y)$ أيا كان $x > 0, y > 0$ عندئذ يكون $f(1)$ تساوي:

A	0	B	1	C	2	D	e

4) إذا كان $\ln|x^2 + 2|$ فإن قيم x التي تجعله معرفاً هي:

A	R	B	$\{2,3\}$	C	R^{*+}	D	R^*

5) إذا كان $\ln|x + 1| - \ln|x - 1|$ فإن قيم x التي تجعله معرفاً هي:

A	$R\setminus\{1\}$	B	$R\setminus\{-1\}$	C	$R\setminus\{-1,1\}$	D	R

6) إذا كان $\frac{1}{x}\ln(1 + x)$ فإن قيم x التي تجعله معروفاً هي:

A	$]0, +\infty[$	B	$]-1, 0[\cup]0, +\infty[$	C	$R\setminus\{-1, 0\}$	D	$]-1, +\infty[$

7) حل المعادلة: $\ln(x - 2) = \ln(x^2 - 2)$ هو:

A	0	B	1	C	e	D	$\emptyset$

8) مجموعة حلول المتراجحة $\ln x \le \ln(x^2 - 2x)$ هي:

A	$[3, +\infty[$	B	R	C	$]2, +\infty[$	D	$]0, +\infty[$

9) إذا كانت $x < 0$ فإن $\ln x^2$ يساوي:

A	$2\ln x$	B	$2\ln(-x)$	C	$2\ln\frac{1}{x}$	D	$2\ln x^2$

10) $\ln 4 + \ln\frac{1}{4}$ يساوي:

A	2	B	0	C	1	D	4

11) $\frac{1}{2}\ln\sqrt{3}$ يساوي:

A	3	B	1	C	$ln3$	D	$0.25ln3$

تطلب النسخة الأصلية من مكتبة الأمل مع إمكانية الشحن للمحافظات عن طريق الواتس آب 0959458194

12) $\ln\frac{32}{25}$ يساوي:

A	$5\ln 2 - 2\ln 5$	B	$5\ln 2 - \ln 5$	C	$\ln 2 - 2\ln 5$	D	$2\ln 2 - 5\ln 5$

13) $\ln 500$ يساوي:

A	$3\ln 2 + 2\ln 5$	B	$\ln 2 + 3\ln 5$	C	$2\ln 2 + 3\ln 5$	D	$2\ln 2 + \ln 5$

14) $\ln(3+\sqrt{5}) + \ln(3-\sqrt{5})$ يساوي:

A	0	B	$2\ln 2$	C	2	D	-1

15) إذا كانت $x = 2\ln 3$, $y = 3\ln 2$ فإن:

A	$x > y$	B	$y < 0$	C	$y > x$	D	$x = y$

16) $\ln\sqrt{216} + \ln\sqrt{75} - \ln 15 - \ln\sqrt{27}$ يساوي:

A	$\ln 2 - \ln 3$	B	$\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$	C	$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$	D	$-\ln 3$

17) $\ln(1+x)$ يساوي:

A	$\ln x + \ln(1+\frac{1}{x})$	B	$\ln x - \ln(1+\frac{1}{x})$	C	$\ln x$	D	$\ln(\frac{1}{x})$

18) إن حلول المتراجحة: $\ln(3x^2 - x) \leq \ln x + \ln 2$:

A	$]\frac{1}{3}, 1[$	B	$]\frac{1}{3}, 1]$	C	$[0, 2]$	D	$]\frac{1}{3}, +\infty[$

19) ليكن عدداً طبيعياً إن حلول المتراجحة: $(2)^n \leq 50$ هي:

A	$0 \leq n \leq 5$	B	$0 \leq n \leq 4$	C	$5 \leq n < +\infty$	D	$0 \leq n \leq 7$

20) مجموعة قيم العدد الحقيقي كي يكون للمعادلة $x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$ مستحيلة الحل في R

A	$]e-1, +\infty[$	B	$]-1, e-1[$	C	$]-\infty, -1[$	D	$[-1, e-1[$

21) حل جملة المعادلتين في R^2: $xy = 9$

$(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln 3)^2$ هو:

A	$(x,y) = (3, 3\sqrt{3})$	B	$(x,y) = (3, \sqrt{3})$	C	$(x,y) = (\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$	D	$(x,y) = (3,3)$

22) حلول المعادلة: $\ln(x^2 - x) = \ln x + \ln(x-1)$

A	$]-\infty, 1[$	B	$]0, 1[$	C	$[1, +\infty[$	D	$]1, +\infty[$

23) حلول المعادلة: $\ln\sqrt{2x} = \ln(\frac{3-x}{\sqrt{x+1}})$

A	$x = 0$	B	$x = 1$	C	$x = 2$	D	$\emptyset$

24) مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق الشرط: $\ln x = -\ln y$ هي

تطلب النسخة الأصلية من مكتبة الأمل مع إمكانية الشحن للمحافظات عن طريق الواتس آب 0959458194

A	نصف مستقيم	B	فرع قطع زائد	C	نصف قطع مكافئ	D	نصف قطع ناقص

25) $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\ln(x+1)-\ln x$ يساوي:

A	$+\infty$	B	$-\infty$	C	0	D	1

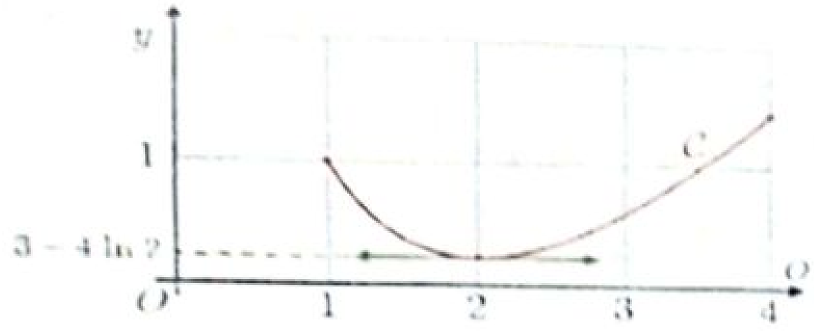
26) إذا كان $x = 2-\ln e^3$, $y = e\sqrt{e}$ فإن:

A	$x<y$	B	$x>y$	C	$y=x$	D	$y=\frac{1}{x}$

27) للخط البياني للتابع: $f(x) = x+1-\frac{\ln x}{x}$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ معادلته:

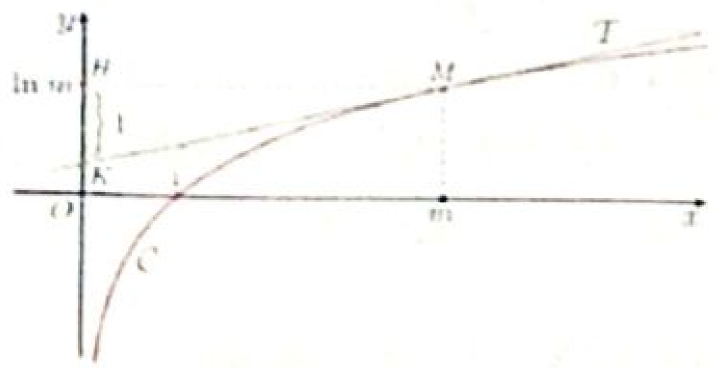
A	$y=x+1$	B	$y=x-1$	C	$y=1$	D	$y=-x-1$

28) f معرف على مجال $I=[1,4]$ وفق: $f(x) = ax+b+c\ln x$ حيث a,b,c أعداد حقيقية
اعتماداً على الشكل المجاور فإن:



A	$(a,b,c)=(1,2,0)$	B	$(a,b,c)=(2,1,-4)$	C	$(a,b,c)=(2,-1,-4)$	D	$(a,b,c)=(2,-1,0)$

29) بالشكل المجاور c الخط البياني للتابع $\ln$ و M نقطة من c فاصلتها m فإن معادلة المماس للخط c في النقطة c هي:



A	$y=\frac{x}{m}+\ln m-1$	B	$y=\frac{x}{m}-\ln m+1$	C	$y=\ln m$	D	$y=\frac{x}{m}-1-\ln m$

30) ليكن التابع f اشتقاقي على المجال $I=]1,+\infty[$ حيث: $f(x)=\ln(\frac{x+1}{\ln x})$ فإن f':

A	$f'(x)=\frac{x\ln x-x}{x(x+1)\ln x}$	B	$f'(x)=\frac{x\ln x-x-1}{x(x+1)\ln x}$	C	$f'(x)=\frac{\ln x-1}{x\ln x}$	D	$f'(x)=\frac{x\ln x}{\ln x}$

31) الحل المشترك لجملة المعادلتين: $2\ln x+\ln y = 7$

تطلب النسخة الأصلية من مكتبة الأمل مع إمكانية الشحن للمحافظات عن طريق الواتس آب 0959458194

$3\ln x - 5\ln y = 4$

A	(e^3, e^2)	B	(e^3, e)	C	$(3,1)$	D	(e, e^3)

32) التابع f معرف على $I =]-1,1[$ خطه البياني c وفق: $f(x) = \ln(\frac{x+1}{1-x})$:

A	متناظر بالنسبة لمبدأ الاحداثيات	B	متناظر بالنسبة لمحور التراتيب	C	متناظر بالنسبة للمنصف الأول	D	متناظر بالنسبة للمنصف الثاني

33) التابع f معرف وفق: $f(x) = \ln(\frac{x-1}{3-x})$ فإن النقطة:

A	$A(1,0)$ مركز تناظر للخط c	B	$A(2,0)$ مركز تناظر للخط c	C	$A(4,0)$ مركز تناظر للخط c	D	$A(1,1)$ مركز تناظر للخط c

34) التابع f معرف وفق: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ فإن معادلة المماس للخط c في نقطة فاصلتها 1 هي:

A	$y = x - 1$	B	$y = x$	C	$y = x + 1$	D	$y = -x + 1$

35) التابع f معرف على $]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ فإن القيمة المحلية للتابع هي:

A	$f(1) = 1$	B	$f(1) = 0$	C	$f(2) = \frac{1+\ln 2}{2}$	D	$f(2) = 1$

36) التابع f معرف على $]e^{-1}, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{2+\ln x}{1+\ln x}$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$ هي:

A	2	B	0	C	-2	D	1

37) التابع f معرف على $]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$ إن قيمة a, b اللتان تجعلان المماس للخط c في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته $y = 3x$ هما:

A	$a = 4, b = 4$	B	$a = 4, b = -4$	C	$a = 1, b = 1$	D	$a = 0, b = 0$

38) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x + 1)^2$ هي:

A	0	B	$+\infty$	C	$-\infty$	D	1

39) أيا كانت $x > -1$ فإن:

A	$\ln(x+1) > \sqrt{x+1}$	B	$\ln(x+1) = \sqrt{x+1}$	C	$\ln(x+1) < \sqrt{x+1}$	D	$\ln(x+1) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

40) لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على N^* وفق: $u_n = \ln(\frac{n+1}{n})$ ولتكن: $S_n = u_1 + u_2 + \dots\dots + u_n$ فإن:

A	$S_n = \ln n$	B	$S_n = \ln(n-1)$	C	$S_n = \ln(n+1)$	D	$S_n = \ln(n+2)$

تطلب النسخة الأصلية من مكتبة الأمل مع إمكانية الشحن للمحافظات عن طريق الواتس آب 0959458194

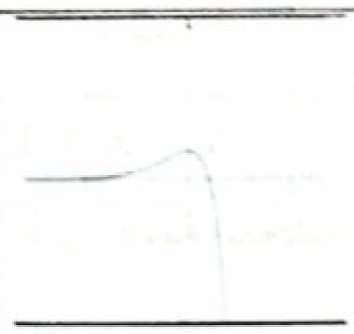
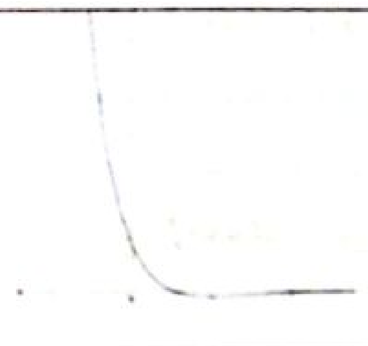
اختبار الأسي _التكامل بكالوريا 2025

1) مجموعة حلول المعادلة: $ln|x+2| = 0$

A	$\{-2,+2\}$	B	$\{-3,+3\}$	C	$\{-1,+1\}$	D	$\{-3,-1\}$

_ليكن f المعرف على R وفق $f(x) = (x-1)e^x$ وخطه البياني
أجب عن الأسئلة $(3-2)$

2) فالخط البياني للتابع f_1 حيث $f_1(x) = |1-x|e^x$ هو:

A		B		C		D	

3) مساحة السطح المحصور بين C والمحورين الإحداثيين تساوي:

A	$S = e+2$	B	$S = 3-e$	C	$S = e-2$	D	$S = e-1$

4) إذا كان $A = 2^{\frac{-1}{ln2}}$, $B = 3^{\frac{1}{ln3}}$ فإن $A.B$ يساوي:

A	1	B	e	C	6	D	-1

5) ليكن التابع f المعرف على R وفق $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{1-e^x} & x \neq 0 \\ m & x = 0 \end{cases}$ عندئذٍ قيمة m التي تجعل f مستمراً على R هي:

A	0	B	-1	C	-2	D	2

6) ليكن $y = ln(e\sqrt{e})$, $x = ln(e)^3 - 2$ عندئذٍ:

A	$x \le y$	B	$x \ge y$	C	$x < y$	D	$x > y$

_ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$ أجب عن الأسئلة $(9-8-7)$

7) معادلة Δ المقارب المائل للخط c في جوار $+\infty$ هي:

A	$\Delta: y = -x-2$	B	$\Delta: y = -x+2$	C	$\Delta: y = x-2$	D	$\Delta: y = x+2$

8) الوضع النسبي للخط f بالنسبة إلى مقاربه Δ

تطلب النسخة الأصلية من مكتبة الأمل مع إمكانية الشحن للمحافظات عن طريق الواتس آب 0959458194

A	c تحت Δ	B	c فوق Δ	C	c على يسار Δ	D	c على يمين Δ

9) لتكن S المساحة المحصورة بين c وΔ والمستقيمين $x_1 = ln2$ و $x_2 = ln3$ عندئذٍ قيمة S تساوي:

A	1	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{1}{4}$	D	$\frac{1}{3}$

10) قيمة التكامل $I = \int_0^{ln2} e^x\,(1 - e^x)^2 dx$ تساوي:

A	$-\frac{2}{3}$	B	$\frac{2}{3}$	C	$\frac{1}{3}$	D	$\frac{-1}{3}$

11) حل في R جملة المعادلتين: $3^x \times 3^y = 9$

$3^x + 3^y = 4\sqrt{3}$

A	$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$	B	$(\frac{3}{2},\frac{-1}{2})$	C	$(\frac{1}{2},\frac{-3}{2})$	D	$(\frac{-3}{2},\frac{-1}{2})$

12) حل المعادلة: $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$ هو:

A	$2ln3$	B	$ln2$	C	0	D	2

13) إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$ المعرف على المجال $I =]1, +\infty[$ هو:

A	$2\sqrt{x^2 - x}$	B	$4\sqrt{x^2 - x}$	C	$\sqrt{x^2 - x}$	D	$2\sqrt{x^2 - 1}$

14) ليكن لدينا FوG التابعان الأصليان للتابع f نفسه المعرف على المجال $]1, +\infty[$ حيث:

$F(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}$ فإن $G(x)$ يعطى بالعلاقة:

A	$\frac{-4x^2 + 2x - 9}{x - 10}$	B	$\frac{x^2 - 5}{5(x - 1)}$	C	$\frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}$	D	$\frac{3x^2 + 6x - 3}{2(x - 1)}$

15) إن أبسط ما يمكن للعبارة $A = e^{lnx} - ln(2e^x)$ هي:

A	$ln2$	B	2	C	$-ln2$	D	0

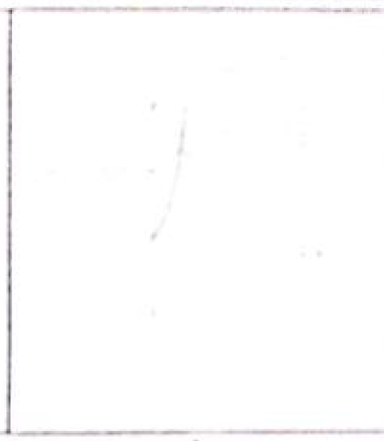
16) إن التابع الأصلي F للتابع f المعرف على $]1, +\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1}{xlnx}$ هو:

A	$ln(lnx)$	B	$\frac{1}{lnx}$	C	$\frac{1}{ln(lnx)}$	D	lnx

17) حل المتراجحة الأتية: $(e^x - 1)(e^x - 4) < 0$ هو:

A	$]0, ln2[$	B	$]-\infty, 2ln2[$	C	$]0, +\infty[$	D	$]0, 2ln2[$

18) لتكن $y = f(x)$ عندئذٍ الخط البياني للتابع f الذي يحقق العلاقة: $lny - lne = lnx$ هو

A		B		C		D	

19) إن التابع الأصلي F للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \cos 5x \,.\, \sin x$ هو:

A	$\frac{1}{2}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 4x$	B	$-\frac{1}{2}\sin 6x - \frac{1}{2}\cos 4x$	C	$-\frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{8}\cos 4x$	D	$-\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\cos 4x$

20) إن حل المعادلة الآتية: $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ هو:

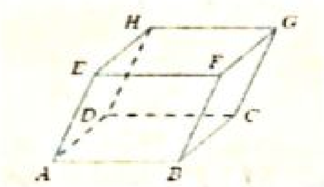
A	$\left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$	B	$\left\{3, \frac{1}{2}\right\}$	C	$\left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$	D	$\left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$

اختبار 3 وحدات أشعة

1. لتكن الكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ فإن معادلة الكرة S هي:

A	$x^2-y^2-z^2=3$	B	$x^2+y^2+z^2=\sqrt{3}$	C	$x^2+y^2+z^2=3$	D	$x^2+y^2+z^2=-3$

2. $ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$ وقياس الزاوية $\widehat{DAB}$ يساوي $60°$ والنقطة I منتصف $[FE]$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ يساوي:



A	1	B	0	C	2	D	-1

3. موضع النقطة M التي تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

A	منتصف $[FE]$	B	منتصف $[HG]$	C	منتصف $[AB]$	D	منتصف $[HE]$

- ليكن لدينا المستقيمين $d:\begin{cases}X=t+1\\Y=-3t+2\\Z=-3t+3\end{cases}$ $;t\in \mathbb{R}$ و $d':\begin{cases}X=5\\Y=-3s\\Z=-s+1\end{cases}$ $;s\in \mathbb{R}$

4. المستقيمان d و d' :

A	متقاطعان	B	متخالفان	C	متوازيان	D	منطبقان

- لدينا النقطتان $A(2,1,-2)$, $B(7,-2,0)$ والشعاعان $\vec{u}(\kappa,-1,0)$, $\vec{v}(-3,1,2)$:

5. إذا كانت الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً فإن κ تساوي:

A	1	B	3	C	2	D	0

- في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\kappa})$ لدينا النقاط $A(1,0,-1)$, $B(2,2,3)$, $C(3,1,-2)$, $D(4,2,-1)$,

6. معادلة المستوي $(ABCD)$ هي:

A	$2x-3y+z-1=0$	B	$2x+3y-z-1=0$	C	$3x+2y+z-1=0$	D	$2x+3y+z+1=0$

- في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\kappa})$ لدينا النقاط $A(1,1,0)$, $B(1,2,1)$, $C(4,0,0)$

7. معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

A	$2x-3y+z+9=0$	B	$-x+3y-3z-4=0$	C	$x+3y-3z+4=0$	D	$x+3y-3z-4=0$

8. نقطة تقاطع المستويات Q و P و R حيث: $P: X+2Y-Z-4=0$ و $Q: 2X+3Y-2Z-5=0$
$R: x+3y-3z-4=0$

A	$(1,0,1)$	B	$(0,0,2)$	C	$\left(\frac{1}{2},3,0\right)$	D	$\left(-\frac{1}{2},3,\frac{3}{2}\right)$

9. بعد النقطة $A(3,-1,2)$, عن المستقيم d حيث: $t\in \mathbb{R};$ $d:\begin{cases}X=t\\Y=-1+t\\Z=3-t\end{cases}$ يساوي:

A	$\frac{42}{3}$	B	$\frac{\sqrt{42}}{3}$	C	$\sqrt{\frac{42}{3}}$	D	$\frac{3}{42}$

10. A و B نقطتان مختلفتان بالفراغ، عندئذٍ مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق: $MA = 4MB$ هي:

A	نقطة وحيدة	B	مجموعة خالية	C	كرة	D	مستقيم

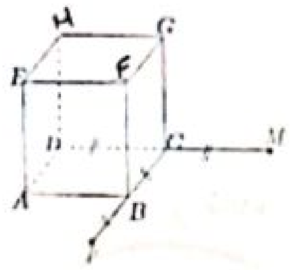
11. إن معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث: $A(1,1,2)$ و $B(3,-1,4)$ تعطى بالشكل:

A	$2x+y-3z+2=0$	B	$x+2y-z=0$	C	$x-y+z-5=0$	D	$x+6y-z-1=0$

12. نتأمل ثلاث نقاط من الفراغ وعدداً حقيقياً α من المجال $[-1,1]$ نرمز بـ G_α إلى مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) $(B,1+\alpha^2)$ $(C,-\alpha)$ فإن $\overrightarrow{BG_\alpha}$ تساوي:

A	$\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	B	$\frac{-\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	C	$\frac{1-\alpha}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$	D	$\frac{\alpha-1}{1+\alpha^2}\overrightarrow{AC}$

13. مكعب النقطتان M , P تحققان $DC = CM = PB$ المستوي (HMP)
يقطع الحرف $[AE]$ في النقطة K إن $\overrightarrow{EK}$ يساوي:



A	$\frac{1}{4}\overrightarrow{EA}$	B	$\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$	C	$\frac{1}{2}\overrightarrow{MP}$	D	$\frac{1}{4}\overrightarrow{MP}$

14. إذا علمت أن $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ و $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$ فإن $\vec{u}.\vec{v}$:

A	-13	B	-14	C	-11	D	-10

15. في معلم متجانس للفراغ، لتكن $A(1,2,1)$ والمستقيم (d) الممثل وسيطياً وفق
$x = 0,\quad y = -t,\quad z = -t+1 : t \in R$ عندئذ معادلة المستوي المار بالنقطة A ويعامد (d) هي:

A	$z+y+3=0$	B	$y-z-3=0$	C	$z+y-3=0$	D	$y-z+3=0$

16. المستوي $p: x+y+z=1$ يقطع الكرة $s: (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 6$ بدائرة نصف قطرها

A	$r=\sqrt{3}$	B	$r=36$	C	$r=3$	D	$r=\sqrt{6}$

17. في معلم متجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{K})$. معادلات ثلاثة مستويات، بحل الجملة الخطية الموافقة فإن هذه المستويات

$\mathcal{P}_1: x+y+z=1$
$\mathcal{P}_2: -2y+z=1$
$\mathcal{P}_3: -4y+14z=-2$

A	متوازية	B	تشترك بمستقيم	C	تشترك بنقطة	D	لا تشترك بأي نقطة

18. لتكن الكرة S التي طرفا قطرها $A(2,1,1)$ و $B(1,0,-2)$ فإن معادلة الكرة S هي:

A	$x^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$	B	$(x-\frac{3}{2})^2+y^2+(z+\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$	C	$(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+z^2 = \frac{13}{4}$	D	$(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z+\frac{1}{2})^2 = \frac{11}{4}$

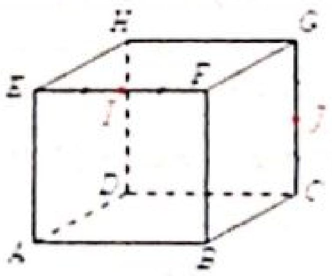
19. إذا علمت أن نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأن $\vec{u}.\vec{v} = -5$ فإن $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-3\vec{v})$ يساوي:

A	4	B	8	C	2	D	5

.20 $ABCD$ رباعي وجوه منتظم ولنضع $AB = 6$, ليكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ عندئذ فإن طول $[IJ]$

$2\sqrt{3}$	D	6	C	$3\sqrt{2}$	B	$6\sqrt{2}$	A

.21 $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 6 .فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$.
الجداء $\overrightarrow{JH}\,.\,\overrightarrow{IF}$ يساوي:



18	D	-18	C	-6	B	$9\sqrt{5}$	A

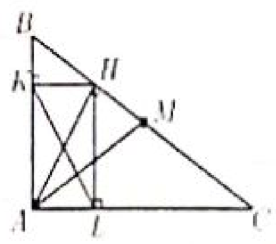
.22 نتأمل في معلم متجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\mathcal{K}})$ النقطتين $A(2,6,2)$ و $B(-2,0,2)$عندئذ مجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ هي كرة مركزها:

$(2,3,0)$	D	$(2,6,2)$	C	$(0,0,0)$	B	$(0,3,2)$	A

.23 ليكن المستوي P المار بالنقطة $A(1,-1,2)$ ويوازي المستوي $Q: 2x + y + 8z - 4 = 0$ فإن معادلة المستوي هي:

$2x+y+8z-17=0$	D	$2x+y+8z-7=0$	C	$2x+y-17=0$	B	$2x+y+6z-15=0$	A

.24 ABC مثلث قائم في A و M منتصف $[BC]$ و H موقع الارتفاع المرسوم من A ليكن L , K المسقطين القائمين للنقطة H على $[AB]$ و $[AC]$ بالترتيب عندئذ الجداء $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{KL}$ يساوي:



$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AK}$	D	$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}$	C	$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{HA}$	B	$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{LA}$	A

.25 تمثل مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق العلاقة: $\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

مستقيم	D	كرة	C	مجموعة خالية	B	مستوي محوري	A

.26 ليكن$ABCM$ متوازي أضلاع عندئذ M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$,(C;1),(B;-1)\ (A;1)$	D	$,(C;1),(B;1)\ (A;-1)$	C	$(C;-1),(B;1)(A;1)$	B	$,(C;1),(B;1)(A;1)$	A

.27 في معلم متجانس $(0;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$ معادلة المستوي (ABC) هي:

$x+y+z+1=0$	D	$x-y-z=0$	C	$x+y+z-1=0$	B	$x+y+z=0$	A

.28 ليكن لدينا الكرة S التي مركزها $(1,0,1)$ونصف قطرها R والمستوي $P: 2x + y - 2z = 12$ إن تقاطع S وP هو دائرة نصف قطرها $r = 3$ ،إن R يساوي:

4	D	5	C	3	B	$2\sqrt{3}$	A

.29 المستقيمان L و L' معرفان وسيطياً وفق الآتي: $\lambda \in R$; $L:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda-1 \\ z=1 \end{cases}$ و $t \in R$; $L':\begin{cases} x=t+1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$ إن

إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين L و L' هي:

A	$(1,1,2)$	B	$(-1,-1,2)$	C	$(1,2,1)$	D	$(2,1,1)$

30. $P: x+y-z+2=0$ معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$ حيث $I(2,0,1)$ عندئذٍ إحداثيات J هي:

A	$(3,4,1)$	B	$(0,-2,3)$	C	$(1,2,3)$	D	$(1,1,2)$

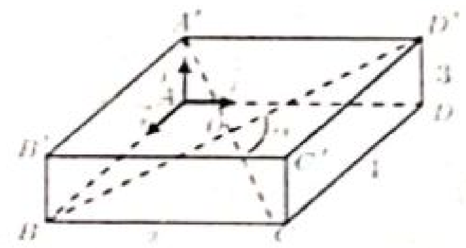
31. إن مسقط النقطة k المسقط القائم للنقطة $A(2,-2,2)$ على المستوي: $y+z-1=0$ هي:

A	$(0,0,1)$	B	$\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$	C	$\left(1,\frac{-1}{3},\frac{1}{2}\right)$	D	$\left(2,-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$

32. المستقيم (AB) يقطع المستوي $P: 2x-y+z-2=0$ في نقطة حيث $A(3,1,-2)$ و $B(0,2,1)$

A	$\left(\frac{9}{4},\frac{1}{4},\frac{-5}{4}\right)$	B	$\left(\frac{9}{4},\frac{5}{4},\frac{-5}{4}\right)$	C	$\left(\frac{-5}{4},\frac{-1}{4},1\right)$	D	$\left(\frac{-5}{4},\frac{9}{4},\frac{1}{4}\right)$

33. $ABCDA'B'C'D'$ متوازي مستطيلات. يتقاطع قطراه $[BD']$ و $[CA']$ في O.



نضع $\alpha=\widehat{COD'}$ ونفترض أن $BC=2$ و $CD=4$ و $DD'=3$.
نختار معلماً متجانساً $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\mathcal{K}})$ بحيث يكون $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{\imath}$ مرتبطين خطياً
و$\overrightarrow{AD}$ و $\vec{\jmath}$ مرتبطين خطياً، وكذلك $\overrightarrow{AA'}$ و$\vec{\mathcal{K}}$ مرتبطين خطياً. عندئذ فإن قيمة $\cos\alpha$ هي:

A	$-\frac{2}{9}$	B	$-\frac{21}{29}$	C	$-\frac{1}{3}$	D	$-\frac{2}{3}$

34. في معلم متجانس $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تحقق العلاقة: $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$ تمثل:

A	مستوي محوري	B	مجموعة خالية	C	كرة	D	مستقيم

35. لتكن الكرة S التي مركزها $\Omega(1,0,-2)$ وتمر بالنقطة $A(-2,1,1)$ فإن معادلة الكرة S هي:

A	$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=19$	B	$x^2+(y-1)^2+z^2=2\sqrt{3}$	C	$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=\sqrt{3}$	D	$x^2+y^2+(z+2)^2=\sqrt{19}$

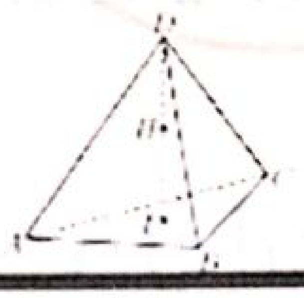
36. نتأمل في معلم متجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\mathcal{K}})$, المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$: $x-y+1=0$ ، $x+y-1=0$ التمثيلات الوسيطية لفصلهما المشترك بدلالة $t\in R$ هو :

A	$\begin{cases}x=0\\y=t\\z=1\end{cases}$	B	$\begin{cases}x=t\\y=2\\z=-t\end{cases}$	C	$\begin{cases}x=0\\y=1\\z=t\end{cases}$	D	$\begin{cases}x=0\\y=2\\z=t\end{cases}$

37. لتكن النقطة $A(2,1,0)$ والمستوي P الذي معادلته $P: 3x-y+2z-1=0$ فإن معادلة الكرة التي مركزها A وتمس P هي:

A	$x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=\frac{1}{14}$	B	$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{16}{14}$	C	$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{13}{4}$	D	$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{4}{14}$

38. ليكن $ABCD$ رباعي وجوه I مركز ثقل المثلث ABC ، H مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة (D,α) $(C;1)$ $(A;1)$ $(B;1)$ قيمة α التي تجعل H منتصف $[DI]$ هي:



-2	D	3	C	2	B	1	A

39. ليكن لدينا المستوي R المار بالنقطة $A(1,1,3)$ والذي يعامد المستويين: $P: 2x+z-1=0$ و $Q: x-y+2z+3=0$ فإن معادلة المستوي هي:

$x+6y-z-1=0$	D	$x+3y-z+1=0$	C	$-2x+2y-z-5=0$	B	$-x+3y+2z-8=0$	A

40. نتأمل في معلم متجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\mathcal{K}})$ المستويين $\mathcal{P}$ و Q : $\mathcal{P}: x-2y+3z-5=0$ ، $Q: x+y+z+1=0$ إذا علمت أن d هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و Q عندئذ d هو مجموعة النقاط عندما تتحرك z في الفراغ:

$(-5z+1,2z,2z)$	D	$(5z+1,2z-2,3z)$	C	$\left(\frac{5}{3}z+1,\frac{2}{3}z-2,z\right)$	B	$\left(-\frac{5}{3}z+1,\frac{2}{3}z-2,z\right)$	A

اختبار الأعداد العقدية وتطبيقاتها 2025

1. ليكن العددين العقديين z و z' يحققان جملة المعادلتين: $\begin{cases} 3z + 2i\,z' = -1 \\ z - z' = -2 - 4i \end{cases}$ عندئذ فإن $2z' + 3z$ يساوي

A	$1 + 2i$	B	$2 + 3i$	C	$9 - 2i$	D	$11 + 2i$

2. ليكن x عدداً عقدياً تمثله نقطة A في المستوي وليكن $z = x + 2i$ عندئذ:

A	$z = 1 + 4i$	B	$z = 4 - i$	C	$z = 1 - 2i$	D	$z = 1 + 2i$

3. ليكن $\alpha = e^{2i\pi/5}$ نضع $A = \alpha + \alpha^4$ عندئذ A تساوي:

A	$2\cos(\frac{2\pi}{5})$	B	$2\cos(\frac{\pi}{5})$	C	$\cos(\frac{2\pi}{5})$	D	$\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{5})$

4. ليكن z' صورة z وفق s التناظر المحوري الذي محوره oy حيث $z = 4 - 5i$ فإنّ z' تساوي:

A	$4 + 3i$	B	$-2 + 4i$	C	$-4 + 5i$	D	$-4 - 5i$

5. الشكل الجبري للعدد العقدي $A = \frac{-1+i}{1+i}$ هو:

A	1	B	$-i$	C	i	D	-1

6. ليكن العدد العقدي $z = 3 + 2i$ عندئذ $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ هو:

A	2	B	$\frac{-3}{13}$	C	3	D	$\frac{3}{13}$

7. الشكل الجبري للعدد العقدي $z = \frac{\cos 2x + i\sin 2x}{\cos x - i\sin x}$ هو:

A	$\cos 3x + i\sin 3x$	B	$\cos 4x + i\sin 4x$	C	$\sin 3x - i\cos 3x$	D	$\cos 3x - i\sin 3x$

8. ليكن $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$ العددان a و b اللذان يحققان $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$ هما:

A	$a = -4, b = -10$	B	$a = 4, b = -10$	C	$a = -4, b = 5$	D	$a = -4, b = -5$

9. ليكن $a = e^{2i\pi/7}$. عندئذ قيمة المجموع $s = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$ هو:

A	$s = -1$	B	$s = 0$	C	$s = 1$	D	$s = i$

10. لدينا $z = \frac{ie^{\frac{-\pi}{3}i}}{1+i}$ زاوية هذا العدد العقدي: $arg(z)$ تساوي:

A	$\frac{11\pi}{12}$	B	$\frac{\pi}{12}$	C	$\frac{7\pi}{12}$	D	$\frac{-\pi}{12}$

11. M نقطة يمثلها العدد العقدي: $z = 1 + i$,
إن z' التي تمثل النقطة M' صورة M وفق انسحاب T شعاعه $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$ تساوي:

A	$-1+i$	B	$1-i$	C	$-1+4i$	D	$-1-4i$

12. ليكن z عدداً عقدياً ما، ولنكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد و هو مختلف عن الواحد. فإنّ $u = \frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$

A	حقيقي بحت	B	تخيلي بحت	C	معدوم	D	$arg(z) = \frac{\pi}{3}$

13. الشكل الأسي للعدد المركب $z = 1 + e^{2i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي يحقق $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ هو:

