SaSa

# مبوب الرياضيات من ساسا

## بكالوريا سوريا 2025

## / الكتاب الأول/

شرح كامل للقواعد و أسئلة أتمتة تغطي جميع الأفكار الواردة في المنهاج مع الحل الكامل وشرح خطوات الحل بدقة ووضوح

## قواعد إيجاد النهايات

### نهاية تابع كثير حدود عند اللانهاية

عند دراسة نهاية تابع كثير حدود من الشكل

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

عندما تؤول $x$ إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$

نستخدم القاعدة التالية

### القاعدة

نأخذ الحد المسيطر فقط
وهو الحد الذي يملك أعلى قوة

ثم نُعوّض بدلًا من كل $x$ بـ $\infty$ أو $-\infty$

نحسب الناتج باستخدام قوانين القوى والإشارات



### مثال محلول

أوجد

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حيث

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$$

الحل

نلاحظ أن التابع كثير حدود

الحد المسيطر هو

$$x^3$$

لأن درجته هي الأعلى

نحسب عند $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$

نحسب عند $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

**مثال 2**

أوجد

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

حيث

$$f(x) = -4x^4 + 7$$

نأخذ الحد المسيطر

$$-4x^4$$

عند $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-4x^4) = -4(-\infty)^4 = -4(+\infty) = -\infty$$

عند $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-4x^4) = -4(+\infty)^4 = -4(+\infty) = -\infty$$

عند $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (10x^4) = 10(+\infty)^4 = +\infty$$

**مثال 4**

أوجد

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

حيث

$$f(x) = 6x^3 - 2x - 5$$

الحد المسيطر هو

$$6x^3$$

عند $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 6(-\infty)^3 = -\infty$$

عند $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 6(+\infty)^3 = +\infty$$

**مثال 5**

أوجد نهاية التابع التالي عند اللانهاية الموجبة والسالبة

$$f(x) = -9x^3 + 4x^2 - x + 2$$

الحد المسيطر هو

$$-9x^3$$

عند $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -9(-\infty)^3 = +\infty$$

عند $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -9(+\infty)^3 = -\infty$$

**مثال 6**



أوجد

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

حيث

$$f(x) = -3x^4 + 80x^3$$

نحدد الحد المسيطر

$$-3x^4$$

عند $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-3x^4) = -3(-\infty)^4 = -3(+\infty) = -\infty$$

عند $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-3x^4) = -3(+\infty)^4 = -3(+\infty) = -\infty$$

## نهاية تابع كسري

### أولًا عند المالانهاية

لإيجاد نهاية تابع كسري عند $x \to \pm\infty$ نتبع الخطوات التالية:

نأخذ الحد المسيطر من البسط
نأخذ الحد المسيطر من المقام
نقوم باختزال الحدود المسيطرة
ثم نعوض بدلًا من $x$ بـ $+\infty$ أو $-\infty$

إذا كانت

درجة البسط أكبر من درجة المقام فإن النهاية تكون $+\infty$ أو $-\infty$ حسب الإشارة
درجة البسط تساوي درجة المقام فإن النهاية تساوي نسبة معاملي الحد المسيطر
درجة المقام أكبر من درجة البسط فإن النهاية تساوي الصفر

### ثانيًا عند عدد حقيقي $a$

لإيجاد نهاية تابع كسري عند عدد حقيقي، لا نلجأ إلى مبرهنات، بل نستخدم التعويض المباشر

نستبدل كل $x$ بـ $a$

لكن يجب الانتباه إلى ما يلي

إذا كان التعويض في المقام يؤدي إلى صفر، نميّز بين نهايتين:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)$$

وفي حال ظهور حالة غير معرفة مثل

نلجأ إلى تعويضات عددية تجريبية قريبة من $a$، لمعرفة سلوك المقام



## مثال ١

$$f(x) = \frac{x-4}{x-2} \quad ; \quad a = 2$$

مجال التابع

$$D_f = ]-\infty, 2[ \cup ]2, +\infty[$$

---

عند $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-4}{x-2}$$

نأخذ الحد المسيطر من البسط والمقام وهو $x$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-4}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1$$

عند $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-4}{x-2} = \frac{x}{x} = 1$$

---

نحسب النهاية عند $x = 2$

من اليسار

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{2^- - 4}{2^- - 2} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

من اليمين

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{2^+ - 4}{2^+ - 2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

وبما أن

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

فإن

$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

**بما أن النهاية من اليسار لا تساوي النهاية من اليمين، فإن نهاية التابع عند $x = 2$ غير موجودة**

**مثال ٢**

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-4} \quad ; \quad a = 4$$

مجال التابع

$$D_f = ]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$$

---

١ عند $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3}{x-4}$$

نأخذ الحد المسيطر من البسط والمقام

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty$$

٢ عند $x \to 4^-$

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-4}$$

نعوّض عددًا أصغر بقليل من ٤

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \frac{16+3}{0^-} = \frac{19}{0^-} = -\infty$$

---

٣ عند $x \to 4^+$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \frac{16+3}{0^+} = \frac{19}{0^+} = +\infty$$

وبما أن

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim_{x\to 4^+} f(x)$$



فإن

$$\lim_{x\to 4} f(x)$$

---

٤ عند $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3}{x-4}$$

نأخذ الحد المسيطر

$$\frac{x^2}{x} = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

## مثال ٣

$$f(x)=\frac{4x-5}{x+2} \quad ; \quad a=-2$$

مجال التابع

$$D_f=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$$

---

١ عند $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-5}{x+2}$$

نأخذ الحد المسيطر في البسط والمقام

$$\frac{4x}{x}=4$$



إذن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=4$$

---

٢ عند $x\to-2^-$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\frac{4(-2)^--5}{-2^-+2}=\frac{-8-5}{0^-}=\frac{-13}{0^-}=+\infty$$

---

٣ عند $x\to-2^+$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\frac{4(-2)^+-5}{-2^++2}=\frac{-13}{0^+}=-\infty$$

وبما أن

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)\neq\lim_{x\to-2^+} f(x)$$

فإن

$$\lim_{x\to-2} f(x)$$

---

٤ عند $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-5}{x+2}$$

نأخذ الحد المسيطر

$$\frac{4x}{x}=4$$

إذن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=4$$

---

## مثال ٤

$$f(x)=\frac{6x+2}{x+1} \quad ; \quad a=-1$$

مجال التابع

$$D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$$

---

١ عند $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x+2}{x+1}$$

نأخذ الحد المسيطر من البسط والمقام

$$\frac{6x}{x}=6$$

إذن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 6$$

---

٢ عند $x \to -1^-$

$$f(x) = \frac{6x+2}{x+1}$$

نحسب النهاية من اليسار

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{-6+2}{0^-} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

---

٣ عند $x \to -1^+$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$



وبما أن

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) \neq \lim_{x\to-1^+} f(x)$$

فإن

$$\lim_{x\to-1} f(x)$$

---

٤ عند $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{6x+2}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{6x}{x} = 6$$

إذن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 6$$

**مثال ٥**

$$f(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2} \quad ; \quad a = 1$$

نكتب التابع بالشكل المفكوك

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-2x+1}$$

مجال التابع

$$D_f = ]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

---

١ عند $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

٢ عند $x \to 1^-$

نحسب

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{1+3}{0^+} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

---

٣ عند $x \to 1^+$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{1+3}{0^+} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

وبما أن

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

فإن

$$\lim_{x\to1} f(x) = +\infty$$

٤ عند $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

**مثال ٦**

$$f(x) = 4x - 6 + \frac{3}{x+4} \quad ; \quad a = -4$$

مجال التابع

$$D_f = ]-\infty, -4[ \cup ]-4, +\infty[$$

---

١ عند $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (4x - 6 + \frac{3}{x+4})$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(4x) + \lim_{x\to-\infty}(-6) + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$= -\infty + (-6) + 0 = -\infty$$

٢ عند $x \to -4^-$

$$\lim_{x\to-4^-} f(x) = \lim_{x\to-4^-}\left(4x - 6 + \frac{3}{x+4}\right)$$

$$= -22 + \frac{3}{0^-} = -22 + (-\infty) = -\infty$$

---

٣ عند $x \to -4^+$

$$\lim_{x\to-4^+} f(x) = \lim_{x\to-4^+}\left(4x - 6 + \frac{3}{x+4}\right)$$

$$= -22 + \frac{3}{0^+} = -22 + (+\infty) = +\infty$$

وبما أن

$$\lim_{x\to-4^-} f(x) \neq \lim_{x\to-4^+} f(x)$$

فإن

$$\lim_{x\to-4} f(x)$$

---

٤ عند $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(4x - 6 + \frac{3}{x+4}) = +\infty + (-6) + 0 = +\infty$$

## كيف نتحقق من وجود نهاية تابع عند نقطة؟

عندما يُطلب منّا أن ندرس إذا ما كانت النهاية موجودة عند عدد معين $a$، فنحن لا نبحث فقط عن قيمة التابع عند $a$، بل نريد أن نعرف:
**هل تقترب قيم التابع من نفس الرقم عندما نقترب من $a$ من الجهتين؟**

أي أن التابع لا يجب أن يتصرف بشكل مختلف عند الاقتراب من اليسار أو من اليمين

ولهذا السبب، نلجأ إلى حساب **نهايتين من جهتين**:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)$$

ثم نميّز بين حالتين:

### الحالة الأولى: النهاية موجودة

إذا كانت:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

فهذا يعني أن التابع يقترب من نفس القيمة $L$ سواء جئنا من اليسار أو من اليمين

وبالتالي نقول:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

حتى لو كانت الدالة غير معرفة عند $x = a$ نفسه، لا يؤثر ذلك على وجود النهاية

## الحالة الثانية: النهاية غير موجودة

إذا كانت:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

فهذا يعني أن التابع يقترب من **قيمتين مختلفتين** حسب جهة الاقتراب

وهذا كافٍ لنقول:

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

مهما كانت القيمة الفعلية للدالة عند $a$، أو حتى إن كانت غير معرفة عندها

---

**ملاحظة مهمة**
الهدف من هذه القاعدة هو أن النهاية عند عدد ما **تعني اتفاق السلوك من الجهتين**، وليس فقط أن توجد قيمة عددية

**ملاحظة**

عند إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ بشكل صحيح
لا حاجة أبدًا لاستخدام النهاية اليمنى أو اليسرى
فالناتج سيكون وحيدًا وواضحًا بدون تفريق بين الجهات

## حالات عدم التعيين

---

### أولًا: ما هي حالات عدم التعيين؟

عند حساب النهايات قد نواجه بعض الحالات التي لا يمكن تحديد قيمتها مباشرة، وتُسمّى **حالات عدم التعيين**، وهي:

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad \infty - \infty \quad , \quad 0 \cdot \infty \quad , \quad (0)^0 \quad (\infty)^0$$

---

## كيف نزيل حالة عدم التعيين؟

توجد ثلاث طرق أساسية لإزالة حالة عدم التعيين، وتُستخدم هذه الطرق **في حال وجود تابع كسري أو جذري**:

١ طريقة التحليل
٢ طريقة المرافِق
٣ طريقة العامل المناسب



### إزالة حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

---

### ١ طريقة التحليل

نستخدم هذه الطريقة إذا كان البسط أو المقام أو كلاهما **قابلًا للتحليل**

الخطوات:

نحلّل البسط إن أمكن
نحلّل المقام إن أمكن
نختزل
ثم نُعوّض مباشرة

---

### ٢ طريقة المرافِق

نستخدم هذه الطريقة إذا احتوى البسط أو المقام على **جذر غير قابل للتحليل**

نضرب البسط والمقام بالمرافق المناسب
ثم نكمل بالتحليل والاختزال والتعويض

## تمرين

جد نهاية التابع $f(x)$ عند القيمة $a$ الموافقة

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad ; \quad a = 2$$

---

نحسب:

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

بالتعويض المباشر:

$$\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

وهذه حالة **عدم تعيين من الشكل**:

$$\frac{0}{0}$$



نلجأ إلى التحليل:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$

نختزل العامل المشترك:

$$f(x) = x + 2 \qquad x \neq 2$$

الآن نحسب النهاية:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 4$$

---

إذن:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

## تمرين

أوجد نهاية التابع الآتي:

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9} \quad ; \quad a = 3$$

---

نحسب:

$$\lim_{x \to 3} f(x)$$

بالتعويض المباشر:

$$\frac{3 - 3}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

وهي حالة **عدم تعيين من الشكل**:

$$\frac{0}{0}$$

نلجأ إلى التحليل:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

إذن:

$$f(x) = \frac{x - 3}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{1}{x + 3} \qquad x \neq 3$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

---

إذن:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{1}{6}$$

## تمرين

أوجد نهاية التابع الآتي:

$$f(x)=\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} \quad ; \quad a=5$$

---

نحسب:

$$\lim_{x\to5} f(x)$$

بالتعويض المباشر:

$$\frac{5-5}{\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\frac{0}{0}$$

وهي حالة **عدم تعيين من الشكل**:

$$\frac{0}{0}$$

نضرب البسط والمقام بالمرافق:



$$f(x)=\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$$

نحسب البسط:

$$(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})$$

نحسب المقام:

$$(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})=x-5$$

إذن:

$$f(x)=\frac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5}$$

نختزل:

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{5} \qquad x\neq5$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to5} f(x)=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

---

إذن:

$$\lim_{x\to5} f(x)=2\sqrt{5}$$

## تمرين

أوجد نهاية التابع الآتي:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-2} \quad ; \quad a=2$$

---

نحسب:

$$\lim_{x\to2} f(x)$$

بالتعويض المباشر:

$$\frac{2^2-5\cdot2+6}{2-2}=\frac{4-10+6}{0}=\frac{0}{0}$$

وهي حالة **عدم تعيين من الشكل**:

$$\frac{0}{0}$$

نلجأ إلى التحليل:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

إذن:

$$f(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$$

نختزل:

$$f(x) = x - 3 \qquad x \neq 2$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 - 3 = -1$$

إذن:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -1$$

## تمرين

أوجد نهاية التابع الآتي:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^3 - 27} \quad ; \quad a = 3$$



نحسب:

$$\lim_{x \to 3} f(x)$$

بالتعويض المباشر:

$$\frac{3^2 - 9}{3^3 - 27} = \frac{0}{0}$$

وهي حالة **عدم تعيين من الشكل:**

$$\frac{0}{0}$$

### نبدأ بالتحليل

تحليل البسط:

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

تحليل المقام (فرق مكعبين):

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

نكتب التابع:

$$f(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}$$

نختزل العامل المشترك:

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 9} \qquad x \neq 3$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{3 + 3}{3^2 + 3 \cdot 3 + 9} = \frac{6}{9 + 9 + 9} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

إذن:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{2}{9}$$

## تمرين

أوجد نهاية التابع الآتي:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} \quad ; \quad a = 3$$

---

نحسب:

$$\lim_{x \to 3} f(x)$$

بالتعويض المباشر:

$$\frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 9} = \frac{9 - 6 - 3}{9 - 9} = \frac{0}{0}$$

وهي حالة **عدم تعيين من الشكل:**

$$\frac{0}{0}$$



### نبدأ بالتحليل

البسط:

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$$

المقام:

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

إذن:

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3} \qquad x \neq 3$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{3+1}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

إذن:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{2}{3}$$

## تمرين

أوجد نهاية التابع الآتي:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x - 1} \quad ; \quad a = 1$$

---

نحسب:

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

بالتعويض المباشر:

$$\frac{3(1)^2 - 5(1) + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

وهي حالة **عدم تعيين من الشكل:**

$$\frac{0}{0}$$

### نحلل البسط باستخدام المميز $\Delta$

لدينا:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x - 1}$$

نحسب:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1$$

نحسب الجذرين:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

إذن:

$$3x^2-5x+2=3(x-\frac{2}{3})(x-1)$$

نكتبها بالشكل المضروب الصحيح:

$$3x^2-5x+2=(x-1)(3x-2)$$

إذن:

$$f(x)=\frac{(x-1)(3x-2)}{x-1}=3x-2 \qquad x\neq 1$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=3(1)-2=1$$

إذن:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

## طريقة استخدام المرافق

تُستخدم هذه الطريقة لإزالة حالة عدم التعيين عندما يحتوي البسط أو المقام على **جذر غير قابل للتحليل**

---

### خطوات الحل:

نقوم بما يلي:

نضرب كلًا من البسط والمقام **بمرافق المقدار الذي يحتوي الجذر**

نستخدم المطابقة الشهيرة:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

نختزل إذا أمكن

ثم نعوّض مباشرة لإيجاد النهاية



## جدول المرافقات الشائعة:

| المقدار الأصلي | المرافِق المستخدم |
|---|---|
| $\sqrt{x}+1+3$ | $\sqrt{x}+1-3$ |
| $3-\sqrt{x}+1$ | $3+\sqrt{x}-1$ |
| $\sqrt{x+1}-3+2x$ | $\sqrt{x+1}+3-2x$ |
| $\sqrt{x+1}$ | $\sqrt{x+1}$ |

---

### ملاحظة هامة

بعد استخدام طريقة المرافق، **يُختزل الجذر تلقائيًا** من المقام أو البسط، وعندها يصبح من الممكن **التعويض المباشر** لإيجاد النهاية، من دون الحاجة إلى حساب نهايتين من اليمين واليسار

## سؤال أتمتة:

أوجد قيمة النهاية الآتية:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

اختر الجواب الصحيح:

(A) $\frac{1}{4}$
(B) $4$
(C) $0$
(D) $\frac{1}{2}$

## الحل:

بالتعويض المباشر:

$$\frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2}=\frac{2-2}{0}=\frac{0}{0}$$

وهذه حالة **عدم تعيين من الشكل:**

$$\frac{0}{0}$$

---

نستخدم **طريقة المرافِق:**

نضرب بالبسط والمقام بـمرافق البسط:

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}$$

نستخدم المطابقة:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

فيكون:

$$f(x)=\frac{(x+2)-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

نختزل:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\qquad x\neq 2$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

إذن الجواب الصحيح هو:

$$(A)\quad \frac{1}{4}$$



## سؤال أتمتة:

أوجد قيمة النهاية الآتية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+25}-5}$$

اختر الجواب الصحيح:

(A) $\frac{1}{5}$
(B) $5$
(C) $\frac{5}{2}$
(D) $10$

## الحل:

نبدأ بالتعويض المباشر:

$$\frac{0}{\sqrt{0+25}-5}=\frac{0}{5-5}=\frac{0}{0}$$

وهي حالة **عدم تعيين من الشكل:**

$$\frac{0}{0}$$

نستخدم **طريقة المرافِق** لإزالة الجذر من المقام:

نضرب البسط والمقام بـمرافق المقام:

$$\frac{x}{\sqrt{x+25}-5}\cdot\frac{\sqrt{x+25}+5}{\sqrt{x+25}+5}$$

نستخدم المطابقة:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

فنحصل على:

$$f(x)=\frac{x(\sqrt{x+25}+5)}{(x+25)-25}=\frac{x(\sqrt{x+25}+5)}{x}$$

نختزل $x$ من البسط والمقام:

$$f(x)=\sqrt{x+25}+5 \qquad x\neq 0$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\sqrt{25}+5=5+5=10$$

إذن الجواب الصحيح هو:

$$(D) \quad 10$$

## سؤال أتمتة:

أوجد قيمة النهاية الآتية:

$$\lim_{x\to 9}\frac{9-x}{\sqrt{x+7}-4}$$

اختر الجواب الصحيح:

(A) $-8$
(B) $-2\sqrt{16}$
(C) $-4$
(D) $-2\sqrt{13}$

## الحل:

نبدأ بالتعويض المباشر:

$$\frac{9-9}{\sqrt{9+7}-4}=\frac{0}{\sqrt{16}-4}=\frac{0}{0}$$

وهي حالة **عدم تعيين من الشكل**:

$$\frac{0}{0}$$



---

نستخدم **طريقة المرافق**:

نضرب بالبسط والمقام بمرافق المقام:

$$\frac{9-x}{\sqrt{x+7}-4}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+4}{\sqrt{x+7}+4}$$

نستخدم المطابقة:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

فيكون:

$$f(x)=\frac{(9-x)(\sqrt{x+7}+4)}{x+7-16}=\frac{(9-x)(\sqrt{x+7}+4)}{x-9}$$

نلاحظ أن:

$$9 - x = -(x - 9)$$

إذن:

$$f(x) = \frac{-(x-9)(\sqrt{x+7}+4)}{x-9} = -(\sqrt{x+7}+4)$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x \to 9} f(x) = -(\sqrt{9+7}+4) = -(4+4) = -8$$

---

إذن الجواب الصحيح هو:

$$(A) \quad -8$$

## سؤال أتمتة:

أوجد قيمة النهاية الآتية:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}{x-2}$$

اختر الجواب الصحيح:

(A) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
(B) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}$
(C) $\frac{2}{2\sqrt{5}}$
(D) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

## الحل:

نبدأ بالتعويض المباشر:

$$\frac{\sqrt{2^2+1}-\sqrt{5}}{2-2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{0} = \frac{0}{0}$$

وهي حالة **عدم تعيين من الشكل**:

$$\frac{0}{0}$$

---

نستخدم **طريقة مرافق البسط**:

نضرب البسط والمقام بـمرافق البسط:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}}$$

نستخدم المطابقة:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

فنحصل على:

$$= \frac{x^2+1-5}{(x-2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})} = \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}$$

نلاحظ أن:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

إذن:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}$$

نختزل:

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}} \qquad x \neq 2$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{2+2}{\sqrt{4+1}+\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

---

إذن الجواب الصحيح هو:

$$(A) \quad \frac{2}{\sqrt{5}}$$

## سؤال أتمتة:

أوجد قيمة النهاية الآتية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$$

اختر الإجابة الصحيحة:

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $-\frac{1}{2}$
(C) $-1$
(D) $0$

### الحل:

بالتعويض المباشر:

$$\frac{\sqrt{0+1}-1}{0^2-0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

هذه حالة **عدم تعيين من الشكل**:

$$\frac{0}{0}$$

نستخدم **المرافق في البسط**:

نضرب بالبسط والمقام بـ:

$$\sqrt{x+1}+1$$

فنحصل على:

$$=\frac{(x+1-1)}{(x^2-x)(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{x}{x(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

نختزل $x$ من البسط والمقام:

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{(-1)(\sqrt{1}+1)}=\frac{1}{-1\cdot 2}=-\frac{1}{2}$$

---

### الجواب الصحيح هو:

$$(B)\quad -\frac{1}{2}$$

## سؤال أتمتة:



أوجد قيمة النهاية الآتية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}{x}$$

اختر الإجابة الصحيحة:

(A) $-\frac{1}{4}$
(B) $-\frac{1}{2\sqrt{4}}$
(C) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$
(D) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

### الحل:

بالتعويض المباشر:

$$\frac{\sqrt{0+4}-\sqrt{0+4}}{0}=\frac{2-2}{0}=\frac{0}{0}$$

هذه حالة **عدم تعيين من الشكل**:

$$\frac{0}{0}$$

نستخدم **مرافق البسط**:

نضرب بالبسط والمقام بـ:

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+4}$$

فنحصل على:

$$=\frac{(x+4)-(2x+4)}{x\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+4}\right)}=\frac{-x}{x\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+4}\right)}=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+4}}$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{-1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

## الجواب الصحيح هو:

$$(A)\quad -\frac{1}{4}$$



## سؤال أتمتة:

أوجد قيمة النهاية الآتية:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$$

اختر الإجابة الصحيحة:

(A) $-3$

(B) $-6$

(C) $-9$

(D) $-12$

## الحل:

بالتعويض المباشر:

$$\frac{2-\sqrt{3(2)-2}}{\sqrt{2(2)+5}-3}=\frac{2-\sqrt{6-2}}{\sqrt{4+5}-3}=\frac{2-\sqrt{4}}{\sqrt{9}-3}=\frac{2-2}{3-3}=\frac{0}{0}$$

هذه حالة عدم تعيين من الشكل:

$$\frac{0}{0}$$

## نزيل حالة عدم التعيين:

نبدأ بمرافق المقام:

نضرب البسط والمقام بـ:

$$\sqrt{2x+5}+3$$

فيصبح:

$$f(x)=\frac{-3(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)}\quad=\frac{-3(\sqrt{2x+5}+3)}{2}$$

### التعويض النهائي:

$$x = 2 \Rightarrow \sqrt{2(2)+5} = \sqrt{9} = 3$$

$$f(2) = \frac{-3(3+3)}{2} = \frac{-3\times 6}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

### الجواب الصحيح هو:

$$(C) \quad -9$$

### إزالة حالة عدم التعيين من الشكل:

$$\frac{\infty}{\infty}$$

عند ظهور حالة عدم التعيين من هذا الشكل، نلجأ إلى استخدام طريقة **العامل المناسب**، وهي طريقة فعالة عندما تكون حدود التابع تحتوي جذوراً في البسط أو المقام، وخاصة عندما يكون تعبير الجذر يحتوي فقط على $x$.

---

### مبدأ العامل المناسب:

نحدد العامل المناسب وفق قاعدة عامة، وهي:

إذا كان الجذر يتضمن فقط المتغير $x$، فإن العامل المناسب غالباً ما يكون **الجذر نفسه أو مقلوبه أو مضاعفاً له**، بحسب السياق.

### خطوات استخدام العامل المناسب:

أولاً: نُخرج العامل المناسب المشترك من البسط والمقام، وذلك بتحليل كل حد بحسب درجة $x$

ثانياً: نفتح قوساً بعد العامل، ونكتب داخله كل حد بعد تقسيمه على العامل المناسب

ثالثاً: نُبسط التعبير الناتج ونختزل العامل المشترك إن أمكن

رابعاً: نعوّض بالقيمة التي نقترب نحوها لإيجاد النهاية

---

### ملاحظة مهمة:

عند استخدام طريقة العامل المناسب، يُشترط أن يكون التحليل ممكناً للجذر أو أن يكون ظاهرًا بصورة مباشرة، كما يجب التأكد من أنّ العامل المناسب يُخرجنا من حالة عدم التعيين ويؤدي إلى تعويض مباشر.

**تمرين**

أوجد نهاية التابع:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$$

عندما:

$$x \to +\infty$$

---

**الحل**

بالتعويض المباشر:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

وهذه حالة عدم تعيين من الشكل:

$$\frac{\infty}{\infty}$$

---

**نستخدم طريقة العامل المناسب الظاهر**

نُخرج العامل المناسب من البسط والمقام، وهو:

$$x$$

نكتب التابع كما يلي:

$$f(x) = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x}}$$

نبسط:

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

إذاً:

$$f(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}}$$

نأخذ النهاية:

عندما:

$$x \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$$

وبالتالي يصبح:

$$\frac{1+0}{0-0} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

---

**النتيجة النهائية:**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} = +\infty$$

**سؤال أتمتة**

إذا كان

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}$$

فإن:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

**الخيارات:**

(A) $+\infty$

(B) $-\infty$

(C) $0$

(D) $1$



**الحل**

بالتعويض المباشر نحصل على شكل:

$$\frac{\infty}{\infty}$$

وهذه حالة عدم تعيين، فنستخدم **العامل المناسب الظاهر** من خلال تحليل البسط والمقام:

نبدأ بتبسيط البسط:

$$\sqrt{x} - \sqrt{3} = \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}\right)$$

ونُحلل المقام:

$$x^2 - 9 = x^2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)$$

نكتب التابع على الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}\right)}{x^2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)}$$

نختزل:

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}}{x^{3/2}\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)}$$

نأخذ النهاية:

$$\frac{1-0}{+\infty \cdot 1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

---

**الجواب الصحيح هو:**

**(C)** $0$

**سؤال أتمتة**

إذا كان

$$f(x) = \frac{-2x + \sqrt{x}}{x + 3}$$

فإن

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

**الخيارات:**

(A) $-2$

(B) $-1$

(C) $0$

(D) $+\infty$

**الحل**

عند تعويض $x \to +\infty$، نحصل على الشكل:

$$\frac{-\infty + \infty}{\infty}$$

وهذه حالة عدم تعيين من الشكل:

$$\frac{\infty}{\infty}$$

نستخدم العامل المناسب الظاهر ونقوم باستخراج العامل $x$ من البسط والمقام:

نكتب:

$$f(x) = \frac{-2x + \sqrt{x}}{x+3} = \frac{x\left(-2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1 + \frac{3}{x}\right)}$$

نختزل العامل $x$ من البسط والمقام:

$$= \frac{-2 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{3}{x}}$$

عند أخذ النهاية عندما $x \to +\infty$:

$$\frac{-2+0}{1+0} = \frac{-2}{1} = -2$$

---

**الجواب الصحيح هو:**

**(A)** $-2$

**شرح استخدام العامل غير الظاهر لإزالة حالة عدم التعيين من الشكل**

$$\frac{\infty}{\infty}$$

نلجأ إلى استخدام **العامل غير الظاهر** عندما يكون الجذر يتضمن مقداراً مختلفاً عن $x$، ولا يوجد عامل مشترك واضح في المقام والبسط.

**

**المرحلة الأولى**
**إظهار عامل مناسب من تحت الجذر التربيعي**

نهدف إلى استخراج العامل $x^2$ من حدود ما تحت الجذر التربيعي إن أمكن، وذلك وفقاً للعلاقات التالية:

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$



وبما أن:

$$|x| = \begin{cases} +x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

فإننا نستفيد من هذه العلاقة للتخلّص من القيمة المطلقة حسب الجهة التي نأخذ عندها النهاية.

**

**المرحلة الثانية**
**إخراج العامل المناسب**

بعد استخراج الجذر والتخلص من القيمة المطلقة، نُظهر العامل المناسب ونبسط الحدود إن أمكن.

