



Grade :9

YAMAN ASFARI



تاسع سوريا 2025

- ملفات لشرح كامل المنهاج
- الإجابة على كافة الاستفسارات
- أتمتات متنوعة وملاحظات
- متابعة حتى يوم الامتحان



الوحدة الرابعة

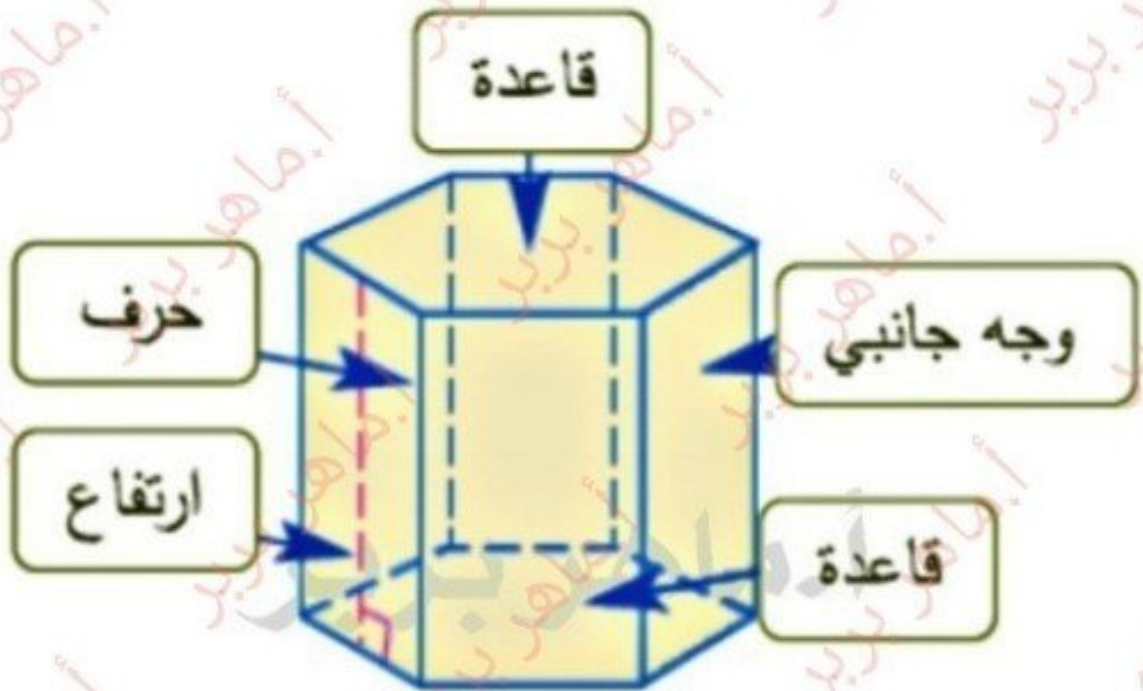
مجسمات ومقاطع

1 تذكرة بالمجسمات

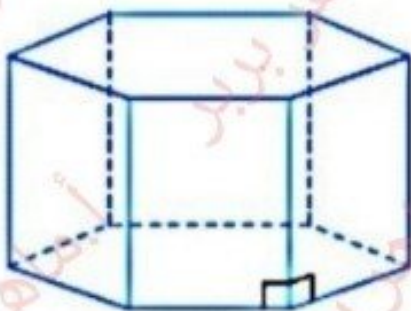
القسم الأول:

- الموشور القائم - الأسطوانة الدورانية

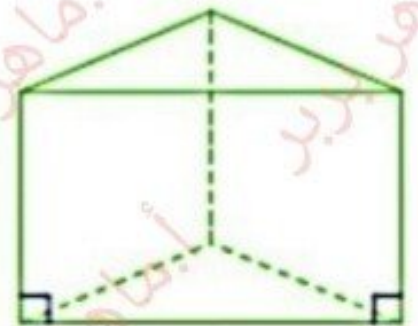
الموشور القائم هو الجسم الذي يميزه وجهان متوازيان نسميهما القاعدتين وهما طبوقتان ، وتكون الأوجه الجانبية له مستطيلات أو مربعات .



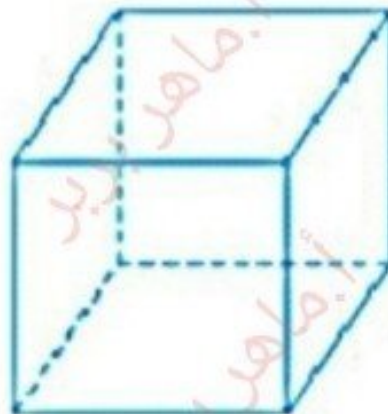
يسمى الموشور بحسب أضلاع قاعدته: موشور ثلاثي - رباعي - خماسي -



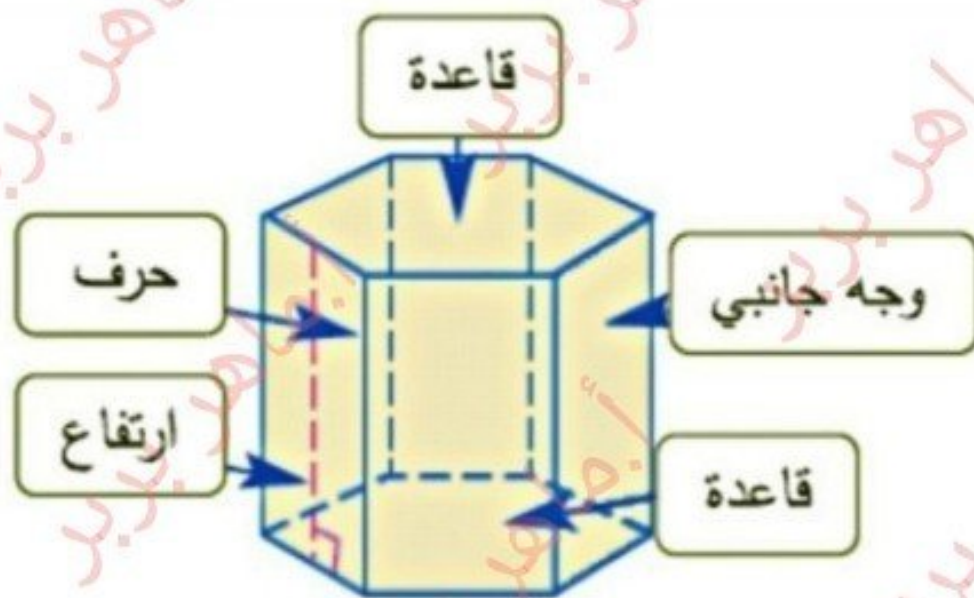
موشور سداسي



موشور ثلاثي



موشور رباعي



(1) الارتفاع هو العمود النازل من الرأس إلى الضلع
المقابلة لهذا الرأس، فالارتفاع هو المسافة بين
القاعدتين. أ. ماهر بربر

(2) المساحة الجانبية للموشور القائم
القاعدة مضروباً بالارتفاع. تساوي محيط

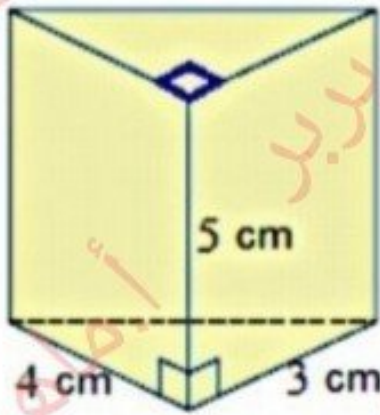
$$S_L = P \times h \quad \text{أي :}$$

(3) المساحة الكلية للموشور القائم
المساحة الجانبية + ضعف قاعدتيه. تساوي مجموع

$$S_T = S_L + 2S_b \quad \text{أي :}$$

(4) حجم الموشور القائم يساوي جداء مساحة القاعدة
بالارتفاع. $V = S_b \times h$

احسب حجم منشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث قائم
طول ضلعيه القائمين 3 cm , 4 cm وارتفاع المنشور 5 cm



$$V = S_b \times h$$

القاعدة مثلث قائم فمساحته

$$S_b = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 \text{ cm}^2 \text{ أي}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= \underline{S_b} \times \underline{h} \\ &= 6 \times 5 = 30 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

- احسب مساحته الجانبية ثم مساحته الكلية.

