3_ حل معادلات من الدرجة الثالثة:

لدينا نوعان:

1_ معادلات أمثالها حقيقية:

نوجد أحد الجذور ذهنياً وهو Z_0، ثم نقسم المعادلة على $(Z-Z_0)$ فينتج $Q(Z)$: فتتكتب بالشكل:

$$(Z-Z_0)(Q(Z))=0$$

حيث $Q(Z)$ هو كثير حدود من الدرجة الثانية.

2_ النوع الثاني: علماً أنها تقبل حلاً:

حل حقيقي

نفرض الحل هو: $\boxed{Z=a}$

ونكتب المعادلة بالشكل: $(Z-a)(Z^2+bZ+c)$

حل تخيلي بحت

نفرض الحل هو: $\boxed{Z=ai}$

ونكتب المعادلة بالشكل $(Z-ai)(Z^2+bZ+c)$

ثم ننشر ونقارن مع المعادلة الأصلية.

4_ حل معادلات درجة رابعة:

نفرض الحل هو Z_0 ⟸ نقسم قسمة إقليدية على $\boxed{Z^2 \mp Z_0^2}$ فنحصل على $Q(Z)$.

لأن

$$(Z-Z_0)(Z+Z_0)=Z^2-ZZ_0+ZZ_0-Z_0^2$$
$$=Z^2-Z_0^2$$

فتصبح المعادلة:

$$(Z^2-Z_0^2)(Q(Z))=0$$

قاعدة: إذا طلب السؤال:

★ أثبت أن العدد حقيقي:

$$\Rightarrow Z=\overline{Z}$$

$|Z|=\frac{1}{\overline{Z}}$ حيث:

⟸ يمثل محور الفواصل.

★ أثبت أن العدد تخيلي:

$$\Rightarrow Z=-\overline{Z}$$

⟸ يمثل محور التراتيب.

$$Z\cdot\overline{Z}=1$$
$$\Rightarrow |Z|=1$$

(تطبيقات الأعداد العقدية)

★ القوانين الهندسية للأعداد المركبة:

نفرض $Z=x+yi$

_ العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$:

$$Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_B-Z_A=b-a$$

_ العدد العقدي الممثل لطويلة $\overrightarrow{AB}$:

$$|Z_{\overrightarrow{AB}}|=|Z_B-Z_A|=|b-a|$$

_ العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC:

$$Z_G=\frac{Z_A+Z_B+Z_C}{3}$$

_ العدد العقدي الممثل للنقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$:

$$Z_M=\frac{\alpha Z_A+\beta Z_B+\gamma Z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq0$

_ قاعدة: إذا كان $Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_{\overrightarrow{CD}}$ كان الرباعي ABDC متوازي أضلاع

تمثيل بعض المجموعات الخاصة

$|Z-w|=r$: تمثل الأعداد Z دائرة مركزها w ونصف قطرها r

$|Z-a|=|Z-b|$ تمثل الأعداد Z محور القطعة [AB].

★ ملاحظات هامة:

1_ لتعيين معادلة مجموعة النقاط نفرض $Z=x+yi$ ثم نحسب الطويلة ونشكل المعادلة

2_ لإثبات أن النقاط A وB وC تقع على دائرة واحدة مركزها المبدأ ونصف قطرها r نثبت أن:

$$|Z_A|=|Z_B|=|Z_C|=r$$

3_ لإثبات أن النقاط A وB وC تقع على استقامة واحدة نثبت وجود شعاعين مرتبطين خطياً أي:

$$Z_{\overrightarrow{AB}}=\text{عدد}\times Z_{\overrightarrow{AC}}$$

(النسبة بين شعاعين)

- النسبة بين شعاعين هي:

$$\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{DC}}} = \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_D} = \frac{b-a}{c-d}$$

★ الزاوية بين شعاعين:

$$(\vec{DC},\vec{AB}) = \arg\left[\frac{\vec{AB}}{\vec{DC}}\right] = \arg\left[\frac{b-a}{c-d}\right] = \left[\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_D}\right] = \left[\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{DC}}}\right]$$

★ نستفيد من حساب النسبة بين شعاعين:

- معرفة الزاوية بينهما
- معرفة النسبة بين طويلتهما
- تفسير هندسي

- ملاحظة: إذا كان $\vec{u}$ شعاع واحدة على المحور الحقيقي وبالتالي:

★ النسبة بينهما: $\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{u}}}$

★ الزاوية بينهما: $\arg\left[\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{u}}}\right] = \arg(\vec{AB})$