**

**المرحلة الثالثة**
**مرحلة الاختزال**

نقوم باختزال الحدود المتشابهة أو العوامل المشتركة في البسط والمقام.

**

**المرحلة الرابعة**
**مرحلة التعويض**

نعوّض بالقيمة النهائية التي نأخذ عندها النهاية، ونوجد الناتج النهائي بعد التبسيط.

---

**سؤال أتمتة:**

أوجد نهاية التابع:

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+5}}{1-3x} \qquad x \to +\infty$$

**الخيارات:**

(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{1}{2}$

**الحل:**

نحسب:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5}}{1-3x}$$

نظهر العامل المناسب من داخل الجذر:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{1-3x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{1-3x}$$

وبما أن:

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad |x| = x$$

إذن:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{1-3x}$$

نقسم البسط والمقام على $x$:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{\frac{1}{x}-3}$$

وعندما:

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \to 0 \qquad \frac{5}{x^2} \to 0$$

فتصبح النهاية:

$$= \frac{\sqrt{4}}{0-3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

**الجواب الصحيح هو: (B)** $-\frac{2}{3}$

---

**سؤال أتمتة:**

أوجد نهاية التابع:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad x \to +\infty$$

**الخيارات:**

(A) $0$ (B) $+\infty$ (C) $1$ (D) $-1$

---

**الحل:**

نحسب:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

نُظهر العامل $x$ من البسط والمقام:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

نختزل العامل المشترك $x$:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

وعندما:

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \to 0 \qquad \frac{1}{x^2} \to 0$$

فتصبح النهاية:

$$= \frac{1+0}{\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1} = 1$$

**الجواب الصحيح هو: (C)** $1$

**سؤال أتمتة:**

أوجد نهاية التابع:

$$f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x+1} \qquad x \to -\infty$$

**الخيارات:**

(A) $+\infty$ (B) $-\infty$ (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

---

**الحل:**

نحسب:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x+1}$$



نُظهر العامل $x^2$ من تحت الجذر:

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$

وبما أن:

$$\sqrt{x^2} = |x| = -x \qquad x \to -\infty$$

نحصل على:

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$

نختزل العامل $x$:

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}$$

وعندما:

$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} \to 0 \qquad \frac{1}{x} \to 0$$

تصبح النهاية:

$$= \frac{-\sqrt{9}}{2} = \frac{-3}{2}$$

---

**الجواب الصحيح هو: (C)** $-\frac{3}{2}$

---

**سؤال أتمتة:**

أوجد نهاية التابع:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+1} + 3x}{x} \qquad x \to +\infty$$

**الخيارات:**

(A) $+\infty$ (B) $3$ (C) $0$ (D) $1$

**الحل:**

نحسب:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x+1} + 3x}{x}$$

نقسم البسط والمقام على $x$:

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x+1}}{x} + 3}{1}$$

نُبسّط الكسر الأول باستخدام الجذر:

$$= \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{\sqrt{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}}{x} + 3 \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x}}}{x} + 3 \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x}} + 3 \right)$$

وعند الذهاب إلى اللانهاية:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0 \qquad \sqrt{2 + \frac{1}{x}} \to \sqrt{2}$$

وبالتالي:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \cdot \sqrt{2} + 3 = 3$$

---

**الجواب الصحيح هو: (B)** $3$

**سؤال أتمتة:**

أوجد نهاية التابع:

$$f(x)=\frac{2x+\sqrt{1-x}}{x+3} \qquad x\to-\infty$$

**الخيارات:**

(A) $1$ (B) $0$ (C) $2$ (D) $3$

**الحل:**

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\sqrt{1-x}}{x+3}$$

نحوّل البسط إلى شكل قابل للتحليل:

$$=\frac{2x-x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{x+3}$$

نُخرج العامل $x$ من البسط والمقام:

$$=\frac{x\left(2-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

عند الذهاب نحو النهاية:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{2-0}{1+0}=2$$

---

**الجواب الصحيح هو: (C)** $2$

## إزالة حالة عدم التعيين من الشكل

$\infty-\infty$

عند ظهور هذا الشكل في النهايات، نميز بين حالتين بناءً على العلاقة بين **الحد الموجود خارج الجذر والحد الموجود داخل الجذر**.

---

**الحالة الأولى: نستخدم طريقة المرافقة**

نلجأ إلى هذه الطريقة إذا تحقق:

$$(\ \ )^2=$$

بمعنى آخر، إذا كان مربع الحد الموجود خارج الجذر مطابقًا تماماً للحد الموجود داخل الجذر، فإننا نستخدم **مرافق الجذر** لإزالة حالة عدم التعيين.

**مثال على حالة المرافقة:**

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

نحدد:

الحد داخل الجذر:

$$x^2+1$$

الحد خارج الجذر:

$$x \quad\Rightarrow\quad x^2$$

نقارن:

$$x^2\neq x^2+1$$

نستخدم **المرافق:**

نضرب بالبسط والمقام بـ

$$\sqrt{x^2+1}+x$$

نستخدم **المرافق**:

نضرب بالبسط والمقام بـ

$\sqrt{x^2+1}+x$

فنحصل على:

$$= \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

وعند $x \to +\infty$:

$$\sqrt{x^2+1} \sim x \quad \Rightarrow \quad = \frac{1}{2x} \to 0$$

---

**النتيجة:**

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0$$



## الحالة الثانية: نستخدم طريقة العامل المناسب

نلجأ إليها إذا تحقق:

$$(\ \ )^2 \neq$$

أي لا يوجد تطابق بين مربع الحد الخارجي وما بداخل الجذر، وغالبًا ما يكون داخل الجذر يحتوي كثير حدود من درجة ثانية أو أعلى.

---

### مثال على حالة العامل المناسب:

$$f(x) = \sqrt{x^2+3x+2} - 2x \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

نحدد:

الحد داخل الجذر:

$x^2+3x+2$

الحد خارج الجذر:

$$2x \quad \Rightarrow \quad (2x)^2 = 4x^2$$

نقارن:

$$4x^2 \neq x^2+3x+2 \quad \Rightarrow$$

نبدأ بالحل:

$$\sqrt{x^2+3x+2} = x \cdot \sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

$$f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} - 2\right)$$

عندما $x \to +\infty$:

$$\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} \to 1 \quad \Rightarrow$$

$$f(x) \to x(1-2) = -x \to -\infty$$

**النتيجة:**

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+2}-2x\right) = -\infty$$

**اختر الإجابة الصحيحة:**

إذا كان

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} - x$$

فإن

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

يساوي:

(A) 2
(B) 0
(C) +∞
(D) 1

نلاحظ أن النهاية هي من الشكل:

$$\infty - \infty$$

نستخدم طريقة **المرافقة:**

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} - x$$

نضرب بالبسط والمقام بالمرافق:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+4} - x\right)\left(\sqrt{x^2+4} + x\right)}{\sqrt{x^2+4} + x}$$

في البسط:

$$(x^2+4) - x^2 = 4$$

إذن:

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+4} + x}$$

وعندما

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+4} \sim x$$

فتصبح:

$$f(x) \to \frac{4}{x+x} = \frac{4}{2x} \to 0$$

---

**الجواب الصحيح هو:**

**(B) 0**

**اختر الإجابة الصحيحة:**

إذا كان

$$f(x) = \sqrt{9x^2+5} + 3x$$

فإن

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

يساوي:

(A) 3
(B) 0
(C) 5
(D) +∞

**الحل:**

نلاحظ أن النهاية من الشكل:

$$\infty - \infty$$

نستخدم **طريقة المرافقة:**

$$f(x) = \sqrt{9x^2+5} + 3x$$

نضرب بالبسط والمقام بالمرافق:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{9x^2+5} + 3x)(\sqrt{9x^2+5} - 3x)}{\sqrt{9x^2+5} - 3x}$$

نستخدم المطابقة:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$f(x) = \frac{(9x^2+5) - 9x^2}{\sqrt{9x^2+5} - 3x} = \frac{5}{\sqrt{9x^2+5} - 3x}$$

عندما

$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \sqrt{9x^2+5} \sim -3x$$

فتصبح:

$$f(x) \to \frac{5}{-3x-3x} = \frac{5}{-6x} \to 0$$

---

**الجواب الصحيح هو:**

**(B) 0**

---

**اختر الإجابة الصحيحة:**

إذا كان

$$f(x) = \sqrt{2x^2+3} - \sqrt{2x^2-5}$$

فإن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

يساوي:

(A) $1$
(B) $8$
(C) $0$
(D) $+\infty$

**الحل:**

النهاية من الشكل:

$$\infty - \infty$$

نستخدم **طريقة المرافقة**:

$$= \frac{(\sqrt{2x^2+3} - \sqrt{2x^2-5})(\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{2x^2-5})}{\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{2x^2-5}}$$

باستخدام المطابقة:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

باستخدام المطابقة:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

نحصل على:

$$= \frac{(2x^2+3)-(2x^2-5)}{\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{2x^2-5}} = \frac{8}{\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{2x^2-5}}$$

وعندما

$x \to -\infty$

يؤول المقام إلى

$+\infty$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{8}{+\infty} = 0$$

---

**الجواب الصحيح هو:**

**(C)** 0

**مثال توضيحي:**

أوجد نهاية الدالة التالية عندما

$x \to +\infty$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$$

نلاحظ أن الدالة تؤول إلى الشكل

$\infty - \infty$

فنستخدم طريقة العامل المناسب الظاهر كما يلي:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$$

نستخرج العامل المشترك من تحت الجذر:

$$= \sqrt{x^2\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} - x$$

$$= x\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - x$$



نختزل:

$$= x\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1\right)$$

نستخدم المرافق للتخلص من حالة عدم التعيين:

$$= x \cdot \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1\right)\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1\right)}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1}$$

$$= x \cdot \frac{(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}) - 1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1}$$

$$= x \cdot \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1}$$

نختصر $x$ مع البسط:

$$= \frac{3 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1}$$

نحسب النهاية عند

$x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3}{\sqrt{1} + 1} = \frac{3}{2}$$

---

**سؤال أتمتة:**

أوجد نهاية الدالة

$f(x) = \sqrt{x} - 2x$

عندما

$x \to +\infty$

(A) $-\infty$ (B) $+\infty$ (C) $0$ (D) $1$

**الحل:**

نلاحظ أنّ الدالة تؤول إلى حالة عدم تعيين من الشكل

$\infty - \infty$

نستخدم طريقة العامل المناسب الظاهر:

$$f(x) = \sqrt{x} - 2x$$

$$= \sqrt{x}\,(1 - 2\sqrt{x})$$

عندما

$x \to +\infty$

يصبح:

$$\sqrt{x} \to +\infty \qquad 1 - 2\sqrt{x} \to -\infty$$

إذن:

$$\lim f(x) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

**الجواب الصحيح هو: (A)** $-\infty$

**سؤال أتمتة:**

أوجد نهاية الدالة

$$f(x) = \sqrt{x-2} - x + 2$$

عندما

$$x \to +\infty$$

(A) $+\infty$ (B) $-\infty$ (C) $0$ (D) $2$

---

**الحل:**

نلاحظ أن:

$$f(x) = \sqrt{x-2} - x + 2$$

$$= \sqrt{x-2} - (x-2)$$

$$= \sqrt{x-2}\left(1 - \sqrt{x-2}\right)$$

عندما

$$x \to +\infty$$

يكون:

$$\sqrt{x-2} \to +\infty \qquad (1 - \sqrt{x-2}) \to -\infty$$

وبالتالي:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

**الجواب الصحيح هو: (B)** $-\infty$

---

**إزالة حالة عدم التعيين باستخدام العامل المناسب غير الظاهر**

---

**التمييز بين الحالات:**

نلجأ إلى استخدام **العامل المناسب غير الظاهر** عندما لا يكون هناك عامل مشترك ظاهر بين حدود البسط والمقام، ويكون الجذر يحتوي على مقدار مختلف عن $x$ فقط.

---

**الخطوة الأولى: مرحلة إظهار العامل المناسب من حدود ما تحت الجذر التربيعي**

نقوم بإظهار $x^2$ كعامل مشترك من داخل الجذر التربيعي، وفق القاعدة:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

فإذا كان لدينا جذر من الشكل:

$$\sqrt{x^2 \cdot (\ )}$$

فيمكن كتابته على الصورة:

$$\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{\ } = |x| \cdot \sqrt{\ }$$

وهنا نستخدم العلاقة الأساسية:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

ثم نتخلّص من القيمة المطلقة حسب إشارة $x$، وفق العلاقة:

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

**الخطوة الثانية: مرحلة استخراج العامل المناسب**

نستخدم التحليل السابق لتبسيط التعبير واستخراج العامل المناسب لتسهيل عملية الاختزال.

---

**الخطوة الثالثة: مرحلة الاختزال**

نختزل العامل المشترك بين البسط والمقام إن وُجد، بعد استخدام الطريقة السابقة.

---

**الخطوة الرابعة: مرحلة التعويض**

نُعوّض في النهاية بقيمة $x \to +\infty$ أو $x \to -\infty$ لإيجاد نهاية الدالة.

**ملاحظة:**
هذه الطريقة ضرورية خصوصًا في حالات النهايات عند اللانهاية من الشكل:



$\infty - \infty$

وتستخدم بكثرة عندما يكون الحد خارج الجذر لا يحقق تطابقًا مع مربع ما داخل الجذر.

---

**تمرين:**

أوجد نهاية التابع

$f(x) = -3x + \sqrt{x^2 + x + 1}$

عند

$a = +\infty$

ما قيمة

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$

**الخيارات:**

(A) $0$
(B) $+\infty$
(C) $-\infty$
(D) $3$

**الحل:**

نلاحظ أن لدينا حالة عدم تعيين من الشكل

$\infty - \infty$

نقوم بإعادة كتابة الجذر:

$$f(x) = -3x + \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$= -3x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$= x\left(-3 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)$$

عندما

$x \to +\infty$

نجد أن:

$\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \to 1$

وبالتالي:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot (-2) = -\infty$$

---

**الجواب الصحيح هو:**
**(C)** $-\infty$

## النهايات المثلثية

القاعدة الأساسية في دراسة النهايات هي:

نقوم أولاً بمحاولة **التعويض المباشر** في الدالة، وبعد التعويض نميز بين ثلاث حالات:

الحالة الأولى
إذا أعطى التعويض **عدداً منتهياً**، فإن التمرين ينتهي ويكون هذا هو الجواب النهائي

الحالة الثانية
إذا أعطى التعويض **نهاية غير منتهية** من النوع
$\infty \cdot \cos x$ أو $\infty \cdot \sin x$
فهذا ليس شكلاً غير معين، بل الناتج يكون **غير منتهٍ**

الحالة الثالثة
إذا أعطى التعويض **شكلاً غير معين** مثل
$\frac{0}{0}$
فهنا نستخدم أدوات خاصة لإزالة هذا الشكل

## المبرهنات المثلثية الأساسية

عند وجود دوال مثلثية في البسط أو المقام، نستخدم المبرهنات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{x}=a$$

## متى نستخدم المبرهنات؟

نميز حالتين:

الحالة الأولى
إذا كان مضمون $\sin$ هو نفسه ما في المقام (أو البسط)، فنطبق المبرهنة مباشرة

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

الحالة الثانية
إذا كان مضمون $\sin$ **مختلفاً** عن المقام (أو البسط)، فإننا لا نستخدم المبرهنة مباشرة، بل نلجأ إلى إحدى الطرق التالية:

## طرق إزالة حالة عدم التعيين

نعتمد على واحدة أو أكثر من المهارات التالية:

نشر الحدود

إخراج العامل المشترك

توحيد المقامات

الضرب بالمرافق

التحليل إلى عوامل

التبديل باستخدام المتطابقات المثلثية

التعويض التدريجي

استخدام خواص الجذور واللوغاريتمات إن وجدت

## ملاحظات رياضية مهمة

نشر الكسور:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

التبادل في الضرب:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{b \cdot a}{c}$$

عند إدخال عامل إلى داخل الجذر التربيعي:

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b} \qquad a > 0$$

وعند إدخال قوة داخل الجذر:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$



## ملاحظات حول التوابع المثلثية

$$\frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$$

$$\sin^2 x = (\sin x)^2$$

$$\frac{\sin x}{\sin x} = 1 \quad ; \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq \frac{\sin x}{2}$$

## السؤال الأول

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad ; \quad a = \pi$$

عند النهاية:

$$\lim_{x \to \pi} f(x)$$

**الخيارات:**

(A) $1$
(B) $0$
(C) $\pi$
(D) غير موجودة

**الحل:**

بالتعويض المباشر:

$$\frac{\sin \pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0$$

## السؤال الثاني

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{2\cos x}{x} \quad ; \quad a = \pi$$

عند النهاية:

$$\lim_{x \to \pi} f(x)$$

**الخيارات:**

(A) $-2$
(B) $0$
(C) $-\frac{2}{\pi}$
(D) $\frac{2}{\pi}$

**الحل:**

بالتعويض المباشر:

$$\frac{2\cos \pi}{\pi} = \frac{2 \cdot (-1)}{\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

## السؤال الثالث

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{x}{\cos x} \quad ; \quad a = 0$$

عند النهاية:

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

**الخيارات:**

(A) $0$
(B) $1$
(C) غير موجودة
(D) $\infty$

**الحل:**

بالتعويض المباشر:

$$\frac{0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$



## السؤال الرابع

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad ; \quad a = 0$$

عند النهاية:

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

**الخيارات:**

(A) $0$
(B) $1$
(C) غير موجودة
(D) $\infty$

**الحل:**

نستخدم النهاية الشهيرة:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

## السؤال الخامس

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\tan x}{x} \quad ; \quad a = \frac{\pi}{4}$$

عند النهاية:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x)$$

**الخيارات:**

(A) $1$
(B) $\frac{4}{\pi}$
(C) $\frac{\pi}{4}$
(D) $0$

**الحل:**

بالتعويض المباشر:

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

## السؤال السادس

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{x}{\tan x} \quad ; \quad a = 0$$

عند النهاية:

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

**الخيارات:**

(A) $0$
(B) $1$
(C) غير موجودة
(D) $\infty$

**الحل:**

نستخدم المبرهنة التالية:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

**السؤال السابع**

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x} \quad ; \quad a = 0$$

عند النهاية:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

**الخيارات:**

(A) $0$
(B) $1$
(C) $\infty$
(D) غير موجودة

**الحل:**

نقوم بتحليل المقدار:

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \sin x \cdot \frac{\sin x}{x}$$

وعند أخذ النهاية:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\sin x \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = (0)\cdot(1) = 0$$

**السؤال الثامن**

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad ; \quad a = 0$$

عند النهاية:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

**الخيارات:**

(A) $1$
(B) $0$
(C) غير موجودة
(D) $\infty$

**الحل:**

نقوم بعملية التبسيط:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\cdot\sin x}{x} = \sqrt{x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

ثم نأخذ النهاية:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = 0\cdot 1 = 0$$

## السؤال العاشر

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{x} \quad ; \quad a = 0$$

عند النهاية:

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

### الخيارات:

(A) $1$
(B) $0$
(C) $3$
(D) غير موجودة

### الحل:

نقوم بالتحليل:

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3$$

نأخذ النهاية:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 3 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

## السؤال ١١

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\sin 5x}{4x} \quad ; \quad a = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

### الخيارات:

(A) $\frac{4}{5}$
(B) $\frac{5}{4}$
(C) $1$
(D) $0$

### الحل:

نقوم بالتحليل:

$$f(x) = \frac{\sin 5x}{4x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 5x}{x} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sin 5x}{5x}$$

وبما أن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$$

إذن:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{5}{4}$$

## السؤال ١٢

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\sin^2 3x}{x^2} \quad ; \quad a = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

**الخيارات:**

(A) $1$
(B) $3$
(C) $9$
(D) $0$

**الحل:**

$$\frac{\sin^2 3x}{x^2} = \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2 = \left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\right)^2 = 9\cdot\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2$$

ومع:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 9$$

## السؤال ١٣

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\sin \pi x}{\sin 5x} \quad ; \quad a = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

**الخيارات:**

(A) $5\pi$
(B) $\frac{\pi}{5}$
(C) $\frac{5}{\pi}$
(D) $1$

**الحل:**

نقوم بالتحليل:

$$f(x) = \frac{\sin \pi x}{\sin 5x} = \frac{\pi x}{5x}\cdot\frac{\sin \pi x}{\pi x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}$$



ونعلم أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x} = 1$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{5}$$

## السؤال ١٤

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\tan 3x}{\tan \sqrt{2}\, x} \quad ; \quad a = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

**الخيارات:**

(A) $\sqrt{2}$
(B) $\frac{3}{\sqrt{2}}$
(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
(D) $1$

**الحل:**

نستخدم:

$$\frac{\tan 3x}{\tan \sqrt{2}\, x} = \frac{3x}{\sqrt{2}\, x} \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{\sqrt{2}\, x}{\tan \sqrt{2}\, x}$$

نعلم أن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{3x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2}\, x}{\tan \sqrt{2}\, x} = 1$$

إذن:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

## السؤال ١٥

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\sin 7x}{\tan 2x} \quad ; \quad a = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

**الخيارات:**

(A) $\frac{7}{2}$
(B) $\frac{2}{7}$
(C) $1$
(D) $0$

**الحل:**

نكتب:

$$f(x) = \frac{\sin 7x}{\tan 2x} = \frac{\sin 7x}{7x} \cdot \frac{2x}{\tan 2x} \cdot \frac{7x}{2x}$$



بما أن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\tan 2x} = 1$$

إذن:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$$

**السؤال ١٦**

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2 - x} \quad ; \quad a = 0$$

**الخيارات:**

(A) $0$
(B) $-1$
(C) $1$
(D) غير موجودة

**الحل:**

نلاحظ أن:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x(x-1)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x-1}$$

وبما أن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-1}$$

إذن:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \cdot (-1) = -1$$

**السؤال ١٧**

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{x} \quad ; \quad a = 0$$

**الخيارات:**

(A) $1$
(B) $0$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) لا نهاية

**الحل:**

$$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{x} = \cos x \cdot \frac{\sin x}{x}$$

بما أن:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

إذن:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \cdot 1 = 1$$

**السؤال ١٨**

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \quad ; \quad a = 0$$

**الخيارات:**

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $2$
(C) $1$
(D) غير موجودة

**الحل:**

نكتب:

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

نعلم أن:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

**السؤال ١٩**

أوجد نهاية التابع

$$f(x) = \frac{2x^2 + \sin x}{x} \quad ; \quad a = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

**الخيارات:**

(A) $1$
(B) $2$
(C) $0$
(D) غير موجودة

**الحل:**

نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x^2}{x} + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} 2x + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 0 + 1 = 1$$

وذلك باستخدام النهاية الشهيرة:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

## السؤال ٢٢

$$f(x) = \sin x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \quad ; \quad a = 0^+$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ ?$$

### الخيارات

(A) 0
(B) 1
(C) ∞
(D) -1

### الحل

نحسب

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

نلاحظ أنها حالة عدم تعيين من الشكل

$$0 \cdot \infty$$

نقوم بإعادة كتابة التابع كما يلي:

$$= \sin x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sin x \cdot \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \sin x \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$$

وبما أن

$$x \to 0^+ \Rightarrow |x| = x$$

إذن:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+1}\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

## السؤال ٢٣

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+x}} \quad ; \quad a = 0^+$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ ?$$

### الخيارات

(A) 0
(B) 1
(C) ∞
(D) -1

### الحل

نحسب

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

نلاحظ أنها حالة عدم تعيين من الشكل

$$\frac{0}{0}$$

نعيد كتابة التابع كما يلي:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}} = \frac{\sin x}{|x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

وبما أن

$$x \to 0^+ \Rightarrow |x| = x$$

إذن:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right) = 1 \cdot 0 = 0$$

السؤال ٢٤:

إذا كان

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x\cdot\sin(3x)}$

فاحسب نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$

الخيارات:

(A) $\frac{1}{6}$
(B) $\frac{1}{9}$
(C) $\frac{1}{12}$
(D) $\frac{1}{3}$

الحل:

نبدأ بتحليل شكل النهاية
نلاحظ أنها من الشكل

$\frac{0}{0}$

نكتب:

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x\cdot\sin(3x)}$

نستخدم المرافق:

$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\cdot\sin(3x)\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$

$= \frac{x^2+4-4}{x\cdot\sin(3x)\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$

$= \frac{x^2}{x\cdot\sin(3x)\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$

نختزل $x$ من البسط والمقام:

$= \frac{x}{\sin(3x)\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$

نكتب:

$= \frac{1}{\frac{\sin(3x)}{x}\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$

بالتعويض عند النهاية:

$\frac{\sin(3x)}{x} \to 3$

$\left(\sqrt{x^2+4}+2\right) \to 2+2=4$

إذاً النهاية:

$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}$

السؤال ٢٥:

إذا كان

$f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}$

فاحسب نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$

الخيارات:

(A) $\sqrt{3}$
(B) $2\sqrt{3}$
(C) $3\sqrt{3}$
(D) $1$

الحل:

نلاحظ أن شكل النهاية هو:

$\frac{0}{0}$

نبدأ باستخدام المرافق للمقام:

$f(x) = \frac{\sin(2x)\cdot\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}\right)}$

$= \frac{\sin(2x)\cdot\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}\right)}{2x}$

نكتب:

$= \frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}\right)$

نعلم أن:

$\frac{\sin(2x)}{2x} \to 1$ عندما $x \to 0$

و:

$\sqrt{2x+3}+\sqrt{3} \to \sqrt{3}+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

إذن:

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1\cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

## المرجع الأساسي في تبسيط التعابير المثلثية قبل حساب النهايات

---

عند التعامل مع النهايات التي تحتوي على دوال مثلثية، كثيراً ما تظهر تعابير تحتاج إلى تبسيط باستخدام متطابقات شهيرة. لذلك، يُستحسن حفظ هذه القواعد واستخدامها بدقّة عند الحاجة. يمكن تصنيف هذه المتطابقات إلى مجموعتين رئيسيتين:

---

### المجموعة الأولى: المتطابقات الأساسية للدوال المثلثية

تمثل هذه القواعد الأساس في معظم عمليات التبسيط، وتشمل:

$$\sin^2() + \cos^2() = 1$$

$$1 - \cos^2() = \sin^2()$$

$$\sin() = 2\sin\left(\frac{}{2}\right)\cos\left(\frac{}{2}\right)$$

$$1 - \cos() = 2\sin^2\left(\frac{}{2}\right)$$

$$1 + \cos() = 2\cos^2\left(\frac{}{2}\right)$$

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

$$\tan() = \frac{\sin()}{\cos()}$$

$$\cot() = \frac{\cos()}{\sin()}$$

---

### المجموعة الثانية: متطابقات تحويل المجموع إلى جداء

تُستخدم هذه القواعد بشكل خاص عند تبسيط مجموع أو فرق دالتين مثلثيتين، وخاصة في المسائل التي تتطلّب استخدام النهاية، وذلك لتفكيك أو إعادة تشكيل التعابير.