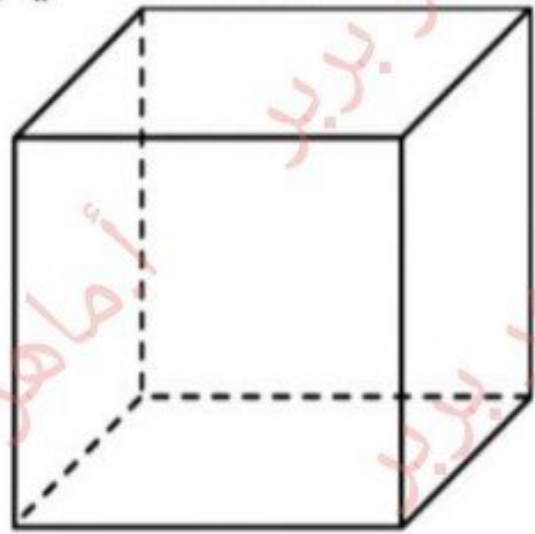
$$\begin{aligned} S_l &= \underline{P} \times \underline{h} = (3 + 4 + 5) \times 5 \\ &= 12 \times 5 = 60 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$S_T = S_l + 2S_b = 60 + 2(6) = 72 \text{ cm}^2$$

(1) المكعب: هو موشور رباعي قائم جميع أوجهه مربعات طبوقة.



مربع



مكعب

ويكون:

جميع الأحراف متساوية الطول
وكل منها يساوي a طول ضلع المربع.
المساحة الجانبية للمكعب:

$$S_l = P \times h = 4a \times a = 4a^2$$

المساحة الكلية للمكعب:

$$S_T = S_l + 2S_p = 4a^2 + 2a^2 = 6a^2$$

حجم المكعب:

$$V = S_b \times h = a^2 \times a = a^3$$

أوجد حجم مكعب طول حرفه 0.1 cm ثم أوجد مساحته الجانبية ومساحة سطحه الكلي

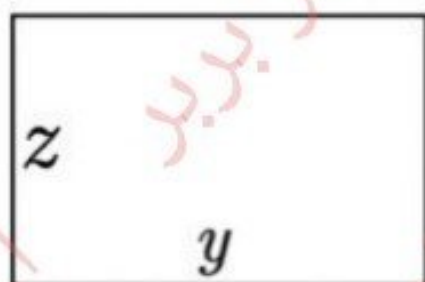
$$V = a^3 = (0.1)^3 = 10^{-3}$$

$$S_l = 4a^2 = 4(0.1)^2 = 4 \times 10^{-2}$$

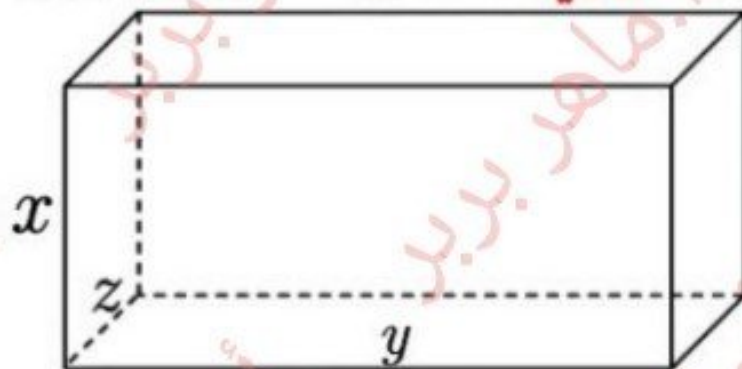
$$S_T = 6a^2 = 6(0.1)^2 = 6 \times 10^{-2}$$

أ. ماهر بربر

(2) متوازي المستطيلات: هو موشور رباعي قائم قاعدته مستطيل.



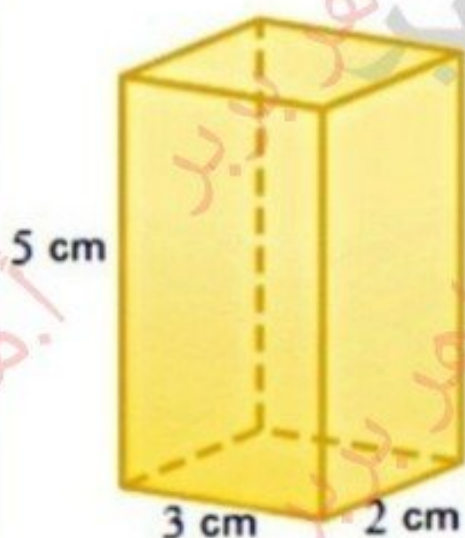
مستطيل



متوازي مستطيلات

ويكون : حجم متوازي المستطيلات يساوي
جاء أبعاده الثلاثة $x.y.z$ لماذا؟ ... لاحظ مايلي

$$V = S_b \times h = z.y \times x = x.y.z$$



مثال

أوجد حجم متوازي مستطيلات
أبعاده 2 cm , 3 cm , 5 cm

الحل:

إن حجم متوازي المستطيلات = جاء أبعاده الثلاثة ومنه

حجم متوازي المستطيلات المعطى $2 \times 3 \times 5 = 30 \text{ cm}^3$
أوجد مساحته الجانبيه ثم مساحته الكليه

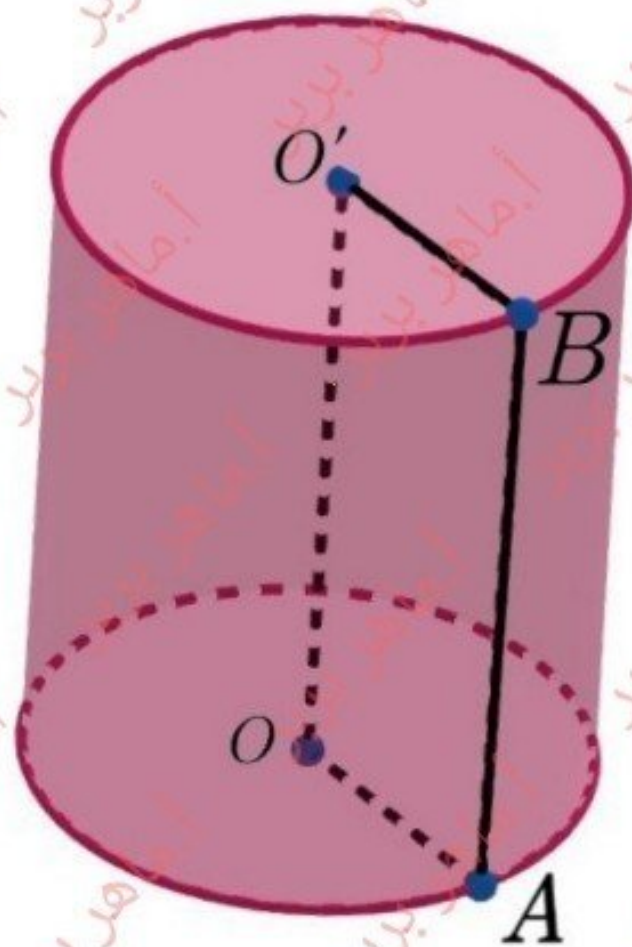
$$S_l = P \times h = 2(2 + 3) \times 5 = 50 \text{ cm}^2$$

$$S_T = S_l + 2S_b = 50 + 2(2 \times 3) = 62 \text{ cm}^2$$

2- الأسطوانة الدورانية:

هي مجسم ناتج عن دوران مستطيل حول أحد بعديه.
ندعو الضلع الذي دار حوله المستطيل **محور الأسطوانة** $[OO']$.

ندعو الضلع الآخر للمستطيل $[OA]$ **نصف قطر القاعدة** (R) .



ملاحظة: في الأسطوانة يتحقق:

طول المحور = طول ارتفاع الأسطوانة.

$$h = OO'$$

ان القوانين المتعلقة بحساب المساحة الجانبية والكلية وحجم الأسطوانة هي ذاتها التي تحدثنا عنها بالموثور مع الانتباه الى أن القاعدة هي دائرة

مثال

أسطوانة دورانية ارتفاعها 40 طول نصف قطر قاعدتها 7.5 أوجد مساحتها الجانبية ثم مساحتها الكلية ثم حجمها.

$$h = 40\text{cm} \quad \text{و} \quad r = 7.5\text{cm}$$

بداية احسب محيط ومساحة القاعدة (الدائرة)

$$P = 2\pi R = 2\pi(7.5) = 15\pi \text{ cm}$$

$$S_b = \pi R^2 = \pi(7.5)^2 = 56.25\pi \text{ cm}^2$$

$$S_l = P \times h = 2\pi R \times h$$

$$= 15\pi \times 40 = 600\pi \text{ cm}^2$$

$$S_T = S_l + 2S_b$$

$$= 600\pi + 2(56.25\pi)$$

$$= 600\pi + 112.5\pi = 712.5\pi \text{ cm}^2$$

$$V = S_b \times h = (56.25 \pi) \times 40$$

$$= 2250\pi \text{ cm}^3$$

الوحدة الرابعة

مجسمات ومقاطع

تذكرة بالمجسمات



القسم الثاني

المخروط والمهرم

3- المخروط الدوراني:

هو مجسم ناتج عن دوران مثلث قائم حول أحد ضلعيه القائمتين.
 ندعو الضلع القائمة التي دار حولها المخروط ارتفاع المخروط (h).
 وندعو الضلع القائمة الأخرى نصف قطر قاعدة المخروط (R).
 أما وتر المثلث القائم يُسمى مولد المخروط.