A	$e^{2i\theta}$	B	$\sin\theta\, e^{i\theta}$	C	$2\cos\theta\, e^{i\theta}$	D	$\sin\theta\, e^{2i\theta}$

14. نتأمل النقاط D, C, B, A الممثلة للأعداد العقدية $a = -1$ و $b = 2 + i\sqrt{3}$ و $c = 2 - i\sqrt{3}$ بالترتيب
ولنكن D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)(B,2)(C,2)$ فإن

A	$d = i$	B	$d = 3$	C	$d = -2$	D	$d = 2$

15. ليكن $z = 3 + 4i$ فإنّ الجذرين التربيعيين للعدد العقدي z هما:

A	$\begin{cases} w_1 = -2+i \\ w_2 = 2-i \end{cases}$	B	$\begin{cases} w_1 = -2+i \\ w_2 = -2-i \end{cases}$	C	$\begin{cases} w_1 = 2+i \\ w_2 = 2-i \end{cases}$	D	$\begin{cases} w_1 = 2+i \\ w_2 = -2-i \end{cases}$

16. ليكن z' صورة z وفق s التناظر الذي مركزه $A(1-3i)$ حيث $z = 1 + i$ فإنّ z' تساوي:

A	$2-5i$	B	$4-3i$	C	$1-7i$	D	$2-7i$

17. إذا علمت أنّ $P(Z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ فإن $Q(Z)$ الذي يحقق العلاقة:
$P(Z) = (Z+1)Q(Z)$ يساوي:

A	$z^2 - 4z + 7$	B	$z^2 + 3z - 7$	C	$3z^2 + 3z + 7$	D	$z^2 + 4z + 7$

18. ليكن العددان العقديان $z = x + yi$ و $a = \alpha + \beta i$ حيث α, β, x, y أعداد حقيقية تحقق العلاقة: $z^2 - a^2 = (\bar{z})^2 - (\bar{a})^2$ فإذا كانت $\alpha.\beta = 0$ فإن مجموعة النقاط $M(x,y)$ تمثل

A	قطعاً مكافئاً	B	قطعاً زائداً	C	اجتماع المحورين الإحداثيين	D	منصف الربع الأول

19. ليكن العدد العقدي $w = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$ فإن طويلته تساوي:

A	1	B	i	C	-1	D	$-i$

20. عين طبيعة التحويل الهندسي للعلاقة: $b = 2a$

A	دوران	B	تحاكي	C	تناظر مركزي	D	انسحاب

21. ليكن العدد العقدي $z = -1 + i$ فإنّ z^8 يساوي:

A	3	B	$14i$	C	16	D	$3i$

22. إذا كانت $M(x)$ صورة العدد المركب Z . فإن مجموعة النقاط $M(x)$ التي تحقق:
$|z-1+2i| = |z-3-5i|$ تمثل:

A	دائرة	B	محور قطعة مستقيمة	C	كرة	D	مجموعة خالية

23. ليكن العددان العقديان $z_1 = 1 + 2i$ و $z_2 = 2 + i$ عندئذٍ $Im(z_1.\overline{z_2})$ يساوي:

A	-3	B	4	C	3	D	-4

24. ليكن z' صورة z وفق sالتناظر المحوري الذي محوره ox حيث $z = 1 + i$ فإنّ z' تساوي:

A	$1+i$	B	$-1+i$	C	$1-i$	D	$-1-i$

25. لتكن مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق الشرط المعطى: $(z+1)(\overline{z}-2)$ حقيقي، فإنها تمثل:

A	مجموعة الأعداد الحقيقية	B	مجموعة الأعداد التخيلية	C	محور قطعة مستقيمة	D	دائرة

26. ليكن العدد العقدي $z = \frac{i-i^{2024}}{1+i}$ يساوي:

A	i	B	$-i$	C	1	D	-1

27. في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. لدينا النقاط A , B, C التي تمثلها الأعداد العقدية $z_A = \sqrt{3} + i\ , z_B = \sqrt{3} - i\ \ , z_C = 3\sqrt{3} + i$ فإن طبيعة المثلث ABC

A	قائم في B	B	متساوي الساقين	C	قائم في A	D	متساوي الأضلاع

28. بفرض $d = 1 + 6i$ فإن قيمة θ التي تجعل العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه 0 تساوي حيث $a = 6 - i$:

A	$\frac{2\pi}{3}$	B	$\frac{\pi}{2}$	C	$\frac{3\pi}{2}$	D	$\frac{\pi}{3}$

29. ليكن العدد العقدي $z = \frac{1}{\sin x + i\cos x}$ فإن z^5 يساوي:

A	e^{-5ix}	B	e^{5xi}	C	$-ie^{5xi}$	D	ie^{-5xi}

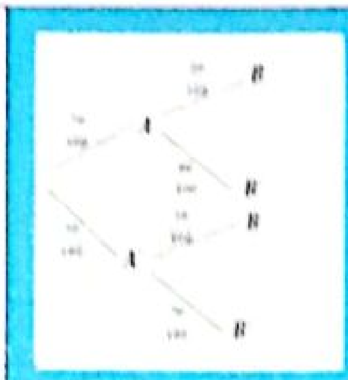
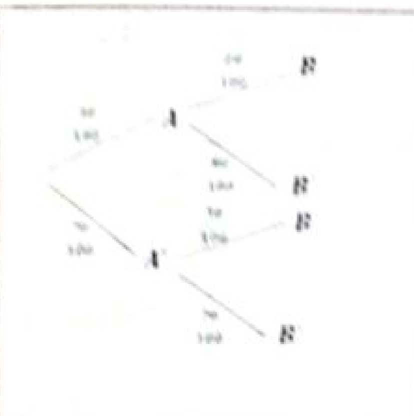
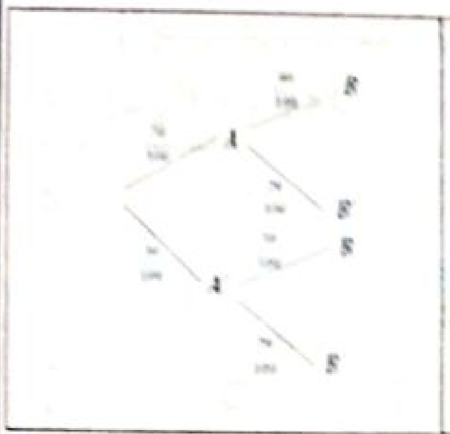
30. إذا علمت أن $i^2 = -1$ فإن $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \ldots\ldots + i^{11} + i^{12}$

A	-1	B	1	C	i	D	$-i$

اختبار التحليل التوافقي والاحتمالات بكالوريا 2025

_في أحد المجتمعات تظهر أعراض مرض كورونا على 70% من الأشخاص، 20% منهم مسحاتهم إيجابية، و 70% من المسحات المأخوذة من أشخاص لا تظهر عليهم أعراض المرض تكون نتيجتها سلبية، نختار عشوائياً شخص من هذا المجتمع، ولنرمز بالرمز A لحدث الشخص الذي تظهر عليه الأعراض، وبالرمز B لحدث المسحة الإيجابية. (أجب عن الأسئلة 1-2)

1) التمثيل الشجري المناسب للتجربة هو:

A		B		C		D	
A		B		C		D	

2) احتمال أن يكون الشخص مصاب

A	$\frac{65}{100}$	B	$\frac{27}{100}$	C	$\frac{73}{100}$	D	$\frac{23}{100}$

3) قيمة العدد الطبيعي n الذي يحقق المعادلة: $\binom{n}{4} = \binom{n}{2}$ تساوي

A	$n = 6$	B	$n = 4$	C	$n = 5$	D	$n = 2$

_يمثل الجدول المبين جانباً القانون الاحتمالي لزوج (X, Y) من المتحولات العشوائية:
(أجب عن الأسئلة 4و 5و6)

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

4) $P(X = 0)$ يساوي:

A	$\frac{1}{20}$	B	$\frac{3}{20}$	C	$\frac{3}{10}$	D	$\frac{3}{8}$

5) $P(X = 0, Y = 1)$ يساوي:

A	$\frac{1}{20}$	B	$\frac{1}{8}$	C	$\frac{17}{60}$	D	$\frac{3}{8}$

6) الاحتمال الصحيح فيما يأتي هو:

تطلب النسخة الأصلية من مكتبة الأمل مع إمكانية الشحن للمحافظات عن طريق الواتس آب 0959458194

$P(X=0)=\frac{3}{8}$	D	$P(X=0)=\frac{1}{10}$	C	$P(X=0)=\frac{3}{64}$	B	$P(Y=1)=\frac{1}{2}$	A

_يخضع الطالب نجيب لعدة اختبارات متتالية وفق ما يلي: احتمال نجاحه في الاختبار الأول يساوي احتمال رسوبه.

إذا نجح نجيب في اختبار ما، يكون احتمال رسوبه في الاختبار التالي $\frac{2}{5}$ ، وإذا رسب في ذلك الاختبار، يكون احتمال نجاحه في الاختبار التالي هو $\frac{3}{10}$ ، أياً كان العدد الطبيعي n غير المعدوم: لنرمز بالرمز

A_n :حدث نجاح الطالب نجيب في الاختبار n.

B_n: حدث رسوب الطالب نجيب في الاختبار n.لنضع $P_n = P(A_n)$ و$q_n = P(B_n)$

(أجب عن الأسئلة7-8-9-10-11)

7) إنP_2 يساوي:

$\frac{9}{20}$	D	$\frac{7}{10}$	C	$\frac{13}{20}$	B	$\frac{3}{5}$	A

8) يكتب P_{n+1} بدلالة P_n بالصيغة:

$P_{n+1}=\frac{1}{10}P_n+\frac{3}{10}$	D	$P_{n+1}=\frac{7}{10}P_n+\frac{7}{10}$	C	$P_{n+1}=\frac{3}{10}P_n+\frac{3}{10}$	B	$P_{n+1}=\frac{7}{10}P_n+\frac{3}{10}$	A

9) نعرف المتتالية $u_n = P_n - \frac{3}{7}$ هندسية عندئذ حدها الأول وأساسها يساويان:

$u_1=\frac{-1}{14}, q=\frac{7}{10}$	D	$u_1=\frac{1}{14}, q=\frac{3}{10}$	C	$u_1=\frac{1}{10}, q=\frac{7}{10}$	B	$u_1=\frac{1}{10}, q=\frac{1}{14}$	A

10) إن عبارة u_n بدلالة n تساوي:

$u_n=(\frac{3}{10})^{n-1}$	D	$u_n=\frac{1}{14}(\frac{3}{10})^n$	C	$u_n=\frac{5}{21}(\frac{3}{10})^{n-1}$	B	$u_n=\frac{5}{21}(\frac{3}{10})^n$	A

11) النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$ تساوي:

$\frac{3}{7}$	D	0	C	$\frac{3}{10}$	B	$\frac{1}{10}$	A

12) أمثال الحد المستقل عن x في منشور $(x+\frac{1}{x^2}i)^6$

-15	D	15	C	$20i$	B	$-20i$	A

_في إحدى الامتحانات المؤتمتة، يتضمن الاختبار ستون سؤالاً كل منها مزود بأربعة إجابات مقترحة منها واحدة صحيحة فقط. يقرر أحد المتقدمين الإجابة عشوائياً عن هذه الأسئلة.

13) احتمال الحصول على أربع وعشرون إجابة صحيحة في هذا الاختبار هو:

$\binom{96}{24}(\frac{1}{4})^{24}(\frac{3}{4})^{36}$	D	$\binom{36}{24}(\frac{1}{4})^{24}(\frac{3}{4})^{36}$	C	$\binom{60}{24}(\frac{3}{4})^{24}(\frac{1}{4})^{36}$	B	$\binom{60}{24}(\frac{1}{4})^{24}(\frac{3}{4})^{36}$	A

14) إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$ فإن: $P(A|B)$

A	$\frac{1}{5}$	B	$\frac{3}{4}$	C	$\frac{5}{9}$	D	$\frac{2}{5}$

15) إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ فإن: $P(B|A)$

A	$\frac{2}{3}$	B	$\frac{2}{15}$	C	$\frac{1}{3}$	D	$\frac{2}{5}$

16) إن عدد أقطار مضلع محدب عدد رؤوسه n حيث $n\geq 4$ يعطى بالعلاقة:

A	$\frac{n(n-1)}{3}$	B	$\frac{n(n-3)}{2}$	C	$\frac{n(n-1)}{2}$	D	$n(n-2)$

17) إذا كان $P(A)=\frac{1}{3}$ و $P(B|A)=\frac{1}{4}$ و $P(B|A')=\frac{4}{5}$ فإن: $P(B)$

A	$\frac{37}{60}$	B	$\frac{35}{18}$	C	$\frac{2}{60}$	D	$\frac{13}{18}$

18) إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{3}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$ فإن: $P(A|B)$

A	$\frac{5}{18}$	B	$\frac{8}{12}$	C	$\frac{5}{19}$	D	$\frac{8}{15}$

19) إن آحاد وعشرات العدد 11^{11} هي:

A	2	B	3	C	1	D	4

20) إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{3}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$ فإن: $P(A'\cap B')$

A	$\frac{8}{20}$	B	$\frac{3}{20}$	C	$\frac{3}{10}$	D	$\frac{3}{4}$

مركز أونلاين التعليمي	اسم الطالب:	المدة: ساعتان

امتحان الفصل الأول رياضيات بكالوريا 2025

1. عند دراسة نهاية التابع $f: x \to \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{|x+1|}}$ عند -1 نجد أن نهايته:

A	$+\infty$	B	-1	C	$-\infty$	D	غير موجودة

2. إذا كان المستوي $-x+3y+2z-7=0$ يعامد المستوي $kx-y+2z+3=0$ فإن قيمة k تساوي:

A	0	B	1	C	-1	D	$\frac{1}{2}$

3. ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=2x+1+\sqrt{x^2-6x+10}$
معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$ هي:

A	$y=3x-2$	B	$y=x+4$	C	$y=3x-3$	D	$y=x+1$

4. ليكن f التابع المعرف على R وفق $f(x)=3x+\cos x$ عندئذٍ للمعادلة $f(x)=0$

A	حل وحيد	B	حل على الأكثر	C	حل على الأقل	D	حلان

5. لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n-2$
ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $v_n=u_n+3$ فإن v_n هي:

A	حسابية أساسها 3	B	هندسية أساسها $\frac{1}{3}$	C	حسابية أساسها $\frac{1}{2}$	D	هندسية أساسها 2

6. لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي $z=-1+i$
وليكن العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة النقطة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$
وزاويته $(\frac{\pi}{4})$ فإن الشكل الأسي له يعطى بالشكل:

A	$(2+\sqrt{2})e^{\frac{5\pi}{4}i}$	B	$\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}$	C	$2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$	D	$(2-\sqrt{2})e^{\frac{5\pi}{4}i}$

7. نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. النقطتين $B(-1,2,1)$, $A(2,1,-2)$ والمستوي
$P: 3x-y-3z-8=0$ فإن احداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P

A	$(\frac{29}{9},\frac{22}{3},\frac{-19}{3})$	B	$(\frac{9}{19},\frac{2}{3},\frac{-19}{3})$	C	$(\frac{29}{19},\frac{22}{19},\frac{-29}{19})$	D	$(\frac{29}{19},\frac{22}{19},\frac{29}{19})$

8. ليكن m عدداً حقيقياً، وليكن C_m الخط البياني للتابع f_m المعرف على R وفق:
$f_m(x)=x^3+mx^2-8x-m$ جميع الخطوط البيانية C_m تمر بالنقطتين

A	$A(-1,-7),B(1,7)$	B	$A(1,-7),B(-1,7)$	C	$A(1,-1),B(-1,1)$	D	$A(7,-7),B(-1,1)$

9. ناتج $\lim_{x\to+\infty}\left[(\frac{2x+1}{x-1})^{\frac{5}{2}}-2(\frac{2x+1}{x-1})^{\frac{3}{2}}\right]$

A	$4\sqrt{2}$	B	0	C	$2\sqrt{2}$	D	$-2\sqrt{2}$

10. إن قيمة m الذي يجعل التابع f المعرف على R وفق $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+x^3}}{x} & ; x>0\\ m(x+2) & ; x\le 0\end{cases}$ مستمراً على Rهي:

A	-1	B	1	C	0	D	$\frac{1}{2}$

11. لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$المعرفة وفق ما يأتي: $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ فإن u_n

A	متقاربة من 0	B	متباعدة نحو $+\infty$	C	متقاربة من 1	D	متقاربة من $\frac{1}{2}$

12. C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=\frac{x+2}{\lvert x\rvert+1}$، معادلة نصف المماس من اليسار لـ C في $A(0,2)$ هي:

A	$y=3x+2$	B	$y=2-3x$	C	$y=-x+2$	D	$y=x+2$

13. نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A وB و Cو D التي تمثلها الأعداد العقدية: $a=6-i$ و $b=-6+3i$ و$c=-18+7i$ و$d=1+6i$ بالترتيب فإن العدد العقدي الممثل n للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربع.

A	$2-3i$	B	$3-2i$	C	$7+5i$	D	$7-5i$

14. ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=ax^3+3x-1$ قيمة العدد a ليكون للتابع f قيمة حدية محلية عند $x=1$ هي:

A	2	B	0	C	1	D	-1

15. ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x)=\frac{x}{\lvert x\rvert+1}$ عندئذٍ معادلة المماس للخط C في المبدأ هي:

A	$y=x+1$	B	$y=0$	C	$y=x$	D	$y=-x$

16. لتكن المتتالية$(s_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $s_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}$ عندئذٍ s_n:

A	$\frac{1}{2}(3-\frac{1}{3^n})$	B	$2(1-\frac{1}{3^n})$	C	$(3-\frac{1}{3^n})$	D	$2(3-\frac{1}{3^n})$

17. مشتق التابع $x\mapsto \sin^2(\pi x+1)+\cos^2(\pi x+1)$ هو:

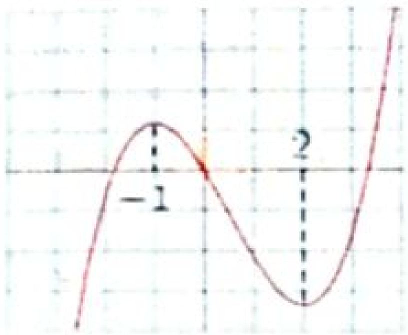
A	1	B	$2\cos(\pi x+1)$	C	$2\sin 2(\pi x+1)$	D	0

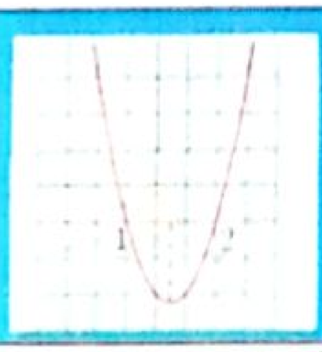
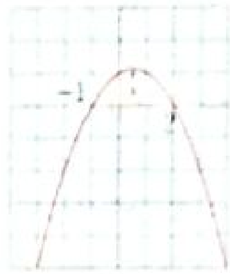
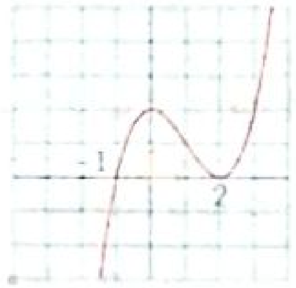
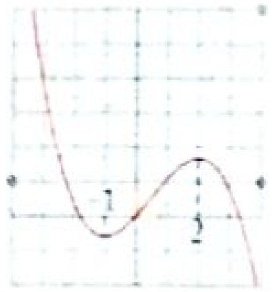
18. ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\cos\sqrt{x}$ عندئذٍ التابع f اشتقاقي عند الصفر و

A	$f'(0)=0.5$	B	$f'(0)=1$	C	$f'(0)=0$	D	$f'(0)=-0.5$

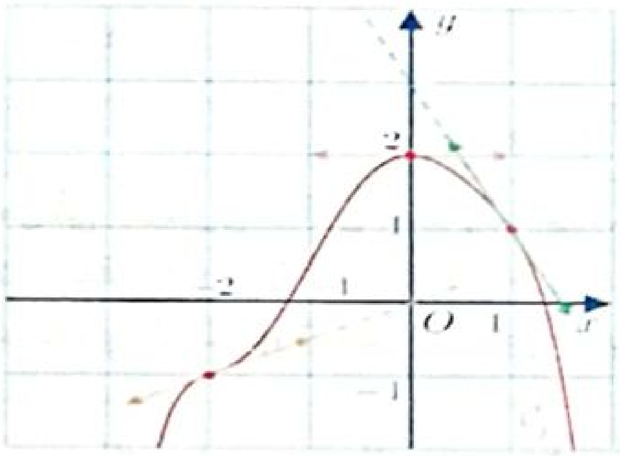
19. تأمل الشكل المرافق، C هو الخط البياني لتابع f معرف على R

الخط البياني لتابعه المشتق f' هو:



A		B		C		D	

20. تأمل الشكل المرافق، C هو الخط البياني لتابع f معرف على R



حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

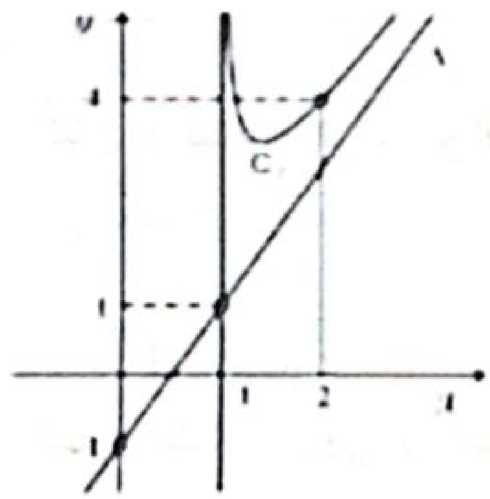
A	$]0, +\infty[$	B	$]-\infty, 0[$	C	$]-\infty, 2[$	D	$]2, +\infty[$

21. الشكل المجاور يمثل C_f الخط البياني للتابع f المعرف وفق:

$f(x) = ax + b + \frac{c}{\sqrt{x-d}}$ والمستقيم Δ مقارب مائل لخطه البياني

في جوار $+\infty$ و $a, b, c, d \in R$

عندئذٍ (a, b, c, d) تساوي:



A	$(\frac{1}{2}, -1, 2, 1)$	B	$(2, -1, 1, 1)$	C	$(2, -1, 2, 1)$	D	$(2, -1, 1, -1)$

22. في حالة $k \in Z$ و $\theta \neq \pi(1 + 2k)$ يكون العدد العقدي $Z = \frac{2i\cos\frac{\theta}{2}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}$ مساوياً لـ:

A	$-i$	B	1	C	i	D	-1

23. الشكل المرسوم جانباً هو الخط البياني للتابع f على المجال $[-2,2]$ إن قيمة $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-2}{x}$ هي:

A	3	B	1	C	-1	D	-3

24. ليكن f تابعاً معرفاً على $]0,+\infty[$ إذا علمت أن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+2x)=1-\sqrt{2}$ عندئذٍ معادلة المستقيم المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$ هي:

A	$y=2x+1-\sqrt{2}$	B	$y=-2x-1+\sqrt{2}$	C	$y=2x+1+\sqrt{2}$	D	$y=-2x+1-\sqrt{2}$

25. ليكن f تابع تقابل معرف على $[1,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{x-1}$ والنقطة $A(5,2)$ نقطة من الخط البياني للتابع f ، إن النقطة B تمثل نقطة من تابع تقابله العكسي حيث احداثيات B:

A	$(-5,2)$	B	$(-2,-5)$	C	$(-2,6)$	D	$(2,5)$

26. ليكن العددان العقديان $Z_1=1+\sqrt{3}i$ و $Z_2=1+i$ فإن $\sin\frac{\pi}{12}$:

A	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	B	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	C	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	D	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

27. إذا كان $x+iy=\frac{i+1}{i}$ فإن $x+y$ يساوي:

A	2	B	1	C	0	D	-1

28. ليكن لدينا المستقيمين $d:\begin{cases}X=t+2\\Y=2t+1\\Z=-t\end{cases}\ ;t\in R$ و $d':\begin{cases}X=2s-1\\Y=s-2\\Z=3s-2\end{cases}\ ;s\in R$

فإن معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين d و d' :

A	$7x+2y+z+3=0$	B	$7x-5y-3z-9=0$	C	$x+2y+2z+3=0=$	D	$x+5y+3z-9=0$

29. في معلم متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ طول العمود المرسوم من مبدأ الإحداثيات إلى المستوي P يساوي 1 وشعاع توجيه المستقيم الحامل له هو $\vec{u}(1,2,2)$ عندئذٍ معادلة المستوي P هي:

A	$x+2y+2z+3=0$	B	$x+2y+2z-6=0$	C	$-5x+2y+z+36=0$	D	$x+2y+2z+1=0$

30. عند دراسة نهاية التابع $f:x\to\frac{\sin|x|}{x}$ عند 0 نجد أن نهايته:

A	1	B	-1	C	0	D	غير موجودة

31. ليكن Z عدد عقدي يحقق: $|z-1|=|z|$ عندئذٍ الجزء الحقيقي:

A	$-\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{2}$	C	1	D	-1

مركز أونلاين التعليمي اسم الطالب: المدة: ساعتان

32. ليكن لدينا التابع $f(x)=\sqrt{x+3}$ المعرف على $]-3,+\infty[$ عندئذٍ القيمة التقريبية للتابع f عند $f(6,2)$ تساوي:

A	$\frac{91}{30}$	B	$\frac{91}{6}$	C	$\frac{182}{30}$	D	$\frac{182}{6}$

33. المعادلات الوسيطية لنصف المستقيم $[AB)$ حيث A مبدأ نصف المستقيم و $A(-2,1,0)$ و $B(2,3,1)$

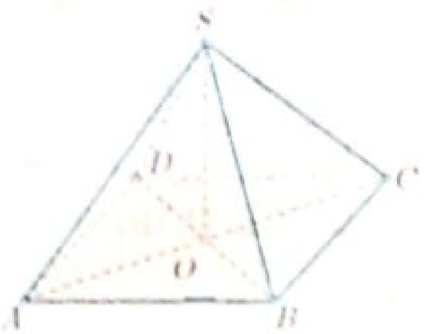
A	$\begin{cases}x=-2+4t\\y=1+2t\\z=t\end{cases};t\geq 0$	B	$\begin{cases}x=-2+4t\\y=1+2t\\z=t\end{cases};t\leq 0$	C	$\begin{cases}x=-2+4t\\y=1-2t\\z=t\end{cases};t\geq 0$	D	$\begin{cases}x=4t\\y=2t\\z=t\end{cases};t\geq 0$

34. مجموع الحدود الخمسة الأولى من متتالية حسابية حدها الأول 2 وأساسها r يساوي:

A	$5+5r$	B	$10+10r$	C	$5-5r$	D	$10-5r$

35. $S-ABCD$ هرم قاعدته مربع طول ضلعه يساوي 4 وطول كل حرف من حروفه الجانبية يساوي 4 والنقطة (O) مرتسم S القائم على القاعدة

_ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS}$ يساوي:



A	0	B	2	C	16	D	4

36. ليكن التابع g المعرف على $R/\{1\}$ وفق العلاقة: $g(x)=\frac{x^2+bx+a}{x-1}$.

التابع g يقبل قيمة حدية محلياً عند $x=0$ قيمتها تساوي 2 فإن قيمة a و b

A	$a=-2\,,b=-2$	B	$a=-2\,,b=2$	C	$a=2\,,b=0$	D	$a=-2\,,b=0$

37. نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المستوي $P: 2x+y-3z+2=0$ والنقطة $A(1,1,-2)$ فإن معادلة المستوي Q المار من النقطة A والموازي للمستوي P

A	$2x+y-3z-9=0$	B	$2x+y-z-3=0$	C	$x+2y-3z-9=0$	D	$2x+y-z-9=0$

38. ليكن التابع f المعرف وفق: $f(x)=\sin(5x-3)$ تابع دوري ودوره:

A	$\frac{\pi}{2}$	B	$\frac{\pi}{5}$	C	2π	D	$\frac{2\pi}{5}$

39. لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n=\frac{2n-1}{n+1}$ فإن:

A	2 عنصر قاصر	B	1 عنصر راجح	C	0 عنصر راجح	D	2 عنصر راجح

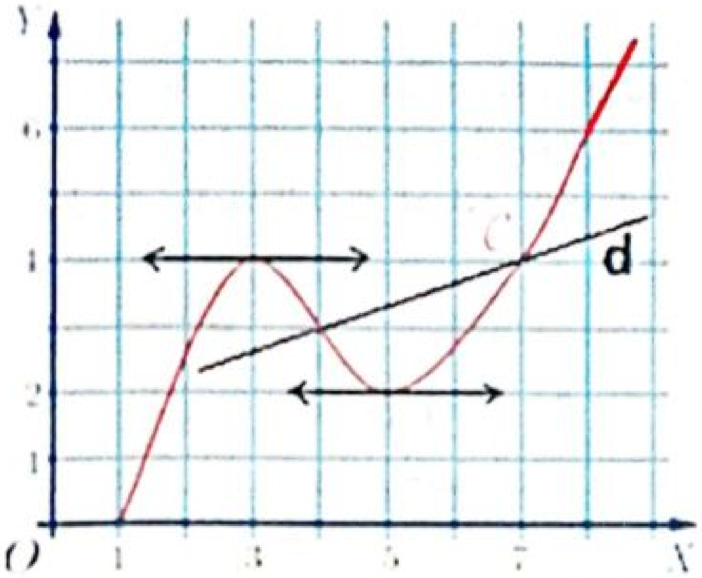
40. إن مدة امتحان الرياضيات هي ساعتان وهي قيمة إحدى النهايات التالية:

A	$\lim_{n\to\infty}(2-(\frac{5}{2})^n)$	B	$\lim_{n\to\infty}(2+(\frac{3}{2})^n)$	C	$\lim_{n\to\infty}(2+\frac{3n}{n+1})$	D	$\lim_{n\to\infty}(2+\frac{3n}{n^2+1})$

فارس جقل: الطرق السريعة والشروحات و حلول البنك وظائف المكثفة تجدولها على صفحتي على فيسبوك (فارس جقل) بأول منشور مثبت

قراءة الخط البياني لتابع

تمرين



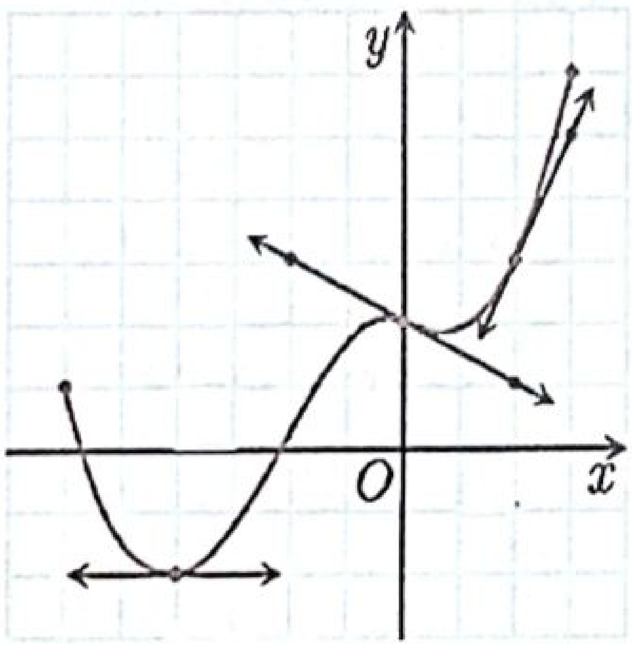
في الشكل المجاور نجد الخط البياني للتابع f ..المطلوب :

1. أوجد مجموعة التعريف
2. أوجد المستقر الفعلي
3. أوجد $f(1), f(3), f(5), f'(3), f'(5)$
4. أوجد معادلة المماس في نقطة فاصلتها 3
5. أوجد معادلة المستقيم d
6. أوجد حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$
7. أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

الحل

1) $D_f = [1, +\infty[$
2) $[0, +\infty[$
3) $f(1) = 0$ ، $f(3) = 4$ ، $f(5) = 2$ و $f'(3) = 0$ و $f'(5) = 0$
4) $y = 4$
5) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$
6) $[3, 5]$ 7) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 0$

تمرين



ليكن الخط البياني للتابع f والمطلوب :

1. أوجد مجموعة التعريف
2. أوجد المستقر الفعلي
3. أوجد $f(0), f(-4), f(2)$
4. أوجد $f'(0), f'(-4), f'(2)$
5. اكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع في النقطة $(2, 3)$
6. ما حلول المعادلة $f(x) = 1$
7. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 3$
8. أوجد $f(\,]-2.2[\,)$

الحل

1. $D_f = [-6, 3]$
2. $[-2, 6]$
3. $f(2) = 3$ ، $f(-4) = -2$ ، $f(0) = 2$
4. $f'(2) = 2$ ، $f'(-4) = 0$ ، $f'(0) = -\frac{1}{2}$
5. من الطلب السابق : $m = f'(2) = 2 \Leftarrow y = 2x - 1$
6. $x = -6$ و $x = -1.5$
7. $[2, 3]$ .8 $]0, 3[$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984 مع الشحن لكافة المحافظات

قراءة جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

تأمل جدول تغيرات التابع f.. و المطلوب :

1. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. اكتب معادلات المقاربات الأفقية و الشاقوليه للتابع f .
3. ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.
4. دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f ثم حل المتراجحة $f'(x)<0$.

هام: مراجعة النماذج النهائية الشاملة لمركز أونلاين .. يمكن متابعتها على صفحتنا مركز أونلاين على فيسبوك

الحل

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$
2. $y=0$ (أفقي) ، $x=1$ (شاقولي)
3. حل وحيد
4. $f(-1)=-\frac{1}{2}$ ، $]-1,1[$

فارس جقل مع **Mohamad Dik** و١٥ آخرين.

٧ فبراير ·

أطباء #سوريا الحرة
دمعة هبة زينب رند نور نائل محمد يزن
لجين مضر شهد كول بهار جنى حلا
تالا منى آية لين بتول نور لانا غزل
بيان رنيم ملهم عبد الله علي نجيبه زيد
بتول انجي عبير ريتا جيما رتاج
مجيد ايلي غفران طارق حيدر سعيد تيماء
رؤى
..أسماءكم تخلد في ذاكرة الإبداع والتميز
هنيئا لنا ولأهاليكم ولسوريا بكم ..فأنتم أملنا و مستقبلنا
بالتوفيق لكم في امتحانكم الأول غدا إن شاء الله

هامش : يلي نسيان اسمو يخبرني بالتعليقات

تمـريـن

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف و المستمر على R وخطه البياني C المطلوب :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	
$f(x)$	3	↘	-2	↗	4	↗	$+\infty$

1) أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) اكتب معادلة المقارب الأفقي للخط C .
3) هل $f(2)=4$ قيمة حدّية محلياً ؟
4) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ في R
5) أوجد معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 2 .
6) ماعدد حلول المعادلة $f(x)-e=0$

الحـــل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
2) معادلة المقارب الأفقي هو $y=3$
3) كلا ، ليست قيمة حدّية.
4) حلّان.
5) $y=4$
6) حلّان .