التحويل من مجموع إلى جداء يتم وفق نوع العلاقة:

| الجداء الموافق | نوع العلاقة |
| --- | --- |
| $\cos \cdot \cos$ | تماثل (مثل $\cos + \cos$) |
| $\sin \cdot \sin$ | اختلاف (مثل $\sin - \sin$) |

القوانين الخاصة بالتحويل:

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

---

**السؤال الأول:**

إذا كان

$$f(x) = \frac{1 - \cos^2(2x)}{4x}$$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$ تساوي:

(A) 0
(B) 2
(C) 1
(D) 4

**الحل:**

نستخدم المتطابقة الشهيرة:

$$1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$$

فنكتب:

$$f(x) = \frac{\sin^2(2x)}{4x} = \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{\sin(2x)}{2}$$

وبما أن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$$

إذن:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \cdot 0 = 0$$

**السؤال الثاني:**

إذا كان

$$f(x) = \frac{x + \cos^2(x) - 1}{3x}$$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$ تساوي:

(A) 0
(B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{2}{3}$
(D) 1

**الحل:**

نستفيد من المتطابقة:

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

إذن:

$$f(x) = \frac{x + (1 - \sin^2(x)) - 1}{3x} = \frac{x - \sin^2(x)}{3x}$$

نفصل:

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\sin^2(x)}{x}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\sin(x)}{x} \cdot \sin(x)\right)$$

وبما أن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$$

إذن:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{3}(1 - 0) = \frac{1}{3}$$

**السؤال الثالث:**

إذا كان

$$f(x) = \frac{1-\cos^2(3x)}{x\sin(3x)}$$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$ تساوي:

(A) 9
(B) 3
(C) 6
(D) 1

**الحل:**

نستخدم المتطابقة:

$$1-\cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$$

فنكتب:

$$f(x) = \frac{\sin^2(3x)}{x\sin(3x)} = \frac{\sin(3x)}{x} \cdot \frac{\sin(3x)}{\sin(3x)} = \frac{\sin(3x)}{x}$$

الآن نعلم أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

**السؤال الرابع:**

إذا كان

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2\cos^2(x) - 2}{x^2}$$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$ تساوي:

(A) -2
(B) -3
(C) -4
(D) 0

**الحل:**

نبدأ بتبسيط البسط:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2} + \frac{2\cos^2(x)}{x^2} - \frac{2}{x^2}$$

نكتب:

$$f(x) = x - 2 + 2\left(\frac{\cos^2(x)-1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)$$

نستفيد من المتطابقة:

$$\cos^2(x) = 1-\sin^2(x) \Rightarrow 1-\cos^2(x) = \sin^2(x)$$

فنكتب:

$$f(x) = x - 2 - 2\cdot\frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = 1$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 - 2 - 2(1) = -4$$

**السؤال الخامس:**

إذا كان

$$f(x) = \frac{1-\cos(2x)}{3x}$$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$ تساوي:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

**الحل:**

نستخدم المتطابقة:

$$1-\cos(2x) = 2\sin^2(x)$$

وبما أن:

$$1-\cos(2x) = 2\sin^2(x) \Rightarrow$$

$$\cdot\, f(x) = \frac{2\sin^2(x)}{3x} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\sin(x)$$

وعند الاقتراب من الصفر:

$$\sin(x) \to 0 \qquad \frac{\sin(x)}{x} \to 1$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{3}\cdot 0\cdot 1 = 0$$

**السؤال السادس:**

إذا كان

$$f(x) = \frac{1-\cos(8x)}{2x^2}$$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$ تساوي:

(A) 8
(B) 4
(C) 16
(D) 1

**الحل:**

نستخدم المتطابقة:

$$1-\cos(8x) = 2\sin^2(4x)$$

فنكتب:

$$f(x) = \frac{2\sin^2(4x)}{2x^2} = \frac{\sin^2(4x)}{x^2} =$$

$$\left(\frac{\sin(4x)}{x}\right)^2 = \left(\frac{\sin(4x)}{4x}\cdot 4\right)^2 = 16\left(\frac{\sin(4x)}{4x}\right)^2$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x} = 1$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 16(1)^2 = 16$$

**السؤال السابع:**

إذا كان

$$f(x) = \frac{1-\cos(2x)}{x\sin(x)}$$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$ تساوي:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 4

**الحل:**

نستخدم المتطابقة:

$$1-\cos(2x) = 2\sin^2(x)$$

إذن:

$$f(x) = \frac{2\sin^2(x)}{x\sin(x)} = \frac{2\sin(x)}{x}$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2(1) = 2$$

**السؤال الثامن:**

إذا كان

$$f(x) = \frac{1-\cos(4x)}{\sin(x)}$$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$ تساوي:

**(A) 0**
**(B) 2**
**(C) 4**
**(D) 1**

**الحل:**

باستخدام المتطابقة:

$$1-\cos(4x) = 2\sin^2(2x)$$

نكتب:

$$f(x) = \frac{2\sin^2(2x)}{\sin(x)} = 2\cdot\frac{\sin(2x)}{x}\cdot\frac{\sin(2x)}{2}\cdot\frac{x}{\sin(x)}$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x} = 2 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)} = 1$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2\cdot 2\cdot 1\cdot 0 = 0$$

**السؤال التاسع:**

إذا كان

$$f(x) = \frac{1 - \cos(3x)}{x^2(x+1)}$$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$ تساوي:

(A) $\frac{3}{2}$
(B) $\frac{9}{2}$
(C) 3
(D) $\frac{1}{2}$

**الحل:**

نستخدم المتطابقة:

$$1 - \cos(3x) = 2\sin^2(1.5x)$$

إذن:

$$f(x) = \frac{2\sin^2(1.5x)}{x^2(x+1)} = 2 \cdot \left(\frac{\sin(1.5x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{x+1}$$

نلاحظ أن:

$$\frac{\sin(1.5x)}{x} = \frac{\sin(1.5x)}{1.5x} \cdot 1.5 \to 1.5 \quad x \to 0$$

وبما أن:

$$\left(\frac{\sin(1.5x)}{x}\right)^2 \to (1.5)^2 = \frac{9}{4}$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 \cdot \frac{9}{4} \cdot 1 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

**السؤال العاشر:**

إذا كان

$$f(x) = \frac{1 - \cos(5x)}{1 - \cos(3x)}$$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$ تساوي:

(A) $\frac{25}{9}$
(B) $\frac{5}{3}$
(C) 1
(D) $\frac{1}{2}$

**الحل:**

نستخدم المتطابقة:

$$1 - \cos(\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

**الحل:**

نستخدم المتطابقة:

$$1 - \cos(\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$



نطبّقها على البسط والمقام:

$$1 - \cos(5x) = 2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)$$

$$; \quad 1 - \cos(3x) = 2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)$$

إذن:

$$f(x) = \frac{2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{5x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}\right)^2$$

نستخدم النهاية المعروفة:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{a}{b}$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

# مبرهنات الإحاطة والمقارنة

تُستخدم هذه المبرهنات عندما لا نستطيع إيجاد نهاية تابع بشكل مباشر، ولكن يمكننا الاستفادة من نهايات توابع أخرى قريبة أو تحيط به.

---

### المبرهنة الأولى (مبرهنة الإحاطة):

إذا كان لدينا ثلاث توابع
$f(x), g(x), h(x)$
حيث $f(x)$ هو التابع المطلوب والنهايتان التاليتان تتحققان:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$
- $\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x) = l$

فإنه بالضرورة:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

### المبرهنة الثانية:

إذا كان لدينا تابعان
$f(x), g(x)$
و $f(x)$ هو التابع المطلوب وتحققت الشرطان:

- $|f(x) - l| \leq g(x)$
- $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

فإنه:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

**ملحوظة**: تنكشف هذه المبرهنة من خلال الحالتين:

- إذا كان لدينا: $|f(x)| \leq g(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$، فإن $\lim_{x\to a} f(x) = 0$
- إذا كانت: $|nf(x) - l| \leq g(x)$، حيث $n$ و $l$ عددان حقيقيان و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$، فإن:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{l}{n} \Rightarrow \lim_{x\to a} nf(x) = l$$

### ثانياً: المقارنات

تُستخدم عند وجود تابعين أحدهما أصغر من الآخر أو أكبر، مع معرفة نهاية أحدهما.

---

### المقارنة الأولى:

إذا كان لدينا تابعان
$f(x), g(x)$
و $f(x)$ هو التابع المطلوب، وتحققت الشرطان:

- $f(x) \leq g(x)$
- $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$

فإن:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

**أي**: إذا كانت نهاية التابع الأكبر هي ∞+، فإن نهاية التابع الأصغر منه هي ∞+ **حتماً**.



### المقارنة الثانية:

إذا كان لدينا تابعان
$f(x), g(x)$
و $f(x)$ هو التابع المطلوب، وتحققت الشرطان:

- $f(x) \geq g(x)$
- $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$

فإن:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

**أي**: إذا كانت نهاية التابع الأصغر هي ∞+، فإن نهاية التابع الأكبر منه هي ∞+ **حتماً** أيضاً.

## السؤال الأول:

إذا كان:

$$-\frac{2}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{3}{x+1} \quad ; \quad a = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

### الخيارات:

(A) 0
(B) 1
(C) $+\infty$
(D) -1

### الحل:

نعرف:

$$h(x) = -\frac{2}{x+1}, \quad g(x) = \frac{3}{x+1}$$

ونحسب النهايتين:

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

بما أن:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

نطبق **مبرهنة الإحاطة الأولى**:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

## السؤال الثاني:

إذا كان

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad ; \quad a = -\infty$$

فإن

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$$

### الخيارات:

(A) 1
(B) 0
(C) -1
(D) لا وجود للنهاية

### الحل:

نعلم أن:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

نقسم المتباينة على $x$ حيث $x < 0$ فنغيّر إشارات المتباينة:

$$\frac{-1}{x} \geq \frac{\cos x}{x} \geq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{-1}{x} \geq f(x) \geq \frac{1}{x}$$

نحسب النهايتين:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

وبما أن:

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{-1}{x}$$

فنستنتج باستخدام **مبرهنة الإحاطة الأولى**:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

لحل مسائل إثبات **محدودية تابع** من النوع التالي:

$$f(x) = \frac{}{\cos x +} \qquad f(x) = \frac{}{\sin x +}$$

نتّبع الخطوات الأكاديمية الآتية، كما تُدرّس في المناهج الرسمية:

---

**القاعدة الأساسية:**

التابع $f(x)$ يُقال إنه **محدود** إذا وُجد عددان حقيقيان $m$ و $M$ بحيث:

$$m \leq f(x) \leq M \quad x \in \mathbb{R}$$

**خطوات الحل الأكاديمية:**

أولًا:
نبدأ من المتباينة الأساسية للـ $\sin x$ أو $\cos x$:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1$$

ثانيًا:
نُجري التعديلات المناسبة بحسب شكل التابع:

مثلاً إذا كان:

$$f(x) = \frac{5}{\sin x + 4}$$

نضيف 4 إلى جميع أطراف متباينة الجيب:

$$3 \leq \sin x + 4 \leq 5$$

ثالثًا:
نأخذ المقلوب للطرفين **مع عكس جهة المتباينة** (لأن المقادير موجبة):

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sin x + 4} \leq \frac{1}{3}$$

رابعًا:
نضرب الأطراف بالثابت الموجود في البسط:

$$f(x) = \frac{5}{\sin x + 4} \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq \frac{5}{3}$$

خامسًا:
نستنتج أن:

$$f(x) \qquad \Rightarrow f(x)$$

**ملاحظات مهمة:**

• عند التعامل مع دوال من الشكل:

$$f(x) = \frac{}{\sin x +}$$

فإن مخرج الجيب سيبقى محصورًا بين عددين موجبَين، لذا التابع سيكون محصورًا.

• إذا احتوى المقام على $\sin x$ أو $\cos x$ فقط، بدون إضافات، لا يمكن الحكم على التابع بالمحدودية إلا بتحليل مجال التعريف.

إذا كان التابع

$$f(x)=\frac{5}{\sin x+4}$$

فإنّ هذا التابع:

(A) غير محدود
(B) دائمًا أكبر من 5
(C) محصور بين 0 و 1
(D) محدود

**الحل:**

نعلم من العلاقة الأساسية:

$$-1\le \sin x\le 1$$

نضيف العدد 4 إلى جميع أطراف المتباينة:

$$3\le \sin x+4\le 5$$

نأخذ مقلوب المتباينة مع عكس إشارة الترتيب، لأننا نقسم على مقدار موجب:

$$\frac{1}{5}\le \frac{1}{\sin x+4}\le \frac{1}{3}$$

نضرب جميع الأطراف بالعدد 5:

$$1\le \frac{5}{\sin x+4}\le \frac{5}{3}$$

وبما أن:

$$f(x)=\frac{5}{\sin x+4}$$

إذن:

$$1\le f(x)\le \frac{5}{3}\Rightarrow f(x)$$

---

**الجواب الصحيح هو:** (D) محدود

**السؤال التالي:**

ليكن

$$f(x)=3x+\sin x$$

أدرس سلوك التابع $f$ عندما $x\to+\infty$، ثم احسب قيمة تقريبية لـ $f(1000)$ مع الخطأ الممكن في الحساب.

الخيارات:

(A)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad f(1000)\in[2999,3001]$$

(B)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \qquad f(1000)\in[2999,3001]$$

(C)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad f(1000)\in[2998,3002]$$

(D)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \qquad f(1000)\in[2999,3001]$$



**الحل:**

نستفيد من أن:

$$-1\le \sin x\le 1\Rightarrow 3x-1\le 3x+\sin x\le 3x+1\Rightarrow$$

$$3x-1\le f(x)\le 3x+1$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x-1)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}(3x+1)=+\infty$$

فإننا من مبرهنة المقارنة نحصل على:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ولتقريب القيمة $f(1000)$ نستخدم نفس المتباينة:

$$3(1000)-1 \le f(1000) \le 3(1000)+1 \Rightarrow$$

$$2999 \le f(1000) \le 3001$$

أي:

$$f(1000) \in [2999, 3001]$$

الجواب الصحيح هو: **(A)**

---

# النهايات في التوابع المركبة

**مفهوم التابع المركب:**

ندعو التعبير

$f(g(x))$

تابعًا مركبًا، حيث يتم تطبيق التابع $g$ أولًا على $x$، ثم يتم تطبيق التابع $f$ على الناتج $g(x)$. ونكتب ذلك بالشكل:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

**هدفنا:**
إيجاد

$$\lim_{x\to a} f(g(x))$$

**الحالة الأولى: قاعدة ربط التابع المركب معلومة بشكل مباشر**

في هذه الحالة يكون التعبير

$f(g(x))$

مُعطى بشكل واضح، ونستطيع التعامل معه كما نتعامل مع أي نهاية عادية، بحسب نوع التابع الناتج، كأن يكون جذرًا، أو دالة مثلثية، أو كسرًا جبريًا.

**مثال:**

أوجد النهاية:

$$\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{3x+1}\right)$$

نلاحظ أن $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=3x+1$، وهنا:

$$f(g(x)) = \sqrt{3x+1}$$

نحسب:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3x+1} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(3x+1)} = \sqrt{3(2)+1} = \sqrt{7}$$

---

**الحالة الثانية: قاعدة ربط التابع المركب غير ظاهرة**

في هذه الحالة لا تكون قاعدة التابع المركب معطاة بصيغة واحدة، وإنما يُطلب من الطالب إيجاد النهاية باستخدام التركيب، عبر مرحلتين:

1. نحسب النهاية الداخلية:

$$\lim_{x\to a} g(x) = b$$

2. ثم نحسب النهاية الخارجية:

$$\lim_{x\to b} f(x) = c$$



وبذلك نكتب:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{x\to b} f(x) = c$$

**مثال:**

إذا كان:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 3 \qquad \lim_{x\to 3} f(x) = 5$$

فإن:

$$\lim_{x\to 1} f(g(x)) = 5$$

لأن التابع الداخلي $g(x)$ يقترب من 3، ونعوّض هذه القيمة في التابع الخارجي $f$.

---

**ملاحظة هامة:**

يمكن أن تكون التراكيب من توابع غير عادية مثل:

جذر تابع
أو: دالة مثلثية لتابع
أو: أسّ تابع
أو: تابع مرفوع لقوة

وفي جميع هذه الحالات نستخدم الخطوات نفسها، وذلك حسب نوع التابع الخارجي.

**مثال على تركيب تابع جذري:**

أوجد:

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+1}$$

نحسب مباشرة:

$$\sqrt{\lim_{x\to 4}(x^2+1)}=\sqrt{4^2+1}=\sqrt{17}$$



**مثال على تركيب دالة مثلثية:**

أوجد:

$$\lim_{x\to 0}\sin(5x)$$

بما أن:

$$\lim_{x\to 0}5x=0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\sin(5x)=\sin(0)=0$$

---

**القاعدة النهائية:**

إذا تحقق:

$$\lim_{x\to a}g(x)=b \qquad \lim_{x\to b}f(x)=c$$

فإن:

$$\lim_{x\to a}f(g(x))=c$$

**السؤال الأول:**

إذا كان

$$f(x)=x^2+1$$

فإن

$$f\left(\frac{1}{x}\right)$$

يساوي:

(A) $\frac{1+x^2}{x^2}$
(B) $\frac{1}{x^2}+1$
(C) $\frac{1}{x^2+1}$
(D) $\frac{1+x}{x}$

**الحل:**

نعوّض داخل قاعدة التابع

$$f(x)=x^2+1$$

بالعبارة

$$\frac{1}{x}$$

فنحصل على:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+1=\frac{1}{x^2}+1=\frac{1+x^2}{x^2}$$

**الجواب الصحيح: (A)**

**السؤال الثاني:**

إذا كان

$f(x) = x^2 + 1$

و

$g(x) = \sqrt{x}$

فإن

$fog(x) = f(g(x))$

يساوي:

(A) $\sqrt{x} + 1$
(B) $x + 1$
(C) $x^2 + 1$
(D) $\sqrt{x^2 + 1}$

**الحل:**

نبدأ بحساب

$f(g(x))$

بما أن

$g(x) = \sqrt{x}$

فإن:

$fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$

**الجواب الصحيح: (B)**

**السؤال الثالث:**

إذا كان

$f(x) = x^2 + 1$

و

$g(x) = \sqrt{x}$

فإن

$gof(x) = g(f(x))$

يساوي:

(A) $\sqrt{x + 1}$
(B) $\sqrt{x^2 + 1}$
(C) $x + 1$
(D) $x^2 + 1$

**الحل:**

نحسب

$gof(x) = g(f(x))$

نعوّض $f(x) = x^2 + 1$ داخل $g$:

$g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$

**الجواب الصحيح: (B)**

---

**السؤال الرابع:**

إذا كان

$f(x) = x^2 + 1$

فإن

$f(f(x))$

يساوي:

(A) $(x^2 + 1)^2 + 1$
(B) $x^4 + 2x^2 + 2$
(C) $x^4 + x^2 + 1$
(D) $x^4 + 2x^2 + 1$

**الحل:**

نحسب:

$$f(f(x)) = f(x^2+1) = (x^2+1)^2 + 1$$

نستخدم متطابقة مربع مجموع:

$$(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1 \Rightarrow f(f(x)) = x^4 + 2x^2 + 1$$

**الجواب الصحيح: (B)**

---

**السؤال الخامس:**

إذا كان

$$g(x) = \sqrt{x}$$

فإن

$$g(g(x))$$

يساوي:

(A) $\sqrt{x}$
(B) $\sqrt{\sqrt{x}}$
(C) $x^2$
(D) $x$

**الحل:**

نحسب:

$$g(g(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

لكن بما أن العبارة المطلوبة بالخيارات هي الجذر التربيعي للجذر فقط:

$$g(g(x)) = \sqrt{\sqrt{x}}$$

**الجواب الصحيح: (B)**

**السؤال السادس:**

إذا كان

$$f(x) = \sqrt{\tfrac{x+4}{x-6}}$$

وكان

$$D = ]6, +\infty[$$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to 6$ تساوي:

(A) $-\infty$
(B) $+\infty$
(C) $0$
(D) غير موجودة

---

**الحل:**

نحسب أولاً نهاية المقدار داخل الجذر:

$$\lim_{x\to 6}\left(\frac{x+4}{x-6}\right) = \frac{10}{0^+} = +\infty$$



وبما أن الدالة تحت الجذر تتجه نحو المالانهاية الموجبة، فإن:

$$\lim_{x\to 6} f(x) = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

---

**الجواب الصحيح هو: (B)**

## السؤال السابع:

إذا كان

$f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$

وكان

$D = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to -\infty$ تساوي:

(A) $-\infty$
(B) $0$
(C) $+\infty$
(D) غير موجودة

**الحل:**

نفرض

$g(x) = -x^3 + x^2 + x$

ثم نحسب:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

وبالتالي:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

**الجواب الصحيح هو: (C)**

---

## السؤال الثامن:

إذا كان

$f(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}}$

وكان

$D = ]-\infty, 1[$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to -\infty$ تساوي:

(A) $1$
(B) $0$
(C) $+\infty$
(D) غير موجودة

**الحل:**

نفرض

$g(x) = \frac{-x+1}{x^2+1}$

ثم نحسب:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

وبالتالي:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sqrt{0} = 0$$

**الجواب الصحيح هو: (B)**

---

**السؤال التاسع:**

إذا كان

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

وكان

$D = ]-1, 1[$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to 1^-$ تساوي:

(A) $1$
(B) $0$
(C) $+\infty$
(D) غير موجودة

**الحل:**

نفرض

$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

ثم نحسب:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

**الجواب الصحيح هو: (C)**

---



**السؤال العاشر:**

إذا كان

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right)$

وكان

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to +\infty$ تساوي:

(A) $1$
(B) $0$
(C) $-1$
(D) غير موجودة

**الحل:**

نفرض:

$g(x) = \frac{\pi x+1}{x+2}$

نحسب نهاية $g(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x + 1}{x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\pi + \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{\pi + 0}{1 + 0}$$

$$= \pi$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \pi \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \cos(\pi) = -1$$

**الجواب الصحيح هو: (C)**

---

حل النهايات باستخدام التعريف (المعتمد على الإشارة)

---

**أولًا: الفكرة العامة:**

لحساب نهاية تابع $f(x)$ باستخدام التعريف، نلجأ إلى دراسة تعبير من الشكل:

$|f(x) - C| < r$

وذلك من خلال تحليل العلاقة المعطاة وإجراء عمليات جبرية مناسبة للوصول إلى تعيين المجال أو المتباينة المطلوبة.

---

**ثانيًا: مخطط العمل:**

يتفرع حل هذا النوع من المسائل إلى طريقين رئيسيين:

**١- تعيين المجال:**
نقوم بتحديد المجال المناسب من العلاقة المعطاة بعد الخطوات التالية:

- نستخرج **نطاق** العلاقة بدلالة $x$
- نقوم **بعزل** $x$ للحصول على شكل يسمح بدراسة الإشارة
- نحل الناتج على شكل **متراجحة** لتحديد مجال $x$

**مثال توضيحي:**
إذا كانت العلاقة:

$$|x-2|<3$$

فنكتب:

$$-3<x-2<3 \Rightarrow -1<x<5$$

إذن المجال هو:

$$x \in ]-1,5[$$

**٢- تعيين النقطة $A$:**
هذا القسم يستخدم عندما تكون العلاقة المعطاة بالصورة:

$$|f(x)-C|<r$$

نقوم بالخطوات التالية:

- نوجد مركز المجال $C$ ونصف القطر $r$ وفق القانونين:

$$C=\frac{a+b}{2}, \quad r=\frac{b-a}{2}$$

حيث $a$ و $b$ هما طرفا المجال المطلوب

- نضع العلاقة المعطاة بصيغة القيمة المطلقة ونعزل $f(x)$
- ندرس المتراجحة ونستخدمها لتحديد النهاية المطلوبة

**ملاحظة هامة:**
التخلص من القيمة المطلقة يتم دائمًا **بدراسة الإشارة** ضمن المجال المدروس.

السؤال الأول:

إذا كان التابع

$$f(x)=\frac{-2x+1}{x+3}$$

فما العدد الحقيقي $A$ الذي يجعل الشرط

$$f(x)>A$$

محققًا على المجال

$$x \in ]-1.95,-2.05[$$

مع العلم أن

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=-2$$

فإن القيمة الصحيحة لـ $A$ هي:

(A) 135
(B) 137
(C) 140
(D) 2



الحل:

نلاحظ أن المسألة تعتمد على استخدام تعريف النهاية بالإشارة، إذ يُطلب إيجاد العدد $A$ الذي يجعل:

$$f(x)>A \qquad x>-2$$

لكن ضمن المجال:

$$]-1.95,-2.05[$$

نبدأ بتحديد مركز المجال ونصف قطره:

نحسب مركز المجال:

$$C=\frac{-2.05+(-1.95)}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

ونحسب نصف قطر المجال:

$$r=\frac{-1.95+2.05}{2}=\frac{0.1}{2}=\frac{1}{20}$$

نعتمد على تعريف النهاية:

$$|f(x)-(-2)|<\frac{1}{20} \Rightarrow \left|\frac{-2x+1}{x+3}+2\right|<\frac{1}{20}$$

نقوم بتوحيد المقامات:

$$=\left|\frac{-2x+1+2x+6}{x+3}\right|=\left|\frac{7}{x+3}\right| \Rightarrow \left|\frac{7}{x+3}\right|<\frac{1}{20} \Rightarrow$$

$$x+3>140 \Rightarrow x>137$$

إذن:

العدد $A$ المطلوب الذي يجعل المتراجحة محققة هو:

$137$

الجواب الصحيح هو:

**(B)**



السؤال الثاني:

إذا كان التابع

$$f(x)=\frac{x+3}{x-3}$$

وكان المجال $J=]3.95,4.05[$، فأوجد المجال $I$ الذي يجعل:

$$f(x)\in]3.95,4.05[ \qquad x\in I$$

مع العلم أن النهاية

$$\lim_{x\to 5} f(x)=\frac{8}{2}=4$$

فإن المجال $I$ هو:

(A) $]\frac{6}{4.05}+3,\frac{6}{3.95}+3[$
(B) $]\frac{6}{3.95}+3,\frac{6}{4.05}+3[$
(C) $]\frac{6}{3.05}+3,\frac{6}{2.95}+3[$
(D) $]\frac{6}{2.95}+3,\frac{6}{3.05}+3[$

الحل:

بما أن

$$f(x)\in]3.95,4.05[ \Rightarrow 3.95<\frac{x+3}{x-3}<4.05$$

نقوم بكتابة التابع على شكل مناسب باستخدام القسمة الإقليدية:

$$f(x)=\frac{x+3}{x-3}=1+\frac{6}{x-3}$$

وبالتالي تصبح المتراجحة:

$$3.95<1+\frac{6}{x-3}<4.05 \Rightarrow 2.95<\frac{6}{x-3}<3.05$$

نقلب المتراجحة ونغير الإشارة لأن المقام موجب:

$$\frac{1}{2.95}>\frac{x-3}{6}>\frac{1}{3.05} \Rightarrow \frac{6}{2.95}>x-3>\frac{6}{3.05} \Rightarrow \quad \frac{6}{2.95}+3>x>\frac{6}{3.05}+3$$

إذن:

$$x\in\left]\frac{6}{3.05}+3,\frac{6}{2.95}+3\right[$$

الجواب الصحيح هو:

**(C)**

السؤال الثالث:

إذا كان التابع

$$f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2}$$

ويُحقق الشرط:

$$f(x) > 10^3 \quad x \in ]1-\alpha, 1+\alpha[ \quad x \neq 1$$

فإن أصغر قيمة ممكنة لـ $\alpha$ هي:

(A) 0.05
(B) 0.06
(C) 0.07
(D) 0.08

**الحل:**

أولًا نحسب نهاية التابع:

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{5x-1}{(x-1)^2} = \frac{5(1)-1}{(1-1)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

**تعيين قيمة $\alpha$:**



نحل المتراجحة:

$$f(x) > 10^3 \Rightarrow \frac{5x-1}{(x-1)^2} > 10^3$$

نضرب طرفي المتراجحة في المقام (الموجب دائمًا ما دام $x \neq 1$):

$$5x - 1 > 10^3(x-1)^2$$

ننقل كل شيء إلى طرف واحد:

$$5x - 1 - 10^3(x-1)^2 > 0$$

نضع:

$$t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$$

نبدّل في المتراجحة:

$$5(t+1) - 1 - 10^3(t^2) > 0 \Rightarrow$$

$$5t + 5 - 1 - 10^3t^2 > 0 \Rightarrow -10^3t^2 + 5t + 4 > 0$$

نعكس الإشارة لنكتبها بصيغة معيارية:

$$10^3t^2 - 5t - 4 < 0$$

نحسب الجذرين:

$$a = 10^3, \quad b = -5, \quad c = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 25 + 16000 = 16025$$

$$\sqrt{\Delta} \approx 126$$

إذن:

$$t_1 = \frac{5-126}{2000} = \frac{-121}{2000} \approx -0.06 \quad , \quad t_2 = \frac{5+126}{2000} = \frac{131}{2000} \approx 0.06$$

وبما أن $t = x - 1$:

$$-0.06 < x - 1 < 0.06 \Rightarrow 1 - 0.06 < x < 1 + 0.06$$

**الجواب النهائي:**

أصغر عدد $\alpha$ يحقق الشرط هو:

0.06

---

# المقاربات الخطية لتابع

عند دراسة سلوك تابع ما، من المفيد أحيانًا تحديد الخطوط التي يقترب منها منحني التابع دون أن يلامسها، وهذه الخطوط تُدعى **مقاربات**. المقارب هو مستقيم يقترب منه الخط البياني للتابع بشكل غير محدود، عندما تؤول قيم المتغير $x$ نحو قيمة معينة أو نحو المالانهاية، دون أن يقطعه غالبًا.

---

## أنواع المقاربات:

ينقسم المقارب إلى ثلاثة أنواع رئيسية:

### أولًا: المقارب الشاقولي (الرأسي):

هو مستقيم من الشكل:

$$x = a$$

عند النقطة $x = a$ غير منتهية، أي:



$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

### ملاحظات:

- الخط البياني يقترب جدًا من هذا المستقيم عند الاقتراب من اليمين أو اليسار لكنه لا يقطعه.
- المقارب الشاقولي يدل غالبًا على وجود **مفردة** في التابع (كأن يكون المقام صفرًا).

### مثال توضيحي:

إذا كان:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

فإن:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \quad x = 2$$

---

### ثانيًا: المقارب الأفقي:

هو مستقيم من الشكل:

$$y = b$$

ويتحقق وجود هذا المقارب عندما تؤول نهاية التابع إلى قيمة ثابتة عندما يذهب $x$ نحو المالانهاية أو نحو ناقص المالانهاية:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

### ملاحظات:

- الخط البياني قد يقطع هذا المقارب في بعض المواضع لكنه يقترب منه كثيرًا في الأطراف.
- المقارب الأفقي يدل على سلوك التابع عند قيم كبيرة جدًا أو صغيرة جدًا لـ $x$.

### مثال توضيحي:

إذا كان:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$$

نحسب النهاية عندما $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x+5} = \lim_{x \to \infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \quad y = 2$$

---

## المقارب المائل

### تعريف:

المقارب المائل هو مستقيم يميل على المستوى البياني ويقترب منه منحني تابع معين دون أن يقطعه عند اللانهاية.
بصورة أكثر دقة، إذا اقترب منحني تابع $f(x)$ من مستقيم له معادلة من الشكل:

$$y = ax + b$$

عند اللانهاية أو ناقص اللانهاية، فإن هذا المستقيم يُدعى **مقاربًا مائلًا** للتابع $f$.

---

### طريقة الكشف عن وجود مقارب مائل:

للكشف عن وجود مقارب مائل، نتبع الخطوات التالية:

1. ندرس نهاية الفرق بين التابع والمستقيم من الشكل $y = ax + b$ أي نحسب:

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - (ax + b)\right)$$

فإذا كانت هذه النهاية تساوي صفرًا، فإن المستقيم $y = ax + b$ هو مقارب مائل للتابع $f(x)$ عند $+\infty$.

