... المستقيمات والمستويات ...

[1] المستوي ومعادلته :

نقطة ← → ناظم

$M(x_0,y_0,z_0)$ ، $\vec{n}(a,b,c)$

$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

بعد الإصلاح :

$ax+by+cz+d=0$

حالاتها :

1- مستوي P مار من نقطة A ويقبل $\vec{n}$ شعاع ناظم :
نعوض مباشرة بالمعادلة .

2- مستوي P مار من نقطة A ويقبل $\vec{BC}$ ناظماً :
نقطة A ، الناظم $\vec{n}=\vec{BC}$
ثم نعوض بالمعادلة .

3- المستوي المحوري للقطعة [AB] حيث A , B معلومين :
نقطة M منتصف [AB] ، ناظم $\vec{n}=\vec{AB}$
ثم نعوض .

4- مستوي مماسي لكرة : *
خطوات الحل :
أ- نوجد مركز الكرة ω .
ب- نأخذ A نقطة التماس نقطة من
ج- $\vec{n}=\vec{\omega A}$ ناظم

5- مستوي مار من ثلاث نقاط (ABC) :
خطوات الحل :
أ- نثبت أن $\vec{AC}, \vec{AB}$ غير مرتبطين خطياً .
ب- نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$
ج- نضع : $\vec{n}\perp\vec{AB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AB}=0$
فنحصل على المعادلة ① .
نضع $\vec{n}\perp\vec{AC} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AC}=0$
فنحصل على المعادلة ② .
د- نفرض أحد المجاهيل المشتركة قيمة مغايرة للصفر ثم نعوض في المعادلتين .
هـ- نحل المعادلتين حل مشترك فنحصل على الناظم $\vec{n}(a,b,c)$
و- نأخذ إحدى النقاط ثم نعوض النقطة والناظم في معادلة المستوي

6- مستوي مار من A (نقطة) ويقبل شعاعي توجيه $\vec{u},\vec{v}$:
خطوات الحل :
أ- نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$.
ب- نثبت أن $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً .
ج- نضع : $\vec{n}\perp\vec{u} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{u}=0$
و $\vec{n}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v}=0$
فنحصل على معادلة ① و ② .
د- نفرض أحد المجاهيل قيمة $\neq 0$
هـ- نحل المعادلتين حل مشترك فنحصل على الناظم ثم نعوض .

7- مستوي P مار من نقطتين A,B وعمودي على مستوي آخر Q :
خطوات الحل :
أ- نأخذ النقطة إما A أو B .
ب- نثبت أن الشعاع $\vec{AB}$ و $\vec{n_Q}$ غير مرتبطين خطياً .
ج- نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$
د- نضع : $\vec{n_Q}\perp\vec{AB} \Rightarrow \vec{n_Q}\cdot\vec{AB}=0$
$\vec{n_P}\perp\vec{n_Q} \Rightarrow \vec{n_P}\cdot\vec{n_Q}=0$
و- نفرض أحد المجاهيل المشتركة $\neq 0$
هـ- نحل المعادلات حل مشترك ونحصل على $\vec{n}$.
ثم نعوض في معادلة المستوي .

8- مستوي P مار من نقطة A ويعامد مستويين Q , R :
خطوات الحل :
أ- نفرض الناظم $\vec{n}(a,b,c)$
ب- نثبت أن $\vec{n_Q}, \vec{n_R}$ غير مرتبطين خطياً ..
ج- نضع $\vec{n_P}\perp\vec{n_R} \Rightarrow \vec{n_P}\cdot\vec{n_R}=0$
$\vec{n_P}\perp\vec{n_Q} \Rightarrow \vec{n_P}\cdot\vec{n_Q}=0$
فنحصل على معادلتين ① و ②
د- نفرض أحد المجاهيل قيمة $\neq 0$
هـ- نحل المعادلتين حل مشترك فنحصل على الناظم ثم نعوض .

9- مستوي P مار من نقطة A ويوازي مستوي Q :
نقطة A ، ناظم $\vec{n_P}=\vec{n_Q}$
ثم نعوض ..

[2] الوضع النسبي لمستويين :

(نشتغل على النواظم) ..

1- P_1 , P_2 متوازيان إذا : $\vec{n_1},\vec{n_2}$ مرتبطين خطياً ..

2- P_1 , P_2 متقاطعان إذا : $\vec{n_1},\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطياً ..

3- P_1 , P_2 متعامدان إذا : $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

4- P_1 , P_2 منطبقان إذا : $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$

[3] بعد نقطة عن مستوي :

ليكن : $A(\alpha,\beta,\gamma)$
و $P: ax+by+cz+d=0$
$\vec{n}(a,b,c)$

عندئذٍ :

$$dist(A,P)=\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

[4] المعادلات الوسيطية لمستقيم :

نقطة ← → شعاع توجيه

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ ، $\vec{u}(a,b,c)$

$$d:\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=ct+z_0 \end{cases}$$

حالاتها ...