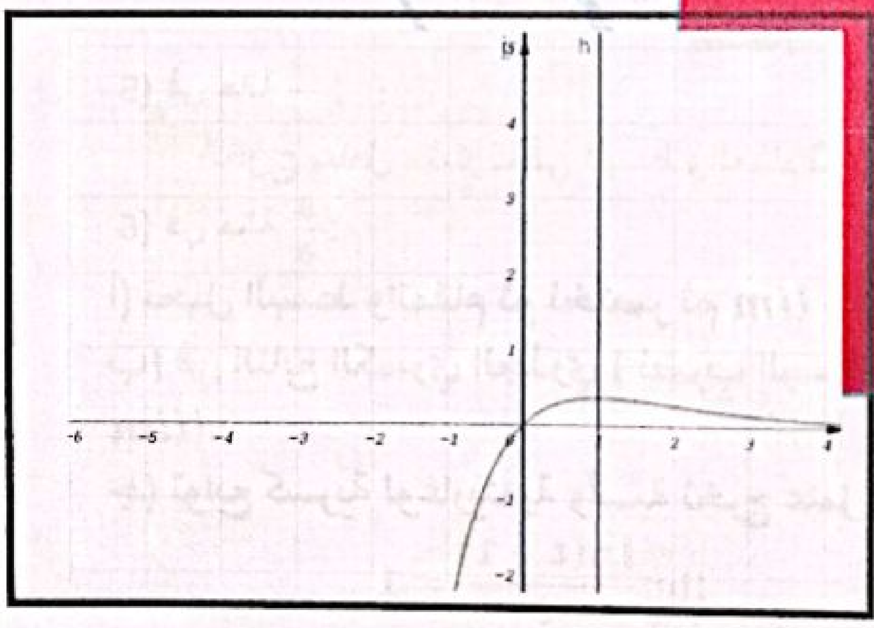
تمـريـن

ليكن الجدول المجاور :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		+	0	-	
f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

1) أوجد مجموعة التعريف.
2) كم عدد القيم المحلية ، وما هي؟
3) ما هي المقاربات الأفقية و الشاقولية ؟
4) كم عدد حلول المعادلة $f(x)=0$
5) كم عدد حلول المعادلة $f(x)=1$
6) بفرض أن التابع $f(x)=xe^{-x}$ احسب مساحة السطح المحصور بين c والمحور xx' المستقيمين اللذين معادلتهما $x=0$ و$x=1$
7) ارسم الخط البياني اعتماداً على الجدول.

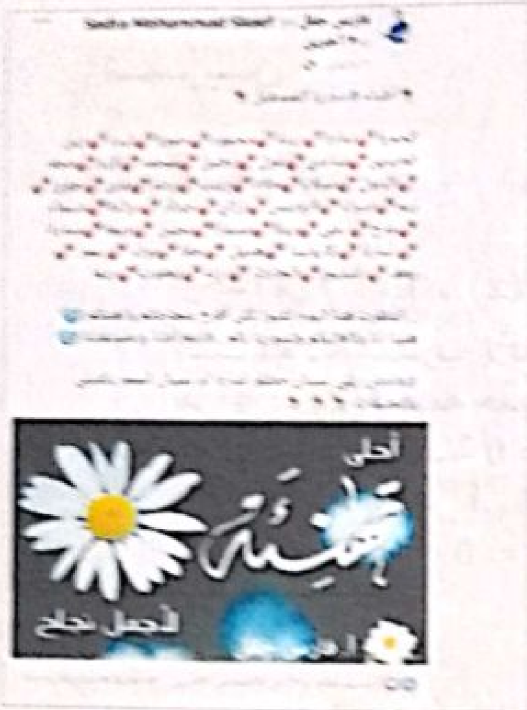
الحـــل



1) $D=]-\infty,+\infty[$
2) قيمة محلية واحدة هي $f(1)=\frac{1}{e}$
3) $y=0$ (أفقي)
4) حل وحيد (ينتمي للمجال $]-\infty,1[$)
5) لا يوجد حلول.
6) نقاط مساعدة (0,0)
7) $S=\int_0^1 xe^{-x}\,dx$

بالتجزئة : نفرض $u=x \Rightarrow \grave{u}=1$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984 مع الشحن لكافة المحافظات



$$u = x \Rightarrow \grave{u} = 1$$
$$\grave{v} = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$S = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}.1dx$$
$$= [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$$
$$= [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1$$
$$= \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right) - (-1)$$
$$= -\frac{2}{e} + 1$$

8) اكتب معادلة المماس للخط البياني C في نقطة فاصلتها 1 (وظيفة)

ملاحظات حول النهايات

• تدل على اي مقدار

1) عندما يكون مضمون الـ sin و cos
- $\infty \Leftarrow$ مبرهنة الاحاطة
- $0 \Leftarrow \lim\limits_{\bullet \to 0} \frac{\sin \bullet}{\bullet} = 1$

2) تابع جذر تربيعي
- اخراج عامل مشترك
- الضرب بالمرافق

3) تابع صحيح أو تابع كسري حدودي نعوض ب الحد المسيطر ل x في البسط والمقام عند (∞)

4) في حالة $(0 . \infty)$ تابع أسي و لوغارتمي نستخدم :

$$\lim_{t \to 0^+}(t.\ln t) = 0$$
$$\lim_{t \to +\infty}(t^n.e^{-t}) = 0 \qquad \text{(حيث } n \text{ عدد طبيعي)}$$
$$\lim_{t \to -\infty}(t^n.e^{t}) = 0$$

$$\cos(\bullet) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\bullet}{2}\right)$$
$$2\cos^2(\bullet) = 1 + \cos(2\bullet)$$
$$\sin(2\bullet) = 2\sin(\bullet)\cos(\bullet)$$

5) في حالة $\frac{\infty}{\infty}$:

نخرج عامل مشترك في البسط والمقام ثم نختصر ثم نعوض

6) في حالة $\frac{0}{0}$:

أ) نحلل البسط والمقام ثم نختصر ثم lim (تابع كسري).

ب) في التابع الكسري الجذري (نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر ثم نختصر ثم نوجد lim).

ج) توابع كسرية لوغاريتمية وأسية نخرج عامل مشترك من البسط و المقام ونختصر ونطبق :

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1 \qquad \lim_{t \to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

تمرين هام

احسب $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x.\sin x}{x} \rightarrow 1$$

$$=2(0)(1)=0$$

$$\cos t = 1-2\sin^2\frac{t}{2}$$

قواعد هامة

1) $\lim_{t\to 0}\frac{1-e^t}{t}=-1$

2) $\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$

3) $\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=1$

4) $\lim_{t\to +\infty}\frac{e^t}{t^n}=+\infty$, 5) $\lim_{t\to +\infty}\frac{t^n}{e^t}=0$

قواعد هامة

1) $\lim_{t\to +\infty}\frac{\ln t}{t}=0$

2) $\lim_{t\to +\infty}\frac{t}{\ln t}=+\infty$

3) $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

4) $\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1$

5) $\lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{t-1}=1$

6) $\lim_{t\to 0}\frac{t-1}{\ln t}=1$

إيجاد نهاية عن طريق تعريف العدد المشتق

مثال

أوجد $\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1}$

نفرض البسط كاملاً:

$$f(x)=x\ln x$$

$$f(a)=f(1)=1\ln(1)=1(0)=0$$

التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$\grave{f}(x)=\ln x+1 \Rightarrow \grave{f}(a)=\grave{f}(1)=1$$

نعوض بالقانون:

$$1=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-0}{x-1}$$

$$\grave{f}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984 مع الشحن لكافة المحافظات

مـــثـــال امتحاني هام

ليكن $f(x) = e^x - 1$ والمطلوب : أوجد $f(0)$ ثم أوجد $\acute{f}(x)$, $\acute{f}(0)$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

$$f(0) = 1 - 1 = 0$$

$$\acute{f}(x) = e^x$$

$$\acute{f}(0) = e^0 = 1$$

نكتب القانون ثم نعوض:

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - 0}{x - 0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

نهايات مميزة

- $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$
- $\lim\limits_{t\to \infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

وظيفة

1. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+2x+3} - |x|$

$+1$	D	-1	C	$+\infty$	B	$-\infty$	A

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x\sin x}$

1	D	0	C	$\frac{1}{2}$	B	2	A

3. $\lim\limits_{x\to 3}|x-3|\cos^2\left(\frac{1}{x-3}\right)$

$-\infty$	D	$+\infty$	C	0	B	3	

4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+1} - x$

-1	D	0	C	$+\infty$	B	$-\infty$	A

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+4-4\cos x}{x^2}$

2	D	$-\infty$	C	$+\infty$	B	$\frac{1}{2}$	A

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\cos x}{3x^2}\right)$

-1	D	1	C	0	B	$+\infty$	A

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x\sin x}\right)$

0	D	1	C	$\frac{1}{2}$	B	2	A

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{xe^x}{1-e^x}\right)$

0	D	$+\infty$	C	1	B	-1	A

لطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984 مع الشحن لكافة المحافظات

9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{3x}}{x}$

A	2	B	$+\infty$	C	1	D	-2

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x-\ln(1+x))$

A	1	B	0	C	$+\infty$	D	$-\infty$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty} (3+e^{x})-x$

A	3	B	$-\infty$	C	$+\infty$	D	0

12. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2}\sin\frac{1}{x}$

A	$+\infty$	B	$-\infty$	C	1	D	0

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sin x$

A	$-\infty$	B	-1	C	1	D	$+\infty$

14. $\lim\limits_{x\to-\infty} x.2^{x}$

A	$-\infty$	B	$\ln 2$	C	$+\infty$	D	0

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x-e^{x}$

A	0	B	$+\infty$	C	$-\infty$	D	1

16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

A	0	B	e	C	e^{3}	D	e^{2}

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x.\ln(1+\frac{1}{x}))$

A	$+\infty$	B	$-\infty$	C	1	D	0

18. $\lim\limits_{x\to\ln 2} \frac{e^{x}-2}{x-\ln 2}$

A	0	B	1	C	$\ln 2$	D	2

19. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

A	1	B	2	C	-1	D	0

20. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^{2}+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

A	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	B	2	C	$\sqrt{2}$	D	$\frac{1}{2}$

21. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$

A	0	B	1	C	2	D	-1

دراسة قابلية الاشتقاق في a

(لتابع f مستمر في a)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

عدد حقيقي ⇓ قابل للاشتقاق

∞ ⇓ غير قابل للاشتقاق

مثال

ادرس قابلية الاشتقاق عند $x = 1$ من اليمين للتابع $f(x) = x - 2\sqrt{x - 1}$

التابع مستمر على $[1, +\infty[$

$$f(a) = f(1) = 1 - 2\sqrt{1 - 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x - 2\sqrt{x - 1} - 1}{x - 1} = \frac{1 - 2\sqrt{1 - 1} - 1}{1 - 1}$$

$$= \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} - \frac{2\sqrt{x - 1}}{x - 1}$$

$$= 1 - \infty = -\infty$$

التابع غير قابل للاشتقاق عند $x = 1$

إثبات المقارب المائل

سؤال إجباري

نطبق ما يلي :

1) نوجد $f(x) - y_\Delta$
2) نبرهن أن $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$

دراسة الوضع النسبي للمقارب المائل و المقارب الأفقي

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y_\Delta$ و نميز حالتين

-1 $f(x) - y_\Delta > 0$ فالخط C يقع فوق Δ

-2 $f(x) - y_\Delta < 0$ فالخط C يقع تحت Δ

-3 $f(x) - y_\Delta = 0$ (نقطة تقاطع)

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

مثـــال

ليكن التابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \sqrt{4x^2+5}$ خطه البياني C

احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5}-2x$ واستنتج معادلة المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x) = \sqrt{4x^2+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+5} = \sqrt{4(+\infty)^2+5} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5}}{x} = \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \frac{|x|.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x} = \frac{x.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x}$$

$$= \sqrt{4+\frac{5}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4+\frac{5}{x^2}}$$

$$= \sqrt{4+\frac{5}{+\infty}} = \sqrt{4} = 2 = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right) = +\infty - \infty$$ (عدم تعيين)

نضرب بالمرافق

$$= \frac{\left(\sqrt{4x^2+5}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+5}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+5}+2x}$$

$$= \frac{4x^2+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+5}+2x} = \frac{5}{+\infty} = 0 = b$$

المقارب المائل : $y = ax + b$

$\Leftarrow$ $y = 2x$

لاستنتاج معادلة المقارب المائل

1. نوجد $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$
2. نوجد $b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax$
3. نعوض بالمعادلة $y = ax + b$

" لا تقل: لا أقدر .. عبارة يجب شطبها او استبدالها بأخرى " مالذي يمكن فعله

فكل شخص يختار طريقه.

فإذا اخترت الهزيمة لنفسك، فعليك أن تتحمل النتائج.

"لذا كن شجاعا" واختر الطريق الصحيح حتى لو كان صعبا

لطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

مثال

ليكن C الخط البياني للتابع f حيث $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+2}$:

1. اكتب $f(x)$ بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$

ماهي معادلة المستقيم المقارب للخط C عند كل من $+\infty$ و $-\infty$

ثم ادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى المستقيم Δ

الحل : بالقسمة الاقليدية نجد أن

$$f(x)=(x-4)+\frac{5}{x+2}$$

هام : تابعوا اهم الملاحظات الإمتحانية بصفحتي على الفيسبوك
فارس جقل

$y=x-4$ مستقيم مقارب للخط C

لدراسة الوضع النسبي : ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_{\Delta}=\frac{5}{x+2}$

في المجال : $]-\infty,-2[$ يكون $f(x)-y_{\Delta}<0$ فالخط C يقع تحت Δ

في المجال : $]-2,+\infty[$ $f(x)-y_{\Delta}>0$ فالخط C يقع فوق Δ

.....(يمكن أن ننظم جدول الوضع النسبي)

تطبيق هام

ليكن التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ حيث: $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln(x)$
أوجد معادلة المستقيم المقارب عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لل خط C بالنسبة للمقارب Δ

الحـــل

$\Leftarrow$ $\Delta: y=x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي : أيا كان $x\in]0,+\infty[$ فإن $\frac{x+1}{x}>1$ أي $\ln(\frac{x+1}{x})>0$ فإن

$f(x)-y_{\Delta}>0$ فالخط C يقع فوق Δ

مثال (وظيفة)

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على R وفق : $f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$

ماهي معادلة المستقيم المقارب للخط عند $-\infty$

دراسة تغيرات تابع :

مسألة 1

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

المطلوب :

1) أوجد معادلة المستقيم Δ مقارب للخط C في جوار $-\infty$ و ادرس الوضع النسبي للخط C مع Δ
2) ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولاً بها ثم ارسم كل مقارب وجدته وارسم C
3) احسب مساحة السطح المحدّد بالخط C و Δ و المستقيمين $x = 0, x = 2$

الحـــــل

(1

$\Delta: y = x$ مقارب ل C في جوار $-\infty$

دراسة الوضع النسبي : $f(x) - y_\Delta = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} > 0$

لأن $x < \sqrt{x^2+1}$ فالخط C يقع فوق Δ

2) دراسة التغيرات :

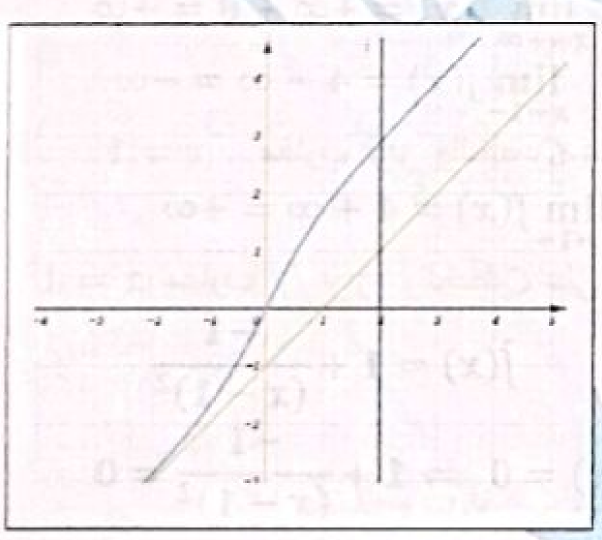
f مستمرة واشتقاقية على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

(طريقة الاشتقاق و النهايات تترك للطالب وظيفة)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$



3) $S = \int_0^2 [f(x) - y_\Delta]\ dx$

$$= \int_0^2 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\ dx = \sqrt{5} + 1$$

مسألة 2

أولاً : ليكن التابع g المعرف على $R/\{1\}$ وفق العلاقة : $g(x) = \frac{x^2+bx+a}{x-1}$

أوجد العددين الحقيقيين a و b علماً أن التابع g يقبل قيمة حديّة محلياً عند $x = 0$ قيمتها تساوي 2

ثانياً : بفرض التابع f المعرّف على $R/\{1\}$ وفق العلاقة : $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x-1}$ و خطه البياني C

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

1) أوجد معادلة المستقيم المقارب للخط C
2) أوجد نهايات التابع f عند حدود مجموعة تعريفه
3) ادرس تغيرات التابع f و نظّم جدولاً بها ، واستنتج من جدول التغيرات أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل حقيقي وحيد α ينتمي إلى المجال $]-3,-2[$
4) ارسم المقاربات ثم ارسم الخط C

الحـــل

أولاً: $g(x) = \frac{x^2+bx+a}{x-1}$

$\boxed{g(0) = 2}$ نعوض النقطة $(0,2)$ بالتابع:

$$2 = \frac{0+0+a}{-1} \Rightarrow a = -2$$

$$\grave{g}(x) = \frac{(2x+b)(x-1) - 1(x^2+bx+a)}{(x-1)^2}$$

$\boxed{\grave{g}(0) = 0}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{(0+b)(-1) - a}{1}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{-b-(-2)}{1} \Rightarrow 0 = -b+2$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 2}$$

ثانياً:

$\Leftarrow$ $y = x + 3$ مقارب مائل في جوار $-\infty$ و $+\infty$

دراسة التغيرات:

التابع مستمر واشتقاقي على $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 4 - \infty = -\infty$$

$x = 1$ مقارب $y\grave{y}$ والخط C على يساره.

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 4 + \infty = +\infty$$

$x = 1$ مقارب $// \ y\grave{y}$ والخط C على يمينه.

$$\grave{f}(x) = 1 + \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$\grave{f}(x) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{-1}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow |x-1| = 1$$

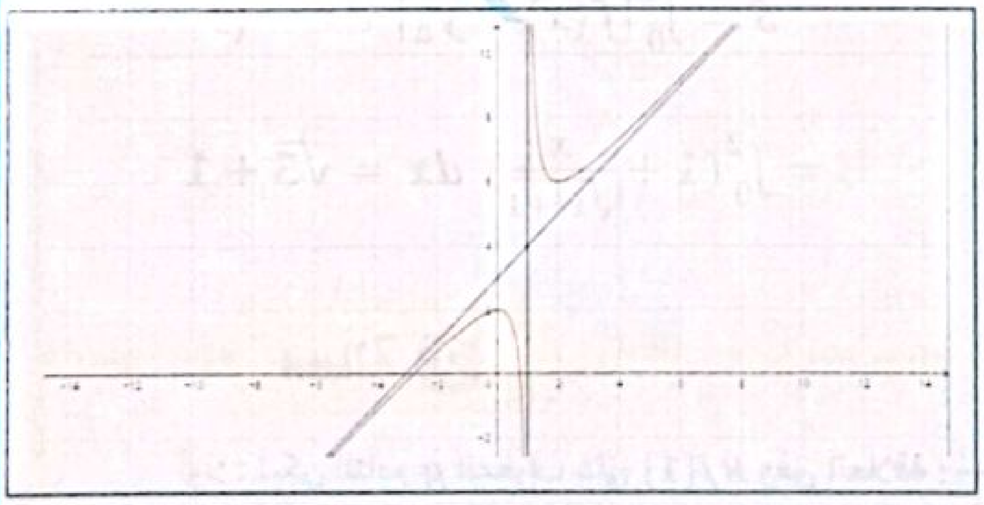
إما $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

أو $x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$\grave{f}(x)$	$+$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	2	$\searrow -\infty$ ‖ $+\infty \searrow$	6	$\nearrow +\infty$

$f(0) = 2$ قيمة محلية كبرى

$f(2) = 6$ قيمة محليه صغرى



التابع مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-3,-2[$

$$f(-2) = \frac{2}{3}, f(-3) = \frac{-1}{4}$$

$\Rightarrow f(-3).f(-2) < 0$

للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد.

لرسم المقارب: $y = x + 3$

$x = 0 \Rightarrow y = 3 \ (0,3)$

$y = 0 \Rightarrow x = -3 \ (-3,0)$

لرسم الخط البياني:

نوجد نقط مساعدة (نقاط التقاطع مع المحورين)

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0,2)$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 0 = x + 3 + \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x-1} = x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = -1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 + 8 = 12$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{3} \approx 0.7$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{3} \approx -2.7$$

تمرين : ادرس تغيرات التابع $f(x) = x\ln x$

التابع مستمر و اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C والمحورين الاحداثيين والمستقيم $x = \frac{1}{2}$

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[(x+3) + \frac{1}{x-1}\right] dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

ثم نعوض .....

مسألة 3

ليكن التابع $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ المعرف على R..المطلوب :

1) أثبت أن التابع فردي واستنتج الصفة التناظرية له .
2) أوجد معادلة كل مقارب للخط C يوازي xx' وعيّن وضع الخط C بالنسبة إلى كل مقارب وجدته .
3) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .
4) أوجد معادلة المماس في النقطة $(0,0)$
5) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C .
6) احسب مساحة السطح المحصور بين C والمحور xx' والمستقيمين $x = 0, x = \ln 2$
7) استنتج رسم C_1 الخط البياني للتابع $f_1(x) = \frac{1-e^x}{e^x+1}$ (وظيفة)

الحـــل

1) أياً كانت $x \in R$ فإن $-x \in R$ *

لطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}$$

$$=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$$

f فردي وخطه البياني متناظر بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات

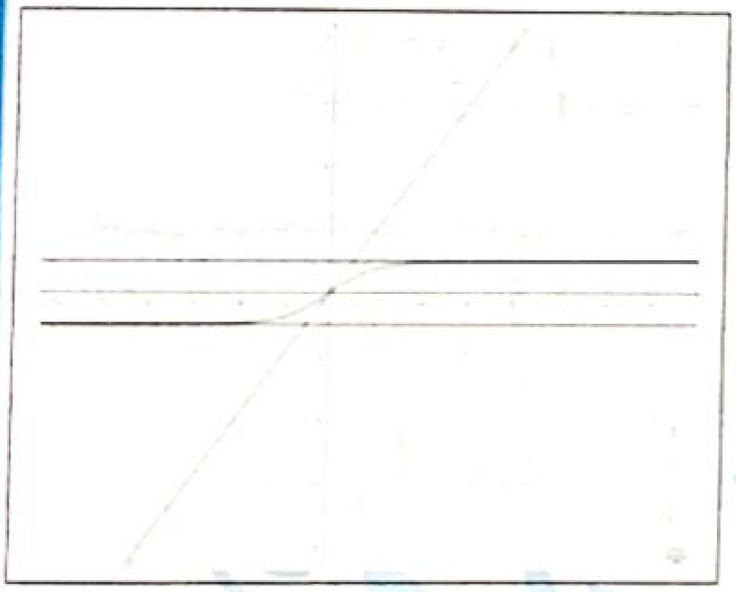
2) التابع مستمر على R

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1 \Leftarrow y=-1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $-\infty$ والخط البياني C يقع

فوق المقارب لأن :

$$f(x)-y_\Delta=\frac{e^x-1}{e^x+1}+1=\frac{2e^x}{e^x+1}>0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1 ↗	1



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \Leftarrow y=1$ مستقيم مقارب للخط C

في جوار $+\infty$ والخط البياني C يقع تحت المقارب لأن :

$$f(x)-y_\Delta=\frac{e^x-1}{e^x+1}-1=\frac{-2}{e^x+1}<0$$

3) التابع متزايد تماماً $\Rightarrow$ $f'(x)=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$

4) $y=\frac{1}{2}x$

6) الخط البياني C يقع فوق محور الفواصل على المجال $[0,\ln 2]$

$$\Leftarrow \quad S=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$$

لحساب هذا التكامل يمكن كتابة f بالشكل :

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{-1}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\Rightarrow S=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\,dx=\dots=\ln\frac{9}{8}$$

تذكر !!

$e^xe^{-x}=1$

تمرين دورة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x)=ae^{2x}+be^x+1 \ ; \ a,b\in R$

أولاً : عين قيمة كلاً من a,b إذا علمت أن للتابع f قيمة كبرى أو صغرى محلياً تساوي الصفر عندما $x=0$

ثانياً : بفرض $a=1$ و $b=-2$ يصبح التابع ..

$f(x)=e^{2x}-2e^x+1$ ..والمطلوب :

1) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ، و استنتج معادلة كل مقارب للخط C يوازي xx' أو yy' وادرس الوضع النسبي للخط C مع كل مقارب وجدته .

2) استنتج من تغيرات f أن للمعادلة $e^x+e^{-x}=2$ حلاً وحيداً .. أوجد هذا الحل .

3) ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C ، واحسب مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم $y = 1$ والمحور yy'

الحل

أولاً: التابع f اشتقاقي على R فهو اشتقاقي من أجل $x = 0$

ولدينا $f(0) = 0$ قيمة كبرى أو صغرى محلياً

$$\Rightarrow \star \quad \boxed{a + b + 1 = 0}$$

وأيضاً : $f'(0) = 0$ نشتق التابع $f'(x) = 2ae^{2x} + be^{x}$

$$\Rightarrow \star\star \quad \boxed{f'(0) = 2a + b = 0}$$

بالحل المشترك بين $\star$ و $\star\star$ نجد : $a = 1$ و $b = -2$

ثانياً :

1) دراسة التغيرات على الطالب :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

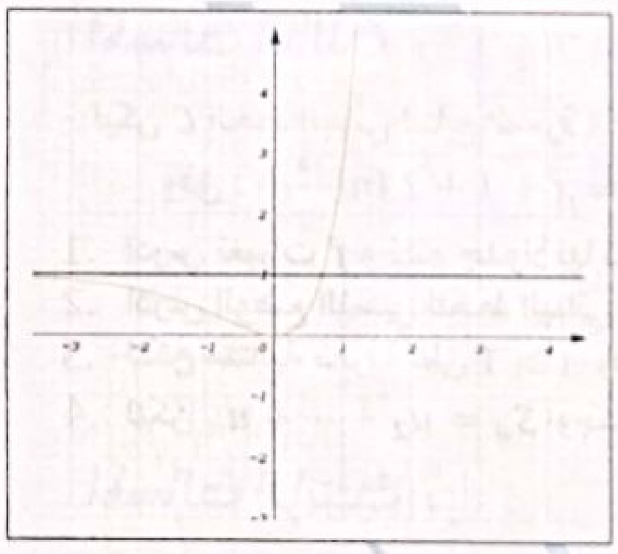
لدراسة الوضع النسبي بين الخط والمستقيم $y = 1$

$$f(x) - y_{\Delta} = e^{2x} - 2e^{x} = e^{x}(e^{x} - 2)$$

ندرس الإشارة :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f(x) - y_{\Delta}$		-	0	+	
		C يقع تحت Δ		C يقع فوق Δ	

الخط C يشترك مع Δ بالنقطة $(\ln 2 , 1)$



2) المعادلة $e^{x} + e^{-x} = 2$ تكافئ $e^{x} + \frac{1}{e^{x}} = 2$

$$\Rightarrow e^{2x} + 1 = 2e^{x}$$

أي المطلوب : $f(x) = 0$

ومن الجدول نجد أن لهذه المعادلة حل وحيد هو $x = 0$

3) $$S = \int_{0}^{\ln 2} [y_{\Delta} - f(x)] \ dx$$

$$= \int_{0}^{\ln 2} (-e^{2x} + 2e^{x}) \ dx$$

$$= [-\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{x}]_{0}^{\ln 2} = \frac{1}{2}$$

أهم أنماط التغيرات

1) $f(x) = 2\sqrt{x-1} - x$ $\qquad D = [1, +\infty[$

2) $f(x) = x + \frac{e^{x}}{e^{x}+1}$ $\qquad D = R$

3) $f(x) = \ln(\frac{x-2}{2+x})$ $\qquad D =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

4) $f(x) = e^{-x} + \frac{1-x}{1+x}$ $\qquad D = R/\{-1\}$

5) $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$ $\qquad D = R$

6) $f(x) = (x-1)e^{x}$ $\qquad D = R$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

7) $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$
8) $f(x) = \ln(e^{-x}+1)$ $D = R$
9) $f(x) = \exp(\frac{x}{x^2+1})$ $D = R$
10) $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+x-2}$ $D = R/\{-2,1\}$
11) $f(x) = \ln(1+x) - x$ $D =]-1,+\infty[$
12) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ $D =]0,+\infty[$
13) $f(x) = (x+1).\ln x$ $D =]0,+\infty[$
14) $f(x) = x - \ln x$ $D =]0,+\infty[$
15) $f(x) = x - x.\ln x$ $D =]0,+\infty[$

بنك المسائل الهامة

المسالة الأولى :

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = 3e^x - x - 3$

1. أوجد معادلة المستقيم المقارب للخط C وادرس الوضع النسبي ، ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها .
2. ماهي حلول المعادلة $f(x) = 0$
3. ارسم الخط البياني واحسب مساحة السطح المحصور بين C و المحور ox و المستقيم $x = ln\,2$

المسالة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$

وفق : $f(x) = x + 1 - \frac{ln\,x}{x}$

أوجد معادلة المستقيم المقارب للخط C وادرس الوضع النسبي للخطين C و d

المسالة الثالثة :

ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على المجال $I =]1,+\infty[$

وفق : $f(x) = x + 1 + 2\,ln(\frac{x}{x-1})$ .. والمطلوب :

1. ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها ثم أوجد معادلة المستقيم المقارب للخط Cفي جوار $+\infty$
2. ادرس الوضع النسبي للخط البياني C و مقاربه d ثم ارسم في معلم واحد المستقيم d ثم الخط البياني C
3. لتكن متتالية معرفة على $n > 1$ وفق $U_n = f(n)$ جد نهاية هذه المتتالية $(U_n)_{n>1}$
4. لتكن $S_n = u_2 + \cdots + u_n$ أوجد S_n وما نهاية $(S_n)_{n\geq 2}$

المسالة الرابعة :

ليكن التابع $x \to f(x) = x - ln\,x$ المعرف على $I =]0,+\infty[$..والمطلوب :

1. احسب $f'(x)$ على هذا المجال
2. ما نهاية $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x - ln\,x - 1}{x-1}$
3. استنتج مشتق التابع $h(x) = \sqrt{x} - \ln\sqrt{x}$ واستنتج مشتق التابع $f(\ln x)$

المسالة الخامسة :

ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على وفق : $f(x) = \frac{1}{x+1} - x\sqrt{x}$ و $g(x) = x\sqrt{x}$

أثبت أن g اشتقاقي عند 0 ثم استنتج أن f اشتقاقي عند 0 ثم أوجد معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 0

المسألة السادسة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R.وفق : $f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$

1) أوجد معادلة المستقيم المقارب للخطC في جوار $+\infty$وادرس الوضع النسبي
2) أوجد معادلة المستقيم المقارب للخطC عند$-\infty$ ؟ وادرس الوضع النسبي .
3) ادرس تغيرات f وارسم Cمع رسم المقاربات .

المسألة السابعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{-1,+1\}$ وفق : $f(x) = \frac{x^3-x+2}{x^2-1}$

1) أوجد معادلة المستقيم المقارب المائل للخط C
2) احسبA, B حيث $f(x) = x + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ وجد $I = \int_0^t [f(x) - x] \quad dx$
3) احسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيم d و المستقيمين $x = 2$ و $x = 3$

المسألة الثامنة :

ليكن التابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$.. وفق : $f(x) = x - 1 - \ln x$و خطه البياني C

1. ادرس تغيرات التابع و بيّن القيم الكبرى و الصغرى محلياً
2. استنتج من تغيرات التابع أن $\ln x < x$ أياً كانت $x \in]0, +\infty[$
3. ارسم الخط البياني C
4. أثبت أن التابع $g(x) = \frac{x^2}{2} - x\ln x$ تابع أصلي للتابع f على المجال $]0, +\infty[$

المسألة التاسعة :

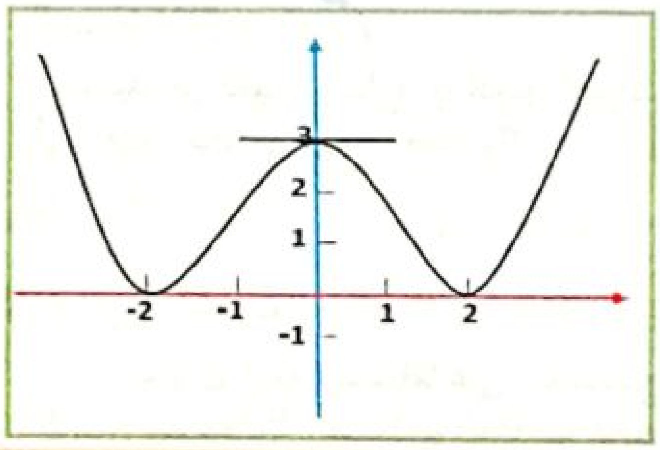
ليكن f المعرف على R وفق $f(x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$وخطه البياني C

1) أثبت أنه أياً كانت $x \in R$ فإن :

أ- $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$ ب- $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$

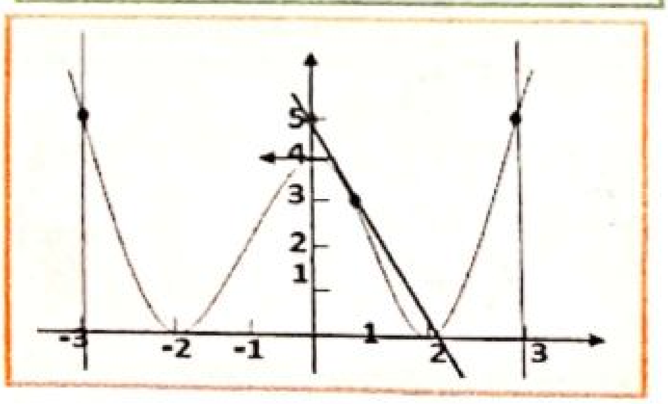
2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .
3) أثبت أن للمعادلة $x(e^x + 1) = e^x - 1$ حل وحيد ثم أوجده
4) ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل و المستقيم $x = 1$

المسألة العاشرة : في الرسم المجاور :



1) كم حل للمعادلة $f(x) = 1$
2) ما هي قيمة $f'(0)$
3) كم عدد القيم الحدية الظاهرة بالشكل ، وما هي ؟
4) عين $f(\ ]-2.2[\ )$
5) أوجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

المسألة الحادية عشر :



نلاحظ الخط البياني للتابع f والمطلوب :

a) أوجد مجموعة تعريف التابع ومستقره الفعلي .
b) هل التابع زوجي أم فردي؟ علل ذلك.
c) أوجد $f(-1), f(-2)$, $f(2)$, $f(0)$, $f(1)$.

d) أوجد $f'(1)$, $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$
e) أوجد معادلة المماس d في النقطة التي فاصلتها تساوي (1).
f) أوجد $f([-2,2])$
g) ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$.
H) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ i) نظم جدول اطراد التابع

المسالة الثانية عشر :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	‖	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

1) ما هي القيم الحدية المحلية؟ و ما نوعها ؟
2) هل يوجد مقاربات مائلة؟
3) ما هي المقاربات الأفقية و الشاقولية ؟
4) ما هي عدد حلول المعادلة $f(x) = 4$ ، واحصرها بمجالات.
5) أوجد مجموعة تعريف التابع f
6) أكتب معادلة المماس في نقطة فاصلتها $x = 1$
7) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$
8) ماهي حلول المعادلة $f(x) = -2$.
9) أكتب مجموعة تعريف التابع g حيث $g(x) = ln\,(f(x))$

المسالة الثالثة عشر : نجد فيما يأتي جدولاً بتغيرات التابع f و الذي خطه البياني C والمطلوب :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	1 ‖ -2	$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	-3

1) عيّن مجموعة تعريف التابع f
2) اكتب معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي للخط C
3) هل يوجد مماس أفقي للخط C في إحدى نقاطه ؟
4) هل f إشتقاقي عند 3 ؟
5) عيّن القيم الحديّة للتابع f ؟

المسالة الرابعة عشر :

ليكن التابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$.. وفق : $f(x) = e^{-x}(1 + \ln x)$ و خطه البياني C و التابع g المعرف على I وفق $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x$ والمطلوب :

1. ادرس تغيرات التابع g و نظم جدولاً بها
2. بيّن أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلاً وحيداً α ثمّ تحقق أن $\alpha = 1$
3. أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$
4. مستفيداً من تغيرات التابع g ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
5. في معلم متجانس ارسم الخط C_f

المسالة الخامسة عشر :

ليكن التابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$.. وفق : $f(x) = x - 4 + \ln\frac{x}{x+1}$ و خطه البياني C

1. أثبت أن f متزايد تماماً على I واستنتج $f(I)$
2. أوجد معادلة المستقيم المقارب للخط C في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي

Facebook
Telegram @Faresjakal
Instagram Fares_jakal
فارس جقل
Fares jakal
النخبة
Online Center

المتتاليات : أسئلة نماذج وزارية

مثال : نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ كما يأتي : $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$

1) إن u_n تحقق :

A	$5 \leq u_n \leq 7$	B	$0 \leq u_n \leq 5$	C	$-2 \leq u_n \leq 0$	D	$-5 \leq u_n \leq 0$

2) إن المتتالية u_n :

A	المتتالية متزايدة	B	المتتالية ثابتة	C	المتتالية متناقصة	D	المتتالية غير مطردة

3) المتتالية u_n:

A	متقاربة من الصفر	B	متباعدة من ال$+\infty$	C	متباعدة من ال$-\infty$	D	متقاربة من ال4

قاعدة

لبرهان متتالية هندسية نبرهن أن $u_{n+1} = q.u_n$ حيث q :عدد ثابت هو أساس المتتالية أو نبرهن أن :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = const$$
طريقة الاتمتة : نحسب ثلاثة حدود متعاقبة ثم نقسم لازم يطلع عدد ثابت .