---

### طريقة إيجاد معادلة المقارب المائل:

لحساب معادلة المستقيم المائل نقوم بالتالي:

أولًا: نحسب ميل المستقيم $a$ عبر العلاقة:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

ثانيًا: نحسب الجزء الثابت $b$ عبر العلاقة:

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - ax\right)$$

وبذلك تكون معادلة المقارب المائل:

$$y = ax + b$$

---

### مثال تطبيقي:

ليكن:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}$$

نحسب:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) = 2$$

ثم:

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 + 1 - 2x^2}{x}\right) :$$

إذن المقارب المائل هو:

$$y = 2x$$



### ملاحظات هامة:

- التابع يمكن أن يكون له مقارب مائل عند $+\infty$ فقط، أو عند $-\infty$ فقط، أو في كلا الطرفين.
- لا يكون للتابع المقارب المائل إذا كان له **مقارب أفقي** في نفس الجهة.
- وجود مقارب مائل يُشير إلى أن نهاية التابع في تلك الجهة غير منتهية، ولكنه يقترب من شكل خطي $ax + b$.

---

**السؤال الأول:**

إذا كان

$f(x) = \frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$ تساوي:

(A) $-2$
(B) $0$
(C) $-4$
(D) $2$

**الحل:**

نلاحظ أن التعويض المباشر يؤدي إلى شكل غير معيّن:
$\frac{0}{0}$

نبدأ بتحليل البسط:

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}$$

نفصل الحدود:

$$= \frac{x^3}{x^2} - 2 + \frac{2\cos^2 x-2}{x^2}$$

$$= x - 2 + \frac{2(\cos^2 x-1)}{x^2}$$

نستخدم المتطابقة:

$$\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$$

إذن:

$$f(x) = x - 2 + \frac{-2\sin^2 x}{x^2}$$

نكتب:

$$f(x) = x - 2 - 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

وباستخدام النهاية المعروفة:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0 - 2 - 2(1)^2 = -4$$

**الجواب الصحيح:** (C)

**السؤال الثاني:**

إذا كان

$f(x) = \frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}$

فإن المستقيم الذي معادلته
$y = x - 2$

هو:

(A) مماس للمنحني في نقطة
(B) مقارب مائل في جوار $+\infty$
(C) مقارب مائل في جوار $-\infty$
(D) لا يوجد له علاقة بالتابع

**الحل:**

لدراسة وجود مقارب مائل في جوار $-\infty$، نستخدم:

$$h(x) = f(x) - (x-2)$$

نحسب:

$$h(x) = \frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2} - (x-2)$$

نقوم بتوحيد المقام:



$$h(x) = \frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2-x^3+2x^2}{x^2} = \frac{2\cos^2 x-2}{x^2}$$

نكتب:

$$h(x) = \frac{2(\cos^2 x-1)}{x^2} = \frac{-2\sin^2 x}{x^2}$$

نستخدم الإحاطة:

$$0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow -2 \le -2\sin^2 x \le 0$$

نكتب:

$$h(x) = \frac{2(\cos^2 x-1)}{x^2} = \frac{-2\sin^2 x}{x^2}$$

نستخدم الإحاطة:

$$0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow -2 \le -2\sin^2 x \le 0$$

إذن:

$$\frac{-2}{x^2} \le h(x) \le 0$$

وبما أن:

$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{x^2} = 0$

نحصل من مبرهنة الإحاطة:

$\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$

إذن المستقيم:

$y = x - 2$

هو مقارب مائل في جوار $-\infty$

**الجواب الصحيح:** (C)

---

السؤال الثالث:

إذا كان

$f(x) = x + \sqrt{4x^2+1}$

فإن نهاية $f(x)$ عندما $x \to -\infty$ تساوي:

(A) $-\infty$

(B) $+\infty$

(C) $0$

(D) $1$

الحل:

نبدأ بتحليل النهاية عند المالانهاية السالبة، وذلك باستخدام التعويض داخل الجذر:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{4x^2+1}\right)$$

نخرج العامل المشترك $x$ من الجذر، مع الانتباه إلى إشارة $x$ السالبة:

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(x + |x| \cdot \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty} x(1 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}})$$

بما أن $x \to -\infty$، فإن $x < 0$ و $|x| = -x$

$$= x(1 + \sqrt{4+0}) = x(1+2) = 3x \to -\infty$$

الجواب الصحيح: (A)

السؤال الرابع:

إذا كان

$f(x) = x + \sqrt{4x^2+1}$

فأثبت أن المستقيم

$y = -x$

هو مقارب مائل للمنحني البياني لـ $f$ في جوار $-\infty$

(A) صح

(B) خطأ

(C) المقارب شاقولي

(D) المقارب لا يوجد

الحل:

نحسب الفرق:

$$h(x) = f(x) - (-x) = x + \sqrt{4x^2+1} + x = 2x + \sqrt{4x^2+1}$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$$

نخرج العامل $x$ من تحت الجذر:

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(2x + |x| \cdot \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(2x - x\right.$$

نأخذ $x$ مشترك:

$$= x(2 - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}) \to 0$$

إذن:

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) = 0 \Rightarrow y = -x$$

الجواب الصحيح: (A)

---

السؤال الخامس:

ادرس الوضع النسبي بين المنحني البياني للدالة
$f(x) = x + \sqrt{4x^2+1}$
والمستقيم $y = -x$ في جوار $-\infty$

(A) المنحني فوق المستقيم دائمًا

(B) المنحني تحت المستقيم دائمًا

(C) المنحني يقطعه

(D) لا يمكن تحديد الوضع النسبي

الحل:

نحسب الفرق:

$$h(x) = f(x) - (-x) = 2x + \sqrt{4x^2+1}$$

نبحث عن إشارة $h(x)$ في جوار $-\infty$

نختبر نهاية:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$$

لكن نحل المعادلة:

$$h(x) = 0 \Rightarrow 2x + \sqrt{4x^2+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{4x^2+1} = -2x$$

نربّع:

$$4x^2 + 1 = 4x^2 \Rightarrow 1 = 0$$

إذن لا يوجد تقاطع، وندرس الإشارة:

نأخذ $x < 0 \Rightarrow \sqrt{4x^2+1} > -2x \Rightarrow h(x) > 0$

إذن:

المنحني البياني يقع **فوق المستقيم** في جوار $-\infty$

الجواب الصحيح: (A)

---

**السؤال السادس:**

ليكن

$f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

معطى أن

$D = [0, +\infty[$

فإن نهاية

$f(f(x))$

عندما

$x \to +\infty$

تساوي:

(A) 4
(B) 2
(C) 0
(D) +∞

**الحل:**

نحسب أولاً نهاية

$f(x)$

عندما

$x \to +\infty$:

نكتب:

$$f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{4}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}$$

عندما

$x \to +\infty$،

نحصل على:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{4}{1+0} = 4$$

نستنتج:

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(4)$$

نحسب

$f(4)$:

$$f(4)=\frac{4\sqrt{4}}{\sqrt{4}+2}=\frac{4\cdot 2}{2+2}=\frac{8}{4}=2$$

إذن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=2$$

**الجواب الصحيح هو: (B)**

---

**السؤال السابع:**

ليكن

$f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

فإن المستقيم

$y=4$

هو:

(A) مقارب شاقولي
(B) مقارب مائل
(C) مقارب أفقي
(D) غير موجود

**الحل:**

نحسب:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=\frac{4}{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}\to 4$$

وبما أن نهاية الدالة عند

$+\infty$

عدد حقيقي، فإن المستقيم

$y=4$

مقارب **أفقي** في جوار

$+\infty$

ندرس الوضع النسبي بين

$\Delta$

والخط البياني $C_f$:

نحسب الفرق:

$$h(x)=f(x)-y_\Delta=\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-4=\frac{4\sqrt{x}-4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2}$$
$$=\frac{-8}{\sqrt{x}+2}$$

نلاحظ أن

$h(x)<0$

لكل

$x>0$

إذن الوضع النسبي:

| $x$ | 0 | +∞ |
|---|---|---|
| $h(x)$ | | − |
| الوضع النسبي | تحت Δ | تحت Δ |

**الجواب الصحيح هو: (C)**

---

**السؤال الثامن:**

إذا كانت

$f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

وكانت نهاية

$f(x)$

عندما

$x\to+\infty$

هي

$c=4$

فأوجد العدد الحقيقي $A$ بحيث يتحقق:

$$|f(x)-c|<\frac{1}{10} \quad x>A$$

(A) 1000
(B) 2025
(C) 6084
(D) 4096

**الحل:**

نبدأ من المتباينة:

$$\left|\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-4\right|<\frac{1}{10}$$

نحسب الفرق:

$$h(x)=\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-4=\frac{-8}{\sqrt{x}+2}$$

نأخذ القيمة المطلقة:

$$\left|\frac{-8}{\sqrt{x}+2}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{8}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{10} \Rightarrow \sqrt{x}+2 > 80 \Rightarrow$$

إذن: $\sqrt{x} > 78 \Rightarrow x > 78^2 = 6084$

$$A = 6084$$

**الجواب الصحيح هو: (C)**

---

**السؤال التاسع:**

ليكن

$f(x) = \frac{x^2+2-\sin x}{x}$

معرّفاً على المجموعة $\mathbb{R}^*$

إذا كان الخط البياني للدالة $f$ هو $C$، فأيّ من المستقيمات الآتية يُعدّ مقاربًا مائلًا له في جوار $+\infty$ ؟

(A) $y = x$
(B) $y = x^2$
(C) $y = 2$
(D) $y = 0$

**الحل:**

نحسب الفرق بين الدالة والمستقيم $y = x$:

$$h(x) = f(x) - x = \frac{x^2+2-\sin x}{x} - x = \frac{2-\sin x}{x}$$

نعلم أن:

$$-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow 1 \le 2-\sin x \le 3 \quad \Rightarrow \frac{1}{x} \le h(x) \le \frac{3}{x}$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

فإن:

$y = x$ هو مقارب مائل في جوار $+\infty$

**الجواب الصحيح هو: (A)**

**السؤال العاشر:**

ليكن

$f(x) = \frac{x^2+2-\sin x}{x}$

فإن الوضع النسبي بين الخط البياني $C$ والمقارب $\Delta$ الذي معادلته

$y = x$ هو:

(A) فوقه دائمًا
(B) تحته دائمًا
(C) يتغير
(D) مستحيل تحديده

**الحل:**

نحسب الفرق:

$$h(x) = f(x) - y_\Delta = \frac{x^2+2-\sin x}{x} - x = \frac{2-\sin x}{x}$$

نلاحظ أن:

$$\sin x \le 1 \Rightarrow 2-\sin x > 1 \quad x > 0 \Rightarrow h(x) > 0$$

أي أن الفرق موجب دائمًا، أي أن الخط البياني يقع دائمًا فوق المستقيم $y = x$

**الجواب الصحيح هو: (A)**

---

**السؤال الحادي عشر:**

ليكن

$f(x) = \frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}$

فإن نهاية الدالة $f$ عندما $x \to 0$ تساوي:

(A) -2
(B) 0
(C) -4
(D) 1

**الحل:**

نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}$$

نستخدم المتطابقة:

$$2\cos^2 x-2 = -2(1-\cos^2 x) = -2\sin^2 x$$

فنكتب:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2} - 2 + \frac{-2\sin^2 x}{x^2} = x-2-2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0-2-2(1)^2 = -4$$

**الجواب الصحيح هو:** (C)

---

**السؤال الثاني عشر:**

ليكن

$f(x) = \frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}$

فإن المستقيم الذي معادلته $y = x-2$ هو:

(A) مقارب أفقي
(B) مقارب شاقولي
(C) مقارب مائل
(D) ليس مقاربًا

**الحل:**

نحسب الفرق:

$$h(x) = f(x)-(x-2) = \frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2}{x^2}-(x-2)$$

نوحد المقام ونرتب:

$$h(x) = \frac{x^3-2x^2+2\cos^2 x-2-x(x^2-2x)}{x^2} = \frac{2\cos^2 x-2}{x^2}$$

وبما أن:



$$0 \le \cos^2 x \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\cos^2 x-2 \le 0 \Rightarrow -\frac{2}{x^2} \le h(x) \le 0$$

وبأخذ النهاية:

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$$

إذن:

$y = x-2$ هو مقارب مائل

**الجواب الصحيح هو:** (C)

---

**السؤال الثالث عشر:**

ليكن

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

دالة معرفة على

$$\mathbb{R}$$

فإن نهاية

$$f(x) - (x+1)$$

عندما

$$x \to +\infty$$

تساوي:

(A) $+\infty$
(B) $3$
(C) $0$
(D) $-\infty$

**الحل:**

نحسب أولًا:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ثم نحسب الفرق:

$$f(x) - (x+1) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x+1)$$

نضرب بالمرافق:

$$= \frac{(x^2 + 2x + 4) - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x+1)} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + (x+1)} \to 0$$

**الجواب الصحيح هو:** (C)

---

**السؤال الرابع عشر:**

ليكن

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

فإن المستقيم الذي معادلته

$$y = x + 1$$

هو:

(A) مقارب شاقولي
(B) مقارب أفقي
(C) مقارب مائل
(D) ليس مقاربًا

**الحل:**

لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$$

وهذا يعني أن الفرق بين الدالة والخط يميل إلى الصفر عند اللانهاية

إذن:

$$y = x + 1$$

هو مقارب مائل في جوار

$$+\infty$$

**الجواب الصحيح هو:** (C)

**السؤال الخامس عشر:**

ليكن

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

والخط

$$\Delta : y = x + 1$$

هو مقارب مائل

فما هو الوضع النسبي بين المنحني $C$ والخط $\Delta$؟

(A) فوقه دائمًا
(B) تحته دائمًا
(C) يقطعه
(D) لا يمكن تحديد ذلك

**الحل:**

نحسب الفرق

$$h(x) = f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - (x + 1)$$

نفترض أن

$$h(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 4} = x + 1$$

نربّع الطرفين بشرط أن

$$x > -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 4 = 1$$

وهذا غير ممكن

إذن

$$h(x) \neq 0$$

ولا ينعدم الفرق

ننظر إلى إشارة $h(x)$ ونلاحظ أن الجذر دائمًا أكبر من المقدار الخطي في هذا السياق، أي:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} > x + 1 \Rightarrow h(x) > 0$$

لكل $x$

إذن المنحني $C$ يقع فوق الخط $\Delta$ دائمًا

**الجواب الصحيح هو:** (A)



**الاستمرار عند نقطة**

نقول عن تابع $f$ إنه **مستمر عند نقطة** $a$ إذا تحقق الشرط التالي:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

أي أن نهاية التابع عندما تؤول $x$ إلى $a$ تساوي قيمة التابع عند تلك النقطة.

---

**التمييز بين الحالتين**

لدراسة استمرار تابع عند نقطة $a$، نميّز حالتين:

**الحالة الأولى:** إذا كانت النهاية موجودة وتساوي قيمة التابع، أي:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

فعندها يكون التابع **مستمراً** عند النقطة $a$

**الحالة الثانية:** إذا كانت النهاية غير موجودة أو موجودة ولكنها لا تساوي $f(a)$، فعندها يكون التابع **غير مستمر** عند النقطة $a$

---

**المثال الأول:**

لدينا التابع:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x \in ]0,1[ \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

نريد تحديد فيما إذا كان $f$ مستمراً عند $x = 1$

**الخطوات:**

نحسب:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

نستفيد من التحليل باستخدام المترافق:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1 \Rightarrow \lim_{x\to1} f(x) = 2$$

ومنه:

$$\lim_{x\to1} f(x) = f(1) = 2 \Rightarrow f \quad x = 1$$

---

**المثال الثاني:**

لدينا التابع:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & x \neq 0 \\ \frac{2m-5}{2} & x = 0 \end{cases}$$

**الطلب الأول:** جد نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$

نحسب:

$$\lim_{x\to0} \frac{x \cdot \sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

هي حالة عدم تعيين:

$$\frac{0}{0}$$

نستخدم الضرب بالمترافق:

$$\frac{x \cdot \sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{x \cdot \sin x \cdot (\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2}$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{1 \cdot 1 \cdot (1+1)}{1} = 2$$

**الطلب الثاني:** عين قيمة $m$ بحيث يصبح $f$ مستمراً عند الصفر

حتى يكون التابع مستمراً عند $x = 0$، يجب أن تتحقق:

$$\lim_{x\to0} f(x) = f(0) \Rightarrow 2 = \frac{2m-5}{2} \Rightarrow 4 = 2m-5 \Rightarrow$$

$$2m = 9 \Rightarrow m = \frac{9}{2}$$

**ملاحظات مهمة:**

يتم **حساب النهاية عند قيمة داخلية** (من مجال مفتوح) باستخدام:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

أما عند **قيمة طرفية** في مجال مغلق، فإننا نستخدم النهاية من جهة واحدة فقط حسب الجهة المعرفة.

---

ليكن التابع $f$ معرّفاً كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x} & x\neq 0\\ \frac{1}{6} & x=0\end{cases}$$

أي من العبارات الآتية صحيحة؟

(A) التابع غير مستمر عند الصفر
(B) التابع مستمر عند الصفر وقيمته تساوي $1$
(C) التابع مستمر عند الصفر وقيمته تساوي $\frac{1}{6}$
(D) التابع مستمر عند الصفر لكن نهايته غير موجودة

الحل:

نحسب نهاية $f(x)$ عندما $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$$

هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$، نضرب بالبسط والمقام بالمترافق:

$$\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}=$$

$$\frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}$$

عندما $x\to 0$ نحصل على:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$$

وأيضاً:

$$f(0)=\frac{1}{6}$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

فإن التابع مستمر عند الصفر.

الجواب الصحيح هو: **(C)**.

السؤال الثاني:

ليكن التابع $f$ معرفاً على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos 2x}{x^3+2x^2} & x>0\\ \frac{1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}+A & x<0\\ B & x=0\end{cases}$$

ما القيم الصحيحة للثابتين $A$ و $B$ بحيث يكون التابع $f$ مستمراً عند الصفر؟

(A) $A=\frac{1}{2},\ B=1$
(B) $A=\frac{3}{4},\ B=1$
(C) $A=\frac{1}{4},\ B=0$
(D) $A=1,\ B=1$

الحل:

نحسب النهاية من اليسار:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}+A\right)$$



نحوّل الكسر الأول باستخدام المترافق:

$$\frac{1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}=\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{(x^2-2x)(1+\sqrt{x+1})}=$$
$$\frac{1-(x+1)}{(x-2)x(1+\sqrt{x+1})}=\frac{-x}{(x-2)(1+\sqrt{x+1})}$$

وعند تعويض $x\to 0^-$:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\frac{1}{4}+A$$

الآن نحسب النهاية من اليمين:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos 2x}{x^3+2x^2}$$

نستخدم متطابقة $1-\cos 2x=2\sin^2 x$:

$$=\frac{2\sin^2 x}{x^2(x+2)}=\frac{2}{x+2}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{2}{2}=1$$

نجعل النهايتين متساويتين:

$$\frac{1}{4}+A=1 \Rightarrow A=\frac{3}{4}$$

وأخيراً نحقق شرط الاستمرارية:

$$f(0)=B=\lim_{x\to 0} f(x)=1 \Rightarrow B=1$$

الجواب الصحيح هو: **(B)**.

---

# تعريف الاستمرار على مجال

نقول إن التابع $f$ مستمر على مجموعة إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط هذه المجموعة. وللتأكد من استمرار تابع على مجال معين، نستخدم ما يلي:

---

بعض التوابع تكون مستمرة على مجالها الطبيعي دون الحاجة لإثبات، وهذه التوابع تُسمى "التوابع المرجعية"، وهي:



نصنف استمرارية بعض التوابع كما يلي:

التابع $x$ و $x^n$ حيث $n \in \mathbb{N}$ مستمر على:

$$\mathbb{R}$$

التابع $\sqrt{x}$ مستمر على:

$$[0,+\infty[$$

التابع $\ln x$ مستمر على:

$$]0,+\infty[$$

التابع $e^x$ مستمر على:

$$\mathbb{R}$$

التوابع المثلثية مثل $\sin x$ و $\cos x$ مستمرة على:

$$\mathbb{R}$$

## القواعد التركيبية للاستمرار

نعتمد هنا على قواعد استمرارية التوابع المركبة والجبرية:

إذا كان $f$ و $g$ تابعين مستمرين على مجال مشترك، فإن:

- المجموع $f(x)+g(x)$ مستمر
- الفرق $f(x)-g(x)$ مستمر
- الجداء $f(x)\cdot g(x)$ مستمر
- خارج القسمة $\frac{f(x)}{g(x)}$ مستمر بشرط $g(x)\neq 0$
- تركيب تابعين مستمرين $f(g(x))$ مستمر

---

**التمرين الأول:**

ليكن التابع $g$ معرفاً على المجال:

$$[1,3[\cup]3,+\infty[$$

وفق العلاقة:

$$g(x)=\frac{x^2-4x+3}{x-3}$$

نحلل:

- البسط: $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$
- المقام: $x-3$

إذن:

$$g(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{x-3}=x-1 \qquad x\neq 3$$

تابع كثير حدود مقسوم على كثير حدود (خارج قسمة) وبالتالي تابع جبري، مستمر على كل نقاط مجاله عدا نقطة الحذف $x=3$، لذا $g$ مستمر على:

$$[1,3[\cup]3,+\infty[$$

**التمرين الثاني:**

ليكن $f(x) = (x+1)\sin x$ معرفاً على:

$\mathbb{R}$

نلاحظ:

- $x+1$ تابع كثير حدود، مستمر على $\mathbb{R}$
- $\sin x$ تابع مثلثي، مستمر على $\mathbb{R}$

إذن:

$$f(x) = (x+1)\sin x$$

هو حاصل جداء تابعين مستمرين، وبالتالي تابع مستمر على:

$\mathbb{R}$

---

عند إعطائك تابعًا محدداً ومجالاً ما، فإنك تستطيع أن تُثبت استمراره عليه من خلال الخطوات التالية:

١ — تحقق هل التابع هو من التوابع المرجعية (كثير حدود، جذر، مثلثي...)

٢ — إذا لم يكن مرجعياً، فكّكه إلى تركيب من توابع مرجعية وتحقق من شروط استمرارية كل جزء.

٣ — استخدم قواعد الجداء والمجموع والقسمة والتركيب لإثبات الاستمرارية الكاملة على المجال المطلوب.

بهذا تكون قد أثبتت أن التابع مستمر على المجال المعطى بطريقة أكاديمية واضحة.

---

## – استمرار التابع الفرعي على $\mathbb{R}$

العديد من التوابع تُعطى على شكل "فرعي" أو "مركّب" من عدة تعابير، وتكون معرفة على كامل المجال $\mathbb{R}$ مع وجود نقطة قد تتغير فيها قاعدة التابع، لذلك نميّز ما يلي:

● إذا كان التابع معرفة بصيغة فرعية على $\mathbb{R}$ بحيث يتغير تعريفه عند نقطة واحدة فقط، نستخدم القاعدة التالية للتحقق من استمراريته:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ليكن التابع المعطى كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x-1} & x \neq 0 \\ m-1 & x = 0 \end{cases}$$

المطلوب:

تحديد قيمة $m$ بحيث يكون التابع مستمراً على $\mathbb{R}$



نلاحظ أن التابع يُعطى بصيغة فرعية مع وجود تغيير في القاعدة عند $x=0$، لذا نتحقق من شرط الاستمرارية:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

نحسب النهايتين على الشكل التالي:

نبدأ بحساب نهاية $f(x)$ عندما $x \to 0$

لدينا:

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}$$

نضرب البسط والمقام بالمرافق:

$$= \frac{(1-\sqrt{x^2+x+1})(1+\sqrt{x^2+x+1})}{(x-1)(1+\sqrt{x^2+x+1})}$$

$$= \frac{1-(x^2+x+1)}{(x-1)(1+\sqrt{x^2+x+1})}$$

$$= \frac{-x^2-x}{(x-1)(1+\sqrt{x^2+x+1})}$$

نلاحظ أن هذه النسبة قابلة للحساب عند $x \to 0$، فنجد:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{-0^2-0}{-1(1+\sqrt{1})} = 0$$

الآن نحسب $f(0) = m - 1$

لكي يكون التابع مستمراً عند $x = 0$، يجب:

$$\lim_{x\to0} f(x) = f(0) \Rightarrow 0 = m - 1 \Rightarrow m = 1$$

---

التمرين:

ليكن التابع $f(x)$ معرفاً على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

المطلوب:

هل التابع مستمر عند الصفر؟

نلاحظ أن التابع يتغير عند نقطة واحدة فقط وهي $x = 0$، لذا نطبق قاعدة الاستمرارية:

$$\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$$

نحسب:

$$f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

نستخدم مبرهنة الإحاطة:

نعلم أن:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

نضرب الأطراف بـ $x^2$ (موجب دائماً)، فنحصل على:

$$x^2 \leq x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

وبما أن:

$$\lim_{x\to0} x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0} f(x) = 0$$

ولدينا:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0} f(x) = f(0)$$

إذن التابع مستمر عند $x = 0$



ونوسّع أكثر لنثبت أنه مستمر على كامل $\mathbb{R}$:

- $x^2$ مستمر على $\mathbb{R}$
- $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ مستمر على $\mathbb{R}^*$

بالتالي: جداء التابعين مستمر على $\mathbb{R}^*$، وسبق أن أثبتنا أنه مستمر عند الصفر، أي مستمر على كامل $\mathbb{R}$

---

للتأكد من استمرارية تابع معرّف بصيغة فرعية على $\mathbb{R}$، نتبع الخطوات التالية:

١ — نحلل إن كان التابع يغيّر تعريفه عند نقطة واحدة فقط

٢ — نتحقق من شرط الاستمرارية:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

٣ — نحسب النهاية من الطرفين إن لزم الأمر

٤ — إن وُجد مجهول في قيمة التابع، نستخدم شرط الاستمرارية لاشتقاق معادلة وإيجاد قيمة المجهول المطلوبة

## تابع الجزء الصحيح $E(x)$

**التعريف:**

تابع الجزء الصحيح $E(x)$ هو تابع يعطي لكل عدد حقيقي $x$ أكبر عدد صحيح لا يزيد عن $x$. أي:

$$x-1<E(x)\leq x$$

ويمكن صياغة هذا التابع باستخدام أجزاء معرفة على فترات مغلقة من اليسار ومفتوحة من اليمين من الشكل:

$$[n,n+1[$$

حيث أن كل عدد $x$ ينتمي إلى هذه الفترة، فإن:

$$E(x)=n$$

وهكذا نحصل على تابع على شكل درجات أو مقاطع أفقية متتالية.

**ملاحظة هامة:**

عند النقاط الصحيحة مثل $x=1$، فإن:

$$E(1)=1 \quad x\leq 1$$

لكن بما أن التعريف يتطلب أن تكون كل فترة من الشكل $[n,n+1[$، فإن النقاط التي هي عدد صحيح يجب التعامل معها كحدود فترات منفصلة أو توضع في شرط خاص.

---

**التمرين الأول:**

**المطلوب:** التخلص من $E(x)$ على المجال:

$$[0,3[$$

نقوم بتجزئة المجال إلى ثلاث فترات بحسب قيم $x$:

- عندما $x\in[0,1[\Rightarrow E(x)=0$
- عندما $x\in[1,2[\Rightarrow E(x)=1$
- عندما $x\in[2,3[\Rightarrow E(x)=2$

إذن نكتب:

$$E(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1[\\ 1 & x\in[1,2[\\ 2 & x\in[2,3[\end{cases}$$

**التمرين الثاني:**

**المجال:** $[0,2]$

لاحظ أن النهاية اليمنى $x=2$ هي عدد صحيح وتنتمي إلى المجال، لذا تُعالج كحالة خاصة:

- عندما $x\in[0,1[\Rightarrow E(x)=0$
- عندما $x\in[1,2[\Rightarrow E(x)=1$
- عندما $x=2\Rightarrow E(x)=2$

إذن نكتب:

$$E(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1[\\ 1 & x\in[1,2[\\ 2 & x=2\end{cases}$$

### هل التابع $E(x)$ مستمر؟

الجواب: لا

السبب أن تابع الجزء الصحيح يعاني من "قفزات" عند كل عدد صحيح، حيث يتغير فجأة من قيمة إلى أخرى. لذلك فإن:

- $E(x)$ غير مستمر عند كل $x\in\mathbb{Z}$
- $E(x)$ مستمر على الفترات المفتوحة من الشكل $]n,n+1[$

**ملاحظة بخصوص التمثيل البياني:**

يُرسم تابع $E(x)$ كمجموعة من المقاطع الأفقية، كل منها يمتد على فترة من الشكل $[n,n+1[$، ويأخذ قيمة ثابتة. يتم تمثيل النهاية المغلقة بنقطة مصمتة (سوداء)، والنهاية المفتوحة بدائرة فارغة.

---

**تطبيق إضافي:**

ليكن:

$$f(x) = E(x) + 2x$$

أوجد نهاية التابع عند $x = 1$ من اليمين ومن اليسار

- من اليسار: إذا $x \in ]0, 1[ \Rightarrow E(x) = 0$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (0 + 2x) = 2$$

- من اليمين: إذا $x \in ]1, 2[ \Rightarrow E(x) = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (1 + 2x) = 3$$

بما أن النهايتين غير متساويتين، فإن:

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$



**خلاصة:**

- تابع الجزء الصحيح هو تابع غير مستمر
- يتم التخلص منه بتقسيم المجال إلى فترات بحسب القيم الصحيحة
- يُستخدم كثيرًا في المسائل التي تتطلب تحديد مستوى ثابت خلال فترات
- الرسم البياني يظهر على شكل درجات مع قفزات عند الأعداد الصحيحة

هل ترغب أن أقدّم لك تمارين إضافية مشابهة قابلة للاستخدام في الامتحانات؟

---

السؤال الأول:

ليكن التابع $f$ المعرّف على المجال $[0, 2]$ وفق:

$$f(x) = x - \frac{2}{E(x) + 1}$$

اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحتوي $E(x)$

الخيارات:

(A)

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x \in [0, 1[ \\ x - 1 & x \in [1, 2[ \\ \frac{4}{3} & x = 2 \end{cases}$$

(B)

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \in [0, 1[ \\ x - 1 & x \in [1, 2] \\ \frac{2}{3} & x = 2 \end{cases}$$

(C)

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x \in [0, 1] \\ x - 1 & x \in ]1, 2[ \\ \frac{2}{3} & x = 2 \end{cases}$$

(D)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \in [0, 1[ \\ x + 2 & x \in [1, 2[ \\ \frac{4}{3} & x = 2 \end{cases}$$

الجواب الصحيح هو: (A)

شرح الحل:

المطلوب هو كتابة التابع $f(x) = x - \frac{2}{E(x)+1}$ بدون أن يحتوي على الرمز $E(x)$، أي تحويله إلى صيغة تعتمد فقط على قيم $x$.