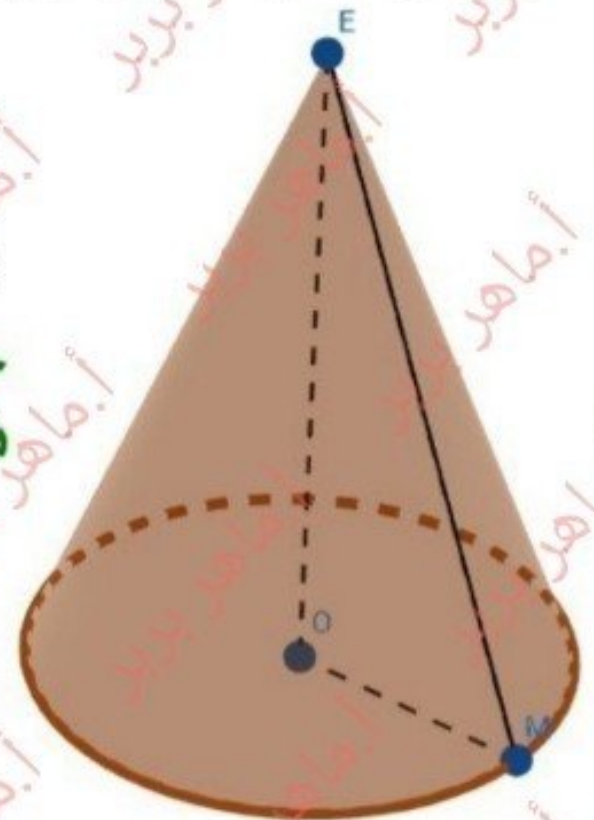


القرص المتولد عن دوران OM هو قاعدة المخروط

سنهتم فقط بحجم المخروط
 أما المساحتين الجانبية والكلية
 لستم مطالبين بها.
 حجم المخروط يساوي
 ثلث مساحة القاعدة بالارتفاع:

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

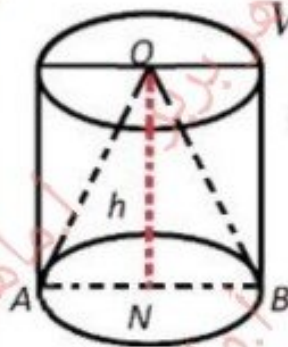
$$= \frac{\pi}{3} R^2 \cdot h$$



• المستقيم (EO) عمودي على مستوى القاعدة.

في الشكل المجاور أسطوانة دورانية ارتفاعها $h = ON$

ونصف قطر قاعدتها $r = NB = 2\sqrt{3}$



ومخروط دوراني رأسه O يشترك معها في القاعدة وحجمه $V = 40\pi$

فإذا علمت أن حجم المخروط يعطى بالعلاقة $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ المطلوب :

(1) أثبت أن ارتفاع الأسطوانة $h = 10$ واحسب حجمها V' .

(2) احسب حجم الجزء المحصور بين الأسطوانة والمخروط.

(1) ارتفاع المخروط هو ذاته ارتفاع الأسطوانة المشتركة معها بالقاعدة والارتفاع $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$:

$$40\pi = \frac{\pi}{3} (2\sqrt{3})^2 \times h$$

$$40\pi = \frac{\pi}{3} \times 12 \times h$$

$$40\pi = 4\pi \times h$$

$$h = \frac{40\pi}{4\pi} = 10 \quad \text{ومنه}$$

حجم الاسطوانة $V' = S_b \cdot h \Rightarrow V' = \pi r^2 \times h$

$$V' = \pi (2\sqrt{3})^2 \times 10$$

$$V' = 120\pi \quad \text{ومنه}$$

(2) حجم الجزء المحصور بين الأسطوانة والمخروط V''

= حجم الاسطوانة - حجم المخروط

$$V'' = V' - V = 120\pi - 40\pi = 80\pi$$

طلب إضافي - أثبت أن النسبة:

حجم المخروط إلى حجم الأسطوانة هي $\frac{1}{3}$
ماذا تستنتج؟

$$\frac{\text{حجم المخروط}}{\text{حجم الأسطوانة}} = \frac{V}{V'} = \frac{40\pi}{120\pi} = \frac{1}{3}$$

نستنتج أن حجم المخروط يساوي ثلث حجم الأسطوانة
المشتركة معه بالقاعدة.... لاحظ مايلي:

$$V_{\text{Cone}} = \frac{1}{3} \underbrace{S_b \cdot h}$$

$$V_{\text{Cone}} = \frac{1}{3} V_{\text{Cylinder}} \Rightarrow V_{\text{Cylinder}} = 3V_{\text{Cone}}$$

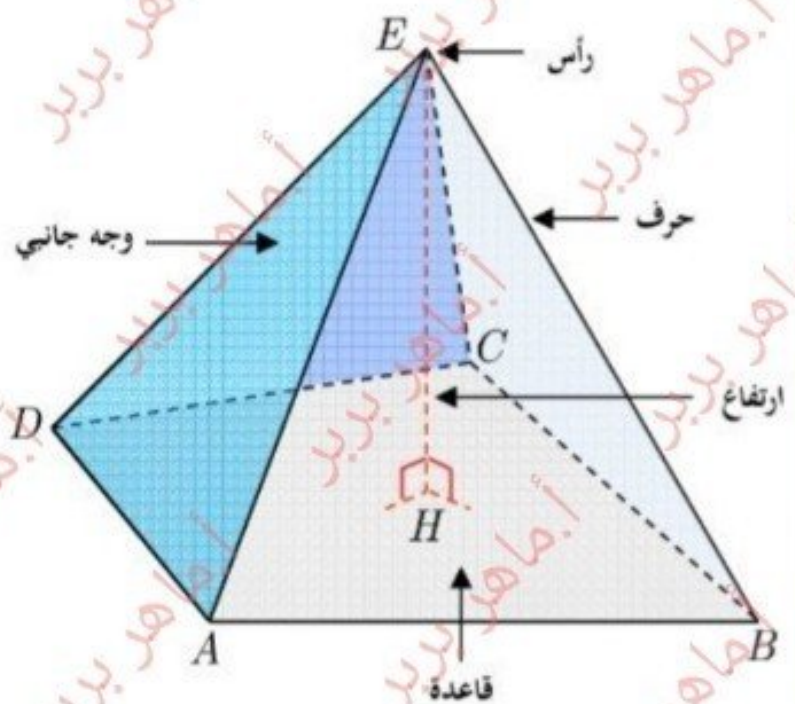
صح أو خطأ + اختيار من متعدد

الهرم مجسم يميزه:

- مضلع يسمى **قاعدة الهرم**.
- نقطة E لا تنتمي إلى القاعدة تسمى **رأس الهرم**.
- مثلثات مشتركة بالرأس E وقواعدها هي أضلاع قاعدة الهرم، يسمى كل منها **وجهاً جانبياً**.
- السطح الجانبي، وهو السطح المؤلف من مجموعة الأوجه الجانبية.
- ارتفاع الهرم من رأسه E ، هو العمود $[EH]$ على مستوي قاعدته، حيث H نقطة من القاعدة.

كما هو الحال في المخروط
سنهتم بحجم الهرم فقط
ويعطى بنفس المساواة
مع اختلاف طبيعة القاعدة:

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$



تحقق من فهمك

احسب حجم هرم ارتفاعه 15 cm و قاعدته مربع طول ضلعه 12 cm .

