فريق TOGETHER

مجموعة مميَّزين من مختلف الكليات الطبية والهندسية

القناة الرئيسية:

https://t.me/bac2025syria240

مجموعة المُناقشات:

https://t.me/bacsyria240

قناة الملفّات:

https://t.me/TogetherFilesList

•

Together

<u>مبرهنة King عندما x تسعى الى قيمة تجعل المضمون ∞</u>

<u>الفوق بيشوف يلي تحتو عدد</u>

e^x

$\Downarrow$

x

$\Downarrow$

$\sqrt{x}$

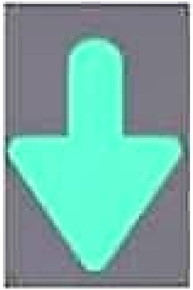
$\Downarrow$

$ln(x)$

<u>مثال</u>

$$f(x) = x - ln(x)$$

احسب نهاية f(x) عند ∞+



∞

$$\frac{\infty}{\text{عدد}} \qquad \frac{\text{عدد}}{0}$$

0

ازالة حالة عدم التعين من الشكل ∞ − ∞بطريقة سريعة

يكون لدينا التابع من الشكل

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm dx$$

في حالة $\sqrt{ax^2} = dx$

تكون $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{b}{\sqrt{a}+d}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-b}{\sqrt{a}+d}$$

مثال

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x$$

$$\sqrt{4x^2} = 2x$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-b}{\sqrt{a}+d} = \frac{-1}{\sqrt{4}+2}$$

$$= \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}$$

في حالة

$$\sqrt{ax^2} \neq dx$$

$$\sqrt{ax^2} \pm dx$$

مثال

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 3x$$

$$\sqrt{4x^2} = 2x$$

$$2x - 3x = -x$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

ناخذ الحد المسيطر(على المسيطر) بغض النظر عن

cosوsin

مثال

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2\cos(x)}{x^3-2x+1}$$

اوجد نهاية $f(x)$ عند $+\infty$

A 2	
B 0	
C −1	
D1	

القاعدة

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$a \cdot d - b \cdot c \neq 0$$

$$x \neq -\frac{d}{c}$$

مقارب شاقولي:

$$x = -\frac{d}{c}$$

مقارب أفقي:

$$y = \frac{a}{c}$$

مركز التناظر:

$$\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

مثال

اي من النقاط التالية هي مركز تناظر للتابع $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

- $(1,2)$
- $(2,1)$
- $(-1,2)$
- $(-1,-2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(ax)}{x^2} = a^2$$

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

تمارين المجموع:

القانون الأول:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

القانون الثاني:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

القانون الثالث:

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

ناتج المجموع:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3$$

الخيار	القيمة
A	2025
B	3025
C	4035
D	2020

الحل:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + N^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

عند $N = 10$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3 = \frac{10^2(10+1)^2}{4}$$

$$= \frac{100\times121}{4}$$

$$= 25 \times 121$$

$$= 3025$$

الإجابة الصحيحة: B) 3025

مثال 2:

في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$، فإن المجموع:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

يساوي:

الصيغة الرياضية	الخيار
$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	A
$\frac{n^2+11n+7}{6}$	B
$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	C
$\frac{n(n+2)}{6}$	D

فكرة الحل لدينا

$$n \geq 1$$

ولكن عندما نعوض $n = 1$، فإننا نواجه أكثر من اختيار صحيح، لذلك نأخذ أي عدد بعد 1، وليكن $n = 2$.

فنوجد:

$$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

عند تعويض n في اختيارات نجب أن يكون الجواب لدينا 5.

التحقق بجمع الإختيارات:

(A)

$$\frac{2(2+1)(2+2)}{6}=\frac{24}{6}=4\neq 5$$

(B)

$$\frac{4+22+7}{6}=\frac{33}{6}\neq 5$$

(C)

$$\frac{2(3)(5)}{6}=\frac{30}{6}=5$$

(D)

$$\frac{2(4)}{6}=\frac{8}{6}\neq 5$$

الخيار الصحيح هو (C) حيث أنه يحقق المعادلة ويعطي النتيجة الصحيحة 5.

عند اثبات صحة المتراجحة $n! \geq 2^{n-1}$ حيث $n \geq 1$ فإن العلاقة صحيحة للوصول للمطلوب

A) $n! \geq 2^n$
B) $(n+1)! \geq 2^{(n-1)}$
C) $(n+1)! \geq 2^n$
D) $n! \geq (n+1) - 2^{(n-1)}$

الحل:

نفرض صحة المتراجحة المعطاة عند $n+1$:

$$(n+1)! \geq 2^{(n+1)-1}$$

$$(n+1)! \geq 2$$

إذن الخيار الصحيح هو C.