المفتاح لحل هذا السؤال هو فهم دالة الجزء الصحيح الأدنى $E(x)$، والتي تُرجع أكبر عدد صحيح **أقل من أو يساوي** $x$، ويُرمز لها بـ:

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

وبحسب ما ورد في التمرين، فإن المجال المعطى هو:

$$x \in [0, 2]$$

لذلك ندرس قيم $E(x)$ ضمن هذا المجال:

عند $x \in [0,1[$

فإن $E(x) = 0$، لأن:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow E(x) = 0$$

نعوّض في التابع:

$$f(x) = x - \frac{2}{0+1} = x - 2$$

عند $x \in [1,2[$

فإن $E(x) = 1$، لأن:

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow E(x) = 1$$

نعوّض:

$$f(x) = x - \frac{2}{1+1} = x - 1$$

عند $x = 2$

فإن $E(x) = 2$ لأن:

$$E(2) = 2 \Rightarrow f(2) = 2 - \frac{2}{2+1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$$

نقوم الآن بكتابة التابع بصيغة تعتمد فقط على $x$:

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \in [0,1[ \\ x-1 & x \in [1,2[ \\ \frac{4}{3} & x = 2 \end{cases}$$

وهذه هي الإجابة التي وردت في الخيار (A)، لذا فهي:

**الإجابة الصحيحة.**

السؤال الثاني:

ليكن التابع $f$ المعرف على المجال $[0,2]$ وفق العلاقة:

$$f(x) = x - \frac{2}{E(x)+1}$$

حيث $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد $x$.

هل التابع $f$ مستمر على المجال $[0,2]$؟

(A) نعم، مستمر على كل المجال
(B) لا، غير مستمر عند $x = 1$
(C) لا، غير مستمر عند $x = 0$
(D) لا، غير مستمر عند $x = 2$

أولًا، نعيد كتابة التابع $f(x)$ بصيغة لا تحتوي على $E(x)$ باستخدام تعريف الجزء الصحيح:

$$E(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[ \\ 1 & x \in [1,2[ \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$



بالتالي، يُصبح التابع:

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \in [0,1[ \\ x-1 & x \in [1,2[ \\ \frac{4}{3} & x = 2 \end{cases}$$

نلاحظ أن كل فرع هو دالة جبرية مستمرة على مجاله، لكن علينا **دراسة الاستمرارية عند نقطة الوصل** $x = 1$.

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (x-2) = -1$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (x-1) = 0$$

بما أن النهايتين **لا تتساويان**، فإن التابع **غير مستمر عند النقطة** $x = 1$.

السؤال الثالث:

ليكن التابع $f$ المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = x - 2 + E(x)$$

حيث $E(x)$ هو تابع الجزء الصحيح.

اكتب عبارة التابع $f(x)$ بصيغة لا تحوي على $E(x)$ على المجال $[1,3[$

(A)

$$f(x) = \begin{cases} x-2; & x \in [1,2[ \\ x-1; & x \in [2,3[ \end{cases}$$

(B)

$$f(x) = \begin{cases} x-1; & x \in [1,2[ \\ x; & x \in [2,3[ \end{cases}$$

(C)

$$f(x) = \begin{cases} x; & x \in [1,2[ \\ x+1; & x \in [2,3[ \end{cases}$$



(D)

$$f(x) = \begin{cases} x-3; & x \in [1,2[ \\ x-2; & x \in [2,3[ \end{cases}$$

الجواب الصحيح هو: **(B)**

**شرح الحل:**

نبدأ بتحديد قيمة تابع الجزء الصحيح $E(x)$ على المجال:

$$E(x) = \begin{cases} 1; & x \in [1,2[ \\ 2; & x \in [2,3[ \end{cases}$$

ثم نعوض في الصيغة الأصلية:

$$f(x) = x - 2 + E(x)$$

فنجد:

$$f(x) = \begin{cases} x-2+1 = x-1; & x \in [1,2[ \\ x-2+2 = x; & x \in [2,3[ \end{cases}$$

وبالتالي تكون الصيغة النهائية بدون $E(x)$ هي كما ورد في الخيار **(B)**.

**السؤال الرابع:**

هل التابع

$$f(x) = \begin{cases} x-1; & x \in [1,2[ \\ x; & x \in [2,3[ \end{cases}$$

مستمر عند

$x = 2$؟

(A) نعم، لأن $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

(B) لا، لأن $f(x)$ غير معرف عند $x = 2$

(C) نعم، لأن $f(x)$ معرف على المجال $[1,3[$

(D) لا، لأن $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

الجواب الصحيح هو: **(D)**

**شرح الحل:**

نعوّض أولاً في الدالة:

$$f(2) = 2$$

ثم نحسب النهاية عندما $x \to 2$ من الجهة اليسرى:

بما أن $x \to 2^- \Rightarrow x \in [1,2[ \Rightarrow f(x) = x - 1$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x-1) = 1$$

نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1 \neq f(2) = 2$$

وبالتالي فإن التابع **غير مستمر** عند $x = 2$، لأن شرط الاستمرار غير محقق.

# تابع مصور تابع

**تعريف المفهوم:**

عندما يُقال إن التابع

$g$

هو **مصور التابع**

$f$،

فذلك يعني أن التابع

$g$

ناتج عن تطبيق قاعدة التابع

$f$

نفسها، ولكن على مجال أصغر أو يساوي مجال

$f$.

أي أن:

$$g(x) = f(x) \qquad D_g \subseteq D_f$$

أي أن التابع

$g$

يتطابق مع التابع

$f$

في القاعدة، ولكنه مقيّد أو مضيق على مجال جديد قد يكون أصغر.

---

ليكن لدينا التابع:

$$f(x) = \sqrt{x-1} \qquad D_f = [1, +\infty[$$

ولدينا التابع:

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-3}}$$

والمطلوب:

هل $g$ هو **مصور** للتابع $f$؟

**خطوات الحل:**

**أولاً: تحديد مجموعة تعريف** $g(x)$

نبدأ بدراسة وجود الجذر:

يجب أن يكون:

$$\frac{x^2-4x+3}{x-3} \geq 0$$

نحلل البسط:

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$$

إذن تصبح العبارة:

$$\frac{(x-3)(x-1)}{x-3}$$

نبسط:

$$= x - 1 \qquad x \neq 3$$

إذاً الجذر يتحول إلى:

$$g(x) = \sqrt{x-1} \qquad x \neq 3$$

أي أن:

$$D_g = [1, 3[ \cup ]3, +\infty[$$

**ثانياً: المقارنة بين $f$ و $g$**

لدينا:

$$f(x) = \sqrt{x-1} \qquad [1, +\infty[$$

و

$$g(x) = \sqrt{x-1} \qquad [1, 3[ \cup ]3, +\infty[$$

إذن:

$$g(x) = f(x) \qquad D_g \subseteq D_f$$

وبالتالي:

**النتيجة:**

$$g \quad f \quad D_g$$

**أمثلة إضافية:**

**مثال 1:**

إذا كان:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

وعرّفنا:

$$g(x) = \frac{1}{x}, \quad D_g = [1, +\infty[$$

فنقول:

$$g \quad f \;\; D_g \subseteq D_f$$

---

**مثال 2:**

إذا كان:

$$f(x) = x^2 \qquad \mathbb{R}$$

و

$$g(x) = x^2, \quad D_g = [-2, 2]$$

فـ $g$ هو مصور للتابع $f$

---

**خلاصة المفهوم:**

لكي يكون $g$ مصوراً للتابع $f$، يجب تحقق شرطين أساسيين:

في القاعدة:

$$g(x) = f(x)$$

وفي المجال:

$$D_g \subseteq D_f$$

**تعريف تابع التقابل العكسي:**

لكي يكون للتابع

$$f(x)$$

تابع تقابل عكسي

$$f^{-1}(x),$$

لا بد من أن يكون التابع
**متقابلاً ومصادراً تماماً**
أي أن:

إذا كان:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

فإن التابع يُقال له أنه **واحد لواحد (واحدي)** أو **متقابل**.

وإذا كانت صورة التابع تغطي كل القيم الممكنة للمجال المستهدف، يكون التابع **شاملاً** أو **مصادراً تماماً**.

---

**شروط وجود تابع عكسي:**

لكي يكون للتابع $f$ تابع عكسي

$$f^{-1},$$



يجب أن يتحقق الشرطان الآتيان:

١. أن يكون

$$f$$

**واحدياً**
(أي أن كل قيمة في المجال المرافق

$$y$$

ناتجة عن قيمة واحدة فقط في المجال الأصلي

$$x)$$

٢. أن يكون

$$f$$

**مصادراً تماماً**
(أي أن كل قيمة في المجال المرافق لها صورة من المجال الأصلي)

---

**فكرة الحل في المسائل الامتحانية:**

إذا طُلب منك إيجاد تابع عكسي، فعليك بما يلي:

نقوم بكتابة العلاقة
$y = f(x)$

ثم نقوم بالتبديل بين
$x$
و
$y$

وأخيراً نحل المعادلة لإيجاد
$y$
من أجل
$x$،
فنحصل على
$f^{-1}(x)$

---

**مثال ١:**

ليكن لدينا التابع:

$$f(x) = x^2 \qquad x \geq 0$$



نريد إيجاد التابع العكسي.

نكتب:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

إذن:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \qquad x \geq 0$$

---

**مثال ٢:**

ليكن:

$$f(x) = e^x \qquad \mathbb{R}$$

نكتب:

$$y = e^x \Rightarrow x = \ln y \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x$$

---

**التحقق من صحة التابع العكسي:**

للتأكد من أن
$g(x)$
هو تابع عكسي لـ
$f(x)$،
يجب أن نتحقق من الشرطين:

$$f(g(x)) = x \qquad g(f(x)) = x$$

إذا تحقق كلا الشرطين، فإن
$g$
هو تابع عكسي لـ
$f$

**ملاحظة هندسية:**

من الناحية البيانية، يمثل تابع التقابل العكسي **انعكاساً حول المستقيم**
$y = x$
أي أن النقطة
$(a, b)$
على المنحني
$f$،
ستقابلها النقطة
$(b, a)$
على منحني
$f^{-1}$

**خلاصة المفهوم:**

التابع العكسي هو عملية **عكس** التأثير الذي يقوم به التابع الأصلي، ويُوجد فقط إذا كان التابع متقابلاً ومصادراً تماماً.
والأسلوب المتّبع لإيجاده هو التبديل بين
$x$
و
$y$،
ثم حل المعادلة.

## قواعد الاشتقاق

**التابع:**
ثابت لا يحوي المتحول $x$

**القاعدة:**
إذا كان

$$f(x) = \alpha$$

فإن

$$f'(x) = 0$$

**تمرين:**
إذا كان

$$f(x) = \pi$$

فإن

$$f'(x) = 0$$

وإذا كان

$$f(x) = \ln(2)$$

فإن

$$f'(x) = 0$$



---

**التابع:**
تابع من الدرجة الأولى تابع تقليدي

**القاعدة:**
إذا كان

$$f(x) = \alpha x$$

فإن

$$f'(x) = \alpha$$

**تمرين:**
إذا كان

$$f(x) = -x$$

فإن

$$f'(x) = -1$$

وإذا كان

$$f(x) = \frac{2x}{3}$$

فإن

$$f'(x) = \frac{2}{3}$$

**التابع:**

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

**القاعدة:**

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

**تمارين:**

$$f(x) = 3x - 7$$

$$f'(x) = 3$$

$$f(x) = \ln(2) - \frac{7x}{e}$$

$$f'(x) = 0 - \frac{7}{e}$$

$$f'(x) = -\frac{7}{e}$$

$$f(x) = \frac{5+3x}{2} + \frac{5}{3x+2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{15}{(3x+2)^2}$$

---

**التابع:**

$$f(x) = (g(x))^n$$

**القاعدة:**

$$f'(x) = n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$$

**تمارين:**

$$f(x) = (5x-3)^7$$

$$f'(x) = 7(5x-3)^6 \cdot 5$$

$$f'(x) = 35(5x-3)^6$$

$$f(x) = (3-4x)^{-5} + 3x - 2$$

$$f'(x) = -5(3-4x)^{-6} \cdot (-4) + 3$$

$$f'(x) = 20(3-4x)^{-6} + 3$$

---

**التابع:**

$$f(x) = x^n$$

**القاعدة:**

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

**تمارين:**

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f(x) = x^{\frac{5}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

---

**التابع:**

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

**القاعدة:**

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

**تمارين:**

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2 + 1}}$$

$$f(x) = x - \sqrt{(x^2-7)^3}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{3(x^2-7)^2 \cdot (2x)}{2(x^2-7)^{3/2}} = 1 - \frac{6x(x^2-7)^2}{2(x^2-7)^{3/2}}$$

---

**التابع:**

$$f(x) = \sqrt[n]{(g(x))^m}$$

**القاعدة:**

$$f'(x) = \frac{m}{n} \cdot (g(x))^{\frac{m}{n}-1} \cdot g'(x)$$

**تمارين:**

$$f(x) = \sqrt[4]{x^7}$$

$$f'(x) = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} = \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}$$

$$f(x) = \sqrt[7]{(1-x)^2} = (1-x)^{\frac{2}{7}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{7}(1-x)^{-\frac{5}{7}} \cdot (-1)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{7}\sqrt[7]{(1-x)^{-5}}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{7-x^5} = (7-x^5)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(7-x^5)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-5x^4)$$

$$f'(x) = -\frac{5}{3}x^4 \cdot \sqrt[3]{(7-x^5)^{-2}}$$

**التابع:**

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

**القاعدة:**

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot g(x)$$

**تمارين:**

$$f(x) = x \cdot \sqrt{x}$$

$$f'(x) = (1) \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x$$

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x^2-3}$$

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2-3} + \frac{1}{2\sqrt{x^2-3}} \cdot 2x \cdot (x-1)$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2-3} + \frac{2x(x-1)}{2\sqrt{x^2-3}} = \sqrt{x^2-3} + \frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-3}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2 + x(x-1)}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{x^2-3+x(x-1)}{\sqrt{x^2-3}}$$

---

**التابع:**

$$f(x) = a \cdot g(x)$$

**القاعدة:**

$$f'(x) = a \cdot g'(x)$$

**تمارين:**

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = -5 \cdot \sqrt{-x^3+3x^2+2} + 7x$$

$$f'(x) = -5 \cdot \left[\frac{-3x^2+6x}{2\sqrt{-x^3+3x^2+2}}\right] + 7$$

$$f'(x) = \frac{15x^2-30x}{2\sqrt{-x^3+3x^2+2}} + 7$$



---

**التابع:**

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

**القاعدة:**

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{[h(x)]^2}$$

**تمارين:**

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(0)(x)-(1)(1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{x-3}{5-x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(1)(5-x^2)-(-2x)(x-3)}{(5-x^2)^2}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{7-x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(7-x^2)-(-2x)(\sqrt{x}-1)}{(7-x^2)^2}$$

**التابع:**

$f(x) = \sin x$

**القاعدة:**

$f^{'}(x) = \cos x$

---

**التابع:**

$f(x) = \cos x$

**القاعدة:**

$f^{'}(x) = -\sin x$

---

**التابع:**

$f(x) = \tan x$

**القاعدة:**

$f^{'}(x) = 1 + \tan^2 x \qquad f^{'}(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

---

**التابع:**

$f(x) = \cot x$

**القاعدة:**

$f^{'}(x) = -1 - \cot^2 x \qquad f^{'}(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

**التابع:**

$f(x) = \sin(g(x))$

**القاعدة:**

$f^{'}(x) = g^{'}(x) \cdot \cos(g(x))$

---

**التابع:**

$f(x) = \cos(g(x))$

**القاعدة:**

$f^{'}(x) = -g^{'}(x) \cdot \sin(g(x))$

---

**التابع:**

$f(x) = \tan(g(x))$

**القاعدة:**

$f^{'}(x) = g^{'}(x) \cdot (1 + \tan^2(g(x)))$

$f^{'}(x) = \frac{g^{'}(x)}{\cos^2(g(x))}$

---

**التابع:**

$f(x) = \cot(g(x))$

**القاعدة:**

$f^{'}(x) = g^{'}(x) \cdot (-1 - \cot^2(g(x)))$

$f^{'}(x) = -\frac{g^{'}(x)}{\sin^2(g(x))}$

**قاعدة إيجاد ميل المستقيم عندما تكون معادلته معطاة:**

عند إعطاء معادلة المستقيم على الشكل:

$$ax + by + c = 0$$

نقوم بعزل $y$ لنحصل على صورة الميل والمقطع:

$$y = mx + p$$

حيث يكون **ميل المستقيم هو** العدد المرافق للمتغير $x$ بعد العزل، أي $m$

---

**تمرين تطبيقي:**

ليكن المستقيم $\Delta$ الذي معادلته:

$$x - 3y = 0$$

**الخيارات:**

(A) $\frac{1}{3}$
(B) $3$
(C) $-3$
(D) $-\frac{1}{3}$

---

**الحل:**

نقوم بعزل $y$ من المعادلة:

$$x - 3y = 0$$

ننقل $x$ إلى الطرف الآخر:

$$-3y = -x$$

نقسم على $-3$:

$$y = \frac{1}{3}x$$

إذن ميل المستقيم هو:

$$m = \frac{1}{3}$$

**ميل المستقيم:**

إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ فإن ميل المستقيم يُحسب بالعلاقة:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

أو:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

ويُستخدم أحد الشكلين السابقين حسب ترتيب النقاط.

---

**تمرين تطبيقي:**

ليكن المستقيم $\Delta$ يمر بالنقطتين:

$$A(-1, 0), \quad B(3, -2)$$

أوجد ميل المستقيم $\Delta$.

**الخيارات:**

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $-\frac{1}{2}$
(C) $2$
(D) $-2$

---

**الحل:**

نحسب الميل:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 0}{3 - (-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

---

**الجواب الصحيح: (B)**

**ميل مستقيم أفقي:**

إذا كان المستقيم أفقيًا فإن:

$$m = 0$$

ومعادلة المستقيم تكون على الشكل:

$$y =$$

**ميل مستقيم شاقولي:**

إذا كان المستقيم شاقوليًا فإن:

ومعادلة المستقيم تكون على الشكل:

$$x =$$



**تمرين على المستقيم الأفقي:**

ليكن المستقيم يمر بالنقطة $A(-2, 3)$ وأفقي. ما هي معادلته؟

**الحل:**

بما أن المستقيم أفقي، فالمعادلة تكون:

$$y = 3$$

**تمرين على المستقيم الشاقولي:**

ليكن المستقيم يمر بالنقطة $A(2, 3)$ وشاقولي. ما هي معادلته؟

**الحل:**

بما أن المستقيم شاقولي، فالمعادلة تكون:

$$x = 2$$

**صيغة معادلة المستقيم بمعلومية الميل ونقطة:**

إذا علمنا الميل $m$ ونقطة من المستقيم $A(x_A, y_A)$ فإن المعادلة تعطى بالعلاقة:

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

**تمرين تطبيقي على معادلة بمعلومية ميل ونقطة:**

اكتب معادلة المستقيم الذي ميله $m = \frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة $A(-1, 0)$.

**الحل:**

$$y = \frac{1}{2}(x + 1) + 0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

**ميل مستقيم مرسوم في الشكل:**

لحساب ميل مستقيم مرسوم في المستوى الإحداثي، نتّبع الخطوات التالية:

**القاعدة:**

نحدد نقطتين واضحتين تنتمي إلى المستقيم.
نحسب ميل المستقيم باستخدام العلاقة:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

ثم نكتب معادلة المستقيم بالشكل:

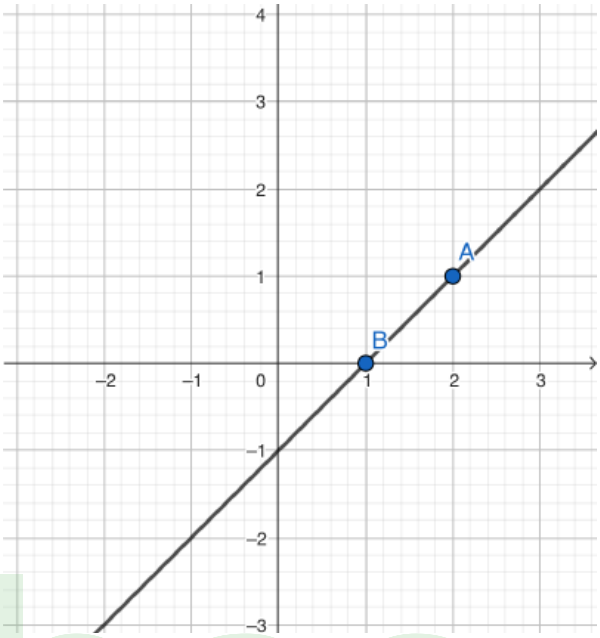
$$y = m(x - x_A) + y_A$$

**التمرين:**

بالنظر إلى الشكل، نلاحظ أن المستقيم $\Delta$ يمر بالنقطتين:

$$A(2,1), \quad B(1,0)$$

احسب ميل المستقيم $\Delta$ واكتب معادلته.




**الجواب:**

نحسب الميل:

$$m = \frac{1-0}{2-1} = 1$$

معادلة المستقيم:

$$y = 1(x-2) + 1 = x - 1$$

**السؤال بصيغة أتمتة:**

ما معادلة المستقيم المار بالنقطتين $A(2,1)$ و $B(1,0)$؟

**الخيارات:**

(A) $y = x - 2$
(B) $y = x + 1$
(C) $y = x - 1$
(D) $y = x + 2$

---

**الجواب الصحيح: (C)**

## ميل مستقيم Δ يوازي مستقيم d

القاعدة:

إذا كان المستقيمان $\Delta$ و $d$ متوازيين، فإن لهما نفس الميل، أي:

$$m_\Delta = m_d$$

شرح القاعدة:

نقوم أولًا بحساب ميل المستقيم $d$ من خلال تحويل معادلته إلى الشكل $y = mx + p$، حيث $m$ هو الميل.

بعد ذلك، نستخدم نفس الميل $m_\Delta = m_d$ لكتابة معادلة المستقيم $\Delta$ الذي يمر من نقطة معلومة $A(x_A, y_A)$ باستخدام صيغة الميل والنقطة:

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

**سؤال أتمتة:**

ما معادلة المستقيم المار بالنقطة $A(-1,2)$ والموازي للمستقيم الذي معادلته:

$$3x - 2y + 1 = 0$$

الخيارات:

(A) $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

(B) $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

(C) $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{2}$

(D) $y = \frac{3}{2}x - 2$

**شرح الحل:**

نحوّل معادلة المستقيم $d$ إلى الشكل:

$$3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

ومنها يكون الميل:

$$m_d = \frac{3}{2}$$

وبما أن المستقيمين متوازيان، فإن:

$$m_\Delta = \frac{3}{2}$$

نستخدم صيغة الميل والنقطة:

$$y = \frac{3}{2}(x+1) + 2 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

إذن:

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

---

**ميل مستقيم Δ يعامد مستقيم d**

القاعدة:

إذا كان المستقيمان $\Delta$ و $d$ متعامدين، فإن حاصل ضرب ميليهما يساوي:

$$m_\Delta \cdot m_d = -1$$

وبالتالي:

$$m_\Delta = -\frac{1}{m_d}$$

**سؤال أتمتة:**

ما معادلة المستقيم المار بالنقطة $A(-1,2)$ والعمودي على المستقيم الذي معادلته:

$$3x - 2y + 1 = 0$$

الخيارات:

(A) $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

(B) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

(C) $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

(D) $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

---

**شرح الحل:**

نحوّل معادلة المستقيم $d$ إلى الشكل:

$$3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$



ومنها:

$$m_d = \frac{3}{2}$$

وبما أن المستقيمين متعامدان، فإن:

$$m_\Delta = -\frac{1}{m_d} = -\frac{2}{3}$$

نكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $A(-1,2)$:

$$y = -\frac{2}{3}(x+1) + 2 = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + 2 = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

إذن:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

## كتابة معادلة المماس

هو مستقيم يشترك مع الخط البياني للتابع بنقطة واحدة فقط، وهي نقطة التماس

---

### القاعدة العامة:

إذا كان التابع $f(x)$ قابلًا للاشتقاق في النقطة $a$، فإن معادلة المماس عند النقطة:

$$x = a$$

تُكتب على الشكل:

$$y = f'(x)(x - a) + f(a)$$

أو:

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

حيث:

$$m = f'(a)$$

و $(x_A, y_A)$ هي نقطة التماس

---

### سؤال أتمتة:

ما معادلة المماس $T$ المار بالنقطة $A(5,-3)$ ويملك ميلًا مقداره $m = 1$؟

الخيارات:

(A) $y = x + 2$

(B) $y = x - 8$

(C) $y = x - 2$

(D) $y = x + 8$

### شرح الحل:

لدينا نقطة التماس $A(5,-3)$ والميل $m = 1$

نعوّض في الصيغة:

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

$$y = 1(x - 5) - 3 = x - 5 - 3 = x - 8$$

إذن معادلة المماس هي:

$$y = x - 8$$

---

**سؤال أتمتة:**

ما معادلة المماس $T$ للتابع:

$$f(x) = -x^2 + 2$$

عند النقطة:

$$A(1,1)$$

الخيارات:

(A) $y = -2x + 1$

(B) $y = -2x + 2$

(C) $y = -2x + 3$

(D) $y = -x + 2$

**شرح الحل:**

لدينا التابع:

$$f(x) = -x^2 + 2$$

نحسب المشتقة:

$$f'(x) = -2x$$

ثم نحسب ميل المماس عند النقطة $x = 1$:

$$m = f'(1) = -2(1) = -2$$

نعوّض في قاعدة المماس:

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

$$y = -2(x-1) + 1 = -2x + 2 + 1 = -2x + 3$$

إذن معادلة المماس:

$$y = -2x + 3$$

**سؤال أتمتة:**

ما معادلة المماس للتابع:

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

عند النقطة التي فاصلتها:

$$x = 1$$

الخيارات:

(A) $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

(B) $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

(C) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

(D) $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

**شرح الحل:**

لدينا التابع:

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

وهو معرّف على المجال:

$$[0, +\infty[$$

نريد كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة:

$$x = 1$$

نحسب التابع عند:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \cdot \sqrt{1} = 1$$

إذاً النقطة:

$$A(1,1)$$

نحسب المشتقة باستخدام قاعدة جداء:

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

نحسب الميل عند:

$$x = 1 \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{1} = \frac{3}{2}$$

نستخدم قاعدة المماس:

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

ونعوّض القيم:

$$y = \frac{3}{2}(x-1) + 1 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

**إذن معادلة المماس:**

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

---

**سؤال أتمتة:**

ما معادلة المماس للتابع:

$$f(x) = \sqrt{4x^2+1} - 2x$$

عند النقطة التي رتبتها:

$$y = 1$$

الخيارات:

(A) $y = -2x + 1$

(B) $y = -x + 1$

(C) $y = -2x + 2$

(D) $y = -x + 2$

**شرح الحل:**

لدينا التابع:



$$f(x) = \sqrt{4x^2+1} - 2x$$

والمطلوب هو إيجاد معادلة المماس عند النقطة التي **رتبتها:**

$$y_A = 1$$

نوجد فاصلة النقطة $x_A$ بحيث:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \sqrt{4x^2+1} - 2x = 1 \Rightarrow \quad \sqrt{4x^2+1} = 2x+1$$

نربع الطرفين:

$$4x^2 + 1 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \quad \Rightarrow 0 = 4x \Rightarrow x = 0$$

إذاً:

$$A(0,1)$$

نحسب المشتقة:

$$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}} - 2$$

نحسب الميل عند:

$$x = 0 \Rightarrow f'(0) = \frac{4 \cdot 0}{\sqrt{1}} - 2 = -2$$

نستخدم قاعدة معادلة المماس:

$$y = m(x - x_A) + y_A \Rightarrow$$

$$y = -2(x - 0) + 1 = -2x + 1$$

**إذن معادلة المماس:**

$$y = -2x + 1$$

---



**سؤال أتمتة:**

ما معادلة المماس للتابع:

$$f(x) = \frac{x - 4}{x - 1}$$

عند نقطة تقاطعه مع محور التراتيب؟

الخيارات:

(A) $y = 3x + 1$

(B) $y = 3x + 4$

(C) $y = 2x + 4$

(D) $y = 2x + 1$

**شرح الحل:**

لحساب معادلة المماس عند نقطة تقاطع التابع مع محور التراتيب، نتابع الخطوات التالية:

بما أن نقطة التقاطع مع محور التراتيب تتحقق عندما:

$$x = 0$$

نحسب:

$$x_A = 0 \Rightarrow y_A = f(0) = \frac{0 - 4}{0 - 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