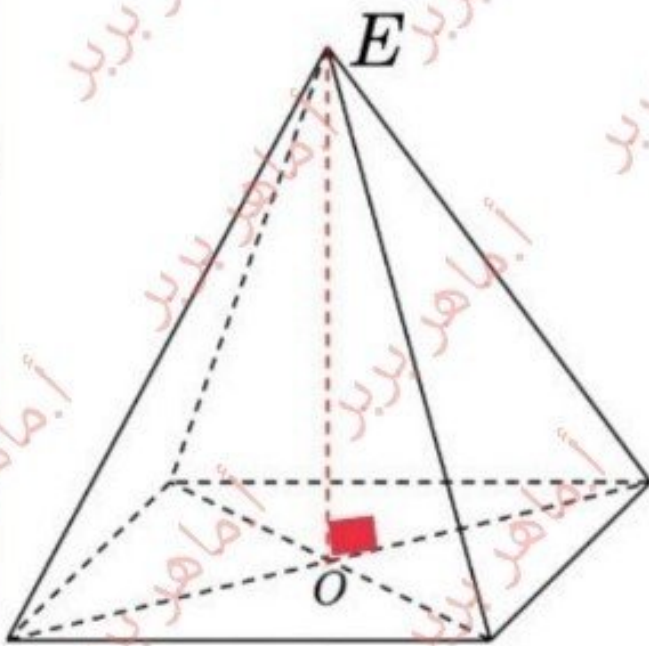
$$v = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3} (12)^2 \times 15 = 5 \times 144 = 720 \text{ cm}^3$$

الهرم المنتظم:

نقول إنَّ هرمًا رأسه E هو **هرم منتظم** إذا استوفى الشرطين:

1- قاعدته **مضلع منتظم** مركزه O (مثلث متساوي الأضلاع أو مربع أو)

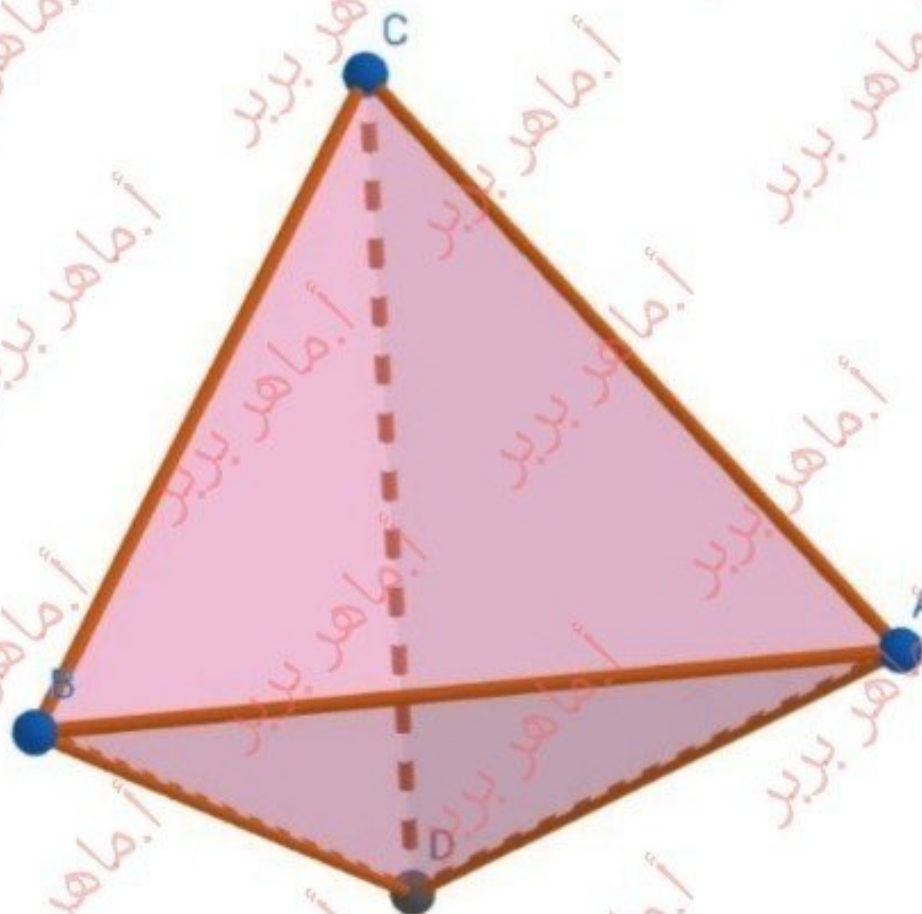
2- ارتفاعه هو القطعة المستقيمة $[EO]$ (الواصلة بين رأس الهرم ومركز القاعدة)



هرم منتظم رباعي

حالة خاصة:

في الحالة التي تكون فيها قاعدة الهرم المنتظم هي مثلث متساوي الأضلاع عندئذ فإن الهرم الناتج ندعوه **برباعي الوجوه المنتظم** ، أوجهه عبارة عن مثلثات متساوية الأضلاع طبقه وكلا من هذه الأوجه يصلح لأن يكون قاعده له.



- علاقة الحجم نفسها .

- قد يطلب حساب مساحة السطح الكلي في هذه الحالة وهي عبارة عن مساحة أحد الأوجه مضروباً في

الوحدة الرابعة

مجسمات ومقاطع

الكرة



السطح الكروي

المجسم الكروي

مساحة السطح الكروي

حجم المجسم الكروي

خطوط مميّزه في الكره

(الدائرة الكبرى - الدائرة الصغرى)

5- الكرة: مهم جدا. صح أو خطأ + اختيار من متعدد

السطح الكروي: ذو المركز O ونصف القطر R هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM = R$



كرة قدم

كرة القدم: شكل كروي مجوف، له في الرياضيات شكل سطح كروي.

المجسم الكروي: ذو المركز O ونصف القطر R هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM \leq R$

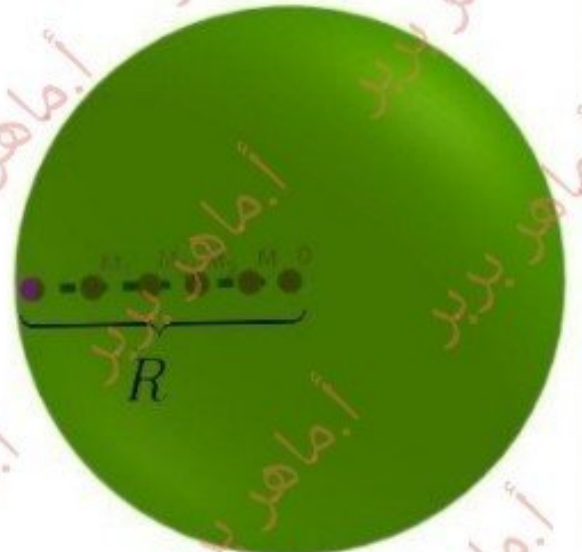


كرة بليارد

كرة البليارد: شكل كروي مملئ، له في الرياضيات شكل مجسم كروي.



سطح كروي



مجسم كروي

حجم الكرة:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

مساحة سطح الكرة:

$$S = 4\pi R^2$$

مثال

① احسب مساحة سطح كروي نصف قطره 7.5 cm .
دستور مساحة سطح كروي هو $S = 4\pi \times R^2$ ، بالتعويض نجد:

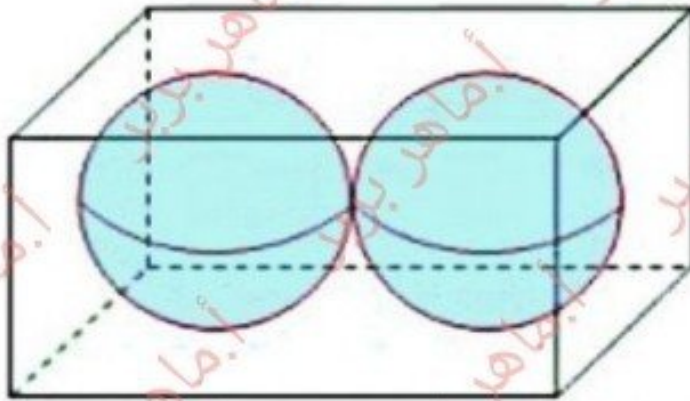
$$\begin{aligned} S &= 4\pi R^2 = 4\pi (7.5)^2 \\ &= 4\pi (56.25) = 225\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

② احسب حجم كرة نصف قطرها 24 m .
دستور حجم الكرة $V = \frac{4}{3} \pi \times R^3$ ، يكون:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (24)^3 = \frac{4}{3} \pi (24)^2 (24) \\ &= \frac{4}{3} \pi (576) (\cancel{24}^8) = (32)(576) \\ &= 18432 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

علبة بشكل متوازي مستطيلات أبعادها

$$8cm, 4cm, 4cm$$



تحتوي هذه العلبة **كرتين**

متساويتين نصف قطر كلٍ

منهما $2cm$ تماسان أوجه

العلبة (كماترى فى الشكل المرافق) احسب حجم الفراغ المحصور بين الكرتين والعلبة.