للمتراجحة 1:

$$E(n) : 3n^2 \geq (n+1$$

أصغر عدد طبيعي يحققها:

A	B	C	D
0	1	2	3

الحل: نعوض الخيارات في المتراجحة المعطاة:

$E(0) : 0 \geq 1$ ⇒ خاطئ

$E(1) : 3 \geq 4$ ⇒ خاطئ

$E(2) : 12 \geq 9$ ⇒ صحيح

$E(3) : 27 \geq 16$ ⇒ خاطئ

مثال 2:

$$E(n) : 3^n \geq 2^n + 5n^2$$

أصغر عدد طبيعي غير معدوم بحيث $E(n)$ محققة:

A	B	C	D
3	4	5	6

الحل: نعوض الخيارات في المتراجحة:

$$E(3): 3^3 \geq 2^3 + 5 \times 3^2$$
$$27 \geq 8 + 45$$
$$27 \geq 53 \Rightarrow \text{خاطئ}$$

$$E(4): 3^4 \geq 2^4 + 5 \times 16$$
$$81 \geq 16 + 80$$
$$81 \geq 96 \Rightarrow \text{خاطئ}$$

$$E(5): 3^5 \geq 2^5 + 5 \times (5)$$
$$243 \geq 32 + 125$$
$$243 \geq 157 \Rightarrow \text{صحيح}$$

$$E(6): 3^6 \geq 2^6 + 5 \times 36$$
$$729 \geq 64 + 180$$
$$729 \geq 244 \Rightarrow \text{صحيح}$$

ولكن نحتاج لأصغر عدد طبيعي غير معدوم، أي
الجواب: 5.

تمارين المضاعف:

$$x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}\cdot y + \cdots + y^{n-1}\right)$$

مثال 1:

إن العدد $3^{30} - 2^{10}$ مضاعف للعدد:

الخيار	القيمة
A	150
B	50
C	100
D	25

الحل: نوحد الأسس:

$$3^{30} - 2^{10} = (3^3)^{10} - 2^{10}$$

$$= 27^{10} - 2^{10}$$

$$= (27-2)(\ldots)$$

$$= 25 \times (\ldots)$$

إن العدد $3^{2n} - 2^n$ مضاعف للعدد:

الخيار	القيمة
A	2
B	3
C	7
D	9

الحل:

$$3^{2n} - 2^n = (3^2)^n - 2^n$$

$$= 9^n - 2^n$$

$$= (9 - 2)(\dots)$$

$$= 7 \times (\dots)$$

مثال 3: أي من العبارات الآتية مضاعف العدد 3 إذا كان العدد الطبيعي N:

الخيار	المعادلة
A	$2^{3n+1}+1$
B	4^n+2
C	$3^{2n+1}+2^{n+2}$
D	$4-2^n$

الحل:
فكرة الحل هي إيجاد إذا كانت التعبيرات المعطاة تمثل مضاعفًا للعدد 3 عن طريق اختبارها عند $N=0$.

- **الخيار A:** $2^{3(0)}+1=1+1=2$، ليس مضاعفًا للعدد 3.
- **الخيار B:** $4^0+2=1+2=3$، وهو مضاعف للعدد 3.
- **الخيار C:** $3^{2(0)+1}+2^{0+2}=3+4=7$، ليس مضاعفًا للعدد 3.
- **الخيار D:** $4-2^0=4-1=3$، وهو مضاعف للعدد 3.

لدينا خياران صحيحان، لذلك نختبر $N = 1$:

- الخيار B: $4^1 + 2 = 4 + 2 = 6$، وهو مضاعف للعدد 3.
- الخيار D: $4 - 2^1 = 4 - 2 = 2$، ليس مضاعفًا للعدد 3.

بالتالي، الاختيار الصحيح هو **B**.

مثال 2:

أيأ كان العدد الطبيعي n فإن العلاقة المعبرة عن مضاعفات العدد 11:

الخيار	العلاقة الرياضية
A	$2^{3n} - 2^{2n}$
B	$3^{2n} - 2^{2n}$
C	$6^n - 3^n$
D	$6^{2n} - 5^{2n}$

الحل:
كلٌ من العدد الطبيعي $n \geq 0$، أي نعوض:

$$n = 0$$

$$A) \quad 1 - 1 = 0$$

$$B) \quad 1 - 1 = 0$$

$$C) \quad 1 - 1 = 0$$

$$D) \quad 1 - 1 = 0$$

ولكن الصفر هو مضاعف لكل الأعداد، لذلك نلجأ لتعويض:

$$n = 1$$

$$A) \quad 2^3 - 2^2 = 8 - 4 =$$

$$B) \quad 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$$

$$C) \quad 6^1 - 3^1 = 6 - 3 = 3$$

$$D) \quad 6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$$

أي أن الاختيار D هو الاختيار الصحيح.

