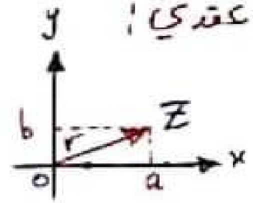
★ الشكل المثلثي لعدد عقدي :



$r^2=a^2+b^2$

$\boxed{r=\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin\theta=\frac{b}{r} \Rightarrow \boxed{b=r.\sin\theta}$

$\cos\theta=\frac{a}{r} \Rightarrow \boxed{a=r.\cos\theta}$

θ هي زاوية العدد العقدي بين المحور الحقيقي وشعاع العدد Z.

ولدينا $Z=a+bi$

$Z=r.\cos\theta+r.\sin\theta.i$

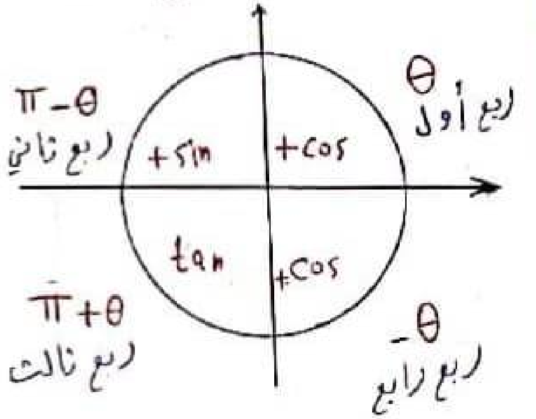
$\Rightarrow \boxed{Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

وهو الشكل المثلثي لـ Z.

حيث: r : طويلة العدد العقدي.

$\arg Z=\theta$.

θ بالقياس الأساسي $\theta\in\,]-\pi,\pi]$



قواعد هامة جداً:

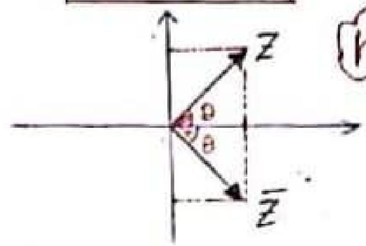
1- $\bar{Z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)$

$\bar{Z}=r(\cos\theta+i\sin(-\theta))$

$\bar{Z}=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

$\boxed{\arg\bar{Z}=-\theta}$

$r>0$



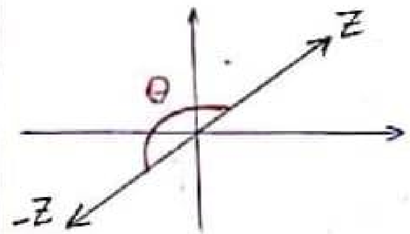
2- $-Z=r(-\cos\theta-i\sin\theta)$

$-Z=r(\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta))$

$\boxed{\arg -Z=\pi+\theta}$

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$



ملاحظة: إذا كان r سالب

لا يجوز ⇐ نجعله موجب

بإضافة π إلى الزاوية

$(\theta+\pi)$

3- إذا كان Z مكتوب بالشكل:

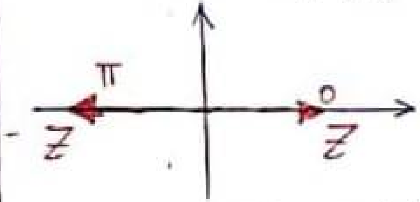
$Z=r(\sin\theta+i\cos\theta)$

- نطرح من الزاوية $\frac{\pi}{2}$ فيصبح:

$Z=r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

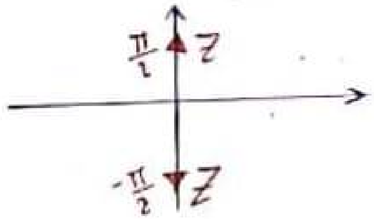
4- إذا كان Z عدد حقيقي:

$\Rightarrow \arg Z=0+\pi k$



5- إذا Z عدد تخيلي بحت

$\Rightarrow \arg Z=\frac{\pi}{2}+\pi k$



6- إذا كان $Z_1=Z_2$

ومنه $r_1=r_2$

و $\boxed{\theta=\theta_2+2\pi k}$

خواص في الشكل المثلثي

ليعرض Z و Z' عددان عقديان:

$Z_1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$Z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$

1- $Z.Z'=r.r'[\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')]$

$\boxed{\arg Z.Z'=\theta+\theta'}$

$\boxed{|Z.Z'|=r.r'}$

2- $\frac{Z}{Z'}=\frac{r}{r'}[\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')]$