نرمز إلى حجم العلبة بالرمز V_1 فيكون:

$$V_1 = 4 \times 4 \times 8 = 128cm^3$$

نرمز إلى حجم **إحدى** الكرتين بالرمز V_2 فيكون:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{4}{3} \pi \times R^3 = \frac{4}{3} \pi \times (2)^3 = \frac{4}{3} \pi \times 8 \\ &= \frac{32}{3} \pi cm^3 \end{aligned}$$

نرمز حجم الفراغ المحصور بين الكرتين والعلبة بالرمز

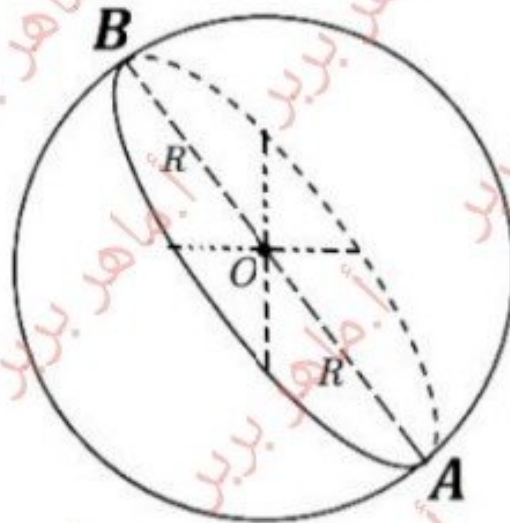
V فيكون:

$$\begin{aligned} V &= V_1 - 2V_2 = 128 - 2\left(\frac{32}{3}\pi\right) \\ &= \left(128 - \frac{64}{3}\pi\right) cm^3 \end{aligned}$$

◆ خطوط مميزة في الكرة:

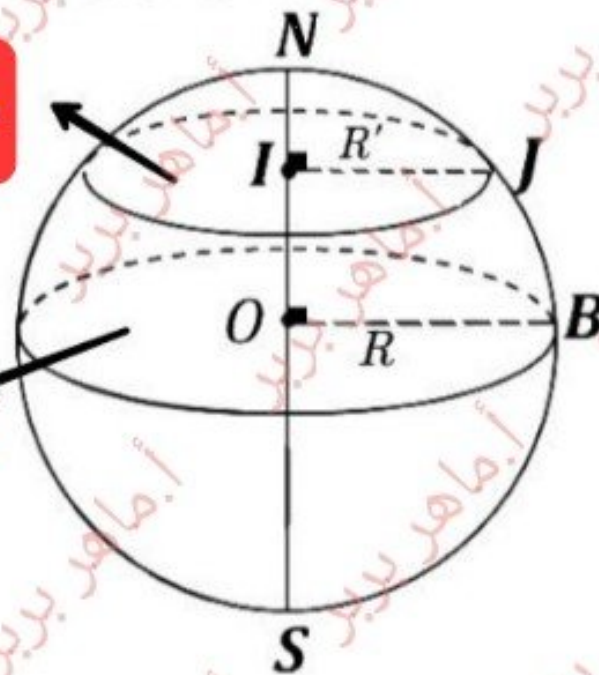
1- قطر الكرة: هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة O وطرفاها نقطتان مختلفتان من الكرة.

➤ أقطار الكرة متساوية الطول وطول كل منها $2R$.



2- الدائرة الكبرى: هي دائرة واقعة على الكرة وقطرها يساوي قطر الكرة، مثل الكرة التي مركزها O ونصف قطرها $R = OB$.

دائرة صغيرة



دائرة كبرى

(لكرة عدد غير منتهي من الدوائر الكبرى).

3- دائرة صغيرة: وهي دائرة واقعة على الكرة ونصف قطرها أصغر تماماً من نصف قطر الكرة، مثل الكرة التي مركزها I ونصف قطرها:

$R' = IJ$ ، كما أنه لكرة عدد غير منتهي من الدوائر الصغيرة.

2019 (محافظة حلب)

تأمل المجسم المرسوم جانباً ثم ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وغلط أمام العبارة المغلوطة في كل مما يأتي:

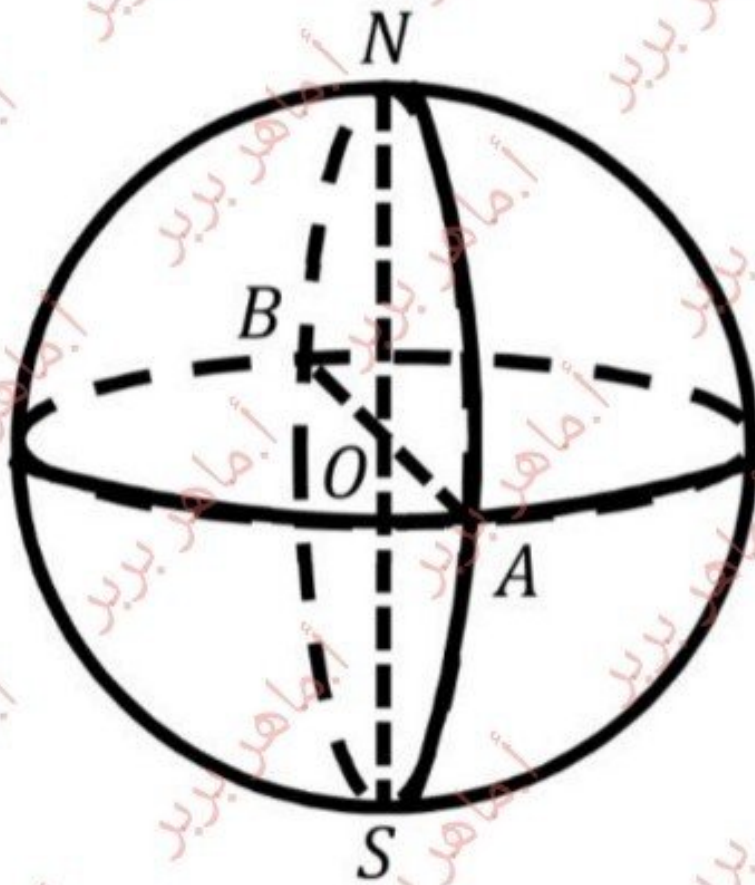
(1) المجسم الكروي ذو المركز O ونصف قطره R هو مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق $OM > R$.

(2) مساحة السطح الكروي يعطى بالعلاقة: $S = 4\pi R^2$

(3) الرباعي $ANBS$ متوازي أضلاع

(4) السطح الكروي ذو المركز O ونصف قطره R هو مجموعة

النقاط M في الفراغ التي تحقق $OM = R$



الوحدة الرابعة

مجسمات ومقاطع

مقاطع مجسمات

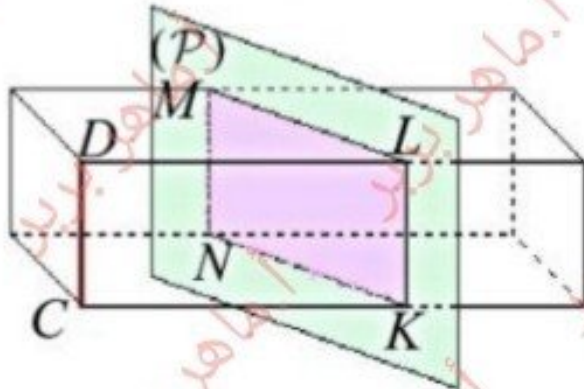


القسم الأول:

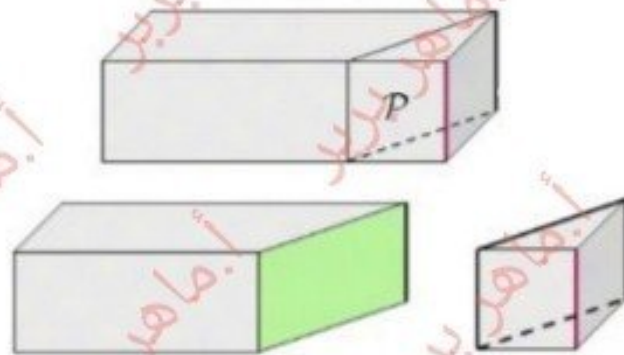
- مقطع (موشور قائم ، أسطوانة) بمستوي.
- مقطع كرة بمستوي.