إذن النقطة:

$$A(0, 4)$$

نحسب مشتقة التابع:

$$f(x) = \frac{x - 4}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x - 1)(1) - (x - 4)(1)}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{3}{(x - 1)^2}$$

نكتب معادلة المماس:

$$y = m(x - x_A) + y_A \Rightarrow y = 3(x - 0) + 4 = 3x + 4$$

**إذن معادلة المماس:**

$$y = 3x + 4$$

**الجواب الصحيح:** (B)

---

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{x - 3}$$

ما معادلة المماس أو المماسات للتابع عند نقطة تقاطعه مع محور الفواصل؟

الخيارات:

(A) $y = \frac{5}{3}x$

(B) $y = -\frac{15}{4}x + \frac{75}{12}$

(C) كلا المعادلتين صحيحتان

(D) لا يوجد مماس عند تقاطع التابع مع محور الفواصل

**شرح الحل:**

لحساب معادلة المماس عند نقطة تقاطع التابع مع محور الفواصل، نحل المعادلة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 5x}{x - 3} = 0$$

نوجد قيم $x$ التي تجعل البسط صفرًا:

$$3x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(3x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad x = \frac{5}{3}$$

هكذا نجد أن للتابع نقطتين تقاطع مع محور الفواصل:

النقطة الأولى:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

النقطة الثانية:

$$x = \frac{5}{3} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B\left(\frac{5}{3}, 0\right)$$

نحسب المشتقة:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{x - 3} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{(x-3)(6x-5) - (3x^2 - 5x)(1)}{(x-3)^2} = \frac{3x^2 - 18x + 15}{(x-3)^2}$$

المماس عند النقطة الأولى:

$$x = 0 \Rightarrow f'(0) = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{3}(x - 0) + 0 = \frac{5}{3}x$$

**المماس عند النقطة الثانية:**

نحسب:

$$f'\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{3\left(\frac{25}{9}\right) - 18\left(\frac{5}{3}\right) + 15}{\left(\frac{5}{3} - 3\right)^2} = \frac{-20/3}{16/9} = -\frac{15}{4}$$

$$y = -\frac{15}{4}\left(x - \frac{5}{3}\right) = -\frac{15}{4}x + \frac{75}{12}$$

---

**إذن معادلتان المماس هما:**

$$y = \frac{5}{3}x \qquad y = -\frac{15}{4}x + \frac{75}{12}$$

الجواب الصحيح هو:

**(C) كلا المعادلتين صحيحتان**

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

ما معادلة المماس للتابع عند النقطة التي فاصلتها تحقق

$$f''(x) = 0$$

**الخيارات:**

(A) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{35}{27}$

(B) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{27}$

(C) $y = \frac{4}{3}x + \frac{35}{27}$

(D) $y = -\frac{4}{3}x - \frac{35}{27}$

**شرح الحل:**



نريد إيجاد معادلة المماس للتابع عند النقطة التي فاصلتها تحقق

$$f''(x) = 0$$

نبدأ بحساب المشتقة الأولى:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

ثم نحسب المشتقة الثانية:

$$f''(x) = 6x - 4$$

نحل المعادلة:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

إذن فاصلة نقطة التماس هي:

$$x_A = \frac{2}{3}$$

نحسب ترتيب هذه النقطة:

$$y_A = f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1$$

$$= \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + 1 = \frac{8}{27} - \frac{24}{27} + \frac{27}{27} = \frac{11}{27}$$

نحسب الميل:

$$m = f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$$

نطبق صيغة معادلة المماس:

$$y = m(x - x_A) + y_A =$$

$$= -\frac{4}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right) + \frac{11}{27} = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{9} + \frac{11}{27} =$$

$$-\frac{4}{3}x + \frac{35}{27}$$

**إذن معادلة المماس هي:**

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{35}{27}$$

والخيار الصحيح هو:

(A)

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

ما معادلة المماس للتابع عند النقطة التي يكون فيها ميل المماس مساوياً للصفر؟

الخيارات:

(A) $y = 1$

(B) $y = x + 1$

(C) $y = 0$

(D) $y = -x + 1$

**شرح الحل:**

بما أن ميل المماس هو صفر، نبحث عن النقطة التي تحقق:

$$f'(x) = 0$$

نحسب مشتقة التابع:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

نحل المعادلة:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

نحسب ترتيب النقطة:

$$y = f(0) = \sqrt{0^2+1} = 1 \Rightarrow \quad A(0,1)$$

نعلم أن ميل المماس هو:

$$m = 0$$

نطبق معادلة المماس:

$$y = m(x - x_A) + y_A = 0(x-0) + 1 = 1$$

**إذن معادلة المماس هي:**

$$y = 1$$

والجواب الصحيح هو:

(A)

---



**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع
$f(x) = x^2 + 1$
ما معادلة المماس $T$ للخط البياني $C_f$ المار من مبدأ الإحداثيات $(0,0)$ ؟

**الخيارات:**

(A) $y = 2x$
(B) $y = -2x$
(C) كلا المعادلتين صحيحتان
(D) لا يوجد مماس يمر من المبدأ

**شرح الحل:**

نفرض أن المماس يمر من نقطة على المنحني
$A(a, f(a))$
أي:

$$x_A = a \quad , \quad y_A = f(a) = a^2 + 1$$

نحسب مشتقة التابع:
$$f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(a) = 2a$$

نكتب معادلة المماس بالصيغة:
$$T: y = m(x - x_A) + y_A$$

نعوّض القيم:

$$T: y = 2a(x-a) + a^2 + 1$$

نبسط المعادلة:

$$T: y = 2ax - 2a^2 + a^2 + 1$$
$$\Rightarrow y = 2ax - a^2 + 1$$

بما أن المماس يمر من المبدأ $(0,0)$، فإن المعادلة يجب أن تحقق:

$$0 = 2a(0) - a^2 + 1 \Rightarrow -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1$$

إذن:

$$a = 1 \qquad a = -1$$

نحسب معادلتي المماس:

إذا كان $a = 1$:

$$m = 2 \Rightarrow y = 2x$$

إذا كان $a = -1$:

$$m = -2 \Rightarrow y = -2x$$



**إذن معادلتان للمماس تمران من المبدأ:**

$$y = 2x \qquad y = -2x$$

**الجواب الصحيح هو:**

كلا المعادلتين صحيحتان (C)

---

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$$f(x) = x^3 + x - 3$$

هل يقبل الخط البياني $C$ للتابع $f$ مماسًا ميله صفر؟

الخيارات:

(A) نعم، يقبل عند $x = 0$
(B) نعم، يقبل عند $x = 1$
(C) لا، لا يقبل
(D) يقبل عند نقطتين مختلفتين

**شرح الحل:**

لحساب وجود مماس ميله صفر، نحل المعادلة التالية:
$f'(x) = 0$

نحسب المشتقة أولًا:

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

نحل المعادلة:

$$3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3}$$

وهي معادلة مستحيلة في $\mathbb{R}$

إذن لا توجد نقطة على المنحني يمر بها مماس أفقي.

الجواب هو:

**(C) لا، لا يقبل**

**سؤال أتمتة:**

هل يقبل الخط البياني للتابع

$f(x) = x^3 + x - 3$

مماسًا ميله

$m = 1$ ؟

الخيارات:

(A) نعم، عند $x = 0$
(B) نعم، عند نقطتين
(C) لا، لا يقبل
(D) نعم، عند $x = 1$

**شرح الحل:**

لإيجاد ما إذا كان التابع يقبل مماسًا ميله

$m = 1$،

نحل المعادلة:

$f'(x) = 1$

من قبل حسبنا:

$f'(x) = 3x^2 + 1$

نحل:

$3x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

إذن يوجد مماس ميله 1 عند النقطة

$x = 0$

نحسب الترتيب:

$f(0) = 0^3 + 0 - 3 = -3$

النقطة:

$A(0, -3)$

الميل:

$m = 1$

معادلة المماس:

$y = 1(x - 0) - 3 = x - 3$

الجواب الصحيح:

**(A) نعم، عند** $x = 0$

# (التقريب التآلفي المحلّي)

نستخدم التقريب التآلفي لتقدير قيمة التابع عند عدد عشري قريب من عدد صحيح وذلك حسب العلاقة:

$$f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a)$$

حيث:

- $a$ عدد صحيح أو عدد نختاره ليكون قريبًا من $x$
- $h = x - a$
- $f'(a)$ مشتقة التابع عند $a$

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$f(x) = \sqrt{x}$

احسب قيمة تقريبية لـ

$f(16.1)$

باستخدام التقريب التآلفي المحلّي.

الخيارات:

(A) 4.1
(B) 4.0125
(C) 4.05
(D) 4.025

**شرح الحل:**

نحدد:

$$a = 16, \quad h = 0.1$$

نحسب:

$$f(a) = f(16) = 4$$

نحسب مشتقة التابع:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(16) = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$$

نطبّق قانون التقريب:

$$f(16.1) \approx f(16) + h \cdot f'(16) \ = 4 + \frac{1}{80} = \frac{321}{80} \approx 4.0125$$

---

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$f(x) = \sin x$

احسب قيمة تقريبية لـ

$f(0.1)$

باستخدام التقريب التآلفي المحلّي.

الخيارات:

(A) 0
(B) 0.1
(C) 1
(D) -0.1

**شرح الحل:**

نحدد:

$$a = 0, \quad h = 0.1$$

نحسب:

$$f(a) = \sin(0) = 0$$

نحسب مشتقة التابع:

$$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = \cos(0) = 1$$

نطبّق قانون التقريب:

$$f(0.1) \approx f(0) + 0.1 \cdot f'(0) = 0 + 0.1 \cdot 1 = 0.1$$

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$$f(x) = \sqrt{x}$$

المعرّف على المجال

$$[0, +\infty[$$

هل التابع $f$ قابل للاشتقاق عند الصفر؟

الخيارات:

(A) نعم، وقيمته هي $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(B) نعم، لأن النهاية موجودة ومنتهية

(C) لا، لأن نهاية النسبة المشتقة غير موجودة عند الصفر

(D) لا، لأن نهاية النسبة المشتقة عند الصفر تؤول إلى اللانهاية



**شرح الحل:**

لدراسة اشتقاقية التابع $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = 0$، نحسب النهاية اليمنى للنسبة المشتقة:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x} - 0}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad x > 0$$

نحسب النهاية عندما يقترب $x$ من الصفر من اليمين:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

بما أن النهاية غير منتهية، فإن التابع $f$ **غير قابل للاشتقاق عند الصفر**.

ونقول هندسياً إن المنحني يقبل **مماساً شاقولياً** عند النقطة $x = 0$، ومعادلته تكون على الشكل:

$$x = 0$$

**الجواب الصحيح:** (D)

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

المعرّف على

$$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

هل التابع $f$ قابل للاشتقاق عند الصفر؟ وما معادلة المماس إن وُجِد؟

الخيارات:

(A) التابع غير قابل للاشتقاق عند الصفر

(B) التابع قابل للاشتقاق عند الصفر، والمماس معادلته $y = -x + 2$

(C) التابع قابل للاشتقاق عند الصفر، والمماس معادلته $y = -x - 2$

(D) التابع قابل للاشتقاق عند الصفر، والمماس معادلته $y = x + 2$

**شرح الحل:**

لدراسة قابلية اشتقاق التابع عند $x = 0$، نستخدم النسبة المشتقة:

نعرف تابع المساعد:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

نحسب أولاً $f(0)$:

$$f(0) = \frac{0+2}{0+1} = 2$$

إذن:

$$g(x) = \frac{\frac{x+2}{x+1} - 2}{x}$$

نوحّد المقام في البسط:

$$= \frac{\frac{x+2-2(x+1)}{x+1}}{x} = \frac{\frac{x+2-2x-2}{x+1}}{x} = \frac{\frac{-x}{x+1}}{x} = \frac{-x}{x(x+1)} = \frac{-1}{x+1}$$

نحسب النهاية عندما $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \frac{-1}{1} = -1$$

إذن التابع **قابل للاشتقاق** عند $x = 0$، والمشتقة هي:

$$f'(0) = -1$$

بما أن $f$ قابل للاشتقاق عند $x = 0$، فإنه يقبل **مماساً** عند هذه النقطة.

نحسب الإحداثيات:

$$x_A = 0, \quad y_A = f(0) = 2, \quad m = f'(0) = -1$$

معادلة المماس:

$$y = m(x - x_A) + y_A = -1(x - 0) + 2 = -x + 2$$

**النتيجة:**

التابع قابل للاشتقاق عند الصفر والمماس معادلته:

$$y = -x + 2$$

إذن الجواب الصحيح هو:

**(B)**

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$$f(x) = \frac{\tan x}{x}$$

احسب نهاية التابع عندما $x \to 0$

ما قيمة:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$ ؟

**الخيارات:**

(A) $-1$

(B) $0$

(C) $1$

(D) النهاية غير موجودة

**شرح الحل:**

لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

نلاحظ أنّ النهاية من الشكل

$$\frac{0}{0}$$

وهي حالة عدم تعيين.

نستخدم تعريف الاشتقاق:

نضع:

$$g(x) = \tan x \quad \Rightarrow \quad g(0) = 0$$

نحسب المشتقة الأولى:

$$g'(x) = 1 + \tan^2 x \quad \Rightarrow \quad g'(0) = 1$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = 1$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

والجواب هو:

(C) $1$

## قابلية الاشتقاق على مجال

لدراسة ما إذا كان تابع ما $f$ قابلاً للاشتقاق على مجال معيّن، يجب التحقق من أن هذا التابع قابل للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المجال.

### أولاً: تحديد مجموعة الاشتقاق

إذا كان التابع $f$ مُعرّفًا على مجال $D_f$، فإن:

إذا كان $f$ **تابعًا جبريًا (كثير حدود أو دالة خطية)**، فإن مجموعة الاشتقاق هي:

$$D_{f'} = D_f$$

لكن إذا كان التابع يتضمن جذورًا أو مقامات أو قيمًا مطلقة، فإنّ:

- تابع الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$ وتابع القيمة المطلقة $f(x) = |x|$، **يكونان قابلين للاشتقاق على مجموعة تعريفهما بعد فتح المجالات** فقط.

### ثانيًا: قواعد الاشتقاق على مجال



لتابع $u(x)$ و $v(x)$ قابلين للاشتقاق على مجال $I$، ولدالة ثابتة $k \in \mathbb{R}$، فإنّ:

1. **مجموع أو جداء تابعين مشتقين على $I$ هو تابع مشتق على $I$:**

$$u + v \qquad I$$

$$u \cdot v \qquad I$$

2. **جداء عدد ثابت بمتابع مشتق قابل للاشتقاق على $I$:**

$$k \cdot u \qquad I$$

3. **النسبة $\frac{u}{v}$ قابلة للاشتقاق على $I$** بشرط أن:

$$v(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

4. **تركيب تابعين قابل للاشتقاق على مجاليهما:**
إذا كان $g(u(x))$ قابلًا للاشتقاق على $I$، فإن:

$$f(x) = g(u(x)) \qquad I$$

مثال:

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \qquad \{x \in I \mid u(x) > 0\}$$

5. **حالة القيمة المطلقة:**
التابع $f(x) = |u(x)|$ لا يكون بالضرورة قابلًا للاشتقاق على كامل المجال، ويجب دراسة اشتقاقيته على جزئين، خصوصًا عند النقاط التي تجعل $u(x) = 0$

### ملاحظات مهمة:

إذا تبيّن أن التابع غير قابل للاشتقاق على كامل المجال، نلجأ إلى دراسة قابلية الاشتقاق **عند نقطة فقط**
باستخدام تعريف الاشتقاق عند نقطة $a$ كما يلي:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

وهذا يُستخدم خصوصًا عندما تحتوي الدالة على جذور أو مطلق أو تغيرات في التعريف.

---

**إطراد تابع**

إذا كان التابع $f$ قابلاً للاشتقاق على مجال $I$، فإنّنا ندرس إطراده بالاعتماد على إشارة المشتقة الأولى $f'(x)$ على المجال نفسه.

فيما يلي القاعدة الأساسية:

إذا كانت المشتقة الأولى $f'(x) > 0$ على المجال $I$ (مع استثناء عدد من النقاط التي قد تنعدم عندها المشتقة فقط)، فإن التابع $f$ يكون **متزايداً تماماً على المجال** $I$

إذا كانت المشتقة الأولى $f'(x) < 0$ على المجال $I$ (مع استثناء عدد من النقاط التي قد تنعدم عندها المشتقة فقط)، فإن التابع $f$ يكون **متناقصاً تماماً على المجال** $I$

إذا كانت المشتقة الأولى $f'(x) = 0$ على المجال $I$، فإن التابع $f$ يكون **ثابتاً تماماً على المجال** $I$

**مفهوم إطراد تابع بيانياً**

لدراسة إطراد تابع، نقوم بإجراء الخطوات التالية:

نفترض أن التابع $f$ قابل للاشتقاق على مجموعة ما $I$

نحسب المشتقة الأولى $f'(x)$

نحدد النقاط التي تنعدم فيها المشتقة الأولى $f'(x)$، لأنها تقسم المجال $I$ إلى مجالات فرعية

نقوم بدراسة إشارة المشتقة الأولى $f'(x)$ على كل مجال فرعي باستخدام جدول إشارة

نستنتج من إشارة $f'(x)$ ما إذا كان التابع $f$ متزايداً أو متناقصاً أو ثابتاً على كل جزء من المجال

### سؤال أتمتة:

من خلال جدول التغيّرات المقابل للتابع $f$، ما مجموعة تعريف التابع $f$ ؟

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

الخيارات:

(A) $D_f = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$

(B) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

(C) $D_f = ]-\infty, +\infty[$

(D) $D_f = ]-2, +\infty[$

### شرح الحل:

نلاحظ من **السطر الأول** في جدول التغيّرات أنّ المشتقة الأولى $f'(x)$ معرفة وموجودة على المجال الكامل $]-\infty, +\infty[$، وهي تغيّر إشارتها عند $x = -2$ فقط دون أن تكون غير معرفة عندها، حيث وُضعت القيمة صفر عند $x = -2$

أي أن المشتقة مستمرة عند $x = -2$، وهذا يعني أن التابع $f$ نفسه معرف عندها، وأن النقطة ليست استثناء من المجال

كما أن السطر الثالث في الجدول يوضح سلوك التابع $f$، وهو يهبط إلى القيمة ٣ عند $x = -2$، ثم يعاود الارتفاع بعدها، مما يدل على أنّ التابع مستمر ومُعرّف عند $x = -2$

بالتالي تكون **مجموعة تعريف التابع هي المجال الكامل:**

$$D_f = ]-\infty, +\infty[$$

وهذا يطابق الخيار (C)

**سؤال أتمتة:**

من خلال جدول التغيّرات المقابل للتابع $f$، ما مجموعة تعريف التابع $f$ ؟

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\|\| -\infty \nearrow$ | $+\infty$ | $\|\|$ | $-\infty \nearrow$ | $0$ |

الخيارات:

(A) $D_f = ]0, +\infty[$

(B) $D_f = ]0, 1] \cup ]1, +\infty[$

(C) $D_f = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$

(D) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

**شرح الحل:**

نلاحظ من السطر الأول في الجدول أنَّ المشتقة الأولى $f'(x)$ غير معرفة عند العددين $x = 0$ و $x = 1$، حيث وُضعت إشارة $||$ التي تدل على عدم وجود المشتقة أو عدم تعريف التابع

وعليه، فإن التابع $f$ نفسه غير معرّف عند هاتين القيمتين، وبالتالي فإن هاتين النقطتين مستثنَيتان من مجموعة تعريف التابع

إذاً، التابع معرف فقط بين ٠ و١ دون أن يشملهما، وكذلك من ١ حتى ما لا نهاية دون أن يشمل ١، وبالتالي تكون مجموعة تعريف التابع:

$$D_f = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

وهذا يطابق الخيار (C)

---

## تحاويل التابع $f(x)$ على المستوى الإحداثي

**الحالة الأولى:**

$g(x) = f(-x)$

**الشرح:**
نقوم بعكس كل إحداثي $x$ في الخط البياني للتابع $f$، أي يتم عكس الرسم بالنسبة لمحور الفواصل $x = 0$.
**النتيجة:** يظهر خط $g$ متناظرًا مع خط $f$ بالنسبة لمحور الفواصل.

---

**الحالة الثانية:**

$g(x) = -f(x)$

**الشرح:**
نقوم بعكس كل إحداثي $y$ في الخط البياني، فيتغير اتجاه القيم.
**النتيجة:** يكون الخط البياني $g$ متناظرًا مع $f$ بالنسبة لمحور التراتيب $y = 0$.

---

**الحالة الثالثة:**

$g(x) = -f(-x)$

**الشرح:**
تطبيق انعكاس أولًا حول محور الفواصل، ثم انعكاس حول محور التراتيب.
**النتيجة:** يكون الخط $g$ متناظرًا مع $f$ بالنسبة لنقطة الأصل.

---

**الحالة الرابعة:**

$g(x) = f(x + \alpha)$

**الشرح:**
نقوم بإزاحة الخط $f$ نحو اليسار بمقدار $\alpha$.
**النتيجة:** يظهر الخط $g$ ناتجًا عن إزاحة $f$ نحو محور الفواصل السالب.

---

**الحالة الخامسة:**

$g(x) = f(x - \alpha)$

**الشرح:**
نقوم بإزاحة الخط $f$ نحو اليمين بمقدار $\alpha$.
**النتيجة:** يظهر الخط $g$ ناتجًا عن إزاحة $f$ نحو محور الفواصل الموجب.

---

**الحالة السادسة:**

$g(x) = f(x) + \alpha$

**الشرح:**
إزاحة رأسية نحو الأعلى بمقدار $\alpha$.
**النتيجة:** الخط $g$ ناتج عن رفع الخط $f$ نحو الأعلى بمقدار $\alpha$.

---

**الحالة السابعة:**

$g(x) = f(x) - \alpha$



**الشرح:**
إزاحة رأسية نحو الأسفل بمقدار $\alpha$.
**النتيجة:** الخط $g$ ناتج عن خفض الخط $f$ نحو الأسفل بمقدار $\alpha$.

---

**الحالة الثامنة:**

$g(x) = f(|x|)$

**الشرح:**
يتم أخذ الجهة اليمنى من الرسم ونسخها في الجهة اليسرى، مما يعطي تناظرًا بالنسبة لمحور التراتيب.
**النتيجة:** الخط $g$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

---

**الحالة التاسعة:**

$g(x) = |f(x)|$

**الشرح:**
نقوم بجعل جميع القيم السالبة ل $y$ موجبة، أي نعكس الجزء أسفل محور التراتيب ليصبح فوقه.
**النتيجة:** الخط $g$ يُطابق الجزء الموجب من $f$ بينما يعكس الجزء السالب نحو الأعلى.

**الحالة العاشرة:**

$g(x) = f(\alpha x)$

**الشرح:**
عند ضرب المتغيّر $x$ بعدد، يحدث تمدد أو تضييق أفقي، فإذا كانت $\alpha > 1$ يكون هناك تضييق أفقي، وإذا كانت $0 < \alpha < 1$ يكون هناك تمدد أفقي.
**النتيجة:** يتغير شكل الخط أفقياً بحسب قيمة $\alpha$.

---

**الحالة الحادية عشر:**

$g(x) = \alpha f(x)$

**الشرح:**
عند ضرب التابع ذاته بعدد، يكون هناك تمدد أو تضييق رأسي حسب قيمة $\alpha$.
**النتيجة:** يزداد ارتفاع الخط أو ينقص، أي يحدث تمدد أو تقلص عامودي.

---

**الحالة الثانية عشر:**

$g(x) = f^{-1}(x)$

**الشرح:**
الرسم يعكس الخط البياني حول المستقيم $y = x$، وهو المحور المائل الذي يقسم الربع الأول والثالث من المستوى.
**النتيجة:** نحصل على الخط العاكس (المعكوس) للتابع $f$.

---

**اللوغاريتم العشري**
هو التابع اللوغاريتمي الذي **أساسه هو العدد 10**

**رمزه:**

$\log(x)$

**مثال:**

$\log(10) = 1$

لأن $10^1 = 10$

**اللوغاريتم الطبيعي**
ويسمى أيضًا **النيبيري**

هو التابع اللوغاريتمي الذي **أساسه هو العدد النيبيري** $e$
حيث

$e \approx 2.718$

**رمزه:**

$\ln(x)$

**مثال:**

$\ln(e) = 1$

لأن $e^1 = e$

---

**متى يكون التابع اللوغاريتمي معرفًا؟**

حتى يكون اللوغاريتم معرفًا (أي يمكن حسابه)، يجب أن يتحقق الشرط التالي:

**الشرط:**

$x > 0$

أي أنّ **ما داخل اللوغاريتم يجب أن يكون موجبًا قطعًا**
لأن اللوغاريتم لا يُعرّف للأعداد السالبة أو الصفر في مجموعة الأعداد الحقيقية

**ملاحظة مهمة:**
دائمًا **ما يُكتب ما داخل اللوغاريتم إلى يمين الرمز مباشرة**
مثال:

$$\log(x), \quad \ln(x)$$

ففي كل من الحالتين، $x$ هو **المضمون**، أي الذي ينطبق عليه شرط التعريف $x > 0$

---

**أولًا: خاصية لوغاريتم الجداء**

**القاعدة:**

إذا كان

$$a > 0 \qquad b > 0$$

فإن:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$



عند وجود جداء داخل لوغاريتم، فإننا نستطيع تفكيكه إلى **مجموع لوغاريتمات العوامل**.
بمعنى آخر، لوغاريتم الجداء يساوي مجموع لوغاريتم كل عامل على حدة، بشرط أن تكون القيم موجبة حصرًا.

**مثال توضيحي:**

$$\ln(5 \cdot 2) = \ln(5) + \ln(2)$$

$$\ln(10) = \ln(5) + \ln(2)$$

**شروط التطبيق:**

يجب الانتباه إلى أن:

- كل من $a$ و $b$ يجب أن يكونا **عددين موجبين حصرًا**
- لا يجوز وجود **أعداد مضروبة خارج اللوغاريتم**، أي يجب أن تكون أمثال اللوغاريتمات مساوية لـ 1 فقط كي تُطبق القاعدة مباشرة.

## ثانيًا: خاصية لوغاريتم القسمة

**القاعدة:**

إذا كان

$$a > 0 \quad b > 0$$

فإن:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

عندما يكون داخل اللوغاريتم كسر (أي نسبة بين عددين)، فإننا نستطيع التعبير عن ذلك بطرح لوغاريتم البسط ناقص لوغاريتم المقام.
بمعنى آخر، لوغاريتم القسمة يتحول إلى **فرق** بين لوغاريتم البسط ولوغاريتم المقام، بشرط أن تكون القيم موجبة.

**مثال توضيحي:**

$$\ln\left(\frac{8}{2}\right) = \ln(8) - \ln(2)$$

$$\ln(4) = \ln(8) - \ln(2)$$

**شروط التطبيق:**

- يجب أن يكون كل من البسط $a$ والمقام $b$ **عددين موجبين**
- يجب أن تكون أمثال اللوغاريتمات في الطرف الأيمن **مساوية لـ 1 فقط**، وإلا فلا تُطبق القاعدة مباشرة.

**ملاحظات هامة:**

- في كلتا القاعدتين، يجب أن يكون **المضمون داخل اللوغاريتم موجبًا**، لأن اللوغاريتم غير معرف للأعداد السالبة أو الصفر.
- القاعدتان تستخدمان بشكل مكثف في تبسيط التعابير اللوغاريتمية وفي الحلول الجبرية والمعادلات.

هذه القواعد هي من الأساسيات التي تُبنى عليها العمليات في التفاضل، النهايات، والدوال الأسية واللوغاريتمية.