السؤال:

لتكن المتتالية U_n معرفة بالعلاقة:

$$U_0 = 2$$

$$U_{n+1} = 2 - U_n$$

أي من العبارات التالية تمثل الحد العام U_n بدلالة n؟

A	B	C	D
$U_n = 1 + (-1)^n$	$U_n = 1 - 2^n$	$U_n = 3 - (-1)^n$	$U_n = (-1)^n + 2$

$$U_n = \left[U_0 - \frac{b}{1-a}\right] a^n + \frac{b}{1-a}$$

التعويض في القانون:

$$U_n = \left[2 - \frac{2}{1-(-1)}\right] (-1)^n + \frac{2}{1-(-1)}$$

نحسب القيم:

$$= \left[2 - \frac{2}{2}\right] (-1)^n + \frac{2}{2}$$

$$= [2 - 1](-1)^n + 1$$

$$= (-1)^n + 1$$

استنتاج المشتق من المرتبة n

نشتق التابع ونعوض $n = 1$ (الحد البدء الذي يكون في السؤال) في جميع الخيارات التي تكون في السؤال.

يجب أن تكون إحدى الخيارات نفس المشتق بعد تعويض $n = 1$.

في حال كان لدينا أكثر من جواب صحيح، نشتق التابع مرة أخرى.

ونعوض $n = 2$ في الخيارات الصحيحة المتبقية، مع الأخذ بعين الاعتبار أن $0! = 1$.

أمثلة

ليكن لدينا التابع المعرف على $R \setminus 1$:
$f(x) = \frac{1}{x-1}$
فإن المشتق من المرتبة n يعطى بالعلاقة:

A) $\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$

B) $\frac{(-1)^n(n!)}{x^{n+1}}$

C) $\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n-1}}$

D) $\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$

الحل:

نشتق التابع

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

نعوض $n = 1$ في جميع الخيارات

A)
$\frac{n!}{(x-1)^{n+1}} = \frac{-1}{(x-1)^2}$
الخيار A خاطئ

B)
$\frac{(-1)^n(n)!}{x^{n+1}} = \frac{-1}{x^2}$
خاطئ

C)
$\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n-1}} = \frac{-1}{1} = -1$
خاطئ

D)
$\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} = \frac{-1}{(x-1)^2}$
حصلنا على نفس المشتق، إذاً الخيار D صحيح

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

فإن المشتق من المرتبة n يعطي بالعلاقة:

A) $\frac{n!}{x^{n+1}}$

B) $\frac{(-1)^n(n-1)!}{x^{n+1}}$

C) $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

D) $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

الحل:

نشتق التابع الذي في السؤال أولاً

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

نجرب $n = 1$ في جميع الخيارات

A)
$\frac{n!}{x^{n+1}} = \frac{1}{x^2}$ خاطئ

B)
$$\frac{(-1)^n(n-1)!}{x^{n+1}} = \frac{-1\times1}{x^2}$$
$$= -\frac{1}{x^2}$$

الجواب صحيح يساوي المشتق

الخيار B صحيح

C)

$$\frac{(-1)^n n!}{x^{n-1}} = \frac{-1\times 1}{x^0} = \frac{-1}{1} = -1$$

الخيار C خاطئ

D)

$$\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = \frac{-1\times 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

الخيار D صحيح

أصبح لدينا خياران صحيحان
نشتق مرة أخرى ونجرب $n = 2$
في الخيارين الصحيحين وهما B و D

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

B)

$$\frac{(-1)^n (n-1)!}{x^{n+1}} = \frac{1}{x^3}$$

D)

$$\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = \frac{1\times 2}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

الخيار D صحيح وهو الجواب الصحيح

فإن المشتق من المرتبة n لـ $f(x)=\frac{1}{1-x}$ يعطى

A	B	C	D
$\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$	$\frac{(-1)^n(n!)}{(x-1)^{n+1}}$	$\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$	$\frac{(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}}$

فإن المشتق من المرتبة n لـ $f(x)=-\frac{1}{x}$ يعطى

A	B	C	D
$\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$	$\frac{(-1)^{n+1}(n!)}{x^{n+1}}$	$\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$	$\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$