مقطع متوازي مستطيلات

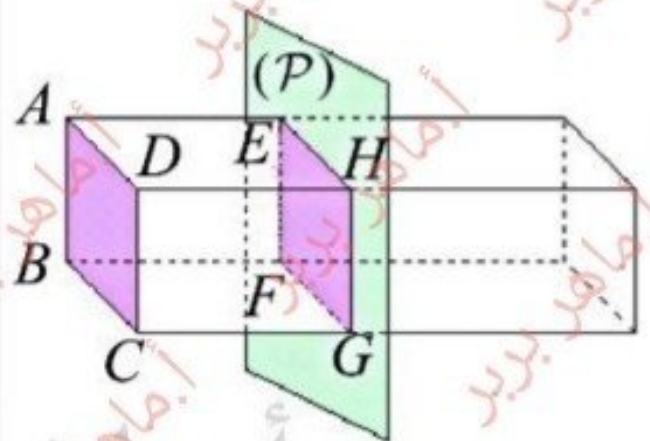
بمستوي يوازي أحد الأحراف هو مستطيل أحد بعديه يساوي ذلك الحرف



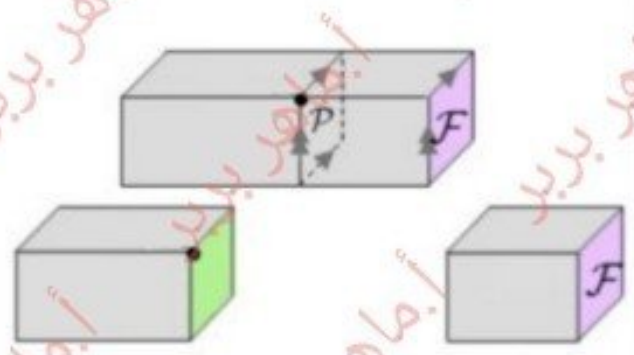
إن مقطع متوازي المستطيلات السابق بمستوي P يوازي الحرف CD هو مستطيل $MNKL$ فيه $KL = NM = CD$



بمستوي يوازي أحد الأوجه المقطع الناتج هو مستطيل يطابق ذلك الوجه



إن مقطع متوازي المستطيلات السابق بمستوي P يوازي الوجه $ABCD$ هو مستطيل $EFGH$ طبوق على المستطيل $ABCD$



١. **مقطع** موشور قائم بمستوى يوازي قاعدته هو شكل هندسي مطابق لشكل قاعدة الموشور.

٢. **مقطع** موشور قائم بمستوى يوازي أحد أحرفه **مستطيل** دوما ، أحد بعديه يساوي ذلك الحرف .

• **مقطع مكعب** بمستوى يوازي أحد أوجهه هو **مربع** دوما .

• مقطع مكعب بمستوى يوازي أحد أحرفه **دون** أن يوازي أحد أوجهه هو **مستطيل** دوما أحد بعديه يساوي ذلك الحرف



مقطع المكعب

ABCDEFGH

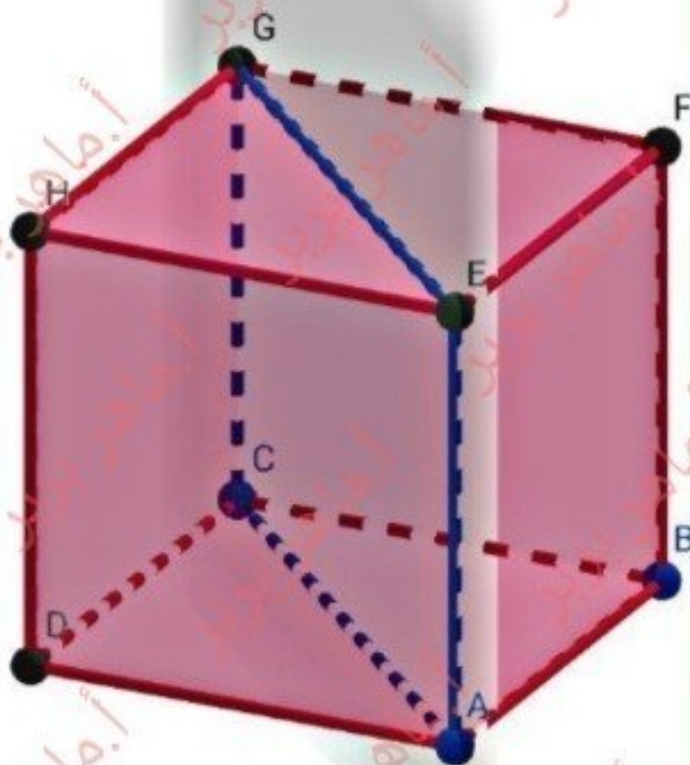
بمستوى (p)

يوازي الحرف FB

هو المستطيل

: ويكون AEGC

$AE=GC=FB$



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه:

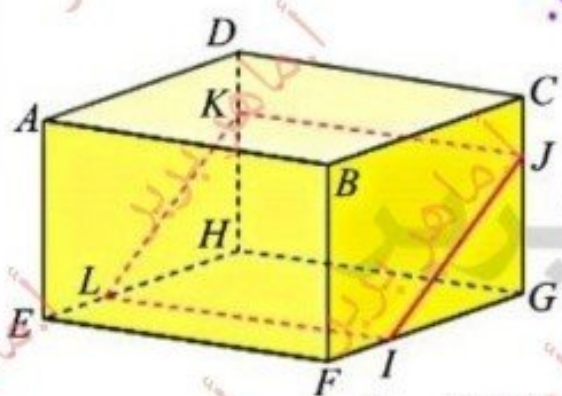
$$FG = 6 \text{ cm} \text{ و } EF = 7 \text{ cm} \text{ و } AE = 5 \text{ cm}$$

I نقطة من الحرف $[FG]$ تحقق $IG = 4 \text{ cm}$

J نقطة من الحرف $[CG]$ تحقق $JG = 3.5 \text{ cm}$

$IJKL$ مقطع لهذا الجسم بمستوى يوازي الحرف $[AB]$

ما طبيعة المقطع $IJKL$ ؟ جد بعديه.



هو مستطيل طوله يساوي EF أي 7 cm

بينما عرضه يساوي IJ و الذي يحسب حسب مبرهنة فيثاغورث:

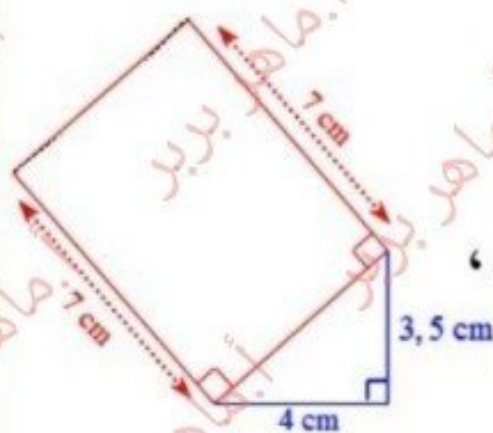
$$IJ = \sqrt{GI^2 + GJ^2} = \sqrt{(4)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{28.25}$$

ارسم المقطع $IJKL$ بأبعاده التامة.

نرسم المثلث IGJ القائم في G ،

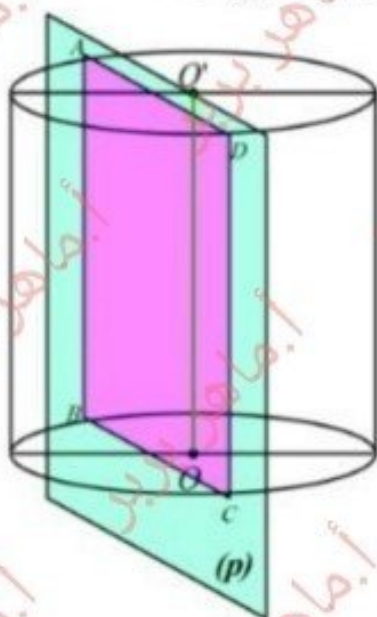
ثم نرسم على وتره وخارجه المستطيل $IJKL$ ،

بحيث يكون طول $[IL]$ مساوياً 7 cm .