$\boxed{\arg\frac{Z}{Z'}=\theta-\theta'}$

$\boxed{\left|\frac{Z}{Z'}\right|=\frac{r}{r'}}$

3- $\frac{1}{Z}=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$

$\boxed{\arg\frac{1}{Z}=-\theta}$

$\boxed{\left|\frac{1}{Z}\right|=\frac{1}{r}}$

4- $Z^n=r^n[\cos(n.\theta)+i\sin(n\theta)]$

دستور دواموفر:

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$

3 - حل معادلات من الدرجة الثالثة:

لدينا نوعان:

1 - معادلات أمثالها حقيقية:

نوجد أحد الجذور ذهنياً وهو Z_0، ثم نقسم المعادلة على $(Z-Z_0)$ فينتج $Q(z)$: فتكتب بالشكل:

$$(Z-Z_0)(Q(z))=0$$

حيث $Q(z)$ هو كثير حدود من الدرجة الثانية.

2 - النوع الثاني: علماً أنها تقبل حلاً:

حل حقيقي

نفرض الحل هو $\boxed{Z=a}$

ونكتب المعادلة بالشكل: $(Z-a)(Z^2+bZ+c)$

حل تخيلي بحت

نفرض الحل هو: $\boxed{Z=ai}$

ونكتب المعادلة بالشكل $(Z-ai)(Z^2+bZ+c)$

ثم ننشر ونقارن مع المعادلة الأصلية.

4 - حل معادلات درجة رابعة:

لنفرض الحل هو Z_0 ⇐ نقسم قسمة إقليدية على $\boxed{Z^2-Z_0^2}$ فنحصل على $Q(z)$.

لأن: $(Z-Z_0)(Z+Z_0)=Z^2-ZZ_0+ZZ_0-Z_0^2$

$$=Z^2-Z_0^2$$

فتصبح المعادلة: $(Z^2-Z_0^2)(Q(z))=0$

قاعدة: إذا طرح السؤال:

* أثبت أن العدد حقيقي:

$\Rightarrow Z=\overline{Z}$

حيث: $|Z|=\frac{1}{\overline{Z}}$

⇐ يمثل محور الفواصل.

* أثبت أن العدد تخيلي:

$\Rightarrow Z=-\overline{Z}$

⇐ يمثل محور التراتيب.

$Z.\overline{Z}=1$

$\Rightarrow |Z|=1$

(تطبيقات الأعداد العقدية)

* القوانين الهندسية للأعداد المركبة:

لنفرض $Z=x+yi$

- العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$:

$$Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_B-Z_A=b-a$$

- العدد العقدي الممثل لطويلة $\overrightarrow{AB}$:

$$|Z_{\overrightarrow{AB}}|=|Z_B-Z_A|=|b-a|$$

- العدد العقدي الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC:

$$Z_G=\frac{Z_A+Z_B+Z_C}{3}$$

- العدد العقدي الممثل للنقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$:

$$Z_M=\frac{\alpha Z_A+\beta Z_B+\gamma Z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

- قاعدة: إذا كان $Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_{\overrightarrow{CD}}$ كان الرباعي ABDC متوازي أضلاع

تمثيل بعض المجموعات الخاصة

$|Z-w|=r$: تمثل الأعداد Z دائرة مركزها w ونصف قطرها r

$|Z-a|=|Z-b|$ تمثل الأعداد Z محور القطعة $[AB]$.

* ملاحظات هامة:

1 - لتعيين معادلة مجموعة النقاط نفرض $Z=x+yi$ ثم نحسب الطويلة ونشكل المعا

2 - لإثبات أن النقاط A وB وC تقع على دائرة واحدة مركزها المبدأ ونصف قطرها r نثبت أن:

$$|Z_A|=|Z_B|=|Z_C|=r$$

3 - لإثبات أن النقاط A وB وC تقع على استقامة واحدة نثبت وجود شعاعين مرتبطين خطياً أي:

$$Z_{\overrightarrow{AB}}=\text{عدد}\times Z_{\overrightarrow{AC}}$$

(الشكل الأسي لعدد عقدي)

نفرض Z عدد عقدي

$|Z| = r \quad ; \quad r > 0$

$\arg Z = \theta$

ومنه يكتب Z بالشكل الأسي كمايلي: $Z = r.e^{i.\theta}$

★ العمليات على الشكل الأسي:

$Z = r.e^{i\theta}$ و $Z' = r'.e^{i\theta'}$

1 - الضرب: $Z.Z' = r.r'.e^{i(\theta+\theta')}$

2 - القسمة: $\frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'}.e^{i(\theta-\theta')}$