## ثالثًا: لم لوغاريتم

**القاعدة:**

إذا كان:

$$a > 0 \quad b > 0 \quad c > 0 \quad d > 0$$

فإن:

$$\ln(a) + \ln(b) + \ln(c) + \ln(d) = \ln(a \cdot b \cdot c \cdot d)$$

وأيضًا:

$$\ln(a) - \ln(b) + \ln(c) - \ln(d) = \ln\left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)$$

**مثال توضيحي:**

$$\ln(2) + \ln(3) + \ln(5) = \ln(2 \cdot 3 \cdot 5) = \ln(30)$$

أو:

$$\ln(6) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(1) = \ln\left(\frac{6 \cdot 3}{2 \cdot 1}\right) = \ln(9)$$

**شروط التطبيق:**

يجب أن تكون:

- المضامين موجبة
- جميع الأمثال تساوي واحدًا
- لا يُقبل وجود أي عدد مضروب باللوغاريتم إلا بعد اختزاله أو التعامل معه كعامل خارجي

## رابعًا: لوغاريتم قوة

**القاعدة:**

إذا كان:

$$a > 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

فإن:

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$$

**شروط التطبيق:**

- أن يكون الأس عددًا طبيعيًا موجبًا
- أن يكون المضمون موجبًا
- يُطبّق فقط على الأس المرفوع للمضمون، وليس على أمثال اللوغاريتم

**مثال:**

$$\ln(2^3) = 3 \cdot \ln(2)$$

أو عكسيًا:

$$4 \cdot \ln(5) = \ln(5^4)$$

---

## خامسًا: لوغاريتم الجذر التربيعي

**القاعدة:**

إذا كان:

$$a > 0$$

فإن:

$$\ln(\sqrt{a}) = \ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

**تطبيق بشكل عكسي:**

$$\frac{1}{2}\ln(a) = \ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = \ln(\sqrt{a})$$

**ملاحظات هامة:**

- هذا النوع من التحويل يُطبّق فقط على الأس الموجود ضمن المضمون
- لا يجوز تطبيق القاعدة إذا كان الأس خارج اللوغاريتم
- يجب أن يكون المضمون موجبًا حتى يُعرّف اللوغاريتم

---

**قيم تقريبية للحفظ:**

$$\ln(2) \approx 0.7$$

$$\ln(3) \approx 1.1$$

$$\ln(5) \approx 1.6$$

$$e \approx 2.7$$

$$e^2 \approx 7.3$$

$$\frac{1}{e} \approx 0.4$$

$$\sqrt{e} \approx 1.6$$

**سؤال أتمتة:**

في كل مما يلي، قارن بين العددين:

$$x = \ln(5), \quad y = \ln(2) + \ln(3)$$

ما العلاقة الصحيحة بين $x$ و $y$؟

الخيارات:

(A) $x > y$

(B) $x = y$

(C) $x < y$

(D) لا يمكن المقارنة

**شرح الحل:**

نبدأ باستخدام قاعدة جمع اللوغاريتمات:

$$y = \ln(2) + \ln(3) = \ln(2 \cdot 3) = \ln(6)$$

ثم نقارن:

$$x = \ln(5), \quad y = \ln(6)$$

وبما أن:

$$5 < 6 \Rightarrow \ln(5) < \ln(6)$$

إذن:

$$x < y$$

وهذا يثبت أن الخيار الصحيح هو:

(C) $x < y$

**سؤال أتمتة:**

في كل مما يلي، قارن بين العددين:

$$x = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^3, \quad y = \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2$$

ما العلاقة الصحيحة بين $x$ و $y$؟

الخيارات:

(A) $x > y$

(B) $x = y$

(C) $x < y$

(D) لا يمكن المقارنة

**شرح الحل:**

نحسب كل من $x$ و $y$ على حدة:

أولاً نحسب:

$$x = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^3 = 3 \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 3(\ln(1) - \ln(e)) = 3(0 -$$

ثم نحسب:

$$y = \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2 = (\ln(1) - \ln(e))^2 = (-1)^2 = 1$$

وبما أن:

$$-3 < 1 \Rightarrow x < y$$

إذن الجواب الصحيح هو:

(C) $x < y$

**سؤال أتمتة:**

في كل مما يلي، قارن بين العددين:

$$x = \ln(e^3) - 2, \quad y = \ln(e\sqrt{e})$$

ما العلاقة الصحيحة بين $x$ و $y$؟

الخيارات:

(A) $x > y$

(B) $x = y$

(C) $x < y$

(D) لا يمكن المقارنة

**شرح الحل:**

نحسب كل من $x$ و $y$ على حدة:

نبدأ بـ:

$$x = \ln(e^3) - 2 = 3\ln(e) - 2 = 3(1) - 2 = 1$$

ثم نحسب:

$$y = \ln(e\sqrt{e}) = \ln(e) + \ln(\sqrt{e}) = 1 + \ln(e^{1/2}) = 1 +$$

نقارن القيم:

$$1 < \frac{3}{2} \Rightarrow x < y$$

إذن الجواب الصحيح هو:

(C) $x < y$

**أولاً: معادلة من الشكل**

$$\ln(a) = \ln(b)$$

نقوم بالخطوات التالية:

نحدد شرط الحل:

$$a > 0 \qquad b > 0$$

نستفيد من الخاصية:

$$\ln(a) = \ln(b) \Rightarrow a = b$$

نحل المعادلة الناتجة ونحدد مجموعة الحلول المقبولة ضمن شروط المجال.

**مثال:**

$$\ln(x+2) = \ln(5)$$

الحل:

$$x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$$

نحقق الشرط $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$، والحل $x = 3$ يحقق الشرط.

---

**ثانياً: معادلة من الشكل**

$$= \ln(a)$$

نحوّل الطرف الثاني إلى شكل لوغارتمي باستخدام القاعدة:

$$\ln(a) = 1 \Leftrightarrow a = e$$

نأخذ اللوغاريتم للطرف الآخر، ثم نساوي ضمن نفس القاعدة ونحل.

**مثال:**

$$\ln(x^2) = 2$$

نستخدم القاعدة العكسية:

$$x^2 = e^2 \Rightarrow x = \pm e$$

نحدد مجموعة الحل ضمن $x > 0$ لأن اللوغاريتم معرف فقط للقيم الموجبة.

الحل المقبول: $x = e$

---

### ثالثاً: معادلة تحوي تعبير لوغارتمي مرفوع لأس

مثل:

$$(\ln(x))^2 = 3$$

الخطوات:

نفرض:

$$t = \ln(x), \qquad x > 0$$

فتصبح المعادلة:

$$t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm\sqrt{3}$$

نعود إلى الأصل:

$$\ln(x) = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = e^{\sqrt{3}},\ e^{-\sqrt{3}}$$

نأخذ فقط القيم التي تحقق $x > 0$، وكلاهما يحقق الشرط.

---

### رابعاً: معادلتان تحتويان لوغاريتمات

مثال:

$$\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln(6)$$

نستخدم خواص اللوغاريتم:

$$\ln[(x+1)(x-2)] = \ln(6) \Rightarrow (x+1)(x-2) = 6$$

نحل المعادلة:

$$x^2 - x - 2 = 6 \Rightarrow x^2 - x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$$

نعود ونتحقق من الشرط:

$$x + 1 > 0, \quad x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

نأخذ فقط الجذر الأكبر.

---

### خلاصة:

نبدأ دومًا بتحديد شروط التعريف لضمان صحة اللوغاريتم. نستخدم القواعد الثلاث:

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$

ثم نحول المعادلة إلى شكل بسيط يمكن حله جبريًا، ونتحقق من الشروط دومًا قبل القبول بأي حل.

**سؤال أتمتة:**

لحل المعادلة

$$\ln(\sqrt{2x-3}) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln(x)$$

ما مجموعة الحلول الصحيحة؟

الخيارات:

(A) $\{3\}$

(B) $\{-12, 3\}$

(C) $]\frac{3}{2}, 6[$

(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

**شرح الحل:**

نبدأ بتحديد شروط التعريف لكل طرف من أطراف المعادلة:

شرط تعريف $\ln(x)$:

$$x > 0 \Rightarrow E_1 = ]0, +\infty[$$

شرط تعريف $\ln(6-x)$:

$$6 - x > 0 \Rightarrow x < 6 \Rightarrow E_2 = ]-\infty, 6[$$

شرط تعريف $\ln(\sqrt{2x-3})$:

$$\sqrt{2x-3} > 0 \Rightarrow 2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2} \Rightarrow E_3 = ]\frac{3}{2}, +\infty[$$

إذاً مجال التعريف المشترك هو:

$$E = ]\frac{3}{2}, 6[$$

نبدأ الحل:

نضرب طرفي المعادلة بـ 2 للتخلص من الكسر:

$$2\ln(\sqrt{2x-3}) = 2\ln(6-x) - \ln(x)$$

نستعمل خاصية:

$$2\ln(\sqrt{2x-3}) = \ln\left((\sqrt{2x-3})^2\right) = \ln(2x-3)$$

وبالتالي:

$$\ln(2x-3) = \ln\left(\frac{(6-x)^2}{x}\right)$$

بما أن الطرفين لوغاريتمات، فبالمساواة نحصل على:

$$2x - 3 = \frac{(6-x)^2}{x}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $x$:

$$x(2x-3) = (6-x)^2 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 36 - 12x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x - 36 = 0 \Rightarrow (x+12)(x-3) = 0$$

إذن الحلول الجبرية هي:

$$x = -12 \qquad x = 3$$

لكن بالتحقق من شرط المجال $E = ]\frac{3}{2}, 6[$

فقط $x = 3$ مقبول، أما $x = -12$ مرفوض.

**الإجابة النهائية:**

$\{3\}$ هي مجموعة الحل.

**سؤال أتمتة:**

لحل المعادلة

$$\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$$

ما مجموعة الحلول الصحيحة؟

الخيارات:

(A) $\{2, -2\}$

(B) $\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

(C) $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

(D) $\{\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{3}\}$

---

**شرح الحل:**

أولاً نحدد مجال تعريف اللوغاريتمات:



$$E_1 = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \quad E_2 = \mathbb{R} \setminus \{2\} \Rightarrow E = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

نبدأ بالحل:

$$\ln|x+2| + \ln|x-2| = \ln(|x+2||x-2|)$$

$$= \ln(|x^2-4|) = 0$$

نساوي ما داخل اللوغاريتم بالواحد:

$$\Rightarrow x^2 = 5 \qquad x^2 = 3 \; = 1$$

$$x^2 - 4 = -1$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \qquad x = \pm\sqrt{3}$$

نعود إلى شرط المجال:

جميع هذه القيم تحقق المجال $x \neq \pm 2$، لذا كلها مقبولة.

**سؤال أتمتة:**

حل المعادلة اللوغاريتمية:

$$\ln(3-x) = 0$$

واختر الجواب الصحيح من الخيارات الآتية:

**الخيارات:**

(A) $x = -3$

(B) $x = 1$

(C) $x = 2$

(D) $x = 3$

**شرح الحل:**

نبدأ أولاً بتحديد **شرط تعريف اللوغاريتم**، وهو أن ما داخل اللوغاريتم يجب أن يكون عدداً موجباً، أي:

$$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$$

وبالتالي فإن مجموعة التعريف هي:

$$E = ]-\infty, 3[$$

نحل المعادلة:

$$\ln(3-x) = 0$$

نستخدم التعريف المعاكس للوغاريتم:

$$3 - x = e^0 \Rightarrow 3 - x = 1$$

نحل المعادلة:

$$x = 2$$

نقوم بالتحقق من أن الحل **ينتمي لمجموعة التعريف:**

$$x = 2 < 3 \Rightarrow$$

**الجواب الصحيح:**

(C) $x = 2$

**سؤال أتمتة:**

حل المعادلة اللوغاريتمية التالية:

$$(\ln(x))^2 - 5\ln(x) = 6$$

ما قيمة $x$؟

**الخيارات:**

(A) $x = e^6$

(B) $x = e^{-1}$

(C) $x = e^6$ أو $x = e^{-1}$

(D) لا يوجد حل مقبول

**الجواب الصحيح:**

(C) $x = e^6$ أو $x = e^{-1}$



**شرح الحل:**

أولاً نحدد **شرط تعريف اللوغاريتم**:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad E = ]0, +\infty[$$

نضع:

$$t = \ln(x)$$

فتتحول المعادلة إلى:

$$t^2 - 5t = 6 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 5t - 6 = 0$$

نحل المعادلة من الدرجة الثانية:

$$(t-6)(t+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 6 \qquad t = -1$$

نعود إلى المتغير الأصلي:

الحالة الأولى:

$$t = 6 \Rightarrow \ln(x) = 6 \Rightarrow x = e^6$$

الحالة الثانية:

$$t = -1 \Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

---

**سؤال أتمتة:**

ليكن الزوج المرتب

$(x,\ y)$

يحقق الجملة:

المعادلة الأولى

$\ln(x-y) = 2\ln(2)$

المعادلة الثانية

$\ln(x) - \ln(y) = \ln(3)$

ما قيمة الزوج

$(x,\ y)$

الذي يحقق الجملة؟

**الخيارات:**

(A)
$(x,\ y) = (4,\ 1)$

(B)
$(x,\ y) = (6,\ 2)$

(C)
$(x,\ y) = (2,\ 6)$

(D) لا يوجد حل مقبول

---

**الجواب الصحيح:**

**(B)**
$(x,\ y) = (6,\ 2)$

**شرح الحل:**

من المعطى:

$$\ln(x-y)=2\ln(2)$$

نستخدم خاصية اللوغاريتم:

$$2\ln(2)=\ln(4)$$

إذن تصبح المعادلة الأولى:

$$\ln(x-y)=\ln(4)$$

وبالتالي:

$$x-y=4$$

ومن المعادلة الثانية:

$$\ln(x)-\ln(y)=\ln(3)$$

نستخدم خاصية الفرق:

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(3)$$

وبالتالي:

$$\frac{x}{y}=3$$

---

نحل الجملة:

من العلاقة

$$\frac{x}{y}=3$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $y$ فنحصل على:

$$x=3y$$

نعوض في المعادلة

$$x-y=4:$$

$$3y-y=4\Rightarrow 2y=4\Rightarrow y=2$$

وبالتعويض في

$$x=3y\Rightarrow x=6$$

**إذن:**

$$(x,\ y)=(6,\ 2)$$

وهو حل مقبول لأن:

$$x>0 \qquad y>0 \qquad x-y>0$$

الجواب النهائي هو:

**(B)**

$$(x,\ y)=(6,\ 2)$$

---

@SASABAC2025

## حل المتراجحات اللوغاريتمية :

نقوم بدراسة المتراجحة اللوغاريتمية بحسب **شكلها العام**، ويمكن تصنيفها إلى ثلاث أنماط أساسية:

### النمط الأول:

تأخذ المتراجحة الشكل:

$$\ln(b)\triangle\ln(a)$$

حيث

$\triangle$

هي إحدى إشارات الترتيب ( $>$ أو $<$ أو $\leq$ أو $\geq$ )

### خطوات الحل:

نحدد أولًا **شرط الحل** والذي يفرض أن جميع **مداخل اللوغاريتمات موجبة**.

بعد التأكد من تحقق الشرط، نستخدم خاصية المقارنة بين لوغاريتمات لها نفس الأساس:

إذا كان:

$$\ln(b)>\ln(a)\Rightarrow b>a$$

وهكذا نصل إلى متراجحة مكافئة بدون لوغاريتم.

ثم:

نحسب مجموعة الحل للمقارنة المكافئة
و نرمز لها

$S$

بعدها نأخذ تقاطعها مع شرط الحل

$E$

فيكون الجواب النهائي هو:

$$S=E\cap S'$$

### النمط الثاني:

تأخذ المتراجحة الشكل:

عدد

$\triangle$

لوغاريتم

مثل:

$$2\geq\ln(x)$$

### خطوات الحل:

نحدد أولًا **شرط الحل**، أي:

$$x>0$$

ثم نحول المتراجحة إلى صورة مكافئة باستعمال خاصية اللوغاريتم العكسي:

إذا كانت:

$$a\triangle\ln(x)$$

فإنها تكافئ:

$$e^a\triangle x$$

ثم نوجد مجموعة الحل

$S'$

ونأخذ تقاطعها مع

$E$

للحصول على:

$$S=E\cap S'$$

---

**النمط الثالث:**

متراجحة تتضمن تعبيرًا مثل:

$$(\ln(x))^2$$

أو:

$$g(\ln(x))$$

أي تعبير تابع مركب يحوي لوغاريتم داخل دالة متعددة الحدود أو دالة جذرية

أولًا: **تحديد شرط التعريف**

نحدد المجال الذي تُعرف عليه العبارة $\ln(x)$، أي:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad E = ]0, +\infty[$$

ثانيًا: **نقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر**

نقوم بترتيب المتراجحة بحيث يكون الطرف الأيمن صفرًا.



ثالثًا: **نقوم بإجراء تغيير متغير**

نضع:

$$t = \ln(x)$$

فتصبح المتراجحة مكتوبة بدلالة $t$، وهذا يُحولها إلى متراجحة من الدرجة الثانية أو الثالثة أو أكثر (حسب قوة $\ln(x)$)، ويمكن حلها بالطريقة المعتادة.

رابعًا: **حل المتراجحة بدلالة $t$**

نقوم بحل المتراجحة الجديدة (عددية فقط) لاستخراج المجال $S'$ الذي تتحقق فيه.

خامسًا: **العودة إلى المتغير الأصلي**

نعود إلى المتغير الأصلي باستخدام العلاقة:

$$t = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad x = e^t$$

نحوّل المجال $S'$ إلى المجال الموافق $S$ بدلالة $x$ باستخدام قاعدة التحويل الآتي.

سادسًا: **التقاطع مع شرط التعريف**

نأخذ تقاطع المجال الناتج $S$ مع المجال الأول $E$ لنحصل على الحل النهائي:

$$S = E \cap S'$$

وهذا هو المجال الذي تتحقق عليه المتراجحة الأصلية.

---

**سؤال أتمتة:**

ما مجموعة حلول المتراجحة:

$$\ln(x^2 - 4) \leq \ln(-3x)$$

الخيارات:

(A) $]-4, 0[$
(B) $]-4, -2[$
(C) $[-4, -2[$
(D) $]-2, 0[$

**الجواب الصحيح:**

$$(C) \quad [-4, \ -2[$$

**شرح الحل:**

أولاً: تحديد شروط التعريف:

- من أجل $\ln(x^2 - 4)$ يجب أن:

$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2$$

$$x > 2 \Rightarrow E_1 = ]-\infty, \ -2[ \cup ]2, \ +\infty[$$

- من أجل $\ln(-3x)$ يجب أن:

$$-3x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow E_2 = ]-\infty, \ 0[$$

- بالتقاطع نحصل على:

$$E = E_1 \cap E_2 = ]-\infty, \ -2[$$

ثانياً: حل المتراجحة:

نحذف اللوغاريتم من الطرفين بما أن كلا الطرفين معرفان وموجبـان، فتبقى:

$$x^2 - 4 \leq -3x \Rightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0$$

نحل المعادلة المرافقة:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -4$$

نرسم إشارة المقدار:

- تكون المتراجحة محققة على المجال:

$$E' = [-4,\ 1]$$

ثالثاً: التقاطع مع شرط التعريف:

$$S = E \cap E' = ]-\infty,\ -2[ \cap [-4,\ 1] = [-4,\ -2[$$

---

**سؤال أتمتة:**

ما مجموعة الحلول للمتراجحة:

$$\ln(x+2) < 0$$

الخيارات:

(A) $]-2, +\infty[$

(B) $]-\infty, -1[$

(C) $]-2, -1[$

(D) $]-1, +\infty[$

**الجواب الصحيح: (C)**

**شرح الحل:**

أولاً نحدد **شرط وجود** التابع اللوغاريتمي:

$$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

إذن:

$$E = ]-2, +\infty[$$

ننتقل لحل المتراجحة:

$$\ln(x+2) < 0 \Rightarrow x + 2 < 1 \Rightarrow x < -1$$

أي:

$$E' = ]-\infty, -1[$$

الآن نأخذ **تقاطع** المجالين:

$$S = E \cap E' = ]-2, -1[$$

**سؤال أتمتة:**

ما مجموعة حلول المتراجحة:

$\ln(2-x) \geq 1$

الخيارات:

(A) $]-\infty, 2[$

(B) $]-\infty, 2-e]$

(C) $]2-e, 2[$

(D) $]-\infty, e[$

**الجواب الصحيح: (B)**



**شرح الحل:**

نبدأ بتحديد **شرط وجود اللوغاريتم**:

$2-x>0 \Rightarrow x<2 \Rightarrow E=]-\infty, 2[$

ننتقل لحل المتراجحة:

$\ln(2-x) \geq 1 \Rightarrow 2-x \geq e \Rightarrow$

$x \leq 2-e \Rightarrow E'=]-\infty, 2-e]$

نأخذ تقاطع المجالين:

$S=E \cap E'=]-\infty, 2-e]$

**تمييز جذور المعادلة التربيعية باستخدام المميز $\Delta$**

في دراسة المعادلات من الدرجة الثانية من الشكل:

$ax^2+bx+c=0$

نستخدم **المميز** $\Delta$ الذي يُعطى بالعلاقة:

$\Delta=b^2-4ac$

وذلك لتمييز عدد جذور المعادلة وطبيعتها. ويمكننا اختيار قيمة مناسبة للعدد الحقيقي $m$ (عند وجوده ضمن المعادلة) بحيث نتحكم في شكل الجذور من خلال الحالات الثلاث الآتية:

**الحالة الأولى: جذران حقيقيان ومختلفان**

لكي تكون للمعادلة جذور حقيقية مختلفة، يجب أن يكون المميز موجبًا، أي:

$\Delta>0$

في هذه الحالة، نحصل على حلين حقيقيين غير متساويين للمعادلة.

**الحالة الثانية: جذر حقيقي مكرر (مزدوج)**

لكي يكون للمعادلة جذر وحيد (مكرر)، يجب أن يكون المميز مساويًا للصفر:

$\Delta=0$

في هذه الحالة، يكون للمعادلة حل واحد مكرر (جذر مزدوج).

**الحالة الثالثة: لا يوجد حلول حقيقية (معادلة مستحيلة الحل)**

لكي لا يكون للمعادلة أي حل حقيقي، يجب أن يكون المميز سالبًا:

$\Delta<0$

في هذه الحالة، تكون جذور المعادلة مركبة وغير حقيقية، وبالتالي تكون المعادلة مستحيلة الحل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

**سؤال أتمتة:**

عين قيمة $m$ التي تجعل للمعادلة

$$x^2 - 4x + 9\ln(m+2) = 0$$

حلاً وحيداً.

الخيارات:

(A) $m = e^{\frac{4}{9}} + 2$

(B) $m = \ln\left(\frac{4}{9}\right)$

(C) $m = e^{\frac{4}{9}} - 2$

(D) $m = \ln(4) - 2$

**الجواب الصحيح:**

(C) $m = e^{\frac{4}{9}} - 2$



**شرح الحل:**

لدراسة وجود حل وحيد لمعادلة من الدرجة الثانية، نستخدم المميز:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

في المعادلة المعطاة:

$$x^2 - 4x + 9\ln(m+2) = 0$$

نحدد المعاملات:

$$a = 1 \quad , \quad b = -4 \quad , \quad c = 9\ln(m+2)$$

نحسب المميز:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(9\ln(m+2)) = 16 - 36\ln(m+2)$$

لكي يكون للمعادلة حل وحيد يجب أن يكون:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 36\ln(m+2) = 0$$

نوجد شرط التعريف:

$$\ln(m+2) \quad : \quad m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \Rightarrow$$

$$m \in ]-2, +\infty[$$

نعود إلى المعادلة:

$$36\ln(m+2) = 16 \Rightarrow \ln(m+2) = \frac{4}{9}$$

نأخذ أساس اللوغاريتم:

$$m + 2 = e^{\frac{4}{9}} \Rightarrow m = e^{\frac{4}{9}} - 2$$

وبما أن القيمة تقع ضمن مجال القبول:

$$m = e^{\frac{4}{9}} - 2$$

الجواب الصحيح هو:

(C) $m = e^{\frac{4}{9}} - 2$

## مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي

### أولاً: تعريف التابع اللوغاريتمي

حتى يكون التابع اللوغاريتمي معرفًا، يجب أن يكون **مضمونه موجبًا تمامًا**، أي:

$$\ln(u(x)) \quad u(x) > 0$$

وبناءً على ذلك، تكون **مجموعة تعريف التابع** هي مجموعة القيم التي تجعل مضمون اللوغاريتم موجبًا تمامًا.

### ثانياً: في حالة التابع مكون من كسر ولوغاريتم

في هذه الحالة نميز بين حالتين:

**الحالة الأولى:** إذا كان التابع على الشكل:

$$f(x) = \frac{\ln(u(x))}{v(x)}$$



نحدد مجموعتي تعريف كما يلي:

المجموعة الأولى $D_1$ تحقق شرط تعريف اللوغاريتم:

$$u(x) > 0$$

والمجموعة الثانية $D_2$ تحقق شرط عدم انعدام المقام:

$$v(x) \neq 0$$

وبالتالي:

$$D_f = D_1 \cap D_2$$

**الحالة الثانية:** إذا كان التابع على الشكل:

$$f(x) = \frac{u(x)}{\ln(v(x))}$$

هنا نحدد أيضًا مجموعتين:

المجموعة الأولى $D_1$ تحقق شرط عدم انعدام المقام:

$$\ln(v(x)) \neq 0 \Rightarrow v(x) \neq 1 \qquad v(x) > 0$$

أي يجب أن يكون مضمون اللوغاريتم موجبًا، وألا يكون مساويًا لـ 1 لأن:

$$\ln(1) = 0 \Rightarrow$$

وبالتالي:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \mid v(x) \leq 0 \;\; v(x) = 1\}$$

أي نحذف من مجموعة الأعداد الحقيقية كل القيم التي تجعل:

- المضمون سالبًا أو صفرًا
- أو تجعل المضمون مساويًا لـ 1 (لأن $\ln(1) = 0$ وهو ممنوع في المقام)

**الحالة الثالثة:** إذا كان التابع يتضمن أكثر من لوغاريتم واحد

نحدد لكل لوغاريتم مجموعة تعريفه على حدة، ثم نأخذ:

$$D_f = D_1 \cap D_2$$

أي تقاطع مجموعات تعريف كل لوغاريتم داخل التابع.

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$$f(x) = \ln(x) - \ln(x-1)$$

ما هي مجموعة تعريف التابع $f$ ؟

الخيارات:

(A) $]0, +\infty[$

(B) $]1, +\infty[$

(C) $]0, 1[$

(D) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

**شرح الحل:**

لدراسة مجموعة تعريف التابع

$$f(x) = \ln(x) - \ln(x-1)$$

نحدد شروط تعريف كل جزء لوغاريتمي على حدة.

أولًا:

$$\ln(x) \quad : \ x > 0 \Rightarrow E_1 = ]0, +\infty[$$

ثانيًا:

$$\ln(x-1) \quad : \ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow E_2 = ]1, +\infty[$$

إذن مجموعة تعريف التابع هي تقاطع الشرطين:

$$D_f = E_1 \cap E_2 = ]1, +\infty[$$

**الجواب النهائي:**

$$D_f = ]1, +\infty[ \Rightarrow \quad (B)$$

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$$f(x) = \frac{\ln(x) - 1}{x + 2}$$

ما هي مجموعة تعريف التابع $f$ ؟

الخيارات:

(A) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

(B) $]0, +\infty[ \setminus \{-2\}$

(C) $]0, +\infty[$

(D) $]0, +\infty[ \cup \{-2\}$

**شرح الحل:**

لدراسة مجموعة تعريف التابع

$$f(x) = \ln(x) - \ln(x-1)$$

نحدد شروط تعريف كل جزء لوغاريتمي على حدة.

أولًا:

$$\ln(x) \quad : \ x > 0 \Rightarrow E_1 = ]0, +\infty[$$

ثانيًا:

$$\ln(x-1) \quad : \ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow E_2 = ]1, +\infty[$$

إذن مجموعة تعريف التابع هي تقاطع الشرطين:

$$D_f = E_1 \cap E_2 = ]1, +\infty[$$

**الجواب النهائي:**

$$D_f = ]0, +\infty[ \Rightarrow \quad (C)$$

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$$f(x)=\frac{x^2-1}{\ln(x)}$$

ما هي مجموعة تعريف التابع $f$ ؟

الخيارات:

(A) $]0,+\infty[$

(B) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(C) $]0,+\infty[\setminus\{1\}$

(D) $]0,1[\cup]1,+\infty[$

**شرح الحل:**

لدراسة مجموعة تعريف التابع

$$f(x)=\frac{x^2-1}{\ln(x)}$$

نبدأ بتحليل شروط التعريف:

أولًا:

$$\ln(x)\quad:\ x>0\Rightarrow D_1=]0,+\infty[$$

ثانيًا:

يجب ألا ينعدم المقام

$$\ln(x)=0\Rightarrow x=1$$

إذن:

$$x=1$$

وبالتالي:

$$D_f=D_1\setminus\{1\}=]0,+\infty[\setminus\{1\}=]0,1[\cup]1,+\infty[$$

**الجواب النهائي:**

$$D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[\Rightarrow\quad(D)$$

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$$f(x)=\frac{\ln(x)-1}{2-\ln(x)}$$

ما هي مجموعة تعريف التابع $f$ ؟

الخيارات:

(A) $]0,+\infty[$

(B) $]0,+\infty[\setminus\{1\}$

(C) $]0,+\infty[\setminus\{e^2\}$

(D) $]0,e^2[\cup]e^2,+\infty[$

**شرح الحل:**

لدراسة مجموعة تعريف التابع

$$f(x)=\frac{\ln(x)-1}{2-\ln(x)}$$

نحلل ما يلي:

أولًا:

$$\ln(x)\quad x>0\Rightarrow D_1=]0,+\infty[$$

ثانيًا:

يجب ألا ينعدم المقام:

$$2-\ln(x)=0\Rightarrow\ln(x)=2\Rightarrow x=e^2$$

إذن:

$$x=e^2\qquad D_1$$

وبالتالي:

$$D_f=D_1\setminus\{e^2\}=]0,e^2[\cup]e^2,+\infty[$$

## النهايات الخاصة بالتوابع اللوغارتمية

نستعرض في هذا الشرح أهم النهايات المرتبطة بالتابع اللوغارتمي، مع القواعد الأساسية التي لا بد من حفظها واستيعابها جيدًا للتعامل مع المسائل المتعلقة بهذا النوع من النهايات.

### أولاً: نهايات التابع $\ln(x)$

عند الاقتراب من الصفر أو من اللانهاية:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

### ثانياً: نهايات النسبة بين لوغاريتم وعدد أو متغير

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad (\quad)$$



$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty \quad (\quad)$$

### ثالثاً: نهاية حاصل ضرب لوغاريتم ومتغير

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

وهذه نهاية مشهورة ناتجة عن تعويض مباشر بعد تحليل السلوك النسبي بين المقدارين.

### رابعاً: نهايات متعلقة بالاقتران $\ln(1+x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{} = 1 \quad (\quad = \text{x})$$

### خامساً: نهايات عند نقطة ثابتة مثل $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)} = 1$$

وهي نهايتان شهيرتان تُستخدمان كثيرًا في اشتقاق قاعدة الاشتقاق للوغاريتم.