تطبيق هام

لتكن المتتالية : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \end{cases}$ ، $v_n = u_n + 3$

1) إن (v_n) هي :

A	متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{3}$	B	متتالية هندسية أساسها 3	C	متتالية حسابية أساسها 3	D	متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

2) إن عبارة (v_n) بدلالة n هي :

A	$v_n = \frac{1}{3}n + 3$	B	$v_n = 3n + 4$	C	$v_n = 4(3)^n$	D	$v_n = 4(\frac{1}{3})^n$

لطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0959458194 مع الشحن لكافة المحافظات

3) إن عبارة (u_n) بدلالة n هي:

A	$u_n = \frac{1}{3}n - 3$	B	$v_n = \frac{4}{3^n} - 3$	C	$v_n = 4(3)^n + 3$	D	$v_n = 4(\frac{1}{3})^n + 3$

4) إذا كانت $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

A	0	B	4	C	$+\infty$	D	6

قاعدة

لبرهان متتالية حسابية نبرهن أن $u_{n+1} = u_n + r$ حيث r : عدد ثابت هو أساس المتتالية أو نبرهن أن

$$u_{n+1} - u_n = const$$

طريقة للأتمتة :نحسب ثلاثة حدود متعاقبة ثم نطرح يجب أن ينتج عدد ثابت .

مثال

أيُّ المتتاليات الآتية حسابية :

A	$v_n = n^2 + 1$	B	$v_n = n^3 - 1$	C	$v_n = \frac{2n+1}{n^2}$	D	$u_n = 3n + 1$

قواعد المتتالية الحسابية	قواعد المتتالية الهندسية
• $S = (\text{عدد الحدود}) \times \frac{\text{آخر حدّ} + \text{أول حدّ}}{2}$	• $S = (\text{الحد الأول}) \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$
• $u_\star - u_\heartsuit = (\star - \heartsuit)r$	• $\frac{u_\star}{u_\heartsuit} = q^{\star-\heartsuit}$
• قاعدة الحد الأوسط : $b = \frac{a+c}{2}$	• قاعدة الحد الأوسط : $b^2 = ac$

تطبيق امتحاني هام

لتكن المتتاليتين $(y_n)_{n\geq 0}$ ، $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$ ، $x_n = \frac{4n+5}{n+1}$ برهن أنهما متجاورتين .

الحـــل

دراسة اطراد المتتالية $(x_n)_{n\geq0}$:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{4(n+1)+5}{(n+1)+1}-\frac{4n+5}{n+1}$$

$$=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}<0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq0}$ متناقصة .

هام جداً : شروحات المكثفة على قناة التلغرام @faresjakal

دراسة اطراد المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$:

$$y_{n+1}-y_n=\frac{4(n+1)+1}{(n+1)+2}-\frac{4n+1}{n+2}$$

$$=\frac{7}{(n+3)(n+2)}>0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ متزايدة .

فارس جقل يشعر بحالة رائعة
آخر أيامك يا مشمش ..مشمش يعني بكالوريا 🙂😅😅

$$x_n-y_n=\frac{4n+5}{n+1}-\frac{4n+1}{n+2}$$

$$=\frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x_n-y_n)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}=0$$

إذاً المتتاليتان $(y_n)_{n\geq0}$ ، $(x_n)_{n\geq0}$ متجاورتان .

طلب إضافي : إن العنصر الراجع على ... U_n ...

1	D	2	C	3	B	4	A

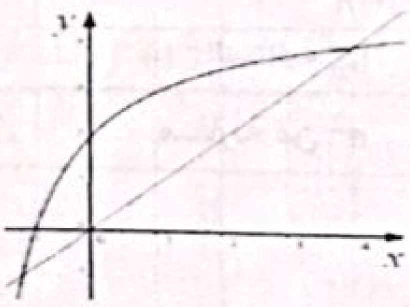
تطبيق هام

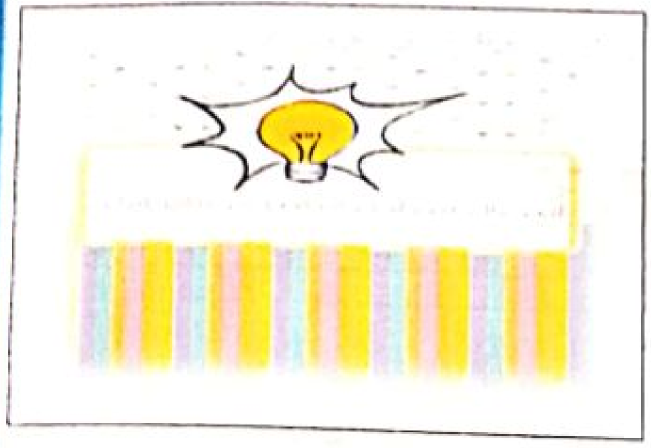
نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ كما يلي

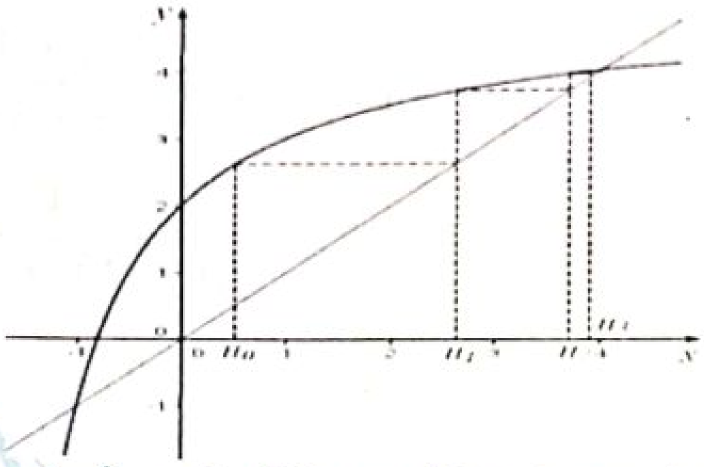
$$u_{n+1}=\frac{5u_n+4}{u_n+2}\quad,\quad u_0=\frac{1}{2}$$

1) باستعمال الرسم مثّل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_0, u_1, u_2, u_3

2) ضع تخميناً حول اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ وتقاربها ونهايتها







1. التمثيل:

2. نلاحظ أن الحدود المتتالية تزداد لذلك نخمن أن المتتالية متزايدة ومتقاربة من العدد 4 ونهايتها هو فاصلة نقطة التقاطع مع المنصف الأول أي نهايتها هي العدد 4

تمريـن

لتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

1) لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ لمعرفة بالعلاقة: $v_n = \frac{1}{U_n}$ فإن v_n :

A	متتالية حسابية أساسها 1	B	متتالية هندسية أساسها 2	C	متتالية حسابية أساسها 2	D	متتالية هندسية أساسها 1

2) إن عبارة v_n بدلالة n :

A	$v_n = 2n + 1$	B	$v_n = n + 1$	C	$v_n = 2^n + 1$	D	$v_n = 1^n$

3) عبارة u_n بدلالة n

A	$v_n = \frac{1}{2n+1}$	B	$v_n = \frac{1}{n+1}$	C	$v_n = \frac{1}{2^n+1}$	D	$v_n = \frac{1}{1^n}$

وظيفة : لتكن المتتالية $u_{n+1} = e(u_n)^{\frac{1}{2}}$ ، $u_0 = e^3$ و $(v_n)_{n\geq0}$متتالية معرفة بالشكل : $v_n = \ln(u_n) - 2$

1) إن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$:

A	متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$	B	متتالية هندسية أساسها 2	C	متتالية حسابية أساسها 2	D	متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

2) عبارة $(v_n)_{n\geq0}$ بدلالة n :

A	$v_n = 2n + 1$	B	$v_n = n + 1$	C	$v_n = 2^n$	D	$v_n = (\frac{1}{2})^n$

3) عبارة u_n بدلالة n

A	$u_n = e^{2n+3}$	B	$u_n = e^{(\frac{1}{2})^n+2}$	C	$u_n = e^{n+1}$	D	$u_n = e^{(2)^n+2}$

4) المتتالية u_n

A	متقاربة من e^2	B	متباعدة من ال$+\infty$	C	متباعدة من ال$-\infty$	D	متقاربة من e

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0959458194 مع الشحن لكافة المحافظات

قواعد حساب التوابع الأصلية

1) $f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax \;; a \in R$

مثال: $f(x) = 5 \Rightarrow F(x) = 5x$

2) $f(x) = g^n \Rightarrow F(x) = \dfrac{g^{n+1}}{(n+1)(g')}$

حيث g كثير حدود درجة أولى
و $n \in R\backslash\{-1\}$

مثال: $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{(4)(1)}$

مثال: $f(x) = (2x+5)^3 \Rightarrow F(x) = \frac{(2x+5)^4}{(4)(2)}$

3) $f(x) = \dfrac{g'}{g} \Rightarrow F(x) = \ln|g|$

$|g| = g \;; g > 0$
$|g| = -g \;; g < 0$

مثال:

$f(x) = \dfrac{5}{x-1} = 5\left(\dfrac{1}{x-1}\right) \;; I =]-\infty, 1[$

$\Rightarrow F(x) = 5\ln|x-1|$ *

$F(x) = 5\ln(-x+1)$ *

4) $f(x) = e^{ax+b} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} \;; a \neq 0$

مثال: $f(x) = e^{3x+1} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+1}$

5) $f(x) = g^n . g' \Rightarrow F(x) = \dfrac{g^{n+1}}{(n+1)}$

مثال:

$$f(x) = \frac{[\ln x]^2}{x} = \frac{1}{x}.(\ln x)^2$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^3}{3}$$

قاعدة هامة:

$f(x) = \dfrac{\star'}{\sqrt{\star}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{\star}$

6) $f(x) = \star' . e^{\star} \Rightarrow F(x) = e^{\star}$

مثال: $f(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2}(2x)e^{x^2}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

7) $f(x) = \sin(\star) \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{\star'}\cos(\star)$

8) $f(x) = \cos(\star) \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\star'}\sin(\star)$

9) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(\star)} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\star'}.\tan(\star)$

10) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(\star)} \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{\star'}(-\cot(\star))$

قاعدة هامة:

$sin^2(\star) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos(2\star)$

$cos^2(\star) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(2\star)$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984 مع الشحن لكافة المحافظات

التكامل بالتجزئة: لدينا عدة أشكال:

1) $\int_a^b x^n e^{\alpha x} dx$

2) $\int_a^b x^n \sin \alpha x \, dx$

3) $\int_a^b x^n \cos \alpha x \, dx$

نفرض
$x^n = u$
والباقي v'

4) $\int_a^b x^n \ln \alpha x \; dx$

$u = \ln \alpha x$
$v' = x^n$

القانون:~

$$\int_a^b u.v' = [u.v]_a^b - \int_a^b vu'$$

دورة 2021

$$I = \int_0^{\pi} x \sin x \; dx$$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

$$\int_0^{\pi} x\sin x \; dx = [-x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x \, dx$$

$$= [-x\cos x + \sin x]_0^{\pi} = \cdots$$

دورة 2013

$$I = \int_0^{\pi} x^2 . \cos x \; dx$$

$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

$v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$

$$I = [x^2 . \sin x]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

$$I' = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

$$I' = [-x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x \, dx$$

$$= [-x\cos x + \sin x]_0^{\pi}$$

التكامل المحدد :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

حيث F تابع أصلي للتابع f

خواص التكامل المحدد :

1. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
2. $\int_a^b kf = k\int_a^b f$ حيث $k \in R$
3. $\int_a^b f = -\int_b^a f$
4. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ حيث $c \in [a,b]$

$$\Rightarrow I = \left[x^2.\sin x - 2\left[-x\cos x + \sin x\right]\right]_0^{\pi} = F(\pi) - F(0) = \cdots$$

أهم خواص اللوغاريتم

1) $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$

2) $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

3) $e^{\ln x} = x$

4) $\ln a^n = n\ln a$

5) $\ln e^x = x\ln e = x$

مثال

$$I = \int_1^e x.\ln x\,dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \cdots$$

مثال

$$I = \int_1^e \ln x\,dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow [x\ln x]_1^e - \int_1^e x.\frac{1}{x}\,dx = [x\ln x - x]_1^e = \cdots$$

مثال

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

$$= \int_1^e \ln x.x^{-2}\,dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^{-2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x}$$

$$I = \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}.\frac{-1}{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{-1}{x}\ln x\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x}.\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left[\frac{-1}{x}\ln x\right]_1^e + \int_1^e x^{-2}\,dx$$

$$= \left[\frac{-1}{x}\ln x + \frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{-1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^e = F(e) - F(1)$$

ترتيب قوة التوابع :

1) التابع اللوغارتمي (الأقوى)
2) كثيرة الحدود.
3) المثلثية.
4) الاسية

نفرض التابع الأقوى u والأخر v'

حساب تكامل التوابع الكسرية: نفرق الكسر ثمّ نوجد التابع الأصلي

تفريق الكسور:

نميز شكلين : أ- عوامل المقام مختلفة من الدرجة الأولى: لدينا حالتين:

الحالة الأولى : درجة البسط أقل من درجة المقام عندها نفرق الكسر كما يلي:

$$f(x) = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$$

نحلل المقام للشكل: $(x-r_1)(x-r_2)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\text{البسط}}{(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{A}{(x-r_1)} + \frac{B}{(x-r_2)}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x-r_1)$

ولحساب B نضرب الطرفين بـ $(x-r_2)$

طريقة ثانية : نوحد المقامات ثم نطابق بين الطرفين ونحل المعادلات الناتجة

مثال

احسب التكامل: $\int \frac{x}{x^2-6x+8}\,dx$

نفرّق الكسر $\frac{x}{x^2-6x+8}$ إلى مجموع كسور جزئية

نحلل المقام: $x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{x}{(x-4)(x-2)} = \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x-2)}}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x-4)$ ثم نجعل x تسعى الى 4

$$\frac{x}{x-2} = A + \frac{B(x-4)}{x-2}$$

نجعل x تسعى إلى 4

$$\Rightarrow A = \frac{4}{4-2} \Rightarrow A = 2$$

طريقة ثانية : نوحد المقامات فنجد :

$$\frac{x}{(x-4)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-4B}{(x-4)(x-2)}$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد :

$A+B=1 \dots ①$

$-2A-4B=0 \dots ②$

بالحل المشترك نجد :

$B=-1$ و $A=2$

نطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984 مع الشحن لكافة المحافظات

لحساب B نضرب الطرفين بـ $(x-2)$ ثم نجعل x تسعى إلى 2

$$\Rightarrow \quad B=\frac{2}{2-4} \qquad \Rightarrow B=-1$$

ناتج التفريق للكسر هو :

$$\frac{2}{x-4}+\frac{-1}{x-2}$$

نحسب التكامل كمايلي :

$$\int_0^1 \frac{2}{x-4}\,dx+\int_0^1 \frac{-1}{x-2}\,dx$$
$$=\left[2\ln(-x+4)-\ln(x-2)\right]_0^1=F(1)-F(0)$$

مثــال

احسب التكامل :

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$$

نحلل المقام لكي نفرق الكسر:

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$
$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

لحساب A نضرب الطرفين بـ $(x+1)$ ثم نجعل x تسعى إلى (1-)

$$\Rightarrow A=\frac{-1}{1} \quad \Rightarrow A=-1$$

لحسابB نضرب الطرفين بـ $(x+2)$ ثم نجعل x تسعى إلى (2-)

$$\Rightarrow \frac{-3}{-1}=B \qquad \Rightarrow B=3$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x^2+3x+2}=\frac{-1}{x+1}+\frac{3}{x+2}$$

$$I=\int_0^1 \frac{-1}{x+1}\,dx+\int_0^1 \frac{3}{x+2}\,dx \quad =\left[-\ln|x+1|+3\ln|x+2|\right]_0^1= \;\ldots.$$

الحالة الثانية : إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام ونعود للحالة الأولى

ب- عوامل المقام درجة أولى مكررة مثل $(x+1)^2$ فإننا نفرق الكسر كما يلي

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}$$ ثم نطابق بين الطرفين

تمرين هام

احسب ما يلي : $\int_0^{\ln 3} e^x(1-e^x)^5\,dx$

$$= -\int_0^{\ln 3} -e^x(1-e^x)^5\,dx$$

$$= -\left[\frac{(1-e^x)^6}{6}\right]_0^{\ln 3} = -\frac{32}{3}$$

أهم أنماط المعادلات و المتراجحات في الكتابي

السؤال الأول: حل في R المعادلة : $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0 \qquad D = R$

الحل: نلاحظ أن : $9^x = 3^{2x}$

$3^{x+1} = 3.3^x$

لذا نفرض $t = 3^x$ عندئذ : $3^{2x} - 3.3^x + 2 = 0$

$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$

أما : $t_1 = 1 \Rightarrow 3^{x_1} = 1 \Rightarrow \ln(3^{x_1}) = \ln 1 \Rightarrow x_1.\ln 3 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$ مقبول

أو : $t_2 = 2 \Rightarrow 3^{x_2} = 2 \Rightarrow \ln(3^{x_2}) = \ln 2 \Rightarrow x_2.\ln 3 = \ln 2$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{\ln 2}{\ln 3}}$ مقبول

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة (نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل) على الفيس بوك

للأتمتة : ممكن تعويض الخيارات (المساواة صحيحة)

السؤال الثاني : أثبت أن $\ln x \le x - 1$ أيا كان $x > 0$ باختيار $x = e^{1/2}$, $x = e^{-1/3}$ احصر e.

الحل: المتراجحة المعطاة تكافئ : $\ln x - x + 1 \le 0$

لنأخذ التابع f المعرف والاشتقاقي على R^{+*} وفق: $f(x) = \ln x - x + 1$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \qquad f(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ من الجدول : أيا تكن $x > 0$ فإن : $f(x) \le f(1) = 0$

$\ln x - x + 1 \le 0 \Rightarrow \boxed{\ln x \le x - 1}$

حصر العدد e: نعوض أ... في المتراجحة

$\ln e^{\frac{1}{3}} \le e^{\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \le e^{\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow \frac{4}{3} \le e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{\frac{64}{27} \le e}$

$\ln e^{\frac{-1}{3}} \le e^{\frac{-1}{3}} - 1 \Rightarrow \frac{-1}{3} \le e^{\frac{-1}{3}} - 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \le e^{\frac{-1}{3}}$

$\Rightarrow \frac{8}{27} \le \frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{\frac{27}{8} \ge e} \qquad \Rightarrow \frac{64}{27} \le e \le \frac{27}{8}$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984مع الشحن لكافة المحافظات

السؤال الثالث : حل في C المعادلة : $z^2-(1+2i)z+3+3i=0$

الحل: بالإتمام لمربع كامل :

$$z^2-(1+2i)z+\left(\frac{1+2i}{2}\right)^2-\left(\frac{1+2i}{2}\right)^2+3+3i=0$$

$$\Rightarrow\left(z-\frac{1+2i}{2}\right)^2=-\frac{15}{4}-2i$$

$$\Rightarrow\left(z-\frac{1+2i}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(-15-8i)$$

لنفرض أن : $\omega=a+bi$ الجذر التربيعي لـ $-15-8i$ عندئذ:

$$\omega^2=(a^2-b^2+2abi)=-15-8i$$

$$\left.\begin{array}{l}a^2+b^2=\sqrt{225+64}=\sqrt{289}=17\\ a^2-b^2=-15\\ a.b=\dfrac{-8}{2}=-4\end{array}\right\}\Rightarrow 2a^2=2$$

$$a^2=1\Rightarrow\begin{cases}a=1\Rightarrow b=-4\\ a=-1\Rightarrow b=4\end{cases}\Rightarrow \omega_1=1-4i$$

$$\omega_2=-1+4i$$

$$\Rightarrow z_1-\frac{1+2i}{2}=\frac{1-4i}{2}\Rightarrow z_1=\frac{1-4i+1+2i}{2}$$

$$\Rightarrow\boxed{z_1=1-i}$$

$$z_2-\frac{1+2i}{2}=\frac{-1+4i}{2}\Rightarrow z_2=\frac{-1+4i+1+2i}{2}$$

$$\Rightarrow\boxed{z_2=3i}$$

السؤال الرابع : أثبت أنه أيا كانت x من $]-1.+\infty[$ كان:

$$\frac{x}{1+x}\le\ln(x+1)$$

الحل: حل المتراجحة يكافيء:

$$\ln(x+1)-\frac{x}{1+x}\ge 0$$

نفرض التابع: $f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{1+x}$ المعرف والاشتقاقي على $]-1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{x}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=0$$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

نلاحظ من الجدول ان $f(0)=0$ قيمة حدية صغرى.

أيا تكن $x\epsilon]-1,+\infty[$ فإن $0=f(0)\le f(x)$ ومنه

$$\frac{x}{x+1}\le\ln(x+1)$$

وبالتالي: $0 \le \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$

السؤال الخامس: أثبت أن : $(1+\sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$

ثمّ حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$$

الحل: نلاحظ أن أمثال المعادلة حقيقية عندئذ نطبق طريقة المميز حيث :

$$a = 1 \ , b = -2(1-\sqrt{3}) \ , c = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-2(1-\sqrt{3})\right)^2 - 4(1)(8)$$

$$= 4(1 - 2\sqrt{3} + 3) - 32 = 4(4 - 2\sqrt{3}) - 32$$

$$= 16 - 8\sqrt{3} - 32 = -16 - 8\sqrt{3} = -4(4 + 2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \Delta = 4i^2(1+\sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2i(1+\sqrt{3})$$

$$z_1 = \frac{2(1-\sqrt{3}) + 2i(1+\sqrt{3})}{2} \Rightarrow \boxed{z_1 = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})}$$

$$z_2 = \frac{2(1-\sqrt{3}) - 2i(1+\sqrt{3})}{2} \Rightarrow \boxed{z_2 = (1-\sqrt{3}) - i(1+\sqrt{3})}$$

السؤال السادس: حل المعادلة $4^x = 5^{x+1}$

الحل: نأخذ لوغاريتم لطرفي المعادلة فنجد: $\ln(4^x) = \ln(5^{x+1})$

(خواص ln) $x.\ln 4 = (x+1)\ln 5$

$$x.\ln 4 - x.\ln 5 = \ln 5$$

$$\Rightarrow x(\ln 4 - \ln 5) = \ln 5 \quad \Rightarrow \boxed{x = \frac{\ln 5}{\ln 4 - \ln 5}}$$


مركز أونلاين التعليمي يشعر بالأمل مع فارس جقل

#بكالوريا_تاسع_طلابنا_الغوالي
بعرف انكن تعبانين كتير وبعرف انكن مضغوطين كتير ..وبعرف انكن خايفين كتير..
بس بعرف انكن كفان قدها وقدود
اوثقوا بأنفسكن و توكلوا عالله واعرفوا انو ربنا مارح يضيع تعبكن
اعرفوا ان نحن اساتذتكن وأهاليكن عم ندعيلكن و نحلم بنجاحكن و نحن جنبكن مارح نتخلا عنكن لاخر لحظه
صدقوني هالتعب وهالجهد بعدها رح ترتاحوا وتعيشوا مستقبلكن الزاهر
الوقت كافي جدا صدقوني و يلي ما ملش بيقدر يلحق بس نظموا وقتكن و كثفوا جهودكن

محبكم أ. فارس جقل

السؤال السابع: حل في C المعادلة : $z^2 = 1 + i2\sqrt{2}$

الحل: نلاحظ أن : $|1 + i2\sqrt{2}| = \sqrt{1+8} = 3$

نفرض $Z = a + ib$ عندئذ : $2ab = 2\sqrt{2} \ldots\ldots$ ①

$a^2 - b^2 = 1 \ldots\ldots$ ②

$a^2 + b^2 = 3 \ldots\ldots$ ③

نجمع ② مع ③ نجد : $2a^2 = 4$ ومنه $a^2 = 2$:

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow z = \sqrt{2} + i \\ a = -\sqrt{2} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow z = -\sqrt{2} - i \end{cases}$$

السؤال الثامن : حل في R المعادلة الآتية: $\ln(x-1) = \ln x + \ln(x+1) -$

الحل : شرط الحل: $x > 1$

$$\ln x = \ln(x-1) + \ln(x+1)$$

$$\ln x = \ln(x-1)(x+1) \Rightarrow \ln x = \ln(x^2-1)$$

$$x = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

مقبول $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ $\qquad$ $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984مع الشحن لكافة المحافظات

السؤال التاسع: عين العددين z_2 , z_1 حيث:

$$2z_1 - z_2 = -3$$
$$2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3 + i2\sqrt{3}$$

الحل: نأخذ مرافق المعادلة الأولى ثم نجمع المعادلتين كما يلي :

$$\left.\begin{matrix} 2\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = -3 \\ 2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3 + i2\sqrt{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4\bar{z}_1 = -6 + i2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \ \bar{z}_1 = \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \ \Rightarrow \boxed{z_1 = \frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = -i\sqrt{3}}$$

السؤال العاشر: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$e^x - \frac{1}{e} e^y = 1$$
$$2e^x + e^y = 4 + e$$

الحل: $D = R$ نفرض : $a = e^x$, $b = e^y$ عندئذ :

$$\begin{cases} a - \frac{1}{e} b = 1 \ldots\ldots\ldots ① \\ 2a + b = 4 + e \ldots\ldots ② \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأولى بـ (-2) ونجمع :

$$\begin{cases} -2a + \frac{2}{e} b = -2 \\ 2a + b = 4 + e \end{cases} \Leftarrow \text{نجمع} \ \left(\frac{2}{e} + 1\right) b = 2 + e \Leftarrow \boxed{b = e}$$

نعوض في ① فنجد $a = 2$

ومنه : $e^y = e \Leftarrow \boxed{y = 1}$ بالمثل $e^x = 2 \Leftarrow \boxed{x = ln2}$

السؤال الحادي عشر : حل المعادلة التفاضلية : $2y' + y = 1$ ثم عيّن حلها الذي يحقق $f(-1) = 2$

الحل: $2y' + y = 1 \ \Rightarrow \ y' = \frac{-1}{2} y + \frac{1}{2}$

لدينا معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ حيث:

$$b = \frac{1}{2} \ , a = \frac{-1}{2}$$

ومجموعة حلولها من الشكل : $ke^{ax} - \frac{b}{a}$ وبالتالي الحل العام هو :

$$y = ke^{\frac{-1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}} \ \Rightarrow \ y = ke^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

لحساب قيمة k نعوض الشرط:

$$2 = ke^{\frac{-1}{2}(-1)} + 1 \ \Rightarrow \ 1 = ke^{\frac{1}{2}} \ \Rightarrow k = e^{\frac{-1}{2}}$$

فـ حل المعادلة التفاضلية هو:

$$y = e^{\frac{-1}{2}} . e^{\frac{-1}{2}x} + 1$$

السؤال الثاني عشر : أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$2\ln x + \ln y = 7 \quad (1)$$
$$3\ln x - 5\ln y = 4 \quad (2)$$

الحل: شرط الحل $x > 0\ ,\ y > 0$ نفرض $\ln y = b\ ,\ln x = a$

$$2a + b = 7$$
$$3a - 5b = 4$$

نضرب المعادلة الأولى بـ 5 :

$$10a + 5b = 35$$
$$3a - 5b = 4$$

بالجمع :

$$13a = 39 \Rightarrow a = \frac{39}{13} = 3$$
$$a = 3 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$$

نعوض في (2)

$$3(3) - 5b = 4 \Rightarrow 9 - 5b = 4 \Rightarrow -5b = -5$$
$$b = 1 \Rightarrow \ln y = 1 \Rightarrow y = e$$

السؤال الثالث عشر: أوجد حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى : $y' + 2y = 0$ وميل المماس في النقطة التي فاصلتها 2- من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$.

الحل : ميل المماس $\frac{1}{2}$ في النقطة التي فاصلتها 2-

y'

بعلاقة المشتق (x)

$$y' = -2y$$
$$\Rightarrow \boxed{y = ke^{-2x}}$$

الشرط : نشتق :

$$y' = -2ke^{-2x}$$
$$f'(-2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = -2ke^{-2(-2)} \Rightarrow k = \frac{1}{-4e^4}$$

$\Leftarrow$ الحل هو :

$$y = \frac{1}{-4e^4} e^{-2x}$$

السؤال الرابع عشر: حل المعادلة الآتية:

$$e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$$

الحل : $D = R$

$$e^{3x}.e + 4e^{2x}.e - 5e^{x}.e = 0$$

$$ee^{x}(e^{2x} + 4e^{x} - 5) = 0$$

أما $ee^{x} = 0$ مستحيلة

أو $(e^{x} - 1)(e^{x} + 5) = 0$

$$e^{x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

$e^{x} + 5 = 0 \Rightarrow e^{x} = -5$ مستحيلة الحل

السؤال الخامس عشر: حل المتراجحة الآتية:

$$\frac{e^{x} - 1}{e^{2x} + 1} < \frac{e^{x} - 2}{e^{x} + 2}$$

الحل: $D = R$

$$(e^{x} - 1)(e^{x} + 2) < (e^{2x} + 1)(e^{x} - 2)$$

$$\Rightarrow e^{2x} + 2e^{x} - e^{x} - 2 < e^{3x} - 2e^{2x} + e^{x} - 2$$

$$\Rightarrow e^{3x} - 3e^{2x} > 0$$

$$e^{2x}(e^{x} - 3) > 0$$

ندرس : إشارة المقدار $e^{x} - 3$ فقط لأن $e^{2x} > 0$ أيا كان $x \in R$

$$e^{x} - 3 = 0 \Rightarrow e^{x} = 3 \Rightarrow x = \ln 3$$

ننظّم جدول فنجد حلول المتراجحة هي :

$$]\ln 3 \; , +\infty[$$

السؤال السادس عشر: حل المتراجحة الآتية:

$$\ln(x^2 + 3x) > \ln(2x + 2)$$

شرط الحل هو : $]-1 \; , +\infty[$ ومنه:

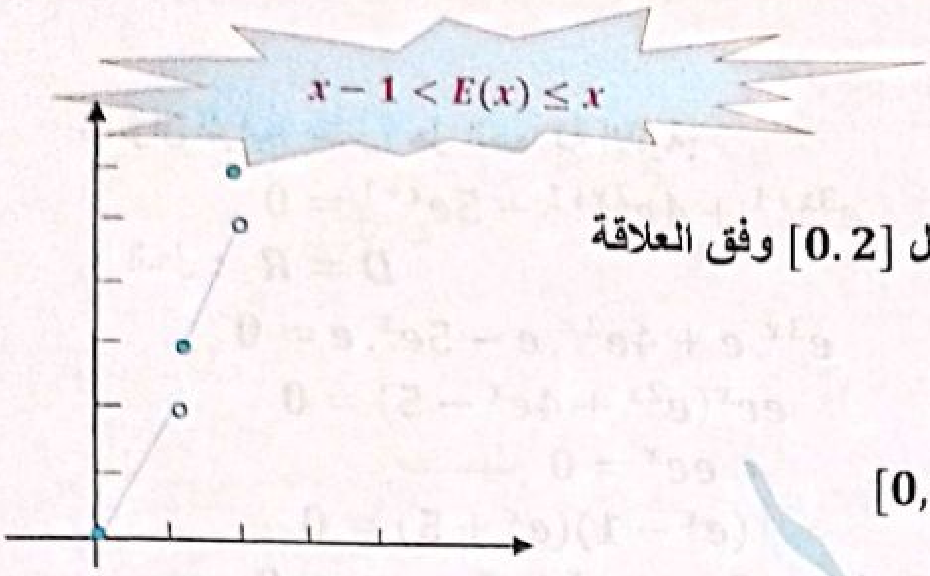
$$x^2 + 3x > 2x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) > 0$$

وهذه المتراجحة محققة عندما $x < -2$ أو $x > 1$ ....نقاطع مع شرط الحل $x > 1$

فنجد مجموعة الحلول هي : $]1 \; , +\infty[$

تابع الجزء الصحيح



مثال : ليكن لدينا التابع f المعرف على المجال $[0.2]$ وفق العلاقة

$f(x)=2x+\ E(x)$ والمطلوب :

1) اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$
2) ارسم الخط البياني C على المجال $[0,2]$
3) أوجد نهاية $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{E(x)}{x^2+1}$
4) ادرس استمرار f عندما $x=1$ و هل f مستمر على $[0.2]$

الحل:

$$① \ f(x)=\begin{cases}2x & ;[0,1[\\ 2x+1 & ;[1,2[\\ 2(2)+2=6 & ;x=2\end{cases}$$

$$③ \ x-1<E(x)\le x$$

$$\frac{x-1}{x^2+1}<\frac{E(x)}{x^2+1}\le\frac{x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\frac{E(x)}{x^2+1}=0$$

④ $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\ =2\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\ =3$ وبالتالي f غير مستمر عند 1 فهو غير مستمر على المجال $[0.2]$

5) نعرّف تابع $g(x)=2x+\frac{E(x)}{x^2+1}$

أثبت أن $y=2x$ مقارب مائل في جوار ∞

الحل: $g(x)-y_\Delta=\frac{E(x)}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)-y_\Delta=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{E(x)}{x^2+1}=0$ فهو مقارب مائل

x في غاية الكبــر

مثال : ليكن التابع $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$ المعرّف على $R\backslash\{+1\}$

أوجد نهاية f عند $+\infty$ ثم أعط عدد حقيقي A يحقق $x>A$ فإن : $f(x)\in]2.9\,,3.1[$

الحل : $|f(x)-l|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x-1}=3=l \quad , \quad \varepsilon=3-2.9=0.1$

نعوض بالقانون : $|f(x)-3|<0.1$

$$\Rightarrow\left|\frac{3x+2}{x-1}-3\right|<\frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{5}{x-1}\right|<\frac{1}{10}\ \Rightarrow\frac{5}{x-1}<\frac{1}{10}\ \Rightarrow\ \ x>\underbrace{51}_{A}$$

لأن x كبيرة

ملاحظة هامة جداً : نفس السؤال يأتي بالمتتاليات ولكن n عوضاً عن x

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984 مع الشحن لكافة المحافظات

و u_n عوضاً عن $f(x)$

وظيفـــة

التمرين الأول : ليكن التابع f المعرف على $I =]e^{-1}, +\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{2+lnx}{1+lnx}$:

1. جد $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ثم أعط عددا حقيقيا A يحقق الشرط : إذا كان $x > A$ ، كان $f(x)$ في المجال $]0.9, 1.1[$
2. احسب $\lim_{x\to\infty} f(f(x))$

التمرين الثاني : لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$

عين عدد طبيعي n يحقق الشرط إذا كان $n > n_0$ فإن $u_n \in]2.99 , 3.01[$

استنتاج خط بياني C' لتابع جديد g بدلالة الخط البياني C لتابع f معطى مسبقاً

أولاً : نرسم الخط البياني C للتابع القديم f

ثانياً : نكتب التابع الجديد g بدلالة التابع القديم f

ثالثاً : نستنتج العلاقة بين C' و C حسب ما يلي :

$g(x) = -f(x)$	C' هو نظير C بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x) = f(-x)$	C' هو نظير C بالنسبة لمحور التراتيب
$g(x) = -f(-x)$	C' هو نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات
$g(x) = f(x) + b$	C' ينتج عن C بانسحاب شعاعه $(0, b)$
$g(x) = f(x+a)$	C' ينتج عن C بانسحاب شعاعه $(-a, 0)$
$g(x) = \|f(x)\|$	الجزء الأول من C': هو الجزء من C الواقع فوق محور الفواصل الجزء الثاني : هو نظير الجزء من C الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x) = f(\|x\|)$	الجزء الأول من C': هو الجزء من C الواقع على يمين محور التراتيب الجزء الثاني : هو نظير الجزء الأول بالنسبة لمحور التراتيب
$g(x) = f(x)$ حيث $D_g \subseteq D_f$	C' هو الجزء من C الواقع ضمن D_g
$g(x) = af(x)$	C' ينتج عن C بالتحويل النقطي $(x, y) \to (x, ay)$

الجدول من إعداد المدرس : واصف خضرة ♥

رابعاً : نرسم الخط البياني C' للتابع الجديد g

ملحق تدريبي ..الجزء الأول

المسألة الأولى :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على D.وفق : $f(x) = x + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

1) أوجد مجموعة تعريف التابع f ثم أوجد معادلة المقارب للخط C الموازي ل yy'

2) أوجد معادلة المستقيم المقارب للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط C مع Δ

المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = e^x - x$

1) أوجد معادلة المستقيم المقارب للخط C ثم ادرس وضع C بالنسبة إلى Δ

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها و بين ما له من قيم كبرى أو صغرى محليا

3) استنتج أن للمعادلة $x = e^x - 1$ جذرا وحيدا يطلب إيجاده

المسألة الثالثة :

ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ خطه البياني C أوجد كل مقارب للخط C يوازي احد المحورين الاحداثيين

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها وبين ما له من قيم كبرى محليا و ماله من قيم صغرى محليا

2) برهن أن التابع f فردي واستنتج الصفة التناظرية ثم ارسم الخط C.