- مناقشة جميع الحالات:

1- $\frac{Z_{\vec{u}}}{Z_{\vec{v}}}$ = عدد حقيقي

- زاوية: تكون الزاوية صفر إذا كان العدد موجب وتكون π إذا العدد سالب
- طويلة: $\left|\frac{Z_{\vec{u}}}{Z_{\vec{v}}}\right|$ = |عدد حقيقي|
- تفسير هندسي: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا

2- $\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{AC}}}$ = عدد حقيقي

- زاوية: 0 إذا موجب، π إذا سالب
- طويلة: $\left|\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{AC}}}\right|$ = |عدد حقيقي|
- تفسير هندسي: A و B و C على استقامة واحدة

3- $\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{DC}}} = \mp 1$

- زاوية: 0 إذا موجب، π إذا سالب
- طويلة: $\frac{AB}{DC} = 1 \Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$
- تفسير هندسي: ABCD متوازي أضلاع

4- $\frac{Z_{\vec{u}}}{Z_{\vec{v}}}$ = عدد تخيلي

- زاوية: $(\vec{u},\vec{v}) = \mp\frac{\pi}{2}$
- طويلة: $\left|\frac{Z_{\vec{u}}}{Z_{\vec{v}}}\right|$ = |عدد تخيلي|
- تفسير هندسي: $\vec{u}$ يعامد $\vec{v}$، $\vec{u} \perp \vec{v}$

5- $\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{DC}}}$ = عدد تخيلي

- زاوية: $\arg\left(\frac{\vec{AB}}{\vec{DC}}\right) = \mp\frac{\pi}{2}$
- طويلة: $\frac{AB}{DC}$ = |عدد تخيلي|
- تفسير هندسي: AB يعامد DC

6- $\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{BC}}}$ = عدد تخيلي

- زاوية: $\arg\left[\frac{b-a}{c-b}\right] = \mp\frac{\pi}{2}$
- طويلة: $\frac{AB}{BC}$ = |عدد تخيلي|
- تفسير هندسي: ABC قائم في النقطة المشتركة (B)

7- $\frac{Z_{\vec{AB}}}{Z_{\vec{BC}}} = \mp i$

- زاوية: $\mp\frac{\pi}{2}$
- طويلة: $\frac{AB}{BC} = 1 \Rightarrow AB = BC$
- تفسير هندسي: ABC قائم ومتساوي الساقين

8- $\frac{Z_{\vec{u}}}{Z_{\vec{v}}}$ = عدد عقدي $(a+bi)$

- نحسب: $r = \sqrt{a^2+b^2}$
- نحسب: θ أو $\cos\theta$ أو $\sin\theta$
- تفسير هندسي: حسب الزاوية والطويلة

ملاحظة:

إذا كانت الزاوية بين شعاعين $(\vec{AB};\vec{BC}) = \mp\frac{\pi}{3}$ كان الشكل مثلث متساوي الأضلاع.

الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

- إنسحاب T: عدد عقدي لشعاع الإنسحاب
- تحاكي: H: عدد عقدي لمركز التحاكي ونسبة التحاكي k.
- دوران: R: عدد عقدي لمركز الدوران وزاوية الدوران θ.
- تناظر: تناظر بالنسبة لماذا؟؟

1- الإنسحاب: نفرض $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق إنسحاب T شعاعه $\vec{w}$ وممثل بالعدد العقدي b ومنه

$$\boxed{Z' = Z + b}$$

2- التحاكي: نفرض $M'(z')$ صورة $M(Z)$ وفق تحاكي H مركزه b ونسبته K

$$\boxed{Z' - b = k(Z - b)}$$

حالة خاصة: إذا كان مركز التحاكي هو المبدأ O ومنه:

$$\boxed{Z' = b.Z}$$

3 التناظر: نفرض $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق تحاكي S عندئذٍ نميز الحالات:

a- تحاكي بالنسبة لمحور الفواصل نغير إشارة y

$$\boxed{Z' = \overline{Z}}$$

b- بالنسبة لمحور التراتيب نغير إشارة x:

$$\boxed{Z' = -\overline{Z}}$$

c- تحاكي بالنسبة للمبدأ O نغير إشارة x و y:

$$\boxed{Z' = -Z}$$

d- تناظر بالنسبة لنقطة A(a):

$$\boxed{Z' = 2a - Z}$$

مدرس في قسم هندسة الميكانيك العام
عضو هيئة تعليمية في قسم هندسة الميكانيك العام