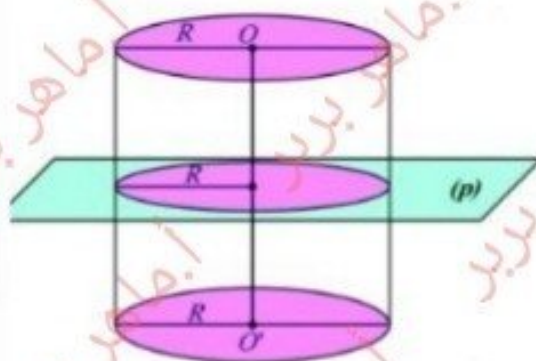
مقطع اسطوانة

بمستوي يوازي
محورها هو
مستطيل أحد بعديه
يساوي ارتفاع
الأسطوانة



إن مقطع
الأسطوانة
المجاورة بمستوي
يوازي المحور هو
مستطيل ABCD
فيه
 $AB = CD =$
 OO'

بمستوي يوازي
قاعدتها أو يعامد
محورها هو دائرة
تطابق القاعدة



إن مقطع الأسطوانة
المجاورة بمستوي
يوازي قاعدتها هي
دائرة تطبق على
القاعدة

ملاحظة مهمة.

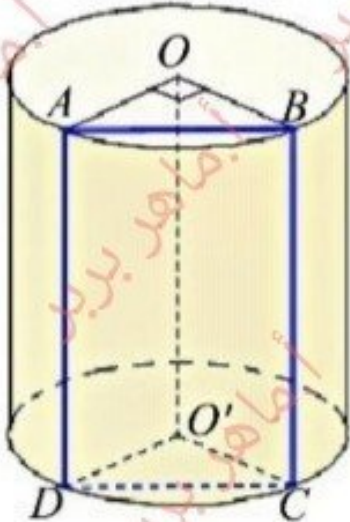
إذا كان طول **ارتفاع** الأسطوانة
يساوي طول **قطرها** فإن **مقطع** هذه
الأسطوانة بمستوى يوازي محورها
هو **مربع**

/ مهم جدا صح أو خطأ + اختيار
من متعدد /

الشكل المرافق يمثل أسطوانة ارتفاعها 7 cm و نصف قطر قاعدتها 3 cm و مركزا قاعدتيها O و O' .

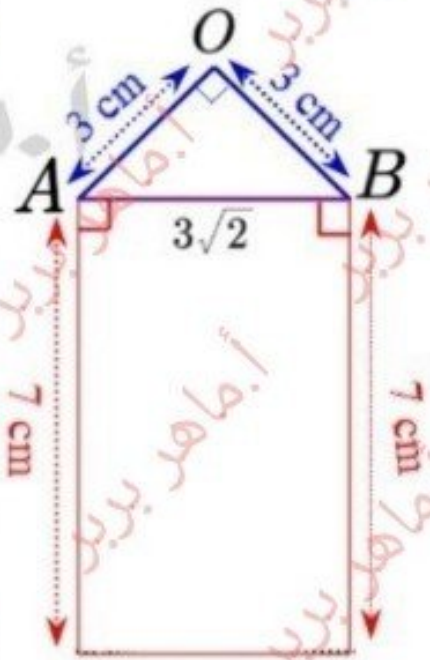
$ABCD$ هو مقطع هذه الأسطوانة بمستوى يوازي محورها (OO')

ما طبيعة هذا المقطع؟



المقطع هو مستطيل.

نعلم أن $\angle AOB = 90^\circ$ ارسم هذا المقطع بأبعاده التامة.



لدينا $\widehat{AOB} = 90^\circ$ و $OA = OB = r = 3$

فالمثلث AOB قائم في O و متساوي الساقين.

نرسم المثلث AOB القائم في O

ثم نرسم على وتره وخارجه المستطيل $ABCD$

بحيث يكون طول $[AD]$ مساوياً 7 cm .

احسب الطول AB

حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم AOB نكتب:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 9 + 9$$

$$AB = 3\sqrt{2}\text{ cm}$$

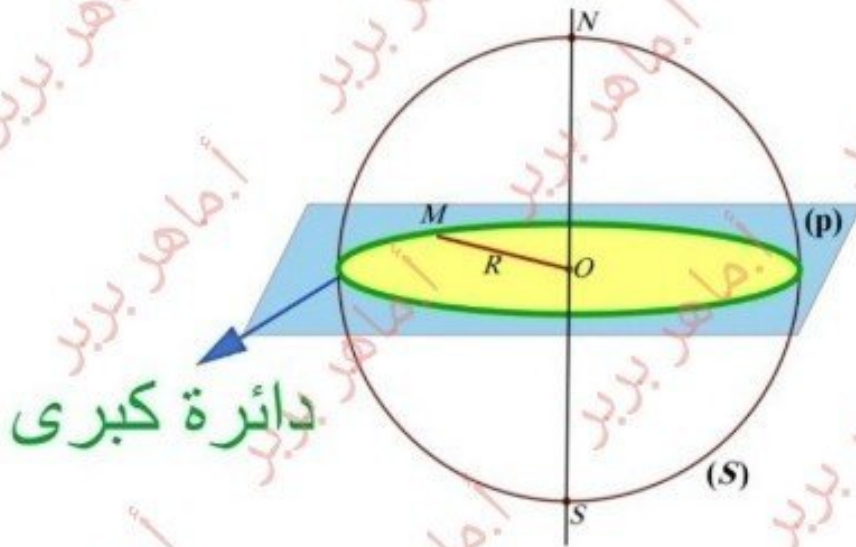
مقطع كرة بمستوي

مقطع كره بمستوي هو دائرة تختلف طبيعتها حسب الحالات الآتية

١. إذا مر المستوي القاطع بمركز الكره فإن المقطع

هو دائرة كبرى

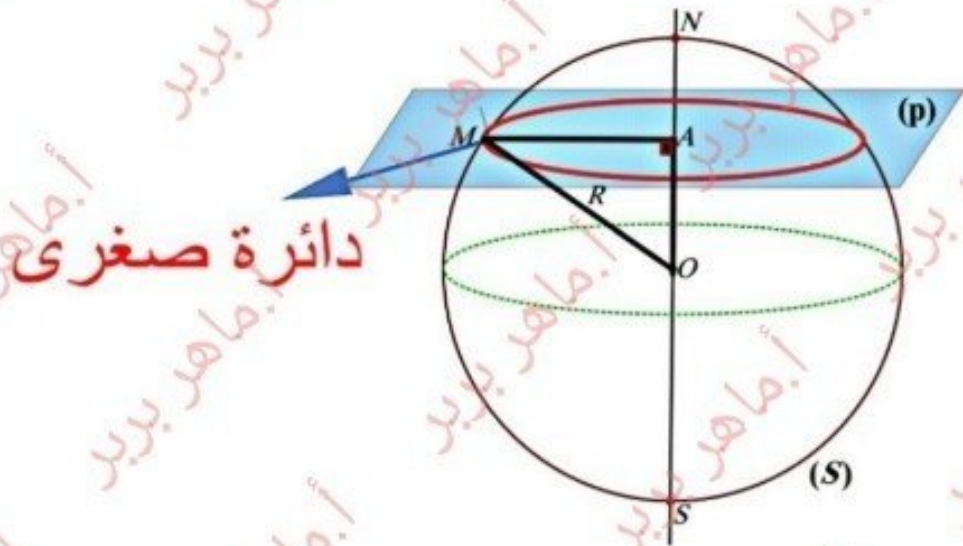
(البعد بين المستوي القاطع ومركز الكره يساوي صفر)