1- d مار من نقطة ويقبل $\vec{u}$ شعاع توجيه .
نعوض مباشرة .

2- d مار من نقطة A ويوازي (BC) :
نقطة : A . التوجيه $\vec{u}=\vec{BC}$

3- (AB) حيث A , B معلومتان :
النقطة أحدهما .
التوجيه $\vec{u}=\vec{AB}$

4- d مار من A عمودي على مستوي P معادلته معلومة :
نقطة : A
التوجيه : $\vec{u}=\vec{n_P}$

5) المعادلات الوسيطية لنصف مستقيم :

نقطة .

توجيه $\vec{u}(a,b,c)$.

$$d: \begin{cases} at+x_0=x \\ bt+y_0=y \\ ct+z_0=z \end{cases} \quad ; \quad t\in[0,+\infty[$$

* القطعة المستقيمة : $t\in[0,1]$

6) المعادلات الوسيطية لفصل مشترك :

خطوات الحل :

1- حل المعادلتين حل مشترك .
2- نعزل أحد المجاهيل ونكتب بدلالة الثاني ونعوض في المعادلة .
3- نعزل المجهول الثاني بدلالة نفس المجهول الأول .
4- نفرض المشترك = t .
5- نعوض في معادلة الوسيطية .

7) الوضع النسبي لمستقيمين :

(شغلي شعاع التوجيه) :

1- d, d' متوازيين إذا : $\vec{u}, \vec{u'}$ مرتبطين خطياً .

2- d, d' غير متوازيين إذا : $\vec{u}, \vec{u'}$ غير مرتبطين .

وعنا :

a) متقاطعين : يشتركان بنقطة واحدة ⇐ يوجد حل مشترك .

b) متخالفين : لا يشتركان بأي نقطة (لا يقعان في مستو واحد) ⇐ لا توجد حلول مشتركة .

8) الوضع النسبي لمستقيم ومستوي :

1- متوازيين :

لا يوجد حل مشترك بين معادلة المستقيم ومعادلة المستوي .

أو : نثبت أن : $\vec{n}\cdot\vec{u}=\vec{0}$ متعامدان .

2- متقاطعين :

يوجد حل مشترك لمعادلات المستقيم ومعادلة المستوي .

أو : نثبت أن : $\vec{u}\cdot\vec{n}\neq\vec{0}$ غير متعامدين .

لإيجاد نقطة التقاطع نوجد الحل المشترك بين P , d .

* نعوض الوسيطية في المستوي ونوجد t .
* نعوض t في الوسيطية فنجد إحداثيات نقطة التقاطع .

9) إثبات مستقيم عمودي على مستوي :

1- نأخذ ناظم P وليكن $\vec{n}$.
2- نأخذ شعاع توجيه d وليكن $\vec{u}$.
3- نثبت أن $\vec{u}, \vec{n}$ مرتبطين .

10) إثبات مستقيم منطبق على مستوي :

نعوض الوسيطية في المستوي فنحصل على علاقة صحيحة خالية من t .

Hanin Habib ...

11) إيجاد إحداثيات المسقط القائم لنقطة على مستوي :

1- نوجد معادلة المستوي .
2- نوجد المعادلات الوسيطية لـ (DD') حيث نختار النقطة D وشعاع التوجيه هو ناظم المستوي .
3- حل المعادلتين الوسيطية والمستقيم حل مشترك فنجد نقطة التقاطع هي D' .

12) إيجاد بعد نقطة عن الفصل المشترك لمستويين :

1- المستويان متعامدان :

a) نوجد بعد A عن P . $dist(A,P)$

b) نوجد بعد A عن Q . $dist(A,Q)$

c) نوجد بعد A عن الفصل المشترك حسب فيثاغورث .

2- المستويان غير متعامدين :

a) نوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك .

b) نوجد معادلة المستوي المار من A ويعامد d أي الناظم (شعاع توجيه d) .

c) حل معادلة d والمستوي فنجد نقطة التقاطع A' .

d) نحسب المسافة AA' .

13) دراسة تقاطع 3 مستويات :

ليكن لدينا : P_1, P_2, P_3 معلومي المعادلات . لدراسة تقاطعها نحل المعادلات حلاً مشتركاً بطريقة غاوص :

1- نحاول حذف المجهول x من المعادلتين 2 و 3 .

نضرب 1 بعدد ونجمعها مع 2 .

نضرب 2 " " مع 3 .

2- نحاول حذف y من المعادلة 3 :

نضرب 2 بعدد ونجمعها مع 3 .

3- عنا الحالات :

① يوجد حل وحيد (x,y,z) : المستقيمات تتقاطع بنقطة وحيدة .

②
$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1&=0 \\ b_2y+c_2z+d_2&=0 \\ 0&=0 \end{aligned}$$
⇐ المستويات تتقاطع بفصل مشترك

③ $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$
معادلة غ محققة
⇐ المستويات غير متقاطعة .

④
$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1&=0 \\ 0&=0 \\ 0&=0 \end{aligned}$$
⇐ المستويات منطبقة