3) انطلاقاً من C ارسم الخط البياني للتابع g المعطى بالعلاقة : $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

4) احسب مساحة السطح المحصور بالخط C والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

المسألة الرابعة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $R\backslash\{-1\}$ وفق : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

أوجد $f'(x)$ واستنتج مشتق التابع $f(\ln x)$ ومشتق $g(x) = \frac{2\cos x}{\cos x + 1}$

المسألة الخامسة :

ماعدد حلول المعادلة $x^3 + x + 1 = 0$ في المجال $]-1, 0[$

المسألة السادسة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = (ax + b)e^x$

1) احسب قيمة كل من a و b لكي يكون للتابع قيمة حدية محليا 1- عند 0

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها وارسم C

3) احسب مساحة السطح المحدد ب C والمحور Ox والمستقيم $x = 1$ والمستقيم $x = 0$

المسألة السابعة :

لتكن المتتاليتان المعرفتان وفق : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, $t_n = -\frac{1}{n}$ أثبت أنّهما متجاورتان ثم عيّن نهايتهما المشتركة

المسألة الثامنة :

ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$

1) ادرس تغيرات التابع f وارسم خطه البياني C_f و مقارباته ثم أوجد معادلة المقارب المائل
2) أثبت أن النقطة $(0,0)$ مركز تناظر للخط البياني C_f بفرض أن مجموعة تعريفه $R\backslash\{0\}$.

المسألة التاسعة :

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{-x}{2}})$

1) أثبت أن التابع f زوجي واستنتج الصفة التناظرية للخط C
2) ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها
3) ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور xx' والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$
4) احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق دورة كاملة حول xx'

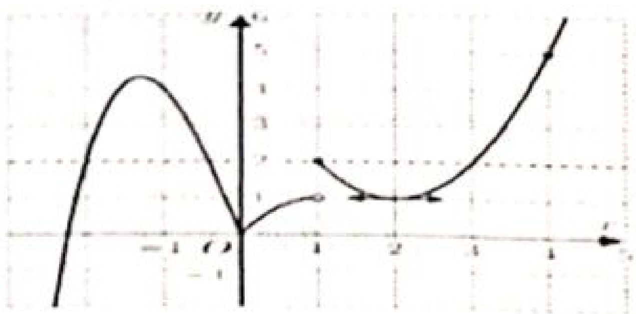
المسألة العاشرة :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{0\}$ وفق : $f(x) = \frac{ax+b}{x}$ وليكن المستقيم d الذي معادلته $y = x - \frac{1}{2}$

1) عين a, b إذا علمت أن المستقيم d يمس C في نقطة من محور xx'
2) ادرس تغيرات f : $f(x) = \frac{2x-1}{4x}$ المعرف على $R\backslash\{0\}$ ونظم جدولاً بها ثم أوجد م للخط C يوازي المحور yy' أو المحور xx'
3) ارسم كل مقارب للخط C ثم ارسم C
4) احسب مساحة السطح المحصور بين C و d و المستقيم $\Delta: x = 2$
5) أوجد معادلة مماس آخر ل C يوازي المماس d

النجاح لا ينتظر أحد ، بل يتطلب الكثير من الجهد والعمل الشاق وانتهاز الفرص

المسألة الحادية عشر : نجد جانباً الخط البياني للتابع f المعرف على R و المطلوب :



1. ماعدد حلول المعادلة $f(x) = 5$
2. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 5$
3. هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع علل ذلك
4. ماعدد القيم الحدية للتابع f
5. ماقيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها $x = 2$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

6. أيكون التابع f اشتقاقيا عند $x = 1$

المسألة الثانية عشر :

يكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$ و المطلوب :

1. عيّن العددين الحقيقيين a , b إذا علمت أن المماس للخط C في النقطة $A(1, 0)$ يوازي المستقيم d الذي معادلته $y = 3x$
2. من أجل $a = 4$, $b = -4$ أوجد معادلة المستقيم المقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

المسألة الثالثة عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \frac{2x}{e^x}$ و المطلوب :

1. جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها
3. في معلم متجانس ارسم الخط C
4. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C و محوري الاحداثيات و المستقيم $x = 1$
5. استنتج رسم الخط C_1 للتابع g المعرف وفق : $g(x) = 2xe^x$
6. أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية : $y' + y = 2e^{-x}$

المسألة الرابعة عشر :

احسب الأعداد : ① $\int_0^3 (2 - |2 - x|)dx$

② $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos 2x}\, dx$

③ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$

المسألة الخامسة عشر :

أولاً: ليكن التابع g المعرف على R وفق : $g(x) =$ [illegible]

ادرس اطراد التابع g و استنتج مجموعة حلول المتراجحة $g(x) > 0$

ثانياً : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : [illegible]

1. أثبت أن $f'(x) = \frac{1}{e^x} g(x)$
2. بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
3. أثبت أن المستقيم $\Delta : y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس الوضع النسبي
4. ارسم Δ وارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين C و المستقيم Δ و المستقيمين $x = 0$, $x = 1$

المسألة السادسة عشر :

ليكن C_f الخط البياني [illegible] $f(x) = x($[illegible]

1. أثبت أن $f(x)$ يكتب بالشكل $f(x) = 4(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})^2$
2. ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها

المسألة السابعة عشر :

ليكن C الخط البياني للتابع f ال[illegible] $f(x) =$ [illegible]

1. ادرس تغيرات التابع f و نظم جدولا بها واستنتج ما للخط C من مقاربات موازية للمحورين الاحداثيين و عيّن قيمته الحدية مبينا نوعها

2. ارسم ما وجدته من مستقيمات مقاربة ثم ارسم C
3. احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل و المستقيمين $x = \frac{1}{e}$, $x = \frac{1}{e^2}$

المسألة الثامنة عشر : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - ln(x)$ والمطلوب :

1. أوجد مجموعة تعريف التابع ثم أوجد كل مقارب للخط البياني C .
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الصغرى محلياً
3. في معلم متجانس ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم الخط البياني C
4. استنتج رسم الخط C' للتابع g المعرف وفق $g(x) = \frac{-1}{8}x^2 + ln(-x)$
5. باستعمال التقريب التآلفي المحلي احسب قيمة تقريبية للعدد $f(1.1)$

المسألة التاسعة عشر : ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = x + x(lnx)^2$ المعرف على $I =]0, +\infty[$

وليكن $g(x) = (ln(x) + 1)^2$ المطلوب :

1. أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$
2. أثبت $f'(x) = g(x)$
3. حل المعادلة $g(x) = 0$
4. نظم جدول بتغيرات f
5. اكتب معادلة المماس Δ في نقطة فاصلتها $x = \frac{1}{e}$ وارسم المماس Δ وارسم C

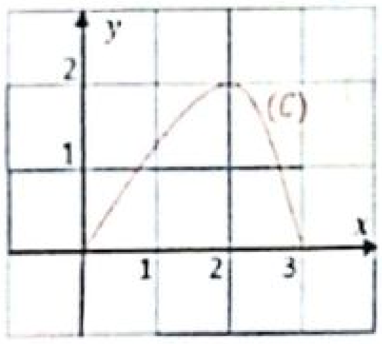
المسألة العشرون :ليكن C الخط البياني للتابع $f(x) = min(x^2, 2 - x)$ المعرف على $I = [0, 2]$ والمطلوب :

ارسم C ثمّ احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل

المسألة الحادية والعشرون : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x - E(x)$

1. اكتب$f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$على المجال $[0, 2[$
2. جد $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

المسألة الثانية والعشرون : في الشكل (C) هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0, 3]$



بالصيغة: $f(x) = x\sqrt{3 - x}$ ... عندما يدور C دورة كاملة حول محور الفواصل يولّد مجسماً دورانياً S

1) ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x, 0)$ في حالة $x \in]0, 3[$ ؟
2) عيّن $A(x)$، مساحة هذا المقطع بدلالة x، ثم استنتج V حجم المجسم S

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

الأشعة في الفراغ

خلاصة بحث الأشعة في الفراغ

1) لإثبات ثلاث نقاط على استقامة واحدة نطبق ما يلي:

- نثبت أن نقطة منها مركز أبعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين .
- نثبت أن شعاعين مرسومين منهما مرتبطان خطياً .

2) لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد نثبت ما يلي:

- ثلاث أشعة مرسومة منها مرتبطة خطياً .   نثبت أن نقطة منها مركز أبعاد لبقية النقاط

3) معادلة كرة مركزها (x_0 , y_0 , z_0) ونصف قطرها هي

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

4) معادلة كرة مركزها $O\ (0 , 0 , 0)$ ونصف قطرها هي

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

5) معادلة مخروط :

* رأسه O ومحوره $(o , \vec{\imath})$ وقاعدته دائرة مركزها $(h, 0 , 0)$ ونصف قطرها r هي :

$$y^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}x^2=0 \quad ; 0 \le x \le h$$

* رأسه O ومحوره $(o , \vec{\jmath})$ وقاعدته دائرة مركزها $(0, h , 0)$ ونصف قطرها r هي :

$$x^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}y^2=0 ; \quad 0 \le y \le h$$

* رأسه O ومحوره $(o , \vec{k})$ وقاعدته دائرة مركزها $(0,0 , h)$ ونصف قطرها r هي :

$$x^2+y^2-\frac{r^2}{h^2}z^2=0 \quad ; 0 \le z \le h$$

6) معادلة الأسطوانة :

* محورها $(o , \vec{\imath})$ ونصف قطرها r ومركزي قاعدتيهما $(a , 0 , 0)$, $(b ,0 ,0)$ هي :

$$y^2+z^2=r^2 : a \le x \le b$$

* محورها $(o , \vec{\jmath})$ ونصف قطرها r ومركزي قاعدتيهما $(0 , a , 0)$, $(0 ,b ,0)$ هي :

$$x^2+z^2=r^2 : a \le y \le b$$

* محورها $(o , \vec{k})$ ونصف قطرها r ومركزي قاعدتيهما , $(0,0 ,b)$

$$y^2+x^2=r^2 : a \le z \le b$$

7) إثبات توازي مستقيمين :

نثبت الارتباط الخطي لشعاع توجيه للمستقيم الأول مع شعاع توجيه للمستقيم الثاني

8) إثبات تقاطع مستقيمين :

1. نبرهن أن شعاع توجيه للمستقيم الأول غير مرتبط خطياً مع شعاع توجيه للمستقيم الثاني .
2. نبرهن أن المستقيمين يقعان في مستو واحد .

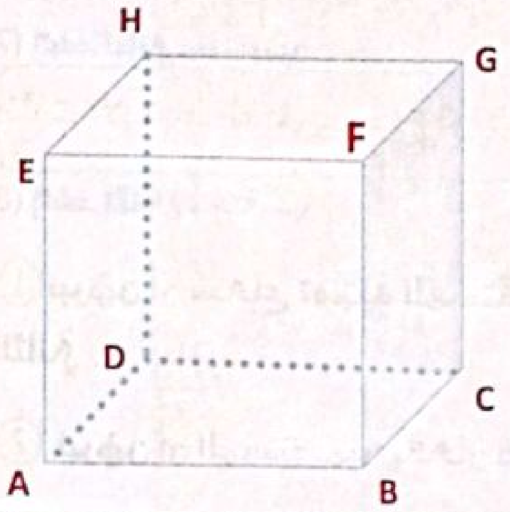
9) فائدة الارتباط الخطي لثلاثة أشعة :

1. إثبات انتماء اربع نقاط على مستو واحد .
2. إثبات توازي مستويين .
3. إثبات توازي مستقيم ومستو .
4. إثبات وقوع ثلاثة أشعة في مستوٍ واحد .

10) فائدة مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ :

1. إثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة .
2. إثبات وقوع نقاط في مستو واحد .
3. إثبات تقاطع مستقيمات .

إحداثيات المكعب في معلم متجانس في الفراغ



ABCDEFGH مكعب طول ضلعه $(*)$

لدينا معلم $\left(A, \frac{1}{*}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{*}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{*}\overrightarrow{AE}\right)$

$A(0,0,0)$

$B(*,0,0)$

$D(0,*,0)$

$E(0,0,*)$

$C(*,*,0)$

$F(*,0,*)$

$H(0,*,*)$

$G(*,*,*)$

فاصلة   ترتيب   راقم

نتائج:

1. كل نقاط المستوي الأرضي D , C , B , A راقمها (0)
2. كل نقاط المستوي الخلفي F , E , B , A ترتيبها (0)
3. كل نقاط المستوي اليساري H , E , D , A فاصلتها (0)
4. كل نقاط المستوي اليميني (المظلل) B , C , G , F فاصلتها $(*)$
5. كل نقاط المستوي العلوي H , G , F , E راقمها $(*)$
6. كل نقاط المستوي الأمامي G , H , C , D ترتيبها $(*)$

ملاحظات :

- يمكن ترميز المعلم السابق كما يلي $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{K})$ بحيث $\left(*\vec{i} = \overrightarrow{AB}, *\vec{j} = \overrightarrow{AD}, *\vec{K} = \overrightarrow{AE}\right)$
- إذا كان طول ضلع (حرف) المكعب يساوي (2) مثلاً ..فإننا نضع عوضاً عن $(*)$ في الإحداثيات السابقة العدد (2)
- إذا كان طول الضلع يساوي (2) نرمز للمعلم بالشكل $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ أو كما يلي :

$$(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{K}) \text{ حيث } \overrightarrow{AB} = 2\vec{i}, \quad \overrightarrow{AD} = 2\vec{j}, \quad \overrightarrow{AE} = 2\vec{k}$$

الارتباط الخطي لشعاعين

شرطه هو: $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ حيث λ عدد حقيقي

$$\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$$
$$\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$$

$\vec{v}, \vec{u}$ مرتبطان خطياً $\Leftrightarrow$ المركبات متناسبة.

نتـــائـــج:

1- الارتباط الخطي لشعاعين : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$

يعني أن المستقيمان (CD) و (AB) متوازيان

2- الشعاعان $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً فالنقاط A,B,C على استقامة واحدة.

مثال امتحاني: ليكن لدينا النقاط.:

$A(2, 1, 0), B(3, 2, -1), C(0, 2, -5)$

هل النقاط C, B, A على استقامة واحدة؟

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-2, 1, -5)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{-2} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-5}$$
$$\Rightarrow \frac{-1}{2} \neq 1$$

فالشعاعان غير مرتبطان خطياً فالنقاط ليست على استقامة واحدة وهي تعين مستو

نتيجة هامة:

3 نقاط ليست على استقامة واحدة .. تعين مستو.

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة :

لإثبات أن ثلاثة اشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ مرتبطة خطياً نثبت أنه يوجد

عددان حقيقيان α , β يحققان العلاقة: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

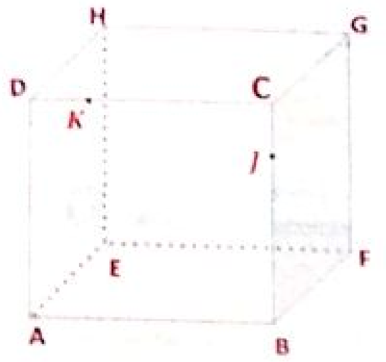
هام : مراجعة النماذج الشاملة لمركز أونلاين

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

تمرين امتحاني ☐

$ABCDEFGH$ مكعب حيث K نقطة من CD تحقق: $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$، والنقطة $J \in BC$ بحيث: $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

المطلوب: 1) جد إحداثيات النقط H, E, J, K, G في المعلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$.



2) أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطياً.

3) أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً.

4) استنتج أن المستقيم HK يوازي (EGJ).

الحل:

1) $J\left(1,0,\frac{3}{4}\right) \qquad H(0,1,1)$

$K\left(\frac{1}{4},0,1\right) \qquad E(0,1,0) \qquad G(1,1,1)$

2) $\overrightarrow{EG}(1,0,1)$, $\overrightarrow{EJ}\left(1,-1,\frac{3}{4}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{0}{-1} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$1 \neq 0$$

المركبات غير متناسبة فالشعاعان غير مرتبطان خطياً.

*طريقة لإيجاد حداثيات K: نفرض $K(x, y, z)$

$$\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

$$(x-0, y-0, Z-1)=\frac{1}{4}(1,0,0)$$

$$(x, y, Z-1)=\left(\frac{1}{4},0,0\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} \\ y &= 0 \\ Z-1 &= 0 \Rightarrow Z=1 \end{aligned}\right\} K\left(\frac{1}{4},0,1\right)$$

3) $\overrightarrow{HK} = \propto \overrightarrow{EJ} + \beta\overrightarrow{EG}$

ونحسب $\beta, \propto$

$$\left(\frac{1}{4},-1,0\right) = \propto\left(1,-1,\frac{3}{4}\right)+\beta(1,0,1)$$

$$\left(\frac{1}{4},-1,0\right) = \left(\propto,-\propto,\frac{3}{4}\propto\right)+(\beta,0,\beta)$$

$$\left(\frac{1}{4},-1,0\right) = \left(\propto+\beta,-\propto+0,\frac{3}{4}\propto+\beta\right)$$

$$\propto+\beta=\frac{1}{4} \quad ①$$

$$-\propto=-1 \Rightarrow \propto=1 \quad ②$$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

$\frac{3}{4}\propto+\beta=0$ ③

من العلاقة ② نعوض في ① :

$1+\beta=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \beta=-\frac{3}{4}$

نعوض في ③

$\frac{3}{4}(1)+\left(\frac{-3}{4}\right)=0$

محقق 0=0

$\overrightarrow{HK}=1\overrightarrow{EJ}-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}$

فالاشعة الثلاثة مرتبطة خطياً.

4) من الطلب السابق: لدينا الاشعة $\overrightarrow{HK}$و$\overrightarrow{EJ}$و$\overrightarrow{EG}$ مرتبطة خطياً ومنه المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGj)

أي: (HK) \\ (EGj)

معادلة المستوي

المستوي

ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ — نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

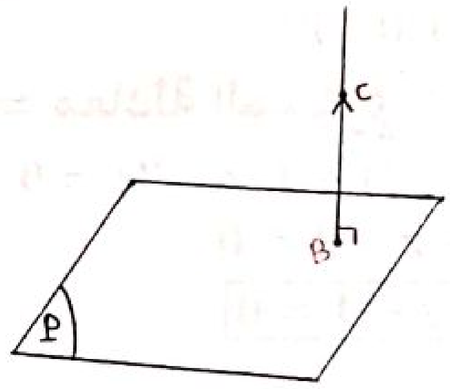
النقطة

حالات معادلة المستوي

1) معادلة مستو يمر من نقطة و ناظم معلوم (يعامد شعاع معلوم):

نعوض مباشرة في معادلة المستوي

مثال: عيّن مستو يمر بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{BC}$ ناظماً : حيث $C(-1,2,1)$, $B(+2,-1,0)$



$$\vec{n}=\overrightarrow{BC}=(-3,3,1)$$

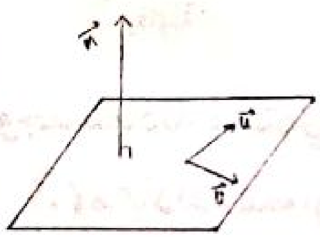
$$\Rightarrow a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$$

$$\Rightarrow -3(x-2)+3(y+1)+1(z-0)=0$$

$$\Rightarrow 3x+3y+6+3+z=0$$

$$\Rightarrow \boxed{P:-3x+3y+z+9=0}$$

2) معادلة مستوي يمر من ثلاث نقاط أو (علم شعاعا توجيه $\vec{v},\vec{u}$ ويمر بنقطة) :



1) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم.

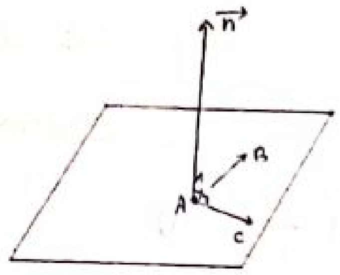
2) $\vec{n}\perp\vec{u} \Leftarrow ax_1+by_1+z_1=0$ *

3) $\vec{n}\perp\vec{v} \Leftarrow ax_2+by_2+cz_2=0$ **

4) نفرض عدد= c ونعوض في *و** ونحل حل مشترك فنحسب a,b ثم نعوض في معادلة المستوي .

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

مثــال



ليكن لدينا النقاط التالية:

$A(1,2,3)\ ,B(2,1,2)\ ,C(3,3,1)$

المطلوب:

1) اثبت أن النقاط C ,B,A تعين مستو.
2) عين شعاع ناظم على المستوي (ABC).
3) أكتب معادلة للمستوي (ABC).

الحل: $\overrightarrow{AB}=(1,-1,-1)$

$\overrightarrow{AC}=(2,1,-2)$

$\frac{1}{2}=\frac{-1}{1}=\frac{-1}{-2}\quad\Rightarrow\frac{1}{2}\neq-1$

المركبات غير متناسبة فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً فالنقاط C ,B,A ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستو .

2-شعاعا توجيه المستوي هما:

$\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)\ ,\overrightarrow{AC}(2,1,-2)$

نفرض الناظم $\vec{n}\ (a,b,c)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Rightarrow\boxed{a-b-c=0}\ *$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$

$\boxed{2a+b-2c=0}\ **$

نفرض $c=1 \Leftarrow$ نعوض في * :

$\boxed{a-b-1=0}\ *$

$\boxed{2a+b-2=0}\ **$

بالجمع نجد : $3a-3=0\Rightarrow 3a=3$ فإن $a=1$

نعوض في * : $1-b-1=0\quad\Rightarrow b=0$

$\Rightarrow\vec{n}=(1,0,1)$

$\Leftarrow$ **معادلة المستوي :**

$\Rightarrow 1(x-1)+0(y-2)+1(z-3)=0$

$\Rightarrow x-1+z-3=0$

$\Rightarrow\boxed{P: x+z-4=0}$

هام جداً :

راجع نوطة النماذج الشاملة النهائية لمركز أونلاين يمكن طلبها من مكتبة الأمل 0959458194

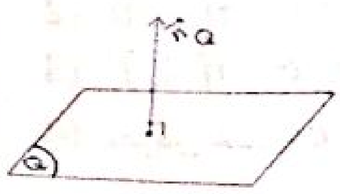
ملاحظة هامة :

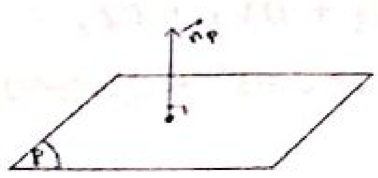
لإيجاد البعد بين مستويين متوازيين نوجد نقطة من أحدهما ثم نحسب بعدها عن المستوي الآخر

وظيفة

أوجد معادلة مستوي مار بالنقطة $A(2,0,1)$ ويقبل $\vec{u}(1,0,2)$ و$\vec{v}(0,-2,1)$ شعاعي توجيه لها

3) معادلة مستوي يمر من نقطة ويوازي مستو معلوم :





نعتبر ناظم المستوي المعلوم هو ناظم المستوي المطلوب
لأن (المستويان المتوازيان ناظماهما مرتبطان خطيا)
ثم نعوض النقطة والناظم في معادلة المستوي ثم ننشر

مثال

اكتب معادلة المستوي P المار بالنقطة $A(1,-1,2)$ ويوازي المستوي $Q: 2x+y+8z-4=0$

الحل : لدينا $P \parallel Q$ اذا $\vec{n}_Q = \vec{n}_p = (2,1,8)$

$$\Rightarrow 2(x-1)+(y+1)+8(z-2)=0$$

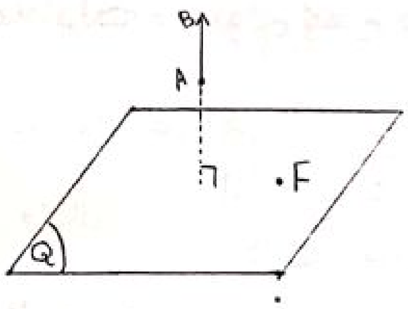
$$\Rightarrow P: 2x+y+8z-17=0$$

4) معادلة مستوي P يمر من A ويعامد مستقيم (BC) :

نعتبر شعاع توجيه المستقيم هو الناظم أي : $\overrightarrow{BC}=\vec{n}$ ثم نعوض النقطة والناظم في معادلة المستوي

مثال

اكتب معادلة مستوي Q يمر بالنقطة $F(1,-2,4)$ و يعامد المستقيم (AB) حيث $A(3,0,-3)$ و $B(-1,-3,2)$



الحل : $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(-4,-3,5)$

$$\Rightarrow Q: -4(x-1)-3(y+2)+5(z-4)=0$$

$$\Rightarrow Q: -4x-3y+5z-22=0$$

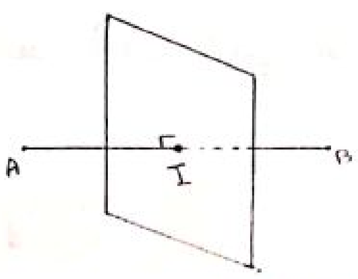
5) معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$:

نعتبر الناظم $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$ و النقطة هي I منتصف القطعة $[AB]$

مثال

أوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ حيث : $A(1,1,2)$ و $B(3,-1,4)$

الحل : $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\,(x_B-x_A\,,y_B-y_A\,,z_B-z_A) \quad \Rightarrow \vec{n}\,(2,-2,2)$



النقطة التي يمر منها المستوي هي I منتصف $[AB]$

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_B+z_A}{2}\right) \Rightarrow I(2,0,3)$$

$$2(x-2)-2(y-0)+2(z-3)=0$$

$$\Rightarrow 2x-2y+2z-10=0 \Rightarrow x-y+z-5=0$$

6) معادلة مستوي يمر من نقطة و يعامد مستويين P, Q :

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي المطلوب فيكون: $\vec{n}\perp\vec{n_p}$ و $\vec{n}\perp\vec{n_Q}$ فنعود للحالة (2)

مثال

أوجد معادلة المستوي R المار بالنقطة $A(1,1,3)$ والذي يعامد المستويين Q, P حيث:

$Q: x-y+2z+3=0 \quad , \quad P: 2x+z-1=0$

الحل : نفرض $\overrightarrow{n_R}(a,b,c)$ فيكون :

$$\overrightarrow{n_R}\perp\overrightarrow{n_P} \Rightarrow \overrightarrow{n_R}\cdot\overrightarrow{n_P}=0 \Rightarrow 2a+c=0 \quad ①$$

$$\overrightarrow{n_R}\perp\overrightarrow{n_Q} \Rightarrow \overrightarrow{n_R}\cdot\overrightarrow{n_Q}=0 \Rightarrow a-b+2c=0 \quad ②$$

بفرض $c=1$ نحل المعادلتين فينتج $a=\frac{-1}{2}$ و $b=\frac{3}{2}$

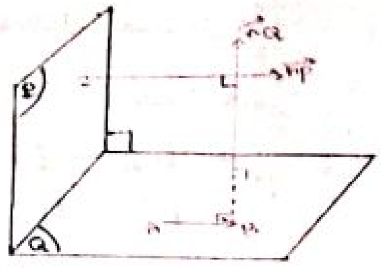
$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0 \Rightarrow R: -x+3y+2z-7=0$$

7) معادلة مستوي يمر من نقطتين ويعامد مستوي :

نفرض ناظم يعامد ناظم المستوي المعطى فتنتج علاقة و يعامد الشعاع المار من النقطتين فتنتج علاقة ثانية فنعود للحالة(2)

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

مثال اكتب معادلة المستوي Q المار بالنقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$ عموديا على المستوي P حيث : $P: 2x-3y+z-5=0$



الحل : $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$ و $\overrightarrow{n_P}(2,-3,1)$

نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ فيكون :

$$n_Q \perp n_P \Rightarrow \overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{n_P}=0 \Rightarrow 2a-3b+c=0 \quad ②$$

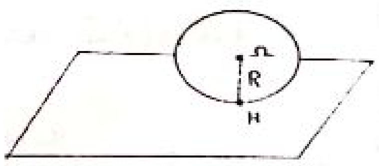
$$\overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow -3a+4b+5c=0 \quad ①$$

بفرض $c=1$ فيكون $a=19$, $b=13$ $Q: 19x+13y+z-25=0 \Leftarrow$

8) معادلة مستوي يمس كرة في نقطة منها :

نعتبرالناظم هو الشعاع المار من نقطة التماس ومركز الكرة والنقطة هي نفسها نقطة التماس

مثال لتكن لدينا الكرة S التي معادلتها $S: x^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$
اكتب معادلة المستوي المماس للكرة في النقطة $A(1,1,0)$



الحل : مركز الكرة $\Omega(0,-2,-1)$, ونقطة التماس $A(1,1,0)$

$$\overrightarrow{\Omega A}\,(1,3,1)$$

$$\Rightarrow (x-1)+3(y-1)+(z-0)=0 \Rightarrow x+3y+z-4=0$$

9) معادلة مستوي يمر من أربع نقاط A, B, C, D :

نوجد معادلة المستوي المار من النقاط A, B, C ثم نبرهن أن D تنتمي للمستوي (نعوض)

الكرة

هي مجموعة نقاط الفراغ التي تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة

النقطة الثابتة : مركز الكرة البعد الثابت : نصف القطر R

معادلة الكرة : $(x-x_{\text{المركز}})^2+(y-y_{\text{المركز}})^2+(z-z_{\text{المركز}})^2=R^2$

أشكال معادلة الكرة

1) كرة علم مركزها ونصف قطرها :

نعوض في المعادلة مباشرة دون فك الأقواس

مثال اكتب معادلة كرة مركزها $\Omega(1,0,-2)$ ونصف قطرها يساوي $R=\sqrt{3}$

الحل : نعوض في المعادلة : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$

$$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=3$$

2) كرة عُلِم مركزها وتمر بنقطة :

نحسب نصف القطر وهو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطة المعطاة و مركز الكرة

مثال اكتب معادلة كرة مركزها $\Omega(1,0,-2)$ وتمر بالنقطة $A(-2,1,1)$

الحل : $R=\Omega A=\sqrt{(-2-1)^2+(1-0)^2+(1+2)^2}$

$$R=\sqrt{9+1+9}$$

ومنه $R=\sqrt{19}$ نعوض في المعادلة : $(x-x_{\Omega})^2+(y-y_{\Omega})^2+(z-z_{\Omega})^2=R^2$

$$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=19$$

3) كرة علم طرفا قطرها :

نحسب نصف القطر ($R=\frac{\text{طول القطر}}{2}$) ونحسب احداثيات المركز من قانون احداثيات منتصف قطعة مستقيمة (منتصف طرفا القطر)

مثال اكتب معادلة كرة طرفا قطرها $A(2,1,1)$ و $B(1,0,-2)$

الحل :

$$R=\frac{BA}{2}=\frac{\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(1+2)^2}}{2}\Longrightarrow R=\frac{\sqrt{1+1+9}}{2}$$

ومنه $R=\frac{\sqrt{11}}{2}$ و احداثيات المركز Ω هي $(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2})$

نعوض في المعادلة : $(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{11}{4}$

هام جداً : لإثبات كرة تمس مستوي نثبت أن بعد مركز الكرة عن المستوي يساوي نصف القطر

4) كرة علم مركزها وتمس مستوي معلوم :