٢. إذا لم يمر المستوي القاطع من مركز الكره وكان البعد

بينه وبين مركزها أصغر من نصف قطرها فإن

المقطع هو دائرة صغرى

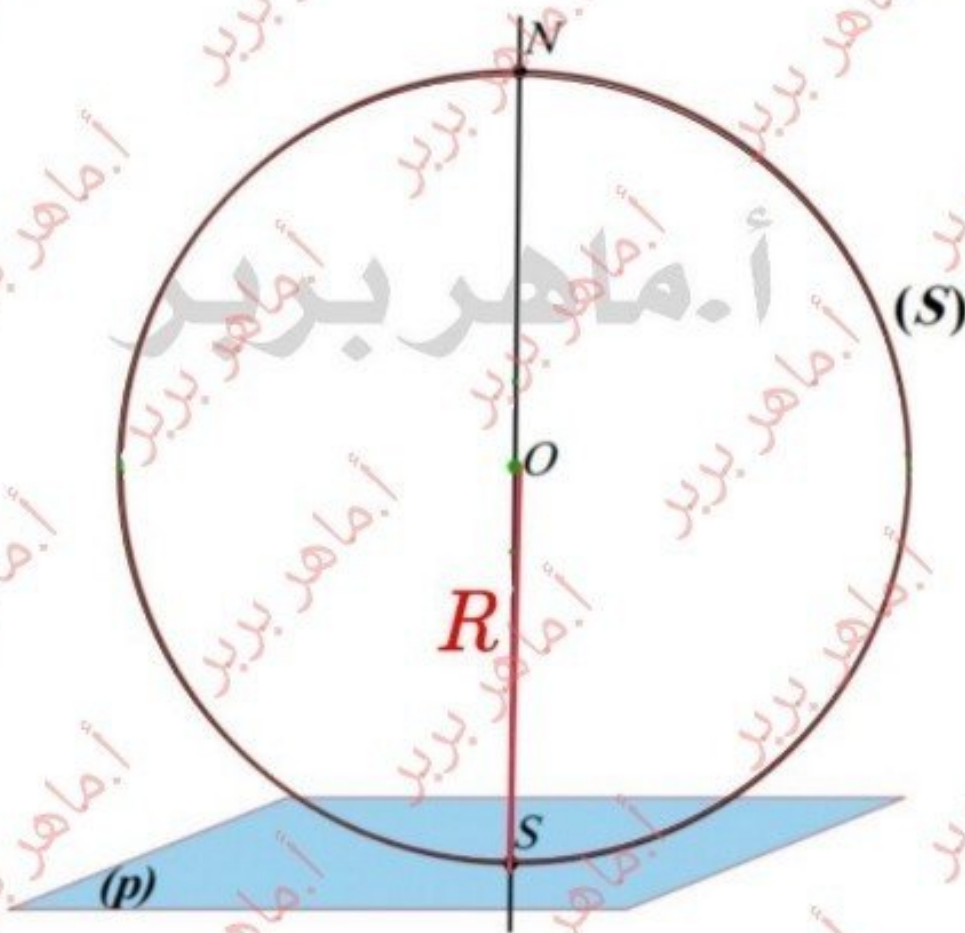


٣. اذا كان بعد المستوي القاطع عن مركز الكرة

يساوي نصف قطرها فإن المقطع في هذه الحالة

هو **نقطه** نسميها نقطة التماس اي المستوي يشترك مع

الكره بنقطه وحيدده هي نقطة التماس

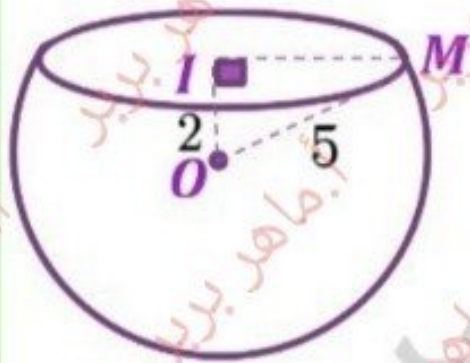


W سطح كروي مركزه O و نصف قطره 5 cm
 قُطع هذا السطح بمستو على بعد 2 cm من O

مقطع W بهذا المستوي هو دائرة I مركزها I

M نقطة مشتركة بين السطح W و الدائرة I

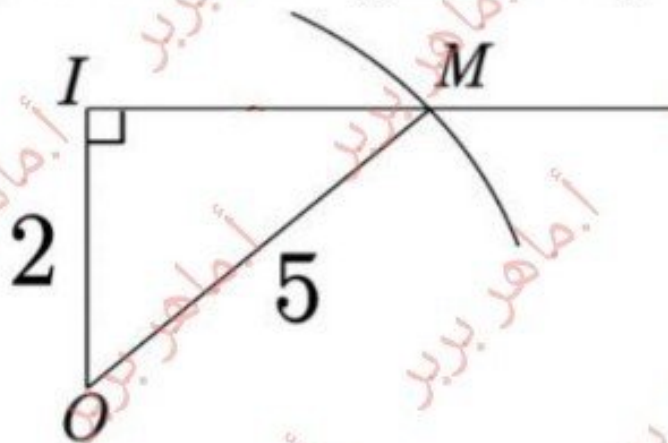
ارسم المثلث MOI بأبعاده التامة



$$IM = \sqrt{21}$$

الحل: نرسم:

- القطعة [OI] بطول 2 cm.
- نصف المستقيم [Ix] عمودياً على [OI].
- قوساً دائرية مركزها O و نصف قطرها 5 cm فيقطع [Ix] في M.
- نرسم القطعة [OM]، فنحصل على المثلث MOI القائم في I



ارسم الدائرة I بأبعادها التامة

نفتح الفرجار بطول [IM] و نرسم الدائرة.

الوحدة الرابعة

مجسمات ومقاطع

مقاطع مجسمات



القسم الثاني:

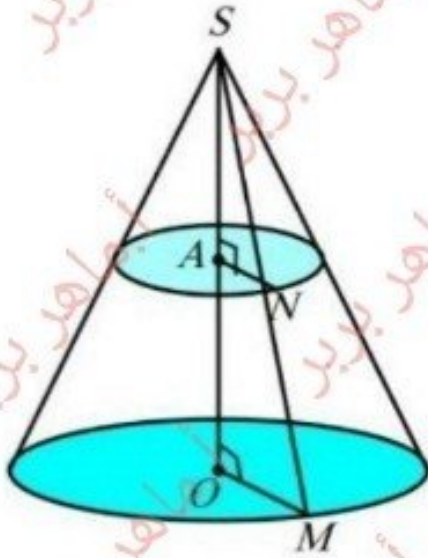
- مقطع هرم بمستوي يوازي قاعدته .
- مقطع مخروط بمستوي يوازي قاعدته .

ضمن منهاجكم سنكتفي بالحالة التي يكون فيها

المستوي القاطع موازيا لقاعدة (الهرم - المخروط)

مقطع مخروط دوراني

ان مقطع مخروط دوراني بمستوي يوازي قاعدته هو دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة

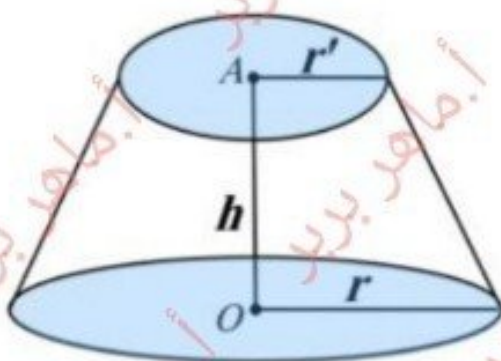


الدائرة التي نصف قطرها هي تصغير عن قاعدة المخروط ونسبة التصغير

$$K = \frac{\text{ارتفاع المخروط الصغير}}{\text{ارتفاع المخروط الكبير}}$$

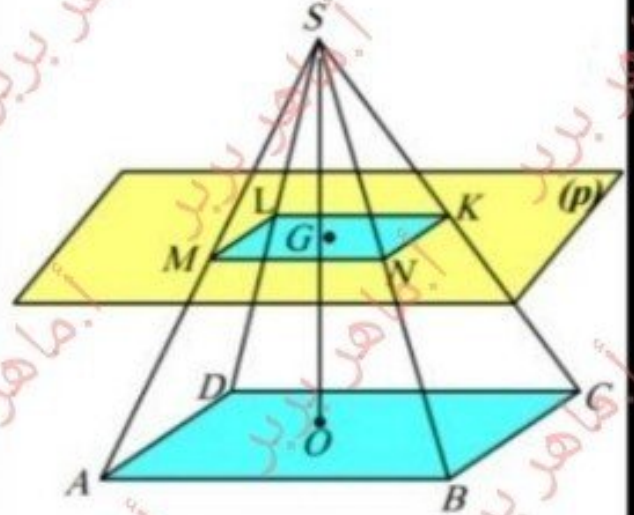
نسمي الجزء المحصور بين المقطع وقاعدة المخروط بجدع الهرم وحجمه يعطى بالعلاقة :

$$V = \frac{\pi}{3} (r^2 + r'^2 + r \cdot r') \times h$$



مقطع هرم

ان مقطع هرم بمستوي يوازي القاعدة هو مضلع مصغر عن القاعدة



المقطع KLMN مصغر عن القاعدة ABCD ونسبة

$$k = \frac{\text{ارتفاع هرم صغير}}{\text{ارتفاع هرم كبير}}$$

نسمي الجزء المحصور بين المقطع والقاعدة بجدع الهرم وحجمه يعطى بالعلاقة :

$$V = \frac{1}{3} (S + S' + \sqrt{SS'}) \times h$$