3 - القوة: $Z^n = r^n.\ e^{i(n.\theta)}$

4 - إذا كان $Z = Z'$

$\Rightarrow r = r' \ ، \ \theta = \theta' + 2\pi k$

حيث k عدد صحيح

5 - $e^{i\pi} = (\cos\pi + i\sin\pi)$

$\Rightarrow \boxed{e^{i\pi} = -1}$

6 - $e^{i\frac{\pi}{2}} = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \boxed{e^{i\frac{\pi}{2}} = +i}$

7 - دستور دوموافر:

$(e^{i\theta})^n = e^{i(n.\theta)}$

8 - دستور أويلر:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ ---- } (1)$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \text{ --- } (2)$

بجمع ① و ②

$\Rightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

ومنه: $\Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

بطرح ② من ①:

$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

ملاحظة: ★ إذا كانت θ الزاوية نطلبها أكبر من المقام نجري تعيين أساسي

θ سالبة: نضيف $+2\pi$

θ موجبة: نطرح -2π.

★ θ تساوي عدد فردي من π فهي تساوي π

θ تساوي عدد زوجي من π فهي تساوي 0.

★ البسط أكبر من المقام بدرجة

⇐ ربع ثالث.

البسط أصغر من المقام بدرجة

⇐ الربع الثاني

★ تمارين أويلر:

1 - نخرج $e^{\text{نصف الزاوية}}$ عامل مشترك

2 - نستخدم دستور

3 - الطويلة حصراً ⊕.

حل المعادلات في $\mathbb{C}$

1 - معادلات من الدرجة الأولى:

a - معادلات بمجهول واحد: إما Z أو $\bar{Z}$ نحلها بنقل المجاهيل إلى طرف والمعاليم لطرف آخر

b - معادلات تحوي مجهولين: Z و $\bar{Z}$:

طريقة 1 - الخطوات: ① - نأخذ مرافق الطرفين ② نعزل $\bar{Z}$ ③ - نعوض $\bar{Z}$ في المعادلة الأصلية

طريقة 2 - نفرض $Z = a+bi$ و $\bar{Z} = a-bi$ ونطابق بين الطرفين:

c - معادلات تحوي مجهولين: Z و Z':

نحلها بالجمع والتعويض (حل مشترك).

2 - معادلات درجة ثانية:

1 - معادلات تحوي أمثال حقيقية: لها نوعان

a - $Z^2 =$ عدد سالب

نجذر الطرفين:

$Z = \mp\sqrt{|\text{عدد}|} \times i$

b - معادلات من الشكل $az^2+bz+c=0$

نحسب Δ: $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$:

$Z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$Z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0$:

$Z = \frac{-b}{2a}$

$\Delta < 0$: لدينا حلان عقديان مترافقان

$Z_1 = \frac{-b+\sqrt{|\Delta|}\,i}{2a}$

$Z_2 = \frac{-b-\sqrt{|\Delta|}\,i}{2a}$

قاعدة مهمة: مجموع الجذرين (الحلين):

$Z_1 + Z_2 = \frac{-b}{a}$

جداء الجذرين (الحلين):

$Z_1.Z_2 = \frac{c}{a}$

2 - معادلات من الدرجة الثانية أمثالها على الأقل غير حقيقي: لها نوعان:

a - $Z^2 = a+bi$

⇐ لا يمكن جذر الطرفين لوجود i

⇐ نوجد الجذور التربيعية للعدد Z

نفرض $Z = x+yi$ ونكتب القوانين:

$\boxed{x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}} \text{ --- } (1)$

$\boxed{x^2-y^2 = a} \text{ --- } (2)$

$\boxed{x.y = \frac{b}{2}} \text{ --- } (3)$

للحفظ

نجمع ① و ② ثم نطرحهما

أما ③ لتحديد الإشارات: $xy>0$ ⇐ نفس الإشارة

$xy<0$ ⇐ لهما عكس الإشارة.

B - $aZ^2+bZ+c=0$:

نحسب Δ فإذا كان $\Delta = a+bi$

وهنا لا يمكن إيجاد $\sqrt{\Delta}$ لوجود i

⇐ نفرض $\sqrt{\Delta} = x+yi$ ثم نستخدم القوانين ذاتها (1) و(2) و(3)

الأعداد العقدية

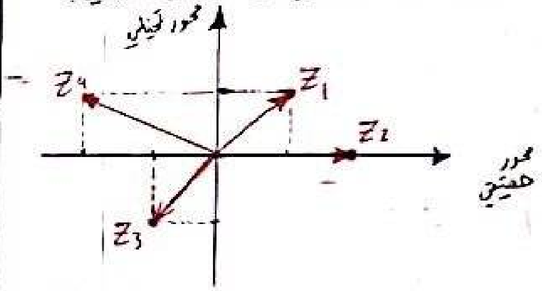
نرمز للعدد العقدي بـ Z وشكله الجبري:

$\boxed{Z = a+bi}$ $\quad \sqrt{-1} = i \quad i^2 = -1$

* نسمي a : القسم الحقيقي
* نسمي b : القسم التخيلي

- إذا كان Z تخيلي بحت : $Z = bi$

★ تمثيل العدد العقدي في مستوي عقدي:



$Z_1 = 1+i \Rightarrow (1,1)$

$Z_2 = 2 \Rightarrow (2,0)$

$Z_3 = -1-i \Rightarrow (-1,-1)$

$Z_4 = -2+i \Rightarrow (-2,1)$

★ الشكل الجبري لعدد عقدي: $Z = a+bi$

قواعد: 1 - جمع الأعداد العقدية:

$Z_1 = a_1+b_1 i \;,\; Z_2 = a_2+b_2 i$

$\Rightarrow Z_1+Z_2 = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

مثال: $Z_1 = 2-3i \;,\; Z_2 = 4+5i$

$Z_1+Z_2 = 6+2i$

2 - ضرب عدد عقدي:

مثال: $(2-3i)(4+5i)$

$= 8+10i-12i-15i^2 = 23-2i$

3 - طويلة عدد عقدي:

$\boxed{|Z| = r = \sqrt{a^2+b^2}}$

مثال: $Z = 2-3i$

$|Z| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

4 - نظير عدد عقدي (المعكوس):

$Z = a+bi \Rightarrow -Z = -a-bi$

5 - مقلوب عدد عقدي:

$\frac{1}{Z} = \frac{1}{a+bi}$

نزيل i من المقام وذلك بالضرب والقسمة على مرافق المقام

$\Rightarrow \frac{1}{a+bi} = \frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}$

$\frac{1}{Z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$

6 - مرافق عدد عقدي:

نعكس إشارة القسم التخيلي

$\boxed{\overline{Z} = a-bi}$

★ خواص المرافق:

1 - مرافق المرافق هو العدد العقدي نفسه

$(\overline{\overline{Z}}) = Z$

2.
$(\overline{Z.W}) = \overline{Z}.\overline{W}$

$(\overline{Z+W}) = \overline{Z}+\overline{Z}$

$(\overline{\frac{Z}{W}}) = \frac{\overline{Z}}{\overline{W}}$

5 - هامة: $\boxed{\overline{Z}+Z = 2a}$

البرهان: $(a+bi)+(a-bi) = 2a$

$\Rightarrow \boxed{a = \frac{Z+\overline{Z}}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{Re(Z) = \frac{Z+\overline{Z}}{2}}$ جزء حقيقي

6 - هامة: $\boxed{Z-\overline{Z} = 2bi}$

$\Rightarrow \boxed{b = \frac{Z-\overline{Z}}{2i}}$

$\Rightarrow \boxed{Im(Z) = \frac{Z-\overline{Z}}{2i}}$ جزء تخيلي

7 - إذا كان Z حقيقي بحت:

$\boxed{Z = a} \Rightarrow \boxed{\overline{Z} = a}$

$\Rightarrow Z = \overline{Z}$

8 - إذا كان Z تخيلي بحت:

$\boxed{Z = bi} \Rightarrow \boxed{\overline{Z} = -bi}$

$\Rightarrow Z = -\overline{Z}$

9 - $\boxed{|Z|^2 = a^2+b^2}$

10 - $Z.\overline{Z} = (a+bi)(a-bi)$

$\boxed{Z.\overline{Z} = a^2+b^2}$

11 - بالمقارنة بين (9) و(10):

$Z.\overline{Z} = |Z|^2$ هامة

12 - إذا كان $|Z| = 1$

ومنه $Z.\overline{Z} = (1)^2 = 1$

$\Rightarrow \boxed{\overline{Z} = \frac{1}{Z}}$

★ قوانين الإرجاع:

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
ربع رابع

$\sin(x+2\pi k) = \sin x$
k هو عدد صحيح من الدورات 2π
$\cos(x+2\pi k) = \cos x$
ربع أول $x = \theta$

$\sin(x+\pi) = -\sin x$
$\cos(x+\pi) = -\cos x$
ربع ثالث $x = \pi+\theta$

$\sin(\pi-x) = \sin x$
$\cos(\pi-x) = -\cos x$
ربع ثاني $x = \pi-\theta$

$\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$
$\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$
ربع أول $x = +\theta$

$\sin(x-\frac{\pi}{2}) = -\cos x$
$\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \sin x$
ربع رابع $x = -\theta$

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	0	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	1	-1
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	0	0