R هو البعد بين مركز الكرة والمستوي

مثال لتكن النقطة $A(2,1,0)$ والمستوي P الذي معادلته : $P: 3x-y+2z-1=0$ اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس P

الحل : $R=dist(A,P)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$\vec{n}(3,-1,2)\ ,\ d=-1$$

$$\Rightarrow R=\frac{|(3)(2)+(-1)(1)+(2)(0)-1|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{4}{\sqrt{14}}$$

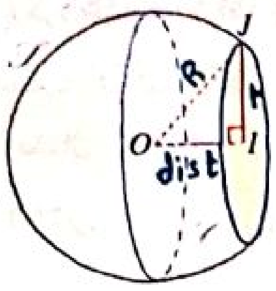
$$(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{16}{14}$$

الوضع النسبي لمستقيم وكرة :

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة الكرة ثم نحل المعادلة الناتجة عن طريق المميز Δ ونميز ثلاث حالات :

1) $\Delta<0$: مستحيلة الحل فالمستقيم لا يقطع الكرة (خارج الكرة)
2) $\Delta=0$: يوجد حل وحيد والمستقيم مماس للكرة في نقطة نحصل عليها بتعويض قيمة الحل في المعادلات الوسيطية
3) $\Delta>0$: يوجد حلين فالمستقيم يقطع الكرة في نقطتين مختلفتين نحصل عليهما بتعويض قيم الحلول في التمثيل الوسيطي

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات



الوضع النسبي لمستوي وكرة :

نحسب البعد $dist$ بين مركز الكرة والمستوي ونميز مايلي :

1) $dist > R$: المستوي خارج الكرة (غير قاطع)

2) $dist = R$: المستوي مماس للكرة

3) $dist < R$: المستوي قاطع للكرة في دائرة مركزها هو المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي ونصف قطرها يحسب بفيثاغورث $r = \sqrt{R^2 - (dist)^2}$

مركز الأبعاد المتناسبة

*يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, \alpha), (B, \beta)$ إذا تحقق :

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = 0$ حيث : $\alpha + \beta \neq 0$

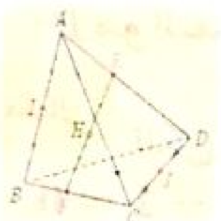
* إذا كان G (م.أ.م) للنقاط $(A, \alpha), (B, \beta)$ فإن : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\beta+\alpha}\overrightarrow{AB}$ (علاقة الإنشاء)

* يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C, \gamma), (A, \alpha), (B, \beta)$ إذا تحقق :

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ حيث : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

* يكون G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D, \delta), (C, \gamma), (A, \alpha), (B, \beta)$ إذا تحقق :

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ حيث : $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$



دورة 2017 $ABCD$ رباعي وجوه و $\propto$ عدد حقيقي ولدينا I, J هما بالترتيب منتصفا $[AB], [CD]$ و E, F نقطتان تحققان العلاقتين : $\overrightarrow{BF} = \propto \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = \propto \overrightarrow{AD}$
و أخيراً H هي منتصف $[EF]$. أثبت أن I, J, H تقع على استقامة واحدة

الحل : $\overrightarrow{BF} = \propto \overrightarrow{BC}$ ومنه F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B, 1-\propto)$ $(c, \propto)$

$\overrightarrow{AE} = \propto \overrightarrow{AD}$ ومنه E (م.أ.م)للنقطتين $(A, 1-\propto)$ $(D, \propto)$

ولكن H (م.أ.م) للنقطتين$(E, 1)$ $(F, 1)$ ومنه $(H, 2)$ (م.أ.م) لرؤوس رباعي الوجوه حسب الخاصة التجميعية

$(I, 2-2\propto)$ (م.أ.م) للنقاط $(A, 1-\propto)$ $(B, 1-\propto)$

$(J, 2\propto)$ (م.أ.م) للنقاط $(D, \propto)$ $(C, \propto)$

ومنه H (م.أ.م) للنقاط $(J, 2\propto)$ $(I, 2-2\propto)$ فالنقاط I, J, H على استقامة واحدة

فائدة استخدام مركز الأبعاد المتناسبة

1. اثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة

⇐ يجب أن نثبت أن إحداهما هي مركز أبعاد للنقطتين الآخرتين

2. اثبات وقوع اربع نقاط في مستو واحد

⇐ يجب أن نثبت أن إحداها هي مركز أبعاد للنقاط الثلاث الأخرى

3. اثبات تقاطع مستقيمات في نقطة

⇐ يجب أن نثبت وجود مركز أبعاد مشترك بين نقطتين من كل مستقيم

تحديد مجموعة النقاط

تحديد مجموعة النقاط من الشك[redacted] $x^2 + y^2$

نتمّم الطرف الأيسر إلى مربع [redacted]

[redacted] $= const$

عندها نميز ثلاث حالات :

1) $const > 0$: تمثل كرة [redacted] R

2) $const = 0$: تمثل نقطة [redacted]

3) $const < 0$: تمثل [redacted]

مثال في معلم متجانس [redacted] M من الفراغ

[redacted]

الحل : [redacted] $= 2$

[redacted] $z^2 = 2$

[redacted] $z^2 = 12$

ومنه مجموعة [redacted] $2\sqrt{3}$

تحديد مجموعة نقاط من الفراغ [redacted]

- $\|\overrightarrow{MA}\| = const$ ⇐ [redacted] $R = const$
- $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ ⇐ [redacted] $[AB]$
- $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ ⇐ [redacted] $[AB]$

مثال ليكن H مركز الأبعاد ال[redacted] مجموعة
النقاط M من الفراغ [redacted]

الحل : بما أن H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,2),(C,-1)$ فإن :

$$\|3\overrightarrow{MH}\| = \sqrt{15} \Rightarrow \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

ومنه مجموعة النقاط M تبعد عن نقطة ثابتة H بعدا ثابتا $\frac{\sqrt{15}}{3}$ فهي تمثل كرة مركزها H ونصف قطرها $\frac{\sqrt{15}}{3}$

ملاحظة : ممكن فرض مركز أبعاد متناسبة للنقاط في حال لم يرد ذلك في طلبات سابقة

وظيفة $ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC..جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}\|$$

مسألة أشعة امتحانية شاملة

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $A(1,0,0)$, $B(4,3,-3)$, $C(-1,1,2)$, $D(0,0,1)$

المطلوب :

1. أثبت أن $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ..وهل النقاط A, B , C على استقامة واحدة
2. جد احداثيات النقطة I منتصف $[AB]$
3. جد احداثيات النقطة E نظيرة النقطة A بالنسبة للنقطة I
4. جد احداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$
5. هل المثلث ABC قائم ..فسر ذلك .
6. هل النقطة $F(2,3,-1)$ تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$
7. أوجد معادلة كرة مركزها A و تمر من D
8. جد على محور التراتيب نقطة M' متساوية البعد عن D, B
9. أوجد النقطة $K(x,y,z)$ بحيث يكون $ABCK$ متوازي اضلاع
10. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطيا .
11. استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ حيث أن α,β,γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها
12. هل تقع E, D, C, B على كرة واحدة مركزها A؟؟
13. صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق احداثياتها العلاقات $x^2+y^2=16$, $2\le z\le 5$
14. $ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G ، فيه K مركز ثقل الوجه BCD
أثبت أن النقاط K , A , G تقع على استقامة واحدة وعيّن موضع G على القطعة المستقيمة $[AK]$

الحل :

1. $\overrightarrow{AB}=(3,3,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,1,2)$ فالشعاعان غير مرتبطان لعدم تناسب المركبات
2. $I(\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{-3}{2})$
3. $\frac{5}{2}=\frac{1+x_E}{2}\Rightarrow x_E=4$

$\Rightarrow\ y_E=3$, $z_E=-3$

4. $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

$$\begin{pmatrix}x-4\\y-3\\z+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\\-7\end{pmatrix}$$

$x-4=7\Rightarrow x=11$, $y-3=1\Rightarrow y=4$, $z+3=-7\Rightarrow z=-10$

$M(11,4,-10)$

5. حسب عكس فيثاغورث المثلث ليس قائم

6. الشرط $\Leftarrow [FA] = [FB]$ $\sqrt{11} \neq \sqrt{8}$ لا تنتمي إلى المستوي المحوري

7. $(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 2$

8. نفرض $\Leftarrow BM' = DM'$ $M'(0,y,0)$

$$\sqrt{16+(y-3)^2+9} = \sqrt{y^2+1} \Rightarrow y = 5.5$$

9. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow K(-4,-2,5)$

10. فالأشعة مرتبطة خطيا $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{-1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

11. $\overrightarrow{AD} = \frac{-1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 9\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow -7\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = 0$$

12. الشرط $AE = AD = AC = AB$

13. مجموعة النقاط تمثل أسطوانة محورها $(\overrightarrow{OK})$ ونصف قطرها $r = 4$ و مركزي قاعدتيها $(0,0,2)$, $(0,0,5)$

14. راجع كتاب الجزء الثاني ص29

المستقيـــــــم في الفراغ

نحتاج

نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$

شعاع توجيه $\vec{u}(a,b,c)$

المعادلات الوسيطية للمستقيم

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}\right\} t \in R$$

تطبيق: أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2,1,0)$ ويقبل $\vec{u}(3,-2,1)$ شعاع توجيه.

$$\left.\begin{aligned} x = x_0 + at &\Rightarrow x = 2 + 3t \\ y = y_0 + bt &\Rightarrow y = 1 - 2t \\ z = z_0 + ct &\Rightarrow z = t \end{aligned}\right\} t \in R$$

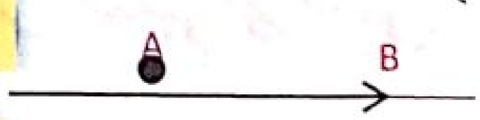
التمثيل الوسيطي لنصف المستقيم $[AB)$:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (a,b,c)$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_A + at \\ y &= y_A + bt \\ z &= z_A + ct \end{aligned}\right\} t \in [0,+\infty[$$

دورة : أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB)

حيث $B(-2,3,2)$ و $A(2,-1,0)$



الحل:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-4,4,2)$$

$$\left.\begin{aligned} x = x_0 + at &\Rightarrow x = 2 - 4t \\ y = y_0 + bt &\Rightarrow y = -1 + 4t \\ z = z_0 + ct &\Rightarrow z = 2t \end{aligned}\right\} t \in R$$

التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة $[AB]$:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (a,b,c)$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_A + at \\ y &= y_A + bt \\ z &= z_A + ct \end{aligned}\right\} t \in [0,1]$$

مستويان

متعامدان ← الناظمان متعامدان

متوازيان ← الناظمان مرتبطان خطياً

متقاطعان ← الناظمان غير مرتبطان خطياً

مستقيم ومستوي

المستقيم // المستوي ← شعاع توجيه المستقيم يعامد الناظم

المستقيم ⊥ المستوي ← شعاع توجيه المستقيم مرتبط خطياً مع الناظم

المستقيم يقطع المستوي ←
الشرط : شعاع توجيه المستقيم لا يعامد الناظم
خطوات إيجاد نقطة التقاطع
1) نوجد معادلات المستقيم.
2) نعوض في المستوي.
3) نحسب t.
4) نعوض مرة أخرى في معادلات المستقيم.
5) نوجد نقطة التقاطع.
** إذا كانت الجملة مستحيلة فإن المستقيم لا يقطع المستوي.
** إذا حصلنا على مساواة محققة دوماً مثل 0=0 فالمستقيم محتوى في المستوى.

طريقة أخرى لإثبات تعامد مستقيم مع مستوٍ:

أن يعامد مستقيمين متقاطعين في المستوي.

نتيجة: لاثبات $\vec{n}$ ناظم على المستوى يجب أن يعامد شعاعين غير مرتبطين في المستوي :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}(\text{ناظم})$$

تمرين هام : أثبت أن المستقيم(AB)يقطع المستوي P في نقطة يطلب تعيينها $A(3,1,-2)$ و $B(0,2,1)$

$$P: 2x - y + z - 2 = 0$$

الحل : شرط التقاطع $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} \neq 0$

$$\overrightarrow{AB} = (-3,1,3)$$

$$\overrightarrow{n} = (2,-1,1)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = -6 - 1 + 3 = -4 \neq 0$$

$\Leftarrow$ $\overrightarrow{AB}$ لا يعامد الناظم $\overrightarrow{n}$

$\Leftarrow$المستقيم(AB)يقطع المستوي P

$$\left.\begin{aligned} x &= x_A + at \\ y &= y_A + bt \\ z &= z_A + ct \end{aligned}\right\} t \in R$$

$$\overrightarrow{AB} = (-3,1,3)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 - 3t \\ y &= 1 + t \\ z &= -2 + 3t \end{aligned}\right\} t \in R$$

نعوض معادلات المستقيم في معادلة المستوي P فنجد: $t = \frac{1}{4}$

نعوض t في معادلات المستقيم: $\left(\frac{9}{4}, \ldots\right)$

الوضع النسبي لمستقيمين:

- شعاعا التوجيه
  - مرتبطان خطياً
    - المستقيمان متوازيان
      - بالحل المشترك
      - $\Leftarrow$مساواة خاطئة
    - المستقيمان منطبقان
      - بالحل المشترك
      - $\Leftarrow$ مساواة محققة دوماً
  - غير مرتبطان خطياً
    - المستقيمان متقاطعان
      - بالحل المشترك
      - $\Leftarrow$ عدد $= s$أوt
      - $\Leftarrow$نعوض فتنتج نقطة التقاطع
    - المستقيمان متخالفان
      - بالحل المشترك
      - $\Leftarrow$المساواة خاطئة

الحالات الثلاثة الأولى : المستقيمان يقعان في مستو واحد

في حالة متخالفان : المستقيمان لايقعان في مستو واحد

مثال : ادرس الوضع النسبي للمستقيمين الآتيين : (هل يقع المستقيمان في مستو واحد)

$$L_1 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; t \in R \quad \text{و} \quad L_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -1 - s \\ z = 3s \end{cases} ; s \in R$$

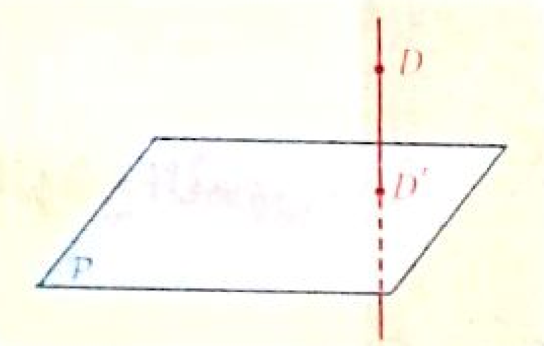
الحل : المستقيمان غير متوازيين لأن شعاعي التوجيه لهما غير مرتبطين خطياً (تحقق من ذلك) ؛ لذا لدراسة تقاطعهما نحل معادلاتهما حلاً مشتركاً.

$$2+2t=2+s$$
$$2+t=-1-s$$
$$1+2t=3s$$

بحل المعادلتين الأولى و الثانية نجد : $t=-1$ و $s=-2$

ولكن هذا لا يمثّل حلاً للمعادلة الثالثة ، فجملة المعادلات متناقضة ، ولا حل مشتركاً لها ، والمستقيمان متخالفان ولا يقعان في مستو واحد .

مسقط نقطة D على مستوي P (بطريقة امتحانيه سهلة) :



1. نوجد معادلة للمستوي P
2. نوجد معادلات وسيطية للمستقيم المار من النقطة D و شعاع توجيهه هو ناظم المستوي P
3. نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم الناتج في معادلة المستوي P ونحسب t ثم نعوض في المعادلات الوسيطية فينتج المسقط القائم للنقطة D على المستوي P وهو D'

تطبيق

أوجد مسقط النقطة $D(1,0,1)$ على المستوي $P: x+y+z+1=0$

الحل : نوجد معادلات وسيطية للمستقيم المار من النقطة D والذي شعاع توجيهه هو ناظم المستوي P

$$\left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=t \\ z=1+t \end{array}\right\} \quad t\in R$$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم الناتج في معادلة المستوي P

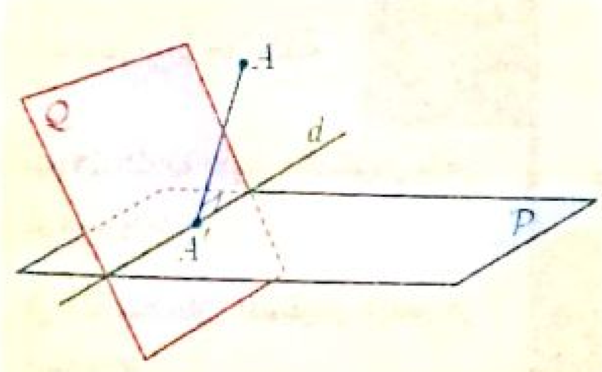
$$1+t+t+1+t+1=0$$
$$3t+3=0 \quad \Rightarrow \quad t=-1$$

نعوض t في المعادلات الوسيطية فنجد : $x=0 \ , \ y=-1 \ , \ z=0$

$$\Rightarrow \quad D'(0,-1,0)$$

إيجاد بعد نقطة A عن مستقيم d في الفراغ :

أو - إيجاد بعد نقطة عن فصل مشترك لمستويين $P \ , \ Q$:



1. نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم (للفصل المشترك)وليكن d
2. نوجد معادلة المستوي المار من النقطة A و العمودي على المستقيم (نعتبر شعاع توجيه المستقيم هو الناظم) وليكنT
3. نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي T فتنتج t ثم نعوض مرة أخرى في المعادلات الوسيطية ل d فنجد مسقط النقطة A على المستقيم d و ليكن A'
4. نوجد البعد بين A و مسقطها A' بقانون المسافة بين نقطتين بالفراغ و هو نفسه بعد النقطة A عن الفصل المشترك

$$AA'=\sqrt{(x_A-x_{A'})^2+(y_A-y_{A'})^2+(z_A-z_{A'})^2}$$

ملاحظة : يوجد طرق أخرى ..

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

تطبيق

لتكن النقطة $A(3,-1,2)$ و [redacted]

أثبت تقاطع المستويين واحس [redacted]

الحل

لإثبات تقاطع مستويين نث [redacted]

❖ لحساب بعد النقطة عن المس [redacted]

1. نوجد المعادلات الوسيطية [redacted]

نفرض $x=0$ و نعوض في [redacted] $y=-1$

$\Leftarrow$ $F(0,-1,3)$ نقطة [redacted]

نفرض $y=0$ ونعوض في [redacted] x

$\Leftarrow$ $F'(1,0,2)$ نقطة [redacted]

شعاع توجيه الفصل [redacted] المعادلات الوسيطية :

[redacted] $\begin{cases} x=0+t \\ y=-1+t \\ z=3-t \end{cases}$; $t \in R$

2. نوجد معادلة المستوي [redacted]

[redacted] $+y+1-z+2=0$

3. نعوض معادلات d في T فنج [redacted]

$\Leftarrow$ نعوض في d فنجد [redacted]

[redacted] $\sqrt{\frac{42}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$

إيجاد نقطة تقاطع ث [redacted]

1. نوجد معادلا [redacted]
2. نوجد نقطة [redacted]

تطبيق دورة 2018

ماهي نقطة تقاطع ا [redacted]

$P_1: 2x+3y$ [redacted]

$P_2: x+2y$ [redacted]

$P_3: x+3y$ [redacted]

الحل:

* نوجد معادلات الفصل المشترك للمستويين P_1 , P_2 : (تترك الطريقة للطالب)

ولتكن $d: \begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$; $t \in R$

** نعوض معادلات d في المستوي الثالث ونحسب t فنجد: $t=\frac{3}{2}$

ثم نعوض قيمة t في معادلات d : فنجد نقطة التقاطع $(\frac{-1}{2}, 3, \frac{3}{2})$

بنك الأسئلة الهامة

السؤال الأول : في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $A(3,-1,2)$ و المستويان : $\begin{cases} Q: x+y+2z-5=0 \\ P: x-2y+z-4=0 \end{cases}$

1) أثبت تقاطع المستويين Q و P وتحقق من تعامدهما ثم أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d الذي يمثل فصلهما المشترك
2) أعط معادلة المستوي W الذي يعامد المستقيم d (أي يعامد كل من المستويين Q و P) ويمر من A
3) احسب إحداثيات A' نقطة تقاطع d والمستوي W
4) اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي P .
5) أثبت أن مركبات ناظم المستوي W المعامد للمستوي P تؤلف حدود متتالية حسابية

السؤال الثاني : $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$ و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CG]$.

1) في المعلم المتجانس $(A,\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ احسب DJ و IJ و ID ثم أوجد $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{DI}$ ثم احسب مساحة المثلث (DIJ) .
2) أعط معادلة للمستوي (DIJ) ثم احسب بعد H عن المستوي (DIJ) واستنتج حجم رباعي الوجوه $(HDIJ)$.
3) أعط معادلة للمستوي (HDI) ثم احسب بعد النقطة J عن المستوي (HDI)
4) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من J و يعامد (HDI) ثم استنتج إحداثيات J' نقطة تقاطع d و (HDI)

السؤال الثالث : ليكن $ABCDA'B'C'D'$ مكعباً طول حرفه 2 النقطة H هي المسقط القائم للرأس B على المستقيم (AC')

..في المعلم المتجانس $(D',\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\overrightarrow{D'C'}=2\vec{j}$ و $\overrightarrow{D'A'}=2K$ و $\overrightarrow{D'D}=2\vec{i}$:

1) اكتب في هذا المعلم إحداثيات رؤوس المكعب ثم أعط تمثيلاً وسيطياً للقطعة المستقيمة $[AC']$.
2) أعط معادلة المستوي P الذي يعامد المستقيم (AC') و يمرمن A' ثم استنتج إحداثيات H نقطة تقاطع (AC') و P
3) أوجد معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[B'C']$

السؤال الرابع : لتكن النقاط : $D(1,0,-3)$ ، $C(1,0,3)$ ، $B(1,4,-3)$ ، $A(3,0,3)$

1) احسب $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BD}$ ثم استنتج نوع المثلث BCD واحسب مساحته .
2) أثبت أن الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظم على المستوي BCD .
3) أوجد معادلة المستوي BCD .
4) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

السؤال الخامس : لتكن النقاط : $D(0,1,2)$ ، $C(-1,2,1)$ ، $B(1,0,0)$ ، $A(0,1,1)$

بين أن هذه النقاط تقع في المستوي نفسه ، ثم اكتب معادلة هذا المستوي .

السؤال السادس : لتكن النقاط : $C(3,-1,1)$ ، $B(2,1,0)$ ، $A(1,0,1)$

1) احسب مساحة المثلث ABC
2) أوجد معادلة المستوي ABC

السؤال السابع : لتكن النقطتان : $A(-3,2,1)$ و $B(9,4,3)$.

أوجد معادلة المستوي العمودي على القطعة المستقيمة AB في منتصفها .

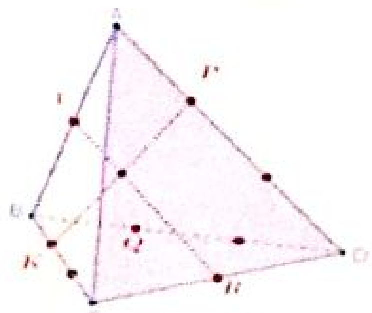
السؤال الثامن : لتكن النقطة $A(-6,2,-1)$ والمستوي المعطى بالمعادلة $P\ :\ 5x-y+z+6=0$

بين أن المسقط العمودي للنقطة A على المستوي P هو النقطة $A'(-1,1,0)$

السؤال التاسع : أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(2,1,3)$ الذي يعامد المستويين P_1 و P_2 حيث :

$P_2\ : x-y+2z+3=0$ و $P_1 : 2x+z-1=0$

السؤال العاشر : $ABCD$ رباعي وجوه النقاط P,Q,R,K,I تحقق :



$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{AP}=$ [illegible] $\overrightarrow{AD}$ ، R منتصف $[CD]$ ، $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ ، I منتصف $[AB]$

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A;2),(B;2),(C;1),(D;1)$ .. المطلوب :

1) أثبت أن المستقيمان (IR) و (PK) متقاطعان .
2) عيّن موضع النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A;2),(C;1)$.
3) عيّن المجموعة نقاط M التي تحقق : $\|2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}\|=\|2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{DM}\|$

السؤال الحادي عشر : نتأمل في معلم متجانس النقاط :

$A\left(-\frac{1}{2},3,1\right)$ $B(-1,0,2)$ $C(2,1,1)$ $D(-3,3,-1)$

① a) أثبت أن النقاط B,C,D تمثل مستوٍ أوجد معادلته .
b) استنتج طبيعة المثلث BCD واحسب مساحته .

② a) أثبت أن النقطة A تقع خارج المستوي (BCD)
b) احسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD)

③ احسب حجم رباعي الوجوه $(ABCD)$

④ a) أثبت أن النقاط B,C,D تقع على كرة مركزها A
b) احسب نصف قطر الكرة السابقة واكتب معادلتها

السؤال الثاني عشر : في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتين $A(0,1,-1)$ و $B(1,-1,1)$ والمطلوب :

أعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة : $MA=MB$ وما طبيعة المجموعة S.

السؤال الثالث عشر : في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط : $A(1,-1,-2)$ $B(1,-2,-3)$ $C(2,0,0)$

① برهن أن النقاط A و B و C تعين مستوٍ ثم تحقق أن معادلته الديكارتية هي : $x+y-z-2=0$

② ليكن المستويان P و Q معادلتيهما $P: x-y-2z=0$ و $Q: 3x+2y-z+10=0$
ادرس تقاطع المستويات (ABC) و Q و P

السؤال الرابع عشر : في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستويان : $\begin{cases} Q: x+y+z+1=0 \\ P: x-2y+3z-5=0 \end{cases}$

① أثبت أن المستويين متقاطعان بفصل مشترك d

② أثبت أن d هو مجموعة النقاط $M\left(-\frac{5}{3}z+1,\frac{2}{3}z-2,z\right)$ عندما تتحول z في R

هام جداً لا تنس حلمك ..نحن ناطرين نجاحك ...والنجاح بدو عزيمة ..والعزيمة بدها تفوق ...لا تيأس لسا الوقت كافي لتحقيق الحلم ...

أ. فارس جقل

الأعداد العقدية :

*العدد التخيلي (i): نتخيل أن جذر العدد 1− هو العدد i أي : $i^2 = -1$

قوى العدد i الطبيعية:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = i.i = -1$

$i^3 = i^2.i^1 = (-1)(i) = -i$

$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$

$i^5 = i^4.i^1 = (1)(i) = i$

$i^6 = i^3.i^3 = (-i)(-i) = -1$

$i^7 = i^6.i^1 = (-1)(i) = -i$

$i^8 = i^4.i^4 = 1.1 = 1$

$i^9 = i^5.i^4 = i.1 = i$

$i^{10} = i^4.i^6 = 1.-1 = -1$

نتيجة..~

قوى العدد i الطبيعية محصورة بالمجموعة $\{\mp 1, \pm i\}$

العدد العقدي:

الشكل الجبري:
$z = x + yi$

الشكل المثلثي:
$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

الشكل الأسي:
$z = re^{i\theta}$

قواعد هامة

1) مرافق $z = x + iy$ هو: $\bar{z} = x - yi$

2) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) $z.\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

4) $z + \bar{z} = 2x$

5) $z - \bar{z} = 2yi$

مثال: ليكن لدينا : $z_1 = 3 + 2i \;,\; z_2 = 4 - 5i$

الحل: $z_1 + z_2 = (3 + 4) + (2 - 5)i$

$= 7 - 3i$

$z_1.z_2 = (3 + 2i)(4 - 5i)$

$= 12 - 15i + 8i - 10i^2$

$= 22 - 7i$

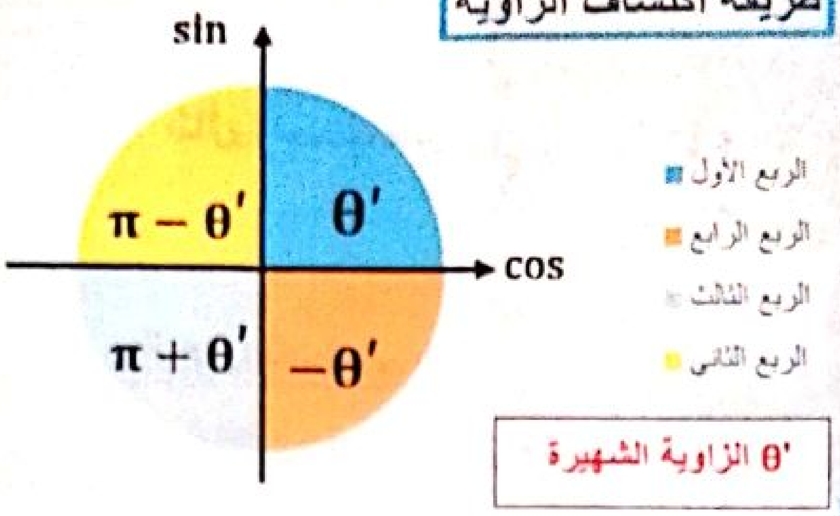
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{4-5i} \Rightarrow$ نضرب البسط والمقام بمرافق المقام:

$$= \frac{(3 + 2i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \frac{2}{41} + \frac{23}{41}i$$

التحويل من الشكل الجبري إلى المثلثي :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

طريقة اكتشاف الزاوية



θ′ الزاوية الشهيرة

مثـــال

حول العدد العقدي التالي إلى الشكل المثلثي ثم الأسي:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \theta = \theta' = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow z = 1\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

فالشكل الأسي: $z = 1e^{i\frac{\pi}{6}}$

يمكنكم حضور فيديو شروحات المكثفة على قناة مركز اونلاين التعليمي وقناة (المدرس فارس جقل) على اليوتيوب أو طلبها عبر الواتس اب على الرقم 0955186517

دستورا أويلر:

ليكن $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ①

المطلوب: أوجد $e^{-i\theta}$ ثم استنتج دستورا أويلر.

الحل: $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ ②

بالجمع بين العلاقتين ① و② :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

بالطرح بين ① و ②

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$
$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

تطبيق جدا هام : اكتب $cos^3 x$ على شكل مجموع نسب مثلثية لمضاعفات الزاوية x واستنتج قيمة $\int_0^{\pi/2} cos^3 x \quad dx$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

دستور دوموافر:

[redacted]

مثال: احسب مايلي:

[redacted]

الحل: نحول إلى الشكل المثلثي ثمّ نطبق دوموافر.

[redacted] $-\frac{\pi}{6}$

[redacted] $\sin -\frac{\pi}{6}\Big]^{24}$

[redacted] $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

[redacted]

تحليل ثلاثي الحدود:

[redacted] $z - z_1)(z - z_2)$

حلول المعادلة:

[redacted] $^2 + bz + c = 0$

مثـــال: حل المعادلة التالية في C : [redacted]

الحل: [redacted] 100

للمعادلة جذران عقديان [redacted]

[redacted] $= -2 + 5i$

[redacted] $-2 - 5i$

ملاحظة

بالأتمتة :
نعوض الخيارات

هام : تابع النماذج النهائية لمركز أونلاين لعام 2024 على صفحة الفيسبوك فارس جقل

مثـال حلّل ما يلي: $z^2 + 4z + 29$

القاعدة: $a(z - z_1)(z - z_2)$

نوجد حلول المعادلة:

$$\boxed{z^2 + 4z + 29 = 0}$$

$z_1 = -2 + 5i$ ، $z_2 = -2 - 5i$

$$\Rightarrow z^2 + 4z + 29$$
$$= 1[z - (-2 + 5i)][z - (-2 - 5i)]$$
$$= (z + 2 - 5i)(z + 2 + 5i)$$

إيجاد الجذرين التربيعين للعدد العقدي:

$$\boxed{z = a + bi}$$

نتّبع ما يلي:

نفرض $\omega = x + iy$ جذر تربيعي لـ z ⇐

① $x^2 - y^2 = a$

② $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

③ $x.y = \frac{b}{2}$

تطبيق هام أوجد الجذرين التربيعين للعدد العقدي:

$$z = 3 + 4i$$

صيغة أخرى للسؤال:
حل المعادلة
$z^2 = 3 + 4i$

الحل: بفرض $\omega = x + iy$ جذر تربيعي للعدد z

① $x^2 - y^2 = 3$

② $x^2 + y^2 = \sqrt{16 + 9} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$

③ $x.y = 2$

②+① $\Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x = \mp 2$

من أجل: $x_1 = 2 \Rightarrow$ ③ نعوض في $\Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow \omega_1 = 2 + i$

$x_2 = -2 \Rightarrow -2y = 2 \Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow \omega_2 = -2 - i$

بالأتمتة : نربع الخيارات فينتج العدد z

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

مثـــــال امتحاني هام

ليكن لدينا: [redacted] أن z^6 عدد حقيقي.

الحل: [redacted] $\sqrt{4} = 2$

[redacted] $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

[redacted] $+ i\sin\theta]$

[redacted] $i\sin\frac{\pi}{3}]$

إثبات ان z^6 عدد حقيقي:

[redacted] $+ i\sin\frac{\pi}{3}]^6$

[redacted] $+ i\sin 2\pi]$

[redacted] $2^6 \in R.$

مثـــــال

ليكن لدينا: [redacted] $1+\sqrt{3}i$

[redacted] $1+i$

1) اكتب بالشكل المثلثي [redacted]

الحل : [redacted] $= 2$

[redacted] $\theta = \frac{\pi}{3}$

[redacted] $i\sin\frac{\pi}{3}]$

[redacted] $= \sqrt{2}$

[redacted] $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

(قواعد هامة)

$$a = Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad , \quad b = Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \quad , \quad \overline{zw} = \bar{z} \times \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \; ; w \neq 0 \quad , \quad \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

$$|zz'| = |z| \times |z'| \, , arg(zz') = arg\, z + arg\, z' \quad (2\pi)$$

$$\arg(z^n) = n\arg z \quad (2\pi) \quad , \quad |z^n| = |z|^n$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad (2\pi) \; , \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\arg\left(\frac{1}{w}\right) = -\arg w \; (2\pi) \; ; w \neq 0 \, , |z+z'| \leq |z| + |z'|$$

$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \quad , \quad re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow (r = r', \theta = \theta'(2\pi)) \; , \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad , \quad z\bar{z} = |z|^2$$

$$z + \bar{z} = 2Re(z) \quad , \quad z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$$

2) اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$ ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$.

هام : تابعوا أهم الملاحظات الإمتحانية بصفحتي على الفيسبوك
فارس جقل

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\ i\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

$$=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+\sqrt{2}i\sin\frac{\pi}{12}$$

بالمطابقة :

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}$$

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

تمثيل الشعاع بعدد عقدي

إذا كان A , B نقطتين فإن العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو : $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$

مثال: ليكن لدينا النقاط:

$A(2,3)$, $B(-1,4)$ مثّل الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بعدد عقدي

$$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=(-1+4i)-(2+3i)$$
$$=-1+4i-2-3i=-3+i$$

العدد العقدي الممثل لمركز الابعاد المتناسبة

لتكن النقاط $(A,\propto)$, (B,β) , (C,λ)الممثلة لاعداد عقدية z_A, z_B, z_C فإن مركزالأبعاد لهذه النقاط G والعدد العقدي الموافق له يعطى بالقانون:

$$z_G=\frac{\propto z_A+\beta z_B+\lambda z_C}{\propto+\beta+\lambda}$$

العدد العقدي الممثل لمنتصف قطعة مستقيمة $[A\ B]$:

$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$$

العدد العقدي الممثل لمركز ثقل المثلث ABC :

$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

ملاحظة هامة : لإثبات وقوع 3 نقاط على استقامة واحدة هندسياً دون استعمال الاعداد العقدية...نوجد شعاعين ونبرهن ارتباطهما خطياً

مثال امتحاني هام

في مستو عقدي لدينا النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد:

$$a = 6 - i\ , \quad b = -6 + 3i\ , \quad C = -18 + 7i$$

بالترتيب و المطلوب : اثبت وقوع النقاط A , B , C على استقامة واحدة

الحل

ط1) $A(6, -1)\ , B(-6, 3)\ , C(-18, 7)$

$$\overrightarrow{AB} = (-12, 4)\overrightarrow{AC} = (-24, 8)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$$

فالشعاعين مرتبطين⟸ النقاط على استقامة واحدة

ط2) $z_{\overrightarrow{AB}} = b - a = (-6 + 3i) - (6 - i)$

$$= -12 + 4i$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = c - a = (-18 + 7i) - (6 - i)$$

$$= -24 + 8i$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = 2z_{\overrightarrow{AB}} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$$

فالشعاعان مرتبطان خطيا ⟸ النقاط على استقامة واحدة

المسافة التي تمثلها نقطتان بالشكل العقدي :

لتكن النقطة A الممثلة للعدد العقدي z_A والنقطة B الممثلة للعدد العقدي z_B عندها يكون البعد (المسافة) بين A , B بالعلاقة :

$$AB = |z_B - z_A|$$

تطبيق : في المثال السابق احسب المسافة بين النقطتين A , B

$$AB = |b - a| = |-12 + 4i|$$

$$= \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160}$$

زاوية شعاع مع محور الفواصل :

$$(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

قياس الزاوية الموجهة بين شعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

(قواعد هامة)

لإثبات أن Z حقيقي نبرهن :

$\bar{z} = z\ , Im\, z = 0$ أو $\arg z = \pi$ أو $\arg z = 0$

لإثبات أن Z تخيلي بحت نبرهن :

$Re z = 0$ أو $\bar{z} = -z$ أو $arg\, z = \frac{\pi}{2}$ أو $arg\, z = \frac{-\pi}{2}$

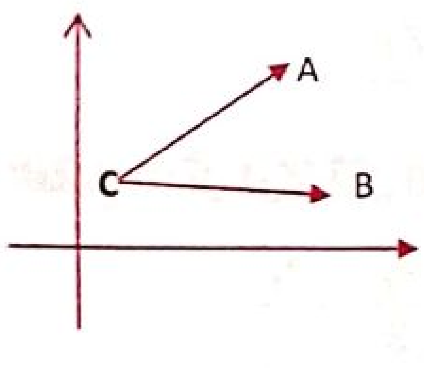
إذا كانت الأمثال غير حقيقية في معادلة الدرجة الثانية و Z_2 , Z_1 جذران تذكر القانونين :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad , \quad z_1 . z_2 = \frac{c}{a}$$

حالة خاصة :

اذا كان الشعاعان لهما نفس البداية

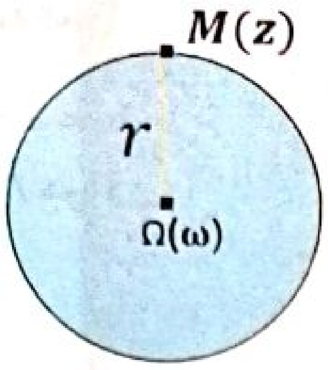
$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$$



تمثيل مجموعات النقاط

الدائرة : نقول عن مجموعة النقاط (Γ) المكونه من النقاط $M(z)$ والتي تحقق الشرط :

$$|z-\omega| = r$$



أنها دائرة ومركزها $\Omega(\omega)$ونصف قطرها r

$|z-\omega| = r$

عدد عقدي

نصف قطر

مثال

ليكن لدينا: $|z-2| = 4$

ماذا تمثل مجموعة النقاط؟؟

تمثل دائرة مركزها $\Omega\ (2,0)$ ونصف قطرها 4

مثال

ماذا تمثل مجموعة النقاط: $|z-3-2i| = 3$

الحـل:

$$|z-(3+2i)| = 3$$

مجموعة النقاط دائرة مركزها $(3,2)$ونصف قطرها 3.

محور القطعة المستقيمة $[AB]$:

هي مجموعة النقاط M التي تحقق $MA = MB$

أي : $|z-a| = |z-b|$

*.كيف نثبت ارتباط شعاعين بالاستفادة من العدد العقدي؟

او كيف نثبت وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة ؟

الشرط:

$z = \frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=$ عدد حقيقي $\Rightarrow \arg(z) = 0\,,\pi$

عندها نقول أنّ الشعاعان $\overrightarrow{BA}$ و$\overrightarrow{CA}$ مرتبطين خطياً والنقاط الثلاثة على استقامة واحدة :

.كيف نثبت تعامد شعاعين $\overrightarrow{DC}$ و$\overrightarrow{BA}$

يجب ان يكون : $z = \frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=$ عدد تخيلي $\Rightarrow \arg(Z) = \frac{\pi}{2}$ او $\frac{-\pi}{2}$

إذا كان لدينا: $arg\frac{Z_D-Z_C}{Z_B-Z_A} = \frac{\pi}{2}\ ,\frac{-\pi}{2}$

$\Leftarrow$الشعاعان $\overrightarrow{DC}$و$\overrightarrow{BA}$ متعامدان.

هام جداً نستفيد من القاعدة الأخيرة في برهان مثلث قائم

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

هام : لاثبات مثلث متساوي الساقين نثبت أن $\left|\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right|=1$ لان طويلة ناتج هذه النسبة تمثل نسبة طولي الضلعين $\frac{CD}{BA}$

1_ الصيغة العقدية للانسحاب (T)

الصيغة العقدية هي: $\acute{z}=z+b$

عدد عقدي شعاعه $\overrightarrow{\omega}=x\vec{u}+y\vec{v}$

وT هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{\omega}$

مثال

M نقطة يمثلها العدد العقدي:

$z=1+i$

أوجد $\acute{z}$ التي تمثل النقطة M صورة M وفق انسحاب T شعاعه $\overrightarrow{\omega}=-2\vec{u}+3\vec{v}$

الحل

$b=-2+3i$

$\acute{z}=z+b$

أي $M(-1,4)$ هي صورة $M(1,1)$

مثال

عيّن طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A حيث B تمثل العدد العقدي b و A تمثل العدد العقدي a

الحل

B هي صورة A وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{\omega}=-1\vec{u}+3\vec{v}$ أو $B=T_{\overrightarrow{\omega}}(A)$

2_ الصيغة العقدية للتحاكي (H):

الصيغة العقدية لها هي :

$$\acute{z}-\omega=k(z-\omega)$$

المركز (نقطة)

نسبة لتحاكي

هام جداً :

تابعوا شروحات المكثفة على الواتس 0955186517

(ارسل كلمة بكالوريا علمي)

مثال

أوجد z' صورة z وفق تحاكي مركزه (o) ونسبته 4 حيث $z=(1+i)$

الحل:

$$\acute{z}-(0+0i)=4(z-(0+0i)$$

$$\Rightarrow \acute{z}=4z$$

$$\acute{z}=4(1+i)=4+4i$$

مثال

عيّن طبيعة التحويل الهندسي للعلاقة: $b = 2a$

الحل:

$$b - (0 + 0i) = 2(a - (0 + 0i))$$

نسبة التحاكي (2)

المركز (0)

طبيعة التحويل الهندسي هو (تحاكي).

مثال

عين طبيعة التحويل الهندسي للعلاقة :

$$(b - 1) = -(a - 1)$$

طبيعة التحويل الهندسي هو تحاكي مركزه $(1, 0)$ ونسبته $k = -1$

3_ الصيغة العقدية للدوران (R):

$$\acute{z} - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

المركز
زاوية الدوران

مثال

R دوران مركزه $A(2 - i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ حيث $z = 1 + i$ أوجد $\acute{z}$ صورة z

الحل

$$\acute{z} - (2 - i) = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - (2 - i))$$

$$\Rightarrow \acute{z} - 2 + i = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad (1 + i - 2 + i)$$

$$\Rightarrow \acute{z} - 2 + i = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad (-1 + 2i)$$

ثمّ ننشر و ننقل ونوجد $\acute{z}$

هام جداً :

أهم تمارين المعادلات في بحث العقدية موجودة ضمن نوطة الجزء الأول ص32-33-34

مثال

الحل

عين طبيعة التحويل الهندسي:

① $b - 1 = e^{\pi i}(a - 1)$

دوران مركزه $(1, 0)$ وزاويته π.

② $b + 1 - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(a + 1 - i)$

$$b - (-1 + i) = e^{i\frac{\pi}{4}}(a + 1 - i)$$

B صورة A وفق دوران مركزه $(-1, 1)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

4- الصيغة العقدية للتناظر المحوري:

لدينا حالتين:

1- حالة اولى : محور التناظر (ox) عندها يكون : $\grave{z} = \bar{z}$

2- حالة ثانية : محور التناظر (oy) عندها يكون :

$\grave{z} = -Re(z) + img(z) = -\bar{z}$

مثال

عين $\grave{z}$ صورة z وفق S التناظر المحوري الذي محوره ox حيث $z = 1 + i$

الحل : محور التناظر $ox \Leftarrow \grave{z} = 1 - i$

مثال

عين $\grave{z}$ صورة z وفق S التناظر المحوري الذي محوره oy حيث $z = 1 + i$

الحل : محور التناظر $oy \Leftarrow \grave{z} = -1 + i$

مثال

عين طبيعة التحويل الهندسي

الحل: طبيعة التحويل الهندسي تناظر محوري.

B في صورة A وفق تناظر محوره (ox).

5- الصيغة العقدية للتناظر المركزي:

$$\grave{z} = 2\omega - z$$

مثال

عين $\grave{z}$ صورة z وفق S التناظر الذي مركزه $A(1 - 3i)$ حيث $z = 1 + i$

الحل: $\grave{z} = 2(1 - 3i) - (1 + i)$
$= 2 - 6i - 1 - i$
$= 1 - 7i$

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة (نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل) على الفيس بوك

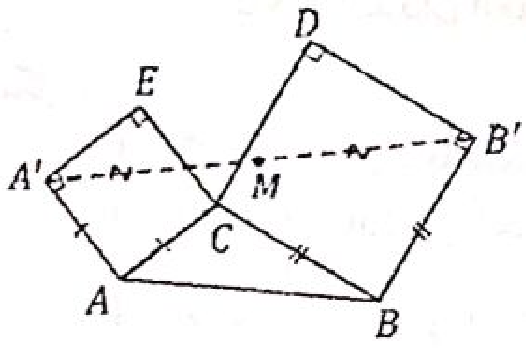
بنك الأسئلة الهامّة

السؤال الأول : في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$. لدينا النقاط C, B, A التي تمثلها الأعداد العقدية : $z_A = \sqrt{3} + i \,, z_B = \sqrt{3} - i \,, z_C = 3\sqrt{3} + i$.

1. اكتب العدد العقدي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC .
2. عيّن (ε) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً .
3. عيّن $(\mathcal{F})$ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ حقيقياً .

السؤال الثاني : ليكن المثلث ABC في المستوي ننشئ على ضلعيه $[AC]$ و $[BC]$ وخارجه المربعين $CBB'D, ACEA'$ كما في الشكل المجاور .

لتكن الأعداد العقدية a, b, c, a', b' النقاط A, B, C, A', B'



1. B' هي صورة C وفق دوران مركزه B ، عينه
و اكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة $b \,, c$
2. أثبت أن $a' = i(c - a) + a$
3. عين العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$
4. كيف تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي

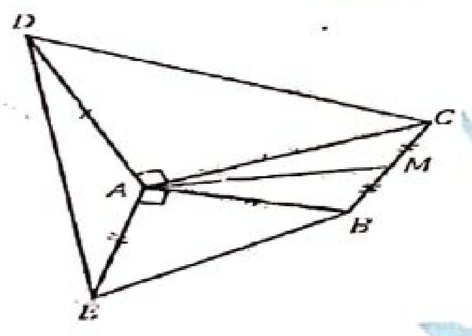
السؤال الثالث :

نتأمل النقاط $D \,, C \,, B \,, A$ الممثلة للأعداد العقدية

$$d = 3 \,\,, c = 2 - i\sqrt{3} \,,\,\, b = 2 + i\sqrt{3} ,\,\, a = -1$$

1. ارسم النقاط $A \,, B \,, C \,, D$ ثم احسب $AC \,, BC \,, AB'$ واستنتج طبيعة المثلث ABC
2. عين $arg\,\frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC
3. أثبت أن D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -1) \,, (B, 2) \,, (C, 2)$

السؤال الرابع : نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً ، لتكن M منتصف $[BC]$ وليكن $AEB \,, ACD$ مثلثين قائمين في A متساوي الساقين مباشرين . نختار معلماً مباشراً مبدأه النقطة A و نرمز بالرمزين $b \,, c$ إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين $C \,, B$



1. احسب بدلالة $c \,, b$ الأعداد العقدية $e \,, d, m$ الممثل للنقاط $E \,, C \,, M$ بالترتيب
2. احسب $\frac{d-e}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأن $ED = 2AM$
3. نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D, 2) \,, (E, 3) \,, (C, 1) \,, (B, 1)$ ،
احسب $\frac{c}{b}$ ثم استنتج قياس الزاوية BAC

السؤال الخامس : لتكن لدينا الأعداد العقدية :

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\pi}{6} i} \quad , \; c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad , b = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad , a = 1$$

بالترتيب ..والمطلوب :

1. اكتب c بالشكل الأسي و اكتب d بالشكل الجبري
2. وضّع النقاط A و B و C و D في مستو مزود بمعلم متجانس
3. أثبت أن الرباعي $OACB$ معين

السؤال السادس : لتكن الأعداد العقدية الممثلة للنقاط :

$$Z_A = 3 \quad , \quad Z_B = 1 + 2i \quad , \quad Z_Q = -1 + 2i$$

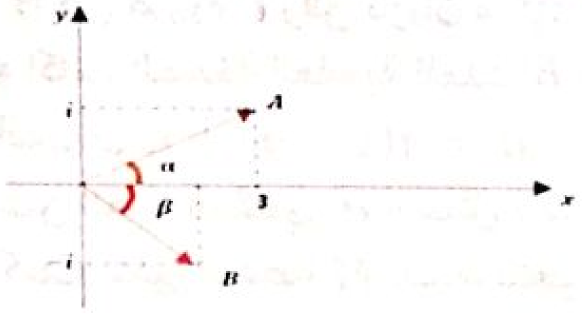
1. مثل هذه الأعداد بنقاط في مستو عقدي
2. جد Z_N صورة Z_A وفق دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$
3. جد Z_R ليكون الرباعي $OQNR$ متوازي أضلاع
4. أثبت تعامد المستقيمين OR , AB و أثبت أن $OR = \frac{1}{2}AB$

السؤال السابع : **لتكن الأعداد العقدية :**

$$a = 2 - 2i, b = -1 + 7i \,, c = 4 + 2i \,\,, d = -4 - 2i \,\,, \omega = -1 + 2i$$

أثبت وقوع النقاط A, B, C, D على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها $R = 5$

السؤال الثامن : **ليكن العددان العقديان z_A , z_B حيث $arg(z_A) = \alpha$ و $arg(z_B) = -\beta$ كما بالشكل :**



1. اكتب z_A , z_B بالشكل الجبري
2. اكتب $\frac{z_A}{z_B}$ بالشكل الجبري و الأسي
3. استنتج قيمة $\alpha + \beta$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

التحليل التوافقي والاحتمالات

المبدأ الأساسي في العد: إذا كان لدينا تجربة تمر بمرحلتين أو (طريقتين) m و n فإن عدد الطرق الكلية للقيام بالتجربة هي $m \times n$

مثال حديقة لها أربع أبواب بكم طريقة يمكن الدخول والخروج من باب آخر لهذه الحديقة؟

الحل: عدد طرق الدخول : 4

عدد طرق الخروج 3

حسب المبدأ الأساسي في العد :

$$12 = 3 \times 4$$

قانون العاملي: $n! = n(n-1)(n-2) \dots . \times 3 \times 2 \times 1$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

خواص :

- $n! = n(n-1)!$

$$5! = 5 \times 4!$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3!$$

- $(n+1)! = (n+1)n!$

يمكنكم الاستماع إلى الشروحات الصوتية لهذه المكثفة عبر الواتس اب على الرقم
0955186517
أو على قناة التلغرام
(المدرس فارس جقل)

مثال اختزل: $\frac{100!}{99!} = \frac{100 \times 99!}{99!} = 100$

- $0! = 1$
- $1! = 1$

سؤال : متى نستخدم العاملي؟

عندما نبدل عناصر مجموعة بين بعضها البعض. (نبادل عناصر المجموعة في أماكن تساوي عددها)

مثال: نبادل ثلاث كرات مختلفة الألوان (اخضر ● , احمر ● , أسود ●) بين بعضها البعض. بكم طريقة يمكن ذلك ؟

الحل : $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ طرق

ماهي هذه الطرق؟

● , ● , ●

● , ● , ●

● , ● , ●

● , ● , ●

● , ● , ●

● , ● , ●

6 طرق

مثـال

لدينا بطاقتان مرقمتان $[1,2]$ بكم طريقة يمكن تبديلها

الحل : طريقة $2! = 1 \times 2 = 2$

التراتيب: (القوائم دون تكرار)

بشكل عام عند اختيار جزء من مجموعة ونريد ترتيبها على أماكن عددها يساوي هذا الجزء عندها نستخدم التراتيب.. أو هو ترتيب r عنصر من مجموعة فيها n عنصر.

القانون:

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1)$$

مثال: $P_5^3 = 5 \times 4 \times 3$

مثال: لدينا عشر أشخاص نريد اختيار ثلاث أشخاص من أجل تشكيل لجنة مكونة من (مدير , نائب مدير ، أمين سر) بكم طريقة يمكن ذلك؟

الحل: نلاحظ ان الجزء الذي سنختاره من المجموعة يساوي عدد الأماكن , لذلك نستخدم قانون التراتيب.

$P_{10}^3 = 8 \times 9 \times 10 = 720$ طريقة

طريقة اخرى : عدد طرق اختيار المدير **10**

عدد طرق اختيار نائب المدير **9**

عدد طرق اختيار أمين السر **8**

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$8 \times 9 \times 10 = 720$ طريقة

التوافيق : هو عدد المجموعات الجزئية من مجموعة منتهية. أو التوفيق هو مجموعة جزئية من مجموعة منتهية.

سؤال: متى نستخدم قانون التو افيق؟

عندما لا يكون هناك أهمية للترتيب في المسألة.

القانون: $\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$ أو $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: $\binom{5}{3} = \frac{P_5^3}{3!} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$ أو $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2\times1} = \frac{20}{2} = 10$

مثال: أب لديه خمس أبناء , دُعي لحضور مباراة وقُدّمت له **4** بطاقات دعوة ، بكم طريقة يمكن لهذا الأب أن يختار **3** من أبناءه لمر افقته لحضور المباراة؟

الفكرة: نستخدم التوافيق لأنه لا يوجد اهمية للترتيب .

$\binom{5}{3} = 10$ طرق

مثال: مجموعة تضم الأرقام $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ماعدد المجموعات الجزئية من المجموعة والمكون كل منها من عنصرين.

الحـل: $\binom{5}{2} = 10$

مثال: حديقة تحوي [redacted] من 4 زهرات ، بكم طريقة يمكن ذلك؟

*عدد [redacted] 10 زهرات أي

[redacted]

مثال

صندوق [redacted]

الحل: بما [redacted]

ملاحظة..~

في مسائل السحب معاً نستخدم التوافيق.

مسألة 2017 [redacted] عن 5 أسئلة من 8 أسئلة.

① بكم [redacted]

② بكم [redacted] الأخيرة إجبارية.

الجواب [redacted]

الجواب [redacted]

هام جداً: لا تنسى مراجعة الجلسة الامتحانية في الأيام الأربعة ماقبل المادة والتي ستجدها حصرياً على صفحة الفيسبوك □

فارس جقل

مثال

احسب قيمة r إذا علمت أن:

$$\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$$

الحل: شرط الحل هو $r \le 4$ و $r \le 5$ و $r \le 6$

إذا: $0 \le r \le 4$

$$\frac{1}{\frac{4!}{r!\,(4-r)!}} = \frac{1}{\frac{5!}{r!\,(5-r)!}} + \frac{1}{\frac{6!}{r!\,(6-r)!}}$$

$$\frac{r!\ \ (4-r)!}{4!} = \frac{r!\ \ (5-r)!}{5!} + \frac{r!\ \ (6-r)!}{6!}$$

$$\frac{(4-r)!}{4!} = \frac{(5-r)(4-r)!}{5\times 4!} + \frac{(6-r)(5-r)(4-r)!}{6\times 5\times 4!}$$

(نختصر $r!$)

نخرج $\frac{(4-r)!}{4!}$ عامل مشترك ونقسم عليه

$$1 = \frac{(5-r)}{5} + \frac{(6-r)(5-r)}{6\times 5}$$

$$30 = 30 - 6r + 30 - 11r + r^2$$

$$r^2 - 17r + 30 = 0$$
$$(r - 15)(r - 2) = 0$$

مقبول $r = 2$ ، مرفوض $r = 15$

سؤال امتحاني: رف يحوي 7 كتب لمؤلفين ، 3 كتب للمؤلف A و 4 للمؤلف B .

① بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B.

② بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية.

الحل: ① عدد طرق اختيار الكتاب الأول 4

عدد طرق اختيار الكتاب الثاني 3

عدد طرق اختيار الكتاب الثالث 2

عدد طرق اختيار الكتاب الرابع 4

عدد طرق اختيار الكتاب الخامس 3

عدد طرق اختيار الكتاب السادس 2

عدد طرق اختيار الكتاب السابع 1

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$$4 \times 3 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 576$$ طريقة

② عدد طرق اختيار الكتاب الأول 1

عدد طرق اختيار الكتاب الثاني 6

عدد طرق اختيار الكتاب الثالث 5

عدد طرق اختيار الكتاب الرابع 4

عدد طرق اختيار الكتاب الخامس 3

عدد طرق اختيار الكتاب السادس 2

عدد طرق اختيار الكتاب السابع 1

حسب المبدأ الأساسي في العد:

$$1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$ طريقة

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة (نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل) على الفيس بوك

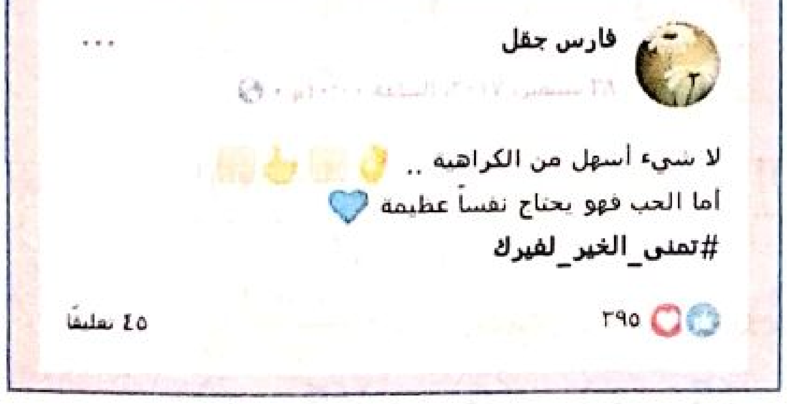
تجربة برنولي

نستخدم تجربة برنولية عندما نقوم باختبار ما:

يكون عدد مرات تكرار التجربة n مرة ((على نحو مستقل)).

ونهتم بوقوع حدث محدّد احتمال وقوعه (p) واحتمال عدم وقوعه q.

ونريد حساب احتمال تحقق الحدث عدداً k من المرات .



مثال: في تجربة رمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات ، احسب احتمال الحصول على الوجه H مرتين.

الحل:

قانون برنولي: (القانون الحداني)

$$P(X=k)=\binom{n}{k}P^k q^{n-k}$$

$q=1-p$

$$n=3\ ,\quad K=2\ ,\quad P=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}$$

$$=3.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

مثال دورة 2017 الأولى

لدينا تجربة إلقاء قطعة نقود 3 مرات متتالية وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار وليكن احتمال ظهور الشعار $\frac{1}{3}$. والمطلوب:

ما هي قيم المتغير العشوائي، نظم جدولاً بها. وأحسب توقعه الرياضي وتباينه.

$$n=3\ ,\ P=\frac{1}{3}\quad ,\ q=\frac{2}{3}$$

$$k=X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$$

$$P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=1.1.\frac{8}{27}=\frac{8}{27}$$

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=3.\frac{1}{3}.\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=3.\frac{1}{9}.\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{27}$$

$$E(X)=\sum_{1}^{n}\mathrm{r}_i.P(X=\mathrm{r}_i)$$

$$=0+\frac{12}{27}+\frac{12}{27}+\frac{3}{27}=\frac{27}{27}=1$$

r_i	0	1	2	3
$\mathrm{P}(\mathrm{x}=\mathrm{r}_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

أو طريقة ثانية حسب برنولي:

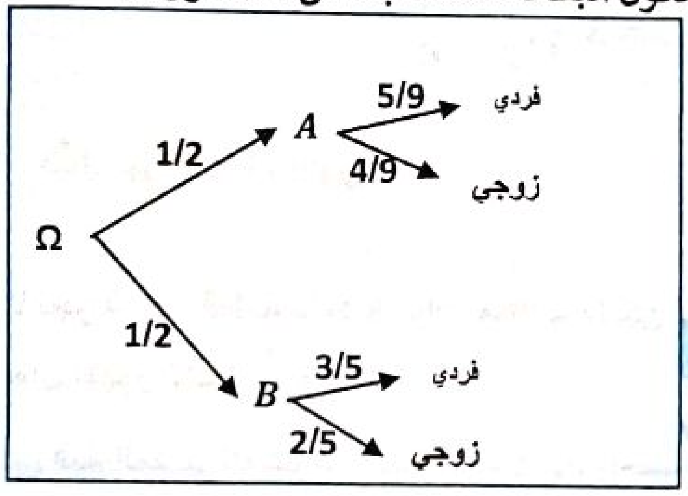
$$E(X)=n.P=3.\frac{1}{3}=1 \qquad V(X)=n.p.q=3.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

ملاحظة هامة:

عندما يكون في التجربة صندوقين متماثلين ونختار احدهما فإننا نعطي لكل صندوق احتمال $\frac{1}{2}$ وننظم مخطط...

مثـــال امتــحـــانـي

لدينا صندوقان B, A :
يحوي الصندوق A بطاقات مرقمة من 1 إلى 9 و يحوي الصندوق B بطاقات مرقمة من 1إلى 5 ..نختار أحد الصندوقين عشوائياً ونسحب منه بطاقة فإذا كان رقم البطاقة المسحوبة زوجي ، فما احتمال أن تكون البطاقة قد سحبت من الصندوقA.



بفرض C حدث البطاقة المسحوبة زوجي.
بفرض A حدث البطاقة من A.

$$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(c)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}=\cdots$$

أحسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة فردية.
بفرض E حدث ظهور بطاقات فردية.

$$P(E)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=$$

ما احتمال أن تكون البطاقة قد سحبت من B علماً أنها تحمل رقم فردي.

قانون الاحتمال الشرطي :

$$P\big((A|B)\big)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

بفرض B حدث البطاقة المسحوبة من B.
بفرض E حدث البطاقة تحمل رقم فردي.

$$P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}=\cdots$$

مسألة امتــحـــانـيـة

ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية والمطلوب:
1. ما عدد الاختبارات في هذه التجربة.
2. أكمل الجدول المجاور.
3. أحسب التوقع والتباين و الانحراف المعياري للمتحول العشوائي X.

					n
K	0	1	2	3	4
$P(x=k)$					$\frac{16}{81}$

الحـــل:

1. عدد الاختبارات : $n=4$
2. نحتاج P: $P(X=4)=\binom{4}{4}P^4(1-P)^0$

$$\frac{16}{81}=1.P^4\Rightarrow P^4=\frac{16}{81}\Rightarrow P=\frac{2}{3}$$

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$=1.1.\frac{1}{81}=\frac{1}{81}$$

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$=4.\frac{2}{3}.\frac{1}{27}=\frac{8}{81}$$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=6\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{24}{81}$$

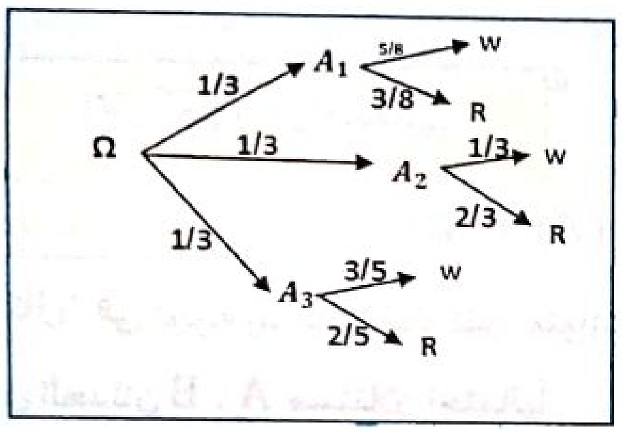
$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1=4\cdot\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{3}=\frac{32}{81}$$

$$E(X)=n\,p=4\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

$$V(X)=n\,p\,q=4\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

مثال



في المخطط الشجري المرسوم جانباً:

الرمز w يدل على عدد الكرات البيضاء.

والرمز R يدل على عدد الكرات الحمراء.

نحتار عشوائياً كرة واحدة والمطلوب:

① ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء؟

② إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء، ما احتمال أن تكون من الصندوق الأول.

الحل :

①
$$P(R)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{2}{9}+\frac{2}{15}$$

②
$$P(A_1|R)=\frac{P(A_1\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{1}{3}\frac{3}{8}}{\frac{1}{3}\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{2}{5}}$$

منشور ذي الحدين

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}(a)^n(b)^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\cdots\ldots+\binom{n}{n}a^0b^n$$

مثال: انشر $(x+2)^5$

$$=\binom{5}{0}(x)^5(2)^0+\binom{5}{1}(x)^4(2)^1+\binom{5}{2}(x)^3(2)^2+\binom{5}{3}(x)^2(2)^3$$
$$+\binom{5}{4}(x)^1(2)^4+\binom{5}{5}(x)^0(2)^5$$
$$=x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$$

مثال هام

أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$$

قانون الحد العام

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

$$T_r = \binom{6}{r}(x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$
$$= \binom{6}{r}(x)^{12-2r}\left(\frac{1}{x^r}\right)$$
$$= \binom{6}{r}(x)^{12-2r}(x)^{-r}$$
$$= \binom{6}{r}(x)^{12-3r}$$

من أجل الحد المستقل عن x يكون :

$$12 - 3r = 0 \Rightarrow r = 4$$

$$T_4 = \binom{6}{4}(x^2)^{12-3(4)} = 15$$

الاستقلال الاحتمالي

شرط الاستقلال الاحتمالي: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

مثال: في تجربة رمي ثلاث قطع نقود متوازنة معاً . إذا كان الحدث A ظهور شعار واحد على الأكثر والحدث B ظهور كتابتين فقط

هل الحدثان B ، A مستقلان احتمالياً.

الحل:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix}(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T) \\ ,(T,T,H),(T,T,T)\end{matrix}\right\}$$

$$A = \{(H,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,T,T)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{8}$$

$$B = \{(H,T,T),(T,T,H),(T,H,T)\}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}$$

$$A \cap B = \{(H,T,T),(T,T,H),(T,H,T)\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

نعوض في الشرط : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$$\frac{3}{8} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8} \neq \frac{3}{16}$$

المساواة خاطئة فالحدثان غير مستقلان احتمالياً

تمرين دورة2017

نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية يساوي $\frac{1}{3}$.
نعرف X متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار.
اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل:

$$X(\Omega) = \{0\,,1\,,2{,}3\}$$

$$P(X=0) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

(T,T,T)

$$P(X=1) = \left(\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}\right).3 = \frac{12}{27}$$

$(H,T,T)(T,H,T),(T,T,H)$

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3}\right).3 = \frac{6}{27}$$

$(H,T,H)\times 3$

$$P(X=3) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{27} \quad (H,H,H)$$

r_i	0	1	2	3
$P(X=r_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
r_i^2	0	1	4	9

التوقع:

$$E(X) = \sum_{r=1}^{n} r_i\,.P(X=r_i)$$

$$= 0.\frac{8}{27} + 1.\frac{12}{27} + 2.\frac{6}{27} + 3.\frac{1}{27}$$

$$= \frac{27}{27} = 1$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = 0 + \frac{12}{27} + \frac{24}{27} + \frac{9}{27} = \frac{45}{27}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{45}{27} - 1 = \frac{18}{27} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

مسألة امتحانية

يحوي مغلف تسع بطاقات مرقمة بالأرقام $(0,0,0,0,0,1,1,1,1)$ نسحب من المغلف ثلاث بطاقات معاً
وليكن Xمتغيراً عشوائياً يدل على مجموع أرقام البطاقات المحسوبة ، اكتب قيم المتغير العشوائي X ثم أحسب توقعه الرياضي.

$$X(\Omega) = \{0,1,2{,}3\}$$

$P(X=2)=\frac{\binom{5}{1}.\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{30}{84}$, $P(X=1)=\frac{\binom{5}{2}.\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{40}{84}$, $P(X=0)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{10}{84}$

(1,0,1) (0,0,1) (0,0,0)

$$P(X=3)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{4}{84}$$

التوقع الرياضي:

r_i	0	1	2	3
$P(X=r_i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

$$E(X)=\sum_{r=1}^{r}\mathrm{r}_i\,.\,P(X=\mathrm{r}_i)$$

$$E(X)=0.\frac{10}{84}+1.\frac{40}{84}+2.\frac{30}{84}+3.\frac{4}{84}$$

$$=\frac{40+60+12}{84}=\frac{112}{84}$$

أعد المسألة السابقة في حالة السحب على التتالي دون إعادة. $\mathbf{X}(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

$$P(X=0)=\frac{5}{9}.\frac{4}{8}.\frac{3}{7}$$

(0,0,0)

$$P(X=1)=\left(\frac{5}{9}.\frac{4}{8}.\frac{4}{7}\right)\times 3$$

$(0,0,1)\times 3$

$$P(X=2)=\left(\frac{4}{9}.\frac{3}{8}.\frac{5}{7}\right)\times 3$$

$(1,1,0)\times 3$

$$P(X=3)=\frac{4}{9}.\frac{3}{8}.\frac{2}{7}$$

(1,1,1)

تمرين هام يحوي فخ امتحاني: يحوي مغلف اربع بطاقات مرقمة بالأرقام 1 ,1 ,1 ,0 نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع إعادة ليكن X متغير عشوائي يدل على مجموعهما. أكتب قيم المتغير العشوائي X ثم أحسب توقعه الرياضي.

$$\mathbf{X}(\Omega)=\{0,1,2\}$$

$$P(X=0)=\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

(0,0)

$$P(X=1)=\left(\frac{3}{4}.\frac{1}{4}\right).2=\frac{6}{16}$$

$(1,0)\times 2$

$$P(X=2)=\frac{3}{4}.\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$

(1,1)

وننظم جدول....

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

مثــال: يحوي صندوق 8 بطاقات متماثلة ومرقمة كما يلي: $3,3,3,3,2,2,0,0$ نسحب **بطاقتين** على التتالي دون إعادة.

1- إذا علمت أن البطاقتان المسحوبتان تحملان الرقم ذاته فما احتمال أن يكون هذا الرقم هو 3؟

الحـل :

بفرض A حدث البطاقتان تحملان الرقم ذاته

بفرض B حدث أن يكون هذا الرقم هو 3

$$P((B|A))=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$A=\{(0,0),(2,2),(3,3)\}$$

$$=\frac{\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}}=\cdots$$

2-إذا علمت أن البطاقتان المسحوبتان مختلفتان فما احتمال أن يكون مجموعهما زوجي؟

بفرض C حدث البطاقتان المسحوبتان مختلفتان

بفرض D حدث أن يكون مجموعهما زوجي

الحـل:

$$P((D|C))=\frac{P(D\cap C)}{P(C)}$$

$$C=\{(0,2),(0,3),(2,3)\}$$

$$=\frac{2\left(\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{7}\right)}{2\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{8}\right)+2\left(\frac{2}{8}\cdot\frac{4}{7}\right)+2\left(\frac{2}{8}\cdot\frac{4}{7}\right)}$$

هام : تابعوا نماذج و توقعات جميع المواد على صفحة (مركز أونلاين التعليمي)على الفيس بوك

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

بنك المسائل الهامة

السؤال الأول : نلقي 5 قطع نقود متوازنة في آن معاً .. احسب احتمال ظهور الوجه H مرتين على الأقل .

السؤال الثاني : نلقي 5 قطع نقود متوازنة في آن معاً ..وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار نظم جدول القانون الاحتمالي واحسب التوقع و التباين . .

السؤال الثالث : ليكن X متغيرعشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية ، أكمل الجدول التالي :

1) ما عدد النجاحات ؟
2) ما التوقع الرياضي للمتحول ؟
3) أوجد التباين و الانحراف .

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

السؤال الرابع : صندوق يحوي 3 كرات حمراء و 2 بيضاء ، نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة وليكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أكمل الجدول المجاور و احسب التوقع و التباين .

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	

السؤال الخامس : صندوق يحوي 4 كرات زرقاء و 3 خضراء و 1 صفراء ، نسحب من الصندوق ثلاث كرات عشوائياً على التتالي دون إعادة ..وليكن X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الزرقاء بين الكرات المسحوبة .

أعد المسألة السابقة في حال السحب معاً و على التتالي مع إعادة .

السؤال السادس : صندوق يحوي 3 كرات حمراء و 2 بيضاء و 1 سوداء ، نسحب من الصندوق 3 كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة .

1) كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟
2) كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه .

أعد المسألة السابقة في حال السحب دون إعادة و في حال السحب معاً .

السؤال السابع : لدينا 7 كتب مختلفة 4 منها للمؤلف A و 3 منها للمؤلف B بكم طريقة يمكن ترتيبها على رف على أن يكون ثلاث كتب للمؤلف A على أحد الطرفين ؟؟

السؤال الثامن : لدينا الأعداد {0,2,3,4,5,6} بكم طريقة يمكن تشكيل عدد من ثلاث أرقام على أن يكون من مضاعفات العدد 5 و أصغر من 500؟؟

السؤال التاسع : يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء . عدد الكرات الحمراء يساوي ضعفي الكرات البيضاء

1. نسحب عشوائياً كرة ..ما احتمال أن تكون حمراء اللون ؟
2. نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي و مع إعادة .. ونعرف x المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث . عيّن قيم X و اكتب قانونه الاحتمالي واحسب توقعه و تباينه .
3. أعد المسألة إذاكان عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف الكرات البيضاء

السؤال العاشر : يشتري أحد المحلات 80% من قطع الغيار التي يحتاجها من المصنع A و يشتري الباقي منها من المصنع B ..نفترض أن نسبة الإنتاج المعيب في المصنع A هي 5% وفي المصنع B هي 8% .. نختار عشوائياً قطعة غيار من المحل

1. أوجد احتمال أن تكون القطعة معيبة .
2. إذا كانت القطعة معيبة ، فما احتمال أن تكون من انتاج المصنع B .

السؤال الحادي عشر : صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة الصندوق (I) يحتوي كرات مرقمة 1,2,3 و الصندوق (II) يحتوي كرات مرقمة 1,2 نسحب عشوائياً كرة من الصندوق (I) ونسحب عشوائياً كرة من الصندوق (II) فإذا كان X المتغير العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين من الصندوقين ..

اكتب مجموعة قيم X وعين جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه و تباينه .

السؤال الثاني عشر : X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية الجدول غير المكتمل المجاور ل X.

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$		

1. ماعدد الاختبارات في التجربة ؟ واكمل الجدول .
2. ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X؟وما تباين المتحول العشوائي X

السؤال الثالث عشر :

1. أوجد الحد الذي يحوي x^3 في منشور ذي الحدين $(x^2+\frac{1}{x})^9$
2. و الحد المستقل عن x في منشور $(x-\frac{1}{x^2})^{12}$
3. عين في منشور $\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ الحد الذي يحوي x^4 , هل يوجد حد مستقل عن x ؟ علل ذلك .

السؤال الرابع عشر : ماهي أمثال الحد x^2y في منشور $(\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y})^8$

السؤال الخامس عشر : نتأمل صندوقين يحتوي الصندوق الأول على 3 كرات مرقمة بالأعداد 1, 2, 3 و يحوي الصندوق الثاني 4 كرات مرقمة بالأعداد 2, 3, 4, 5 نسحب عشوائيا كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني و المطلوب :

1. اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار
2. ليكن A الحدث : (إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل رقم 3)
   وليكن B الحدث : (مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماما من 5)
   هل الحدثان A, B مستقلان احتماليا ؟ علل اجابتك
3. نعرف متحولا عشوائيا X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين
   اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي و تباينه

السؤال السادس عشر : لتكن المجموعة $S=\{2,3,5,6,7,9\}$

1. ماعدد الأعداد المكونة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى و أرقامها مأخوذة من S
2. ماعدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة و أرقامها مأخوذة من S و كل عدد منها من مضاعفات العدد 5 و أصغر من 500

السؤال السابع عشر : يواجه حارس مرمى عددا من ضربات الجزاء ، إذا صدّ ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصدّ ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.8 و إذا لم يصدّ ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصدّ ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6
نفترض أن احتمال أن يصد أول ضربة جزاء يساوي 0.7 و ليكن A_n الحدث (يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n)
والمطلوب : 1. احسب $P(A_2|A_1)$ و $P(A_2|A_1')$ ثم استنتج أن $P(A_2)=0.74$
2. نعرف $P_n=P(A_n)$:
1) برهن أن $P_{n+1}=(0.2)P_n+0.6$
2) لنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ بالصيغة $u_n=P_n-0.75$ بين أن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية أساسها 0.2
واستنتج عبارة P_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} P_n$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

السؤال الثامن عشر : يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء و خمس كرات بيضاء عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين . يسحب اللاعب كرتين على التتالي دون أعادة ..ما احتمال ان يحصّل اللاعب نقطة واحدة فقط

السؤال التاسع عشر : لدينا n صندوقاً $u_1, u_2, \dots, u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء و كرة واحدة حمراء وكل صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء . نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا ...، نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n نرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)

1. احسب $P(R_1)$ ثم أثبت أن $P(R_2) = \frac{1}{4}P(R_1) + \frac{1}{4}$
2. أثبت أن $P(R_k) = \frac{1}{4}P(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$ في حالة $2 \le k \le n$
3. نعرف $x_k = P(R_k) - \frac{1}{3}$
   1) أثبت أن المتتالية $(x_k)_{k\ge1}$ هندسية . عيّن أساسها و حدها الأول
   2) أكتب x_k بدلالة k واستنتج $P(R_k)$ بدلالة k

السؤال العشرون : يحتوي صندوق على خمس كرات ، ثلاث حمراء اللون وتحمل الأرقام 2 ,1 ,0 وكرتان بيضاء اللون وتحمل الأرقام 1 ,0 نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة من هذا الصندوق

1. الحدث A : " الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته " ، احسب $P(A)$
2. نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين عيّن مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي ، ثم احسب توقعه الرياضي .

السؤال الواحد و العشرون : يسدّد لاعب كرة قدم ضربتي جزاء احتمال تسجيل الأولى $\frac{8}{10}$ إذا سجل الأولى فإن احتمال تسجيل الثانية $\frac{7}{10}$ و إذا أخفق بالأولى فإن احتمال تسجيل الثانية $\frac{6}{10}$ بفرض A التسجيل ، B الإخفاق

المطلوب : 1. ارسم مخطط شجري احسب احتمال تسجيل الركلة الثاني

2. إذا علمت أنه سجل في الركلة الثانية ما احتمال التسجيل في الأولى

السؤال الثاني و العشرون : ترمي سعاد حلقتين لادخالهما في وتر ، احتمال نجاح سعاد في الحلقة الأولى يساوي احتمال فشلها . إذا نجحت بالحلقة الأولى فإن احتمال نجاحها بالثانية $\frac{1}{3}$ و إذا فشلت في الأولى فإن احتمال فشلها في الثانية $\frac{4}{5}$ و المطلوب : 1. ارسم مخططاً شجرياً ثمّ احسب احتمال نجاح سعاد في الحلقة الثانية

2. اذا علمت أنها نجحت في الحلقة الثانية ما احتمال نجاحها في الأولى (النجاح A ، الفشل B)

السؤال الثالث و العشرون : I صندوق أول يحوي 3 كرات حمراء R و واحدة زرقاء B و II صندوق ثاني يحوي كرتين حمراء R وواحدة زرقاء B ، نسحب كرة من الصندوق الأول و نضعها في الثاني ثم نسحب كرة من II و المطلوب : 1. ارسم مخططاً شجرياً ثمّ احسب احتمال أن تكون الثانية حمراء

2. إذا علمت أن الثانية حمراء ما احتمال الأولى حمراء

السؤال الرابع و العشرون : نلقي قطعة نقود C_1 متوازنة ثم نلقي قطعة نقود C_2 غير متوازنة . احتمال ظهور الشعار $\frac{2}{3}$ و المطلوب : 1. ارسم مخطط شجري

X.2 متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الشعار احسب $E(X), V(X)$

السؤال الخامس و العشرون : يسدد لاعب كرة قدم ضربتي جزاء على هدف . احتمال تسجيل الهدف في الضربة الأولى A يساوي $\frac{3}{5}$ و في الثانية B يساوي $\frac{4}{5}$ والمطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. X متحول عشوائي يدل على عدد مرات تسجيل الهدف . احسب $E(X)$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

السؤال السادس و العشرون : يتواجه لاعبان A, B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من خمس أدوار يكسب اللاعب A الدور بالاحتمال $\frac{2}{3}$ و يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار . ما احتمال فوز B

السؤال السابع و العشرون : صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 5 كرات خضراء نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً .X متحول عشوائي يأخذ القيمة 5 عند ظهور ثلاث كرات حمراء و يأخذ القيمة 3 عند ظهور كرتين حمراء وكرة خضراء و يأخذ القيمة 0 فيما عدا ذلك .احسب $E(X)$

السؤال الثامن و العشرون : في مدرستنا يمارس %30 لعبة التنس نسبة الذكور %60 و %55 لايمارسون التنس . ما احتمال اختيار طالبة لاتمارس التنس

السؤال التاسع و العشرون : يحوي صندوق كرتين حمراء R وكرتين بيضاء W نسحب كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها ثم نضاعف عدد الكرات منها ثم نسحب كرة ثانية و المطلوب :

1. ارسم مخطط شجري
2. احسب احتمال الثانية حمراء
3. اذا علمت أن الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الأولى حمراء

السؤال الثلاثون : نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير و نائب مدير و أمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص . بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة علماً بأن في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

السؤال الواحد و الثلاثون : يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام $1, 2, 3, 4, 5$ نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع الإعادة

1. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب
2. كم عدد النتائج المختلفة و التي تشمل على كرتين مجموعهما عدد فردي

السؤال الثاني و الثلاثون : يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند ادخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أيا من القيم : $0, 1, 2, 3, 4, 5$

1. ماهو عدد الرمازات التي تصلح للقفل
2. ماهو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى

السؤال الثالث و الثلاثون :

في الشكل المجاور نتأمل شبكة منتظمة من المستقيمات المتوازية تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع والمطلوب,
احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة

السؤال الرابع و الثلاثون : أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X,Y) علما أن المتحولين العشوائيين Y,X مستقلان احتمالياً

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

السؤال الخامس و الثلاثون :

نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربع وجوه ملونة بالأسود و وجهان ملونان بالأحمر نلقي الحجر خمس مرات متتالية وليكن X متغير عشوائي يقرن بنتيجة التجربة عدد الوجوه السوداء والمطلوب:

1. اكتب مجموعة قيم المتغير X
2. احسب قانون X الاحتمالي ونظم جدولاً به

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

السؤال السادس و الثلاثون :

نملأ الخانات ☐☐☐☐ بأحد العددين $+3$ و -3 والمطلوب:

1. ما احتمال أن يكون المجموع صفر
2. ما احتمال ألا يظهر العدد ذاته بخانتين متجاورتين
3. ليكن X متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور العدد $+3$ في الخانات الأربعة ، نظم جدول القانون الاحتمالي

السؤال السابع و الثلاثون

لتكن C دائرة مركزها O , رسمنا فيها ستة أقطار مختلفة , لتكن $S = \{A_1, A_2, \dots, A_{12}\}$ مجموعة أطراف هذه الأقطار . والمطلوب :

1. ما عدد المثلثات التي رؤوسها من عناصر S ؟
2. ماعدد المضلعات الرباعية التي رؤوسها من عناصر S ؟
3. كم مستطيل رؤوسه من عناصر S ؟

السؤال الثامن و الثلاثون

لدينا صندوق يحتوي على ثلاث بطاقات ملونة , واحدة زرقاء تحمل الرقم (2) وبطاقتان حمراوان تحملان الرقمين (0) و (1) , نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة , ونعرّف المتحولين العشوائين X و Y كالآتي :

X يدل على عدد البطاقات الحمراء المسحوبة .

Y يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين . والمطلوب:

1. اكتب مجموعة قيم X وقانونه الاحتمالي .
2. اكتب مجموعة قيم Y وقانونه الاحتمالي .
3. اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X, Y) هل المتحولان X و Y مستقلين احتمالياً ؟ لماذا؟

مخطّط حالات السحب

نوع السحب	الترتيب	القانون	المقام	العكس
السحب معاً	لا يوجد أهمية للترتيب	توافيق $\frac{(\ )}{(\ )}$	توافيق	لا يوجد عكس (3,2) هي نفسها(2, 3)
على التتالي دون إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدا الأساسي $\frac{}{5} \times \frac{}{4}$ الكسور بحسب عدد الأشياء المسحوبة	يتناقص	يوجد عكس (2,3) مختلفةعن (3,2)
على التتالي مع إعادة	يوجد أهمية للترتيب	المبدأ الأساسي $\frac{}{5} \times \frac{}{5}$ الكسور بحسب عدد الأشياء المسحوبة	لا يتناقص	يوجد عكس (2,3) مختلفة عن (3,2)

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

ملحق تدريبي .. الجزء الثاني

المسألة الأولى :

ليكن العدد المركب $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{i+1}$. اكتب z بالشكل الأسي ثم أوجد كلا من جذريه التربيعيين بالشكل الأسّي

المسألة الثانية :

هام : مراجعة الاختبارات الموجودة في مجموعة (نماذج واختبارات الأستاذ فارس جقل) على الفيس بوك

لتكن الأعداد $z_1 = 1 + i\sqrt{3}\ , z_2 = 1 - i\ , z_3 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

1) اكتب بالشكل الأسي كل من $z_3\ , z_2\ , z_1\ , \frac{z_1}{z_2}\ , z_1 . z_2$

2) اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}, z_1 . z_2$, استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ ثم احسب $(z_2)^6$

المسألة الثالثة :

مغلف فيه 6 بطاقات متماثلة تحمل الأرقام $1\ ,1\ ,0\ ,0\ ,-1\ ,-1$ نسحب من المغلف بطاقتين على التتالي مع الإعادة :

1) إذا كان الحدث A الحصول على بطاقتين مجموع رقميهما 0 والحدث B الحصول على بطاقتين جداء رقميهما (0)
هل الحدثان A, B مستقلان احتماليا؟

2) إذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين 0 فما احتمال أن يكون جداء رقميهما 0

3) نعتبر X متغيرا عشوائيا يدل على جداء رقمي البطاقتين المسحوبتين ، أوجد مجموعة قيم X واكتب جدول التوزيع الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

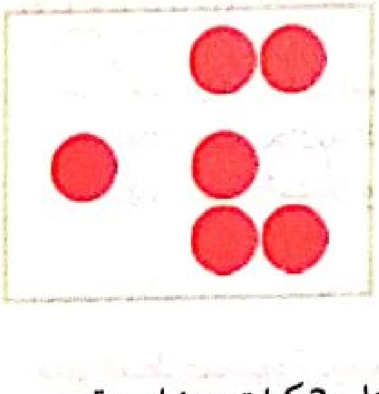
المسألة الرابعة :

ليكن n عددا طبيعيا $2 \le n \le 8$

1) يحوي صندوق على كرات متماثلة 3 كرات بيضاء و n كرة حمراء نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة و لنفترض أن الحدث A إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل حمراء و الحدث B الكرتان المسحوبتان من لون واحد بحيث $P(A|B) = \frac{2}{3}$ والمطلوب احسب قيمة n

2) بفرض أن $n = 4$ ليكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة ، عيّن مجموعة قيم المتغير العشوائي X ثم اكتب جدول قانونها الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

المسألة الخامسة :



يحوي صندوق 10 كرات متماثلة منها 4 بيضاء و 6 حمراء

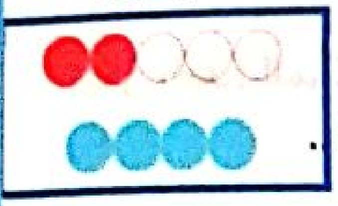
1) نسحب عشوائيا من الصندوق ثلاث كرات في آن واحد
أ- احسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء
ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرة حمراء

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يقرن بكل عملية سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة ،
نظم جدول القانون الاحتمالي لـ X، واحسب توقعه الرياضي

3) نسحب من الصندوق في أن واحد 3 كرات خمس مرات على التتالي مع الإعادة ، أحسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء مرتين بالضبط.

المسألة السادسة :

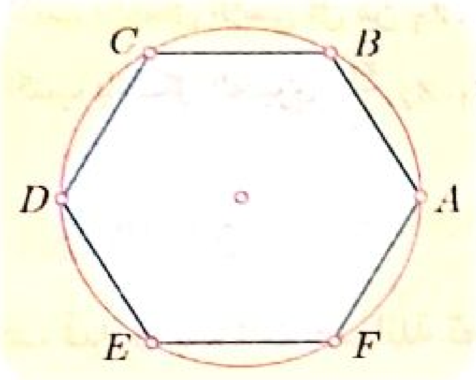
يحوي صندوق(9) كرات متماثلة (2 حمراء) و (3 بيضاء) و (4 زرقاء) نسحب من الصندوق عشوائياً كرتين على التتالي مع إعادة :



1) ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين .
2) نسحب كرة واحدة ..نعطي للكرة الحمراء القيمة (0) والكرة البيضاء القيمة (1) و الكرة الزرقاء القيمة (2) . نعرّف متغيرا عشوائيا X يدل على رقم الكرة المسحوبة..اكتب جدول توزيعه و احسب توقعه الرياضي .

المسألة السابعة :

ليكن كثير الحدود $F(x) = (1+ax)^5(1+bx)^4$ حيث a, b عددان طبيعيان فإذا علمت أن أمثال x تساوي 62 فما هي القيم الممكنة للمجموع $a+b$ ؟



المسألة الثامنة :

في الشكل المرسوم جانبا لدينا ست نقاط A, B, C, D, E, F موزعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدس منتظم نجري التجربة الآتية :
نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلث :
1) ماعدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟
2) ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟
ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب ؟

المسألة التاسعة :

$ABCDE$هرم قاعدته مربع $ABCD$ و (EA) يعامد القاعدة ..نفرض المعلم $(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$

أوجد $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED}$ ، ثم استنتج $\cos(BED)$ ،ثم عين G مركز الأبعاد للنقاط $(A,1), (B,1), (C,1)$ ، $(D,1), (E,4)$

المسألة العاشرة :

$ABCDEFGH$مكعب . L, K, J, I هي بالترتيب منتصفات $[AB], [BC], [CG], [AE]$

ولتكن Mالنقطة المحققة للعلاقة $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$

جد إحداثيات جميع النقاط ثم أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{LM}$مرتبطة خطياً .

المسألة الحادية عشر :

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 1 فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منتصف $[FH]$

1) جد إحداثيات الرؤوس وأثبت أن المثلث ABG قائم واحسب مساحة المثلث ABG
2) جد معادلة المستوي (ABG) واحسب بعد F عن (ABG) واستنتج حجم $ABGF$
3) أعط تمثيلا وسيطيا لكل من (IK) و (FJ) وهل تقع النقاط F, K, J, I في مستو واحد .

المسألة الثانية عشر :

وُضِعت أربعة أسئلة في مسابقة ،لكل سؤال منها خمس إجابات مقترحة ، واحدة منها فقط صحيحة ،يجيب متسابقٌ عشوائياً عن هذه الأسئلة الأربعة

1) مااحتمال أن يجيب هذا المتسابق عن السؤال الأول بشكل صحيح ؟
2) نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على عدد الإجابات الصحيحة التي يُجيب عنها المتسابق ، اكتب قيم المتحول العشوائي X ، واحسب توقعه الرياضي وتباينه
3) يُعد ناجحاً في المسابقة من يُجيب عن ثلاثة أسئلة على الأقل بشكل صحيح ، مااحتمال نجاح هذا المتسابق ؟

المسألة الثالثة عشر :

لتكن النقاط : $A(2,1,3)$, $B(1,0,-1)$, $C(4,0,0)$, $D(0,4,0)$, $E(1,-1,1)$

1) هل C, D, E تقع على استقامة واحدة..أوجدالمعادلات الوسيطية للمستقيم (CD)
2) أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على (CDE) ثم جد معادلة (CDE) و استنتج المسقط القائم ل A على (CDE)
3) أوجد عددين a , b يحققان $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ ..هل A , B , C , D تقع في مستو واحد
4) عين إحداثيات S منتصف $[AB]$ و S' نظيرة S بالنسبة إلى C

المسألة الرابعة عشر :

لدينا الشعاعان $\vec{v}(1,3,2)$,$\vec{u}(2,1,-1)$ و النقطة $A(1,-1,3)$, $B(1,0,-1)$

1) بين أن $\vec{v}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطيا ثم اكتب معادلة المستوي P المار من A و الموجه بالشعاعين $\vec{v}$ و $\vec{u}$
2) أوجد معادلة المستوي Q المار من B الموازي للمستوي P ثم أوجد البعد بين P و Q و اوجد مجموعة النقاط التي تحقق $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = 0$

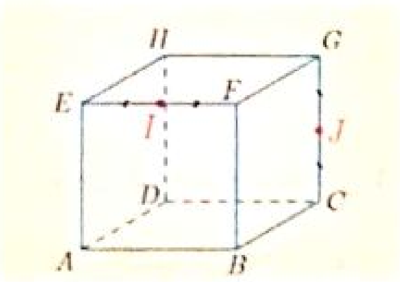
المسألة الخامسة عشر :

① نتأمل هرماً $S - ABCD$ قاعدته مربع و رأسه S و طول كل حرف من حروفه و أضلاع قاعدته يساوي a

أحسب $\overrightarrow{SA} . \overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SA} . \overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SA} . \overrightarrow{AC}$

② $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$ احسب

$\overrightarrow{EI} . \overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EI} . \overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{EI} . \overrightarrow{GJ}$, $\overrightarrow{EI} . \overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{JH} . \overrightarrow{JD}$



المسألة السادسة عشر :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط $A(-1,2,1)$, $B(2,1,3)$, $C(0,-1,2)$ ولتكن (P) مجموعة النقاط M من الفضاء بحيث $AM = BM$

1) بيّن أن (P) هو المستوي الذي معادلته : $3x - y + 2z - 4 = 0$
2) عيّن معادلة المستوي (Q) الذي يمر من A و يوازي (P)
3) أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يمر من C و يعامد (P)
ب- عيّن إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D)
ج- احسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (D)
4) عيّن معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AC]$

المسألة السابعة عشر : نتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ و المستويات :

$$\begin{cases} P : 2x - y + 2z - 2 = 0 \\ Q : x + y + z - 1 = 0 \\ R : x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

و المطلوب :

1. أثبت أن المستويين P , Q متقاطعان بفصل مشترك Δ اكتب تمثيلا وسيطيا له
2. تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A
3. أثبت أن المستويات P , Q , R تتقاطع بنقطة I يطلب تعيين إحداثياتها
4. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ

المسألة الثامنة عشر :

صندوق يحتوي على خمس كرات منها كرتان حمراوان وثلاث كرات زرقاء ، نكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة . عيّن مجموعة القيم التي يأخذها X واكتب جدول القانون الاحتمالي للمتحول X و احسب توقعه الرياضي

المسألة التاسعة عشر :

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

نتأمل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقاط A , B , C التي تمثلها الأعداد العقدية : $a = 6 - i$, $b = -6 + 3i$, $c = -18 + 7i$ بالترتيب و المطلوب :

1. أحسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ و استنتج أن النقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة
2. بفرض $d = 1 + 6i$ العدد العقدي الممثل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O و زاويته θ أحسب θ
3. جد العدد العقدي n الممثل للنقطة N ليكون الرباعي $OAND$ مربعاً

المسألة العشرون :

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان $A(2,1,-2)$, $B(-1,2,1)$
و المستوي $P: 3x - y - 3z - 8 = 0$ و المطلوب :

1. أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P
2. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ، ثم عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P

المسألة الواحدة والعشرون :

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطتين $A(1,0,1), B(0,1,1)$

1. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A و يقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$.
2. أثبت أن المستقيمين d ,(AB) متعامدان .

المسألة الثانية و العشرون :

نتأمل في معلم متجانس $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$ والمطلوب :

1. اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط A, C, H, F, D
2. اكتب معادلة للمستوي (ACH)
3. أثبت أن المستوي P الذي معادلته $P: \ -2x + 2y - 2z + 1 = 0$ يوازي المستوي (ACH)
4. بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن F, I, D على استقامة واحدة
5. اكتب معادلة للكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ وبيّن أن المستوي (ACH) يمس الكرة S

المسألة الثالثة والعشرون :

جد مجموعة النقاط بالفراغ التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\|$$

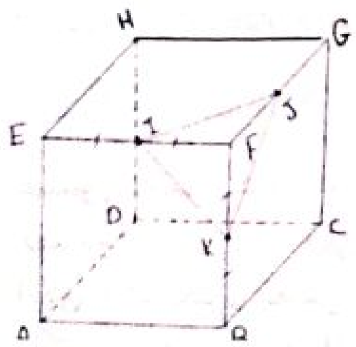
المسألة الرابعة و العشرون :

عيّن مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

المسألة الخامسة و العشرون : $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 ولتكن النقاط I, J, K

منتصفات الأحرف $[FE], [FG], [FB]$ على الترتيب
نختار معلماً متجانساً $(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$ والمطلوب :

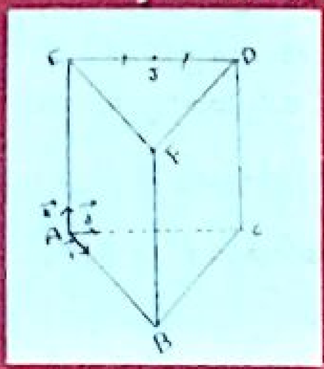


1. أوجد احداثيات رؤوس المكعب و النقاط I, J, K
2. أوجد معادلة المستوي (IJK)
3. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من F عموديا على (IJK)
4. استنتج احداثيات N المسقط القائم لـ F على المستوي (IJK)
5. احسب حجم رباعي الوجوه $(FIJK)$
6. اكتب معادلة الكرة التي مركزها F وتمس المستوي (IJK)
7. أين تقع النقطة M التي تحقق $3\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE}$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

المسالة السادسة و العشرون :

$ABCDEF$ موشور قائم قاعدته ABC مثلث قائم في A . النقطة J منتصف $[ED]$ نتأمل المعلم المتجانس $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث : $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$, $\overrightarrow{Ac} = 4\vec{j}$, $\overrightarrow{AE} = 4\vec{k}$



جد احداثيات النقاط J, E, D, C, B

جد معادلة المستوي (JBC)

اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (JC)

احسب بعد النقطة E عن المستوي (JBC)

عيّن احداثيات النقطة K (م.ا.م)للنقاط المثقلة $(J, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$

المسالة السابعة و العشرون :

في معلم متجانس لدينا النقاط $A(1, 2, 4)$, $B(1, 0, 2)$, $C(2, 2, 5)$, $M(2, 2, -1)$

جد احداثيات النقطة I منتصف $[AB]$ و النقطة D نظيرة I بالنسبة ل C

عيّن α, β إذا علمت أن $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AD}$

تحقق أن النقاط A, B, C تعين مستويا P أوجد معادلته

اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ المار من M و يعامد المستوي P

عيّن احداثيات النقطة M' المسقط القائم ل M على المستوي P

المسالة الثامنة و العشرون :

في المعلم المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط : $A([illegible], -1, -2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(1, 1, -2)$

اثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة

أثبت أن $\vec{n}(2, -1, 1)$ ناظم على المستوي (ABC) و اكتب معادلة المستوي (ABC)

لتكن G (م.ا.م) للنقاط $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 2)$ اكتب احداثيات النقطة G

أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (CG)

جد مجموعة النقاط من الفراغ M التي تحقق $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 12$

المسالة التاسعة و العشرون :

في المعلم المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطة : $A(0, 1, 1)$ و المستويان : $P_2: y + z = 4$, $P_1: x - 2y = 5$

أثبت أن المستويين متقاطعين

جد تمثيلا وسيطيا للفصل المشترك لهما Δ

اكتب معادلة المستوي Q المار من A و يعامد الفصل المشترك

أوجد احداثيات B نقطة تقاطع Q مع الفصل المشترك Δ

احسب بعد A عن الفصل المشترك Δ

المسالة الثلاثون :

في المعلم المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط : $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 2)$

اكتب معادلة المستوي (ABC)

اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ المار من (O) و يعامد المستوي (ABC)

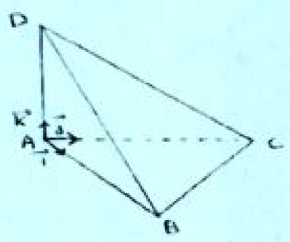
عيّن احداثيات النقطة H نقطة تقاطع Δ مع (ABC)

4. احسب الجداءات السلمية $AH.CB$, $BH.CA$ وماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC

المسالة الواحدة و الثلاثون :

ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين و $DA \perp (ABC)$ و $\overrightarrow{AD} = 3\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{j}$, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$

بفرض لدينا معلم متجانس مبدأه A



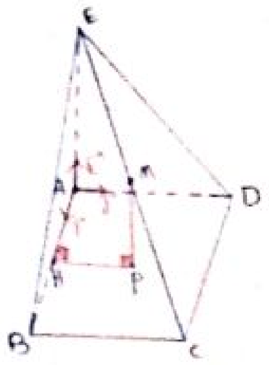
1. عيّن احداثيات الرؤوس $ABCD$
2. اكتب معادلة المستوي (BCD)
3. اثبت ان مسقط A على المستوي (BCD) و ليكن j هو مركز ثقل المثلث BCD
4. عين احداثيات G (م.ا.م) للنقاط $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 1)$

تطلب النسخة الأصلية المطبوعة مع الحلول من مكتبة الأمل 0981968984/مع الشحن لكافة المحافظات

5. اوجد معادلة لكرة التي مركزها J وتمر D
6. احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$
7. استنتج مساحة المثلث BCD
8. عين احداثيات K ليكون الشكل $ABKC$ مربع

المسالة الثانية و الثلاثون :

$E - ABC$ هرم قاعدته مربع $ABCD$ فيه EA عمودي على مستو القاعدة $ABCD$
و فيه $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}\ ,\overrightarrow{AD} = 3\vec{j}\ ,\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$



1. اوجد احداثيات رؤوس الهرم
2. اوجد احداثيات مركز ثقل BDE
3. احسب $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{ED}\ ,\ \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AG}$ و ماذا تستنتج ؟
4. اوجد معادلة المستوي EBD
5. اوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم EC
6. لتكن النقطة M التي تحقق العلاقة $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$ ولتكن P المسقط القائم ل M على مستوي القاعدة $ABCD$ و لتكن H المسقط القائم ل P على AB ..احسب $[MH]$

المسالة الثالثة والثلاثون : في معلم متجانس $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا مجموعة النقاط :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + \frac{5}{2} = 0$ والمطلوب :

1) عين طبيعة مجموعة النقاط $M(\,x, y, z)$ من الفراغ
2) ليكن لدينا المستقيم d المار بالنقطة $A(2,0,1)$ والذي يقبل $\vec{u}(2,0,-2)$ شعاع موجه له . ادرس الوضع النسبي للمستقيم d مع الكرة S
3) أثبت أن المستوي $P{:}\ 3x + 2y = 7$ يقطع الكرة S وأوجد مركز الدائرة الناتجة ونصف قطرها

المسالة الرابعة و الثلاثون : عين قيم العدد n التي تحقق العلاقة $\binom{15}{2n} = \binom{15}{n+3}$

المسالة الخامسة والثلاثون : المستقيمان $d\ ,d'$ معرفان وسيطيا وفق :

$$d'{:}\begin{cases} x = 2s - 1 \\ y = s - 2 \\ z = 3s - 2 \end{cases} ;s \in R\quad ,\quad d{:}\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t \end{cases} ;t \in R$$

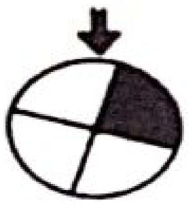
1. أثبت أن $d\ ,\ d'$ متقاطعان ، ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع
2. جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين d, d'

المسالة السادسة و الثلاثون : نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي $P{:}\ 2x + y - 3z + 2 = 0$

و النقطة $A(1,1,-2)$. المطلوب :

1. أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي
2. اكتب معادلة للمستوي Q المار منA و الموازي للمستوي P

المسالة السابعة و الثلاثون :تدور القرص الدائري المرسوم جانباً ليستقر المؤشر على أحد الأجزاء , ثم نكرر التجربة خمس مرات . نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على عدد المرات التي يستقر بها المؤشر على الجزء المظلل , المطلوب



1. ما احتمال أن يستقر المؤشر على الجزء المظلل مرتين على الأقل ؟
2. احسب التوقع الرياضي والتباين للمتحول X.

تم بعون الله ...أتمنى لكم التوفيق ...دعواتكم لمن ساهم بنجاح هذه النوطة ..☐
محبّكم : أ.فارس جقل