---

**سؤال أتمتة:**
ليكن

$$f(x) = x - \ln(x)$$

المعرّف على المجال

$$D_f = ]0, +\infty[$$

فإن

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)$$

تساوي:

(A) $-\infty$
(B) $0$
(C) $+\infty$
(D) غير موجودة

**الإجابة الصحيحة هي: (C)** $+\infty$
نعلم أن:

$$f(x) = x - \ln(x)$$

نحسب النهاية عند اللانهاية:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x - \ln(x))$$

هذه نهاية من الشكل غير المحدد: $+\infty - \infty$

نقوم بإعادة كتابة التابع بالشكل التالي:

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

نحسب:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

لكن:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\cdot(1-0) = +\infty$$

---

**سؤال أتمتة:**
ليكن التابع

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1}$$

المعرّف على المجال

$$D_f = ]0,+\infty[$$

فإن

$$\lim_{x\to 0} f(x) \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

تساوي على الترتيب:

(A) $0$ و $+\infty$
(B) $+\infty$ و $0$
(C) $0$ و $1$
(D) لا وجود لهما

**الإجابة الصحيحة هي: (A)** $0$ و $+\infty$

أولاً نحسب النهاية عند الصفر:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x)}{x+1}$$

بما أن:

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{0}{1} = 0$$

ثانياً نحسب النهاية عند اللانهاية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(x)}{x+1}$$

وهذه نهاية غير معينة من الشكل:

$$\frac{\infty}{\infty}$$

نقوم بتبسيطها:

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x+1} = \frac{\ln(x)}{1+\frac{1}{x}}$$

وحيث أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

إذن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

---

**سؤال أتمتة:**

ليكن التابع

$$f(x) = x\,(\ln(x))^3$$

المعرّف على المجال

$$D_f = ]0, +\infty[$$

فإن النهاية

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

تساوي:

(A) $+\infty$
(B) $0$
(C) غير موجودة
(D) $-\infty$

نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

إذن:

$$\lim_{x\to 0} x(\ln(x))^3 = (0)(-\infty)^3 = 0\cdot(-\infty)$$

لحل هذه الحالة نلجأ إلى التعويض المكافئ الآتي:

$$x = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \Rightarrow f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\cdot\ln(x)\right)^3$$

نحوّل اللوغاريتم:

$$\ln(x) = \ln\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\right) = 3\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)$$

إذن

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \left(3\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)\right)^3 = (3\cdot 0)^3 = 0$$

**الإجابة الصحيحة هي:**

$$\text{(B)} \quad 0$$

# اشتقاق التابع اللوغاريتمي

عندما يكون لدينا تابع لوغاريتمي على الشكل:

$$f(x) = \ln(g(x))$$

فإن اشتقاق هذا التابع يتم وفق قاعدة خاصة تعتمد على مشتقة المضمون فقط، حيث أن:

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

**مثال توضيحي:**

إذا كان

$$f(x) = \ln(x^2+1)$$

فإن المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

لأن:

- المضمون هو $g(x) = x^2 + 1$
- ومشتقته هي $g'(x) = 2x$
- وبالتالي نطبّق القاعدة مباشرة.

**ملاحظات مهمة:**

- يجب أن يكون $g(x) > 0$ دائماً حتى يكون $\ln(g(x))$ معرّفاً
- تُستخدم هذه القاعدة بكثرة في دراسة التوابع المركبة التي تحتوي على لوغاريتمات
- يمكن استخدامها لاحقاً في حساب النهايات، دراسة الإشارات، أو حتى في حل معادلات.

**السؤال الأول:**
إذا كان

$$f(x) = \ln(x)$$

فما مشتقته؟

(A) $\frac{1}{x^2}$
(B) $\ln(x)$
(C) $\frac{1}{x}$
(D) $-\frac{1}{x}$

**الجواب الصحيح:** (C)

**السؤال الثاني:**
إذا كان

$$f(x) = \ln(3-x)$$

فما مشتقته؟

(A) $\frac{1}{3-x}$
(B) $-\frac{1}{3-x}$
(C) $\frac{1}{x-3}$
(D) $-\frac{1}{x}$

**الجواب الصحيح:** (B)

**السؤال الثالث:**
إذا كان

$$f(x) = \ln(x^2)$$

فما مشتقته؟

(A) $\frac{1}{2x}$
(B) $\frac{2}{x}$
(C) $\frac{2x}{x^2}$
(D) $\frac{1}{x}$

**الجواب الصحيح:** (B)

**السؤال الرابع:**
إذا كان

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

فما مشتقته؟

(A) $\frac{1}{x}$
(B) $-\frac{1}{x^2}$
(C) $-\frac{1}{x}$
(D) $\frac{1}{x^2}$

**الجواب الصحيح:** (C)

**السؤال الخامس:**
إذا كان

$$f(x) = \ln(\sin x)$$

فما مشتقته؟

(A) $\frac{1}{\cos x}$
(B) $\cot x$
(C) $\tan x$
(D) $\frac{1}{\sin x}$

**الجواب الصحيح:** (B)

**السؤال السادس:**
إذا كان

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$$

فما مشتقته؟

(A) $\frac{2}{x^2-1}$
(B) $\frac{-4}{x^2+2x-3}$
(C) $\frac{4}{x^2+2x-3}$
(D) $\frac{x-1}{x+3}$

**الجواب الصحيح:** (B)

# التابع الأُسّي الطبيعي

## أولاً:

يرمز للتابع الأُسّي الطبيعي بالرمز

$$f(x) = e^x$$

وهو تابع معرف دائماً، لأن الأساس $e$ عدد حقيقي موجب، ولكل عدد حقيقي $x$، يكون

$$e^x \in \mathbb{R}^+$$

**ثانياً: خواص القوى للعدد $e$**
تنطبق القواعد التالية عند التعامل مع الأسس التي أساسها $e$:

عند الضرب:

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

عند القسمة:

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

عند رفع القوة إلى قوة:

$$(e^a)^b = e^{a \cdot b}$$

عند وجود مقام أسّي:

$$\frac{1}{e^a} = e^{-a}$$

**ثالثاً: العلاقة بين التابع الأُسّي والتابع اللوغاريتمي**
بما أن التابع الأُسّي هو المعكوس الرياضي للتابع اللوغاريتمي الطبيعي، نحصل على علاقات هامة من الشكل:

$$e^{\ln(a)} = a$$

وبالاعتماد عليها نحصل على القواعد التالية:

1.

$$e^{\ln(a^n)} = a^n \qquad \ln(a^n) = n\ln(a)$$

2.

$$e^{\ln(a \cdot b)} = a \cdot b \qquad \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

3.

$$e^{\ln(\frac{a}{b})} = \frac{a}{b} \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$



**رابعاً: شرط التطبيق**

حتى تُطبّق القاعدة

$$e^{\ln()} =$$

يجب أن يحتوي الأس على **لوغاريتم واحد فقط**، أي:

- إذا كان هناك ضرب أو قسمة داخل اللوغاريتم، نستخدم خواص اللوغاريتمات لتجميعها في لوغاريتم واحد
- ممنوع تكرار اللوغاريتم داخل الأس أكثر من مرة

---

**خامساً: قيم مباشرة يجب معرفتها**

$$e^0 = 1 \qquad e^1 = e$$

**سادساً: قيم تقريبية يجب معرفتها ذهنياً دون حفظ**

$$\ln(2) \approx 0.7 \qquad \ln(3) \approx 1.1 \qquad \ln(5) \approx 1.6$$

$$e \approx 2.7 \qquad e^2 \approx 7.3 \qquad \frac{1}{e} \approx 0.4 \qquad \sqrt{e} \approx 1.6$$

**السؤال الأول**
إذا كان

$A = e^{\ln(2)}$

فإن القيمة الصحيحة لـ $A$ هي:

(A) $e^2$
(B) $2$
(C) $\ln(2)$
(D) $1$

**الحل:**

نعلم من خواص التابع الأسي أن:

$e^{\ln(a)} = a$

وبالتالي:

$e^{\ln(2)} = 2$

**الإجابة الصحيحة: (B)**

---

**السؤال الثاني**
إذا كان



$B = e^{\frac{1}{2}\ln(16)} + e^{\ln(3)}$

فإن القيمة الصحيحة لـ $B$ هي:

(A) $\sqrt{16} + 3$
(B) $\ln(4) + 3$
(C) $e^8$
(D) $4 + \ln(3)$

**الحل:**

نعالج كل حد على حدة:

الحد الأول:

$e^{\frac{1}{2}\ln(16)} = e^{\ln(\sqrt{16})} = \sqrt{16} = 4$

الحد الثاني:

$e^{\ln(3)} = 3$

وبالتالي:

$B = 4 + 3 = 7$

**الإجابة الصحيحة: (A)**

**السؤال الثالث**
إذا كان

$H = e^{2+\ln(8)}$

فإن القيمة المبسطة لـ $H$ هي:

(A) $8e^2$
(B) $2e^8$
(C) $e^{16}$
(D) $\ln(16e^2)$

**الحل:**

من خاصية الجمع في الأس:

$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

نكتب:

$H = e^2 \cdot e^{\ln(8)}$

وبما أن:

$e^{\ln(8)} = 8$

إذن:

$H = e^2 \cdot 8 = 8e^2$

**الإجابة الصحيحة: (A)**

---

**السؤال الرابع**
إذا كان

$I = \frac{e^2}{e^{1+\ln(2)}}$

فإن القيمة المبسطة لـ $I$ هي:

(A) $\frac{e}{\ln(2)}$
(B) $\frac{e^2}{2}$
(C) $\frac{e}{2}$
(D) $2e$

**الحل:**

نبدأ بتبسيط المقام:

$e^{1+\ln(2)} = e^1 \cdot e^{\ln(2)} = e \cdot 2 = 2e$

ثم:

$I = \frac{e^2}{2e} = \frac{e}{2}$

**الإجابة الصحيحة: (C)**

**السؤال الخامس**
إذا كان

$$K = \ln\left(\sqrt{e^5}\right)$$

فإن القيمة المبسطة لـ $K$ هي:

(A) $5\ln(e^2)$
(B) $\ln(5e)$
(C) $\frac{5}{2}$
(D) $\frac{1}{2}\ln(5e)$

**الحل:**

نكتب الجذر على شكل أس:

$$\sqrt{e^5} = (e^5)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{5}{2}}$$

وبالتالي:

$$K = \ln(e^{\frac{5}{2}}) = \frac{5}{2}$$

**الإجابة الصحيحة: (C)**

---

# المعادلات الأسّية

المعادلات الأسية هي المعادلات التي تحتوي على أسس ذات متغيرات، وغالباً ما يكون الأساس هو العدد $e$.

**أولاً: فكرة الحل العامة**

عند حل معادلة أسية، نقوم بـ:

نحدد **شرط الحل**
نُطبق **الخواص الأسية** المناسبة للوصول إلى إحدى الصيغ التالية:

$$e^a = e^b \Rightarrow a = b$$

**ثانياً: أشكال المعادلات الأساسية**

**النمط الأول:**
معادلة من الشكل

$$e^x = e^a$$

نقوم مباشرة بكتابة:

$$x = a$$

---

**النمط الثاني:**
معادلة من الشكل

$$= e$$

نُطبق اللوغاريتم الطبيعي (اللوغاريتم النيبيري):

$$\ln(e) = \ln() \Rightarrow = \ln()$$

**النمط الثالث:**
معادلة من الشكل:

$$e^{2x} = e^x \qquad e^{-2x} = e^x \qquad e^{4x} = g \cdot e^{2x}$$

**الخطوات:**

نضع $t = e^x$ شرطه $t > 0$
نحوّل المعادلة إلى معادلة من الدرجة الثانية أو الأولى بدلالة $t$
نحل ونستبعد الحلول السالبة لـ $t$
ثم نعود ونحسب $x$ من العلاقة $e^x = t$

**النمط الرابع:**
جملة معادلتين تحتوي على $e^x$

**الخطوات:**

نحدد **الحل المشترك** لمعادلتين
نحاول **الإبدال أو الجمع أو الطرح أو التعويض**
نُحول الجملة إلى معادلة واحدة
ثم نحلّها بنفس الطرق السابقة
ونحدد الحل المقبول من شرط الحل

---

**ملاحظة هامة:**

نستخدم خاصيّة:

$$e^{\ln(a)} = a \qquad \ln(e^a) = a$$

فهي أساسية في تحويل المعادلات الأسية إلى معادلات عادية، خاصة عندما تحتوي على لوغاريتمات.

---

**السؤال:**

إذا كانت

$$e^{3x-1} = e^{x^2}$$

فإن حل المعادلة هو:

**الخيارات:**

(A)
$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

(B)
$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

(C)
$x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

(D)
$x = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

**الحل:**

بما أن الطرفين يحتويان على نفس الأساس $e$، فإن الأسين متساويان:

$$3x - 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

نحسب المميز:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(1) = 9 - 4 = 5$$

ومنها نحسب الجذور:

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

**الجواب الصحيح هو:**

**(C)**
$x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

---



**السؤال:**

ما مجموعة حلول المعادلة:

$$e^x + \frac{e}{e^x} = 1 + e$$

**الخيارات:**

(A)
$x = 0$

(B)
$x = 1$

(C)
$x = 0 \qquad x = 1$

(D)
$x = \ln(e+1)$

نبدأ بجمع الحدود في طرف واحد:

$$e^x + \frac{e}{e^x} - (1+e) = 0$$

نوحّد المقام:

$$\frac{e^{2x} + e - e(1+e^x)}{e^x} = 0$$

نقوم بتوزيع $e$ على القوس:

$$\frac{e^{2x} - e^x - e \cdot e^x + e}{e^x} = 0$$

نجمع الحدود:

$$\frac{e^{2x} + (-1-e)e^x + e}{e^x} = 0$$

نضع:

$$t = e^x \quad \Rightarrow \quad e^{2x} = t^2$$

فتصبح المعادلة:

$$\frac{t^2 + (-1-e)t + e}{t} = 0$$

نضرب الطرفين في $t$ للتخلّص من المقام:

$$t^2 + (-1-e)t + e = 0$$

نحلل المعادلة:

$$(t-1)(t-e) = 0$$

نجد الجذور:

إما

$$t = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

أو

$$t = e \Rightarrow e^x = e \Rightarrow x = 1$$

**الجواب الصحيح هو:**

**(C)**
$x = 0 \qquad x = 1$

---

**السؤال:**

ما مجموعة حلول المعادلة التالية:

$$(e^x - 2) \cdot e^x = 2(e^x - 2)$$

**الخيارات:**

(A)
$x = \ln(4)$

(B)
$x = \ln(2)$

(C)
$x = 2$

(D)
$x = 0$

**الحل:**

نقوم أولاً بنشر الطرفين:

$$e^x \cdot e^x - 2e^x = 2e^x - 4$$

$$e^{2x} - 2e^x = 2e^x - 4$$

ننقل جميع الحدود إلى طرف واحد:

$$e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$$

نضع:

$$t = e^x \quad \Rightarrow \quad e^{2x} = t^2$$

فتصبح المعادلة:

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

نحلل المعادلة:

$$(t-2)^2 = 0$$

نجد الجذر المضاعف:

$$t = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$$

**الجواب الصحيح هو:**

**(B)**
$x = \ln(2)$

---

**المتراجحات الأسية**

تُعد المتراجحات الأسية من التطبيقات الأساسية للدوال الأسية، ويُقصد بها دراسة علاقة الترتيب (مثل أكبر من، أصغر من) بين طرفين يحتويان على تعابير أسية تتضمن الأساس $e$. نُميز بين عدة أنماط للحل وفق شكل المتراجحة.



**فكرة الحل العامة:**

نقوم بدايةً بتحليل نص السؤال، وتحديد شكل المتراجحة من بين الأشكال المعروفة، ثم نطبّق خصائص الدوال الأسية للوصول إلى حل المتراجحة بالشكل الأكاديمي المناسب.

**الأنماط الأساسية للمتراجحات الأسية:**

**النمط الأول:**

يكون الشكل العام:

$e^x \quad e^a$

نستنتج منها:

$x \quad a$

حيث أن دالة $e^x$ متزايدة تمامًا، وبالتالي نحافظ على نفس إشارة التراجح عند حذف الأس.

**النمط الثاني:**

يكون الشكل العام:

$\cdot e^x$

نقوم باتباع الخطوات التالية:

نقسم طرفي المتراجحة على العدد المضروب بـ $e^x$ (إذا كان موجبًا)، مع مراعاة تغيير إشارة التراجح إن كان العدد سالبًا

نحصل بعدها على متراجحة من الشكل:

$e^x$

ونطبق عندها ما سبق في النمط الأول

---

**النمط الثالث:**

تتكون المتراجحة من أحد الأشكال التالية:

$$e^{2x} \cdot e^x \quad e^{-2x} \cdot e^{-x} \quad e^{4x} \cdot e^{2x} \quad e^{-4x} \cdot e^{-2x}$$

أو أي تعبير يحوي ضرب تعابير أسية من الشكل $e^{ax}$

نقوم بالخطوات التالية لحل المتراجحة:

نقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر وجعل الصفر في الطرف الأيمن

تحويل الطرف الأيسر إلى معادلة أسية من خلال الجمع بين الحدود الأسية باستخدام قوانين الأسس

نضع الفرضية:

$$t = e^x \quad \Rightarrow \quad e^{2x} = t^2$$

ثم:

نعوّض في المعادلة الجديدة بدلالة $t$

نحل المعادلة $E'$ بدلالة $t$

نجد قيم $x$ بعد العودة من $t$

ننظم جدول الإشارة لثلاثة خطوط، ونحدد منه الفترات التي تحقق المتراجحة (اختياريًا)

نحدّد أخيرًا مجموعة الحل $S$

---

**السؤال:**

ما مجموعة حلول المتراجحة التالية؟

$$\frac{e^{x^2}}{e^2} \leq (e^x)^3 \cdot e$$

**الخيارات:**



(A) $\left[\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right]$

(B) $\left]-\infty, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right[$

(C) $\left]\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right[$

(D) $\left[\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right[$

**الحل:**

أولاً نكتب المتراجحة بشكل مبسط:

$$\frac{e^{x^2}}{e^2} \leq e^{3x} \cdot e$$

نجمع الأسس في طرف اليمين:

$$\frac{e^{x^2}}{e^2} \leq e^{3x+1}$$

نستخدم خواص الأسس:

$$e^{x^2-2} \leq e^{3x+1}$$

بما أن دالة $e^x$ متزايدة، فإن:

$$x^2 - 2 \leq 3x + 1$$

ننقل الحدود كلها إلى طرف واحد:

$$x^2 - 3x - 3 \leq 0$$

نقوم بحل المعادلة:

$$x^2 - 3x - 3 = 0$$

نحسب المميز:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(-3) = 9 + 12 = 21$$

نجد الجذرين:

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}, \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$$

نرسم إشارة العبارة $x^2 - 3x - 3$ ونأخذ المجال الذي يكون فيه المقدار سالبًا أو صفرًا:

$$S = \left[\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right]$$

**الجواب الصحيح هو: (A)**

---

**السؤال:**

ما مجموعة حلول المتراجحة التالية:

$$(e^x-1)(e^x-4)<0$$

**الخيارات:**

(A) $]0,\ln 4[$

(B) $]-\infty,\ln 4[$

(C) $[0,\ln 4]$

(D) $]1,4[$

**الحل:**

نبدأ بتوسيع الطرف الأيسر:

$$(e^x-1)(e^x-4)=e^{2x}-4e^x-e^x+4=$$

$$e^{2x}-5e^x+4$$



فتصبح المتراجحة:

$$e^{2x}-5e^x+4<0$$

نستخدم التبديل:

$$t=e^x \Rightarrow t^2=e^{2x}$$

فتصبح المتراجحة:

$$t^2-5t+4<0$$

نحل المعادلة:

$$t^2-5t+4=0 \Rightarrow (t-1)(t-4)=0$$

نجد الجذرين:

$$t_1=1 \quad , \quad t_2=4$$

نرسم إشارة المقدار $t^2-5t+4$ ونأخذ المجال الذي يكون فيه المقدار سالبًا:

$$1<t<4$$

نعود إلى $t=e^x$:

$$1<e^x<4$$

نأخذ اللوغاريتم للطرفين:

$$\ln 1<x<\ln 4 \Rightarrow 0<x<\ln 4$$

**مجموعة الحل هي:**

$$S=]0,\ln 4[$$

# مجموعة تعريف التابع الأُسّي

عند التعامل مع توابع أُسّية من الشكل:

$$f(x) = e^{g(x)} \qquad f(x) = \frac{e^{a(x)}}{e^{b(x)}} \qquad f(x) = \frac{g(x)}{e^{a(x)}}$$

نقوم بتحديد مجموعة تعريف التابع وفقًا لقواعد واضحة كما في الجدول الموضح.

### أولًا: عندما يكون التابع يحتوي على أسس فقط (بدون كسر)

إذا كان التابع يحتوي على تعابير من الشكل:

$$f(x) = e^{a(x)} \cdot e^{b(x)}$$

نقوم بتحديد مجموعة تعريف كل أُس على حدة، ثم نأخذ التقاطع:

$$D_f = D_1 \cap D_2$$



### ثانيًا: عندما يكون التابع عبارة عن كسر يحتوي أُسس

مثل:

$$f(x) = \frac{g(x)}{e^{a(x)}}$$

في هذه الحالة نتابع كما يلي:

نحدد أولًا:

$$D_1 = \quad g(x)$$

ثم:

$$D_2 = \qquad e^{a(x)} \neq 0$$

لكن بما أن:

$$e^{a(x)} \neq 0$$

فإنه لا حاجة لحذف قيم من المقام، ويبقى:

$$D_f = D_1$$

### ثالثًا: عندما يكون التابع كسراً يحوي أُسين

إذا كان الشكل مثل:

$$f(x) = \frac{e^{a(x)}}{e^{b(x)}}$$

نحدد:

$$D_1 = \quad e^{a(x)} \qquad \mathbb{R}$$

و

$$D_2 = \quad e^{b(x)} \qquad e^{b(x)} = 0$$

لكن:

$$e^{b(x)} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

إذن:

$$D_f = D_1 \cap D_2 = \mathbb{R}$$

---

### ملخص مهم:

التابع الأُسّي معرف دومًا على **كامل مجموعة الأعداد الحقيقية**. أما إذا دخل المقام أو كسر في التابع، فإننا نتحقق من المقام ونحذف فقط القيم التي تنعدم فيه، رغم أن $e^x$ **لا ينعدم أبدًا**. لذلك تبقى أغلب هذه التوابع معرفة على $\mathbb{R}$ ما لم يُذكر غير ذلك.

**السؤال:**

ليكن التابع:

$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{1 + e^x}$$

فإن مجموعة تعريف هذا التابع هي:

اختر الإجابة الصحيحة:

(A) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(B) $\mathbb{R} \setminus \{\ln(-1)\}$

(C) $\mathbb{R} \setminus \{\ln(-2)\}$

(D) $\mathbb{R}$

لدراسة مجموعة تعريف التابع:

$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{1 + e^x}$$



نلاحظ أن التابع كسر يحوي $e^x$ في المقام، لذا يجب دراسة:

$$1 + e^x \neq 0$$

إذن:

$$D_f = \mathbb{R}$$

وهذا يعني أن التابع معرف على كامل الأعداد الحقيقية.

---

## نهايات التابع الأُسّي

### أولاً: نهاية التابع $e^x$ بحد ذاته

عندما يقترب $x$ من قيمتين متطرفتين، نحصل على النهايات التالية:

عند الاقتراب من سالب مالانهاية:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

وهذا لأن $e^x$ يقترب تدريجياً من الصفر دون أن يبلغه أبداً

عند الاقتراب من موجب مالانهاية:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

لأن $e^x$ تابع متزايد بشكل انفجاري

### ثانياً: مقارنة بين $e^x$ وكثيرات الحدود

نقارن بين التابع الأُسّي والتوابع كثيرة الحدود من حيث النهايات:

إذا كان لدينا النهاية

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$$

فهي تساوي

$$+\infty$$

لأن $e^x$ ينمو أسرع من أي كثير حدود مهما بلغت درجته

أما

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

لأن $e^x$ يهيمن على كثير الحدود، فيدفع الكسر نحو الصفر

### ثالثاً: عندما يظهر $e^x$ في المقام

مثل:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

لأن المقام يتجه نحو المالانهاية، وبالتالي الكسر يتجه نحو الصفر

---

### رابعاً: نهايات مشهورة تتعلق بمشتقة $e^x$

مثل:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

وهاتان النهايتان أساسيتان في التفاضل، وهما تعنيان أن المشتقة الأولى لـ $e^x$ عند الصفر تساوي 1



### ملاحظات إضافية

لقيم محددة مثل:

$$e^0 = 1 \qquad e^1 = e \qquad e^{+\infty} = +\infty \qquad e^{-\infty} = 0$$

يُسمح أحياناً بكتابتها اختصاراً دون برهان لأنها قواعد محفوظة

---

### مقارنات تساعد على التقييم السريع للنهايات

- عندما يكون $x$ صغير، فإن $e^x$ يكون قريباً من 1
- عندما يكون $x$ كبير، فإن $e^x$ يصبح ضخماً جداً مقارنة بأي كثير حدود

### خلاصة

عند دراسة نهايات التابع الأُسّي، تذكّر دائماً أن $e^x$ ينمو أسرع من أي كثير حدود، وأنه موجب دائماً، كما أن نهايته عند سالب مالانهاية تساوي صفراً، وهذا ما يجعل $e^x$ تابعاً حيوياً في دراسة التغيرات والتحليل الرياضي.

### اختر النهاية الصحيحة للتابع التالي:

$$f(x) = e^x - x$$

عندما $x \to +\infty$

(A) $-\infty$

(B) $0$

(C) $+\infty$

(D) غير موجودة

---

### الإجابة الصحيحة: (C)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^x - x)$$

نهاية من الشكل:

$$\infty - \infty$$

نكتب:

$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

**اختر النهاية الصحيحة للتابع التالي:**

$$f(x) = e^x - \ln x$$

عندما $x \to +\infty$

(A) $0$

(B) $-\infty$

(C) $+\infty$

(D) غير موجودة

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^x - \ln x)$$

نهاية من الشكل:

$$\infty - \infty$$

نكتب:

$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

**الإجابة الصحيحة: (C)**

---

**اختر النهاية الصحيحة للتابع الآتي:**

$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{1 + e^x}$$

عندما $x \to +\infty$

(A) $0$

(B) $1$

(C) $2$

(D) غير موجودة

**الإجابة الصحيحة: (C)**

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x + 1}{1 + e^x}$$

وهي حالة عدم تعيين من الشكل:

$$\frac{\infty}{\infty}$$

نقسم البسط والمقام على $e^x$

$$f(x) = \frac{2 + \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2+0}{0+1} = 2$$

**اختر النهاية الصحيحة للتابع الآتي:**

$f(x) = (x^2 - 2x)e^x$

عندما $x \to -\infty$

(A) $-\infty$

(B) $0$

(C) $+\infty$

(D) غير موجودة

**الإجابة الصحيحة: (B)**

لدينا:

$$f(x) = (x^2 - 2x)e^x = x^2e^x - 2xe^x$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2e^x - 2xe^x$$

$$= 0 - 0 = 0$$

لأن:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

---

**اختر النهاية الصحيحة للتابع الآتي:**

$f(x) = e^{2x} - e^x + 3$

عندما $x \to +\infty$

(A) $3$

(B) $+\infty$

(C) $-\infty$

(D) غير موجودة

**الإجابة الصحيحة: (B)**

نكتب التابع بالشكل:

$$f(x) = e^x\left(e^x - 1 + \frac{3}{e^x}\right)$$

عندما $x \to +\infty$ يكون:

$$e^x \to +\infty \quad \frac{3}{e^x} \to 0$$

إذن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

## اشتقاق التابع الأُسّي

$$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$$

أي إن مشتقة التابع الأُسّي تساوي:

**مشتقة الأس مضروبة بالتابع نفسه.**

---

**السؤال:**

إذا كانت

$f(x) = e^{5x}$

فإن مشتقة الدالة $f'(x)$ تساوي:

(A) $5x \cdot e^{5x}$

(B) $5 \cdot e^{5x}$

(C) $e^{5x}$

(D) $x \cdot e^{5x}$

الأس هنا هو:

$$5x \quad \Rightarrow \quad (5x)' = 5$$

إذن:

$$f'(x) = 5 \cdot e^{5x}$$

---

**الجواب الصحيح هو: (B)**

**السؤال:**

إذا كانت

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

فإن مشتقة الدالة $f'(x)$ تساوي:

(A) $-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

(B) $\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

(C) $\ln(x) \cdot e^{\frac{1}{x}}$

(D) $e^{\frac{1}{x}}$

الأس هنا هو:

$$\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

إذن:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

---

**الجواب الصحيح هو: (A)**

**السؤال:**

إذا كانت

$f(x) = e^{\cos x}$

فإن مشتقة الدالة $f'(x)$ تساوي:

(A) $\cos x \cdot e^{\cos x}$

(B) $\sin x \cdot e^{\cos x}$

(C) $-\sin x \cdot e^{\cos x}$

(D) $\cos x \cdot e^{\sin x}$

الأس هنا هو:

$$\cos x \quad \Rightarrow \quad (\cos x)' = -\sin x$$

إذن:

$$f'(x) = -\sin x \cdot e^{\cos x}$$

---

**الجواب الصحيح هو: (C)**

**السؤال:**

إذا كانت

$f(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^x$

فإن مشتقة الدالة $f'(x)$ تساوي:

(A) $2x \cdot e^x - 2e^x$

(B) $x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x$

(C) $-2e^x + x^2 \cdot e^x$

(D) $(x^2 - 2x)' \cdot e^x$

**الحل:**

نستخدم قاعدة جداء دالتين:

$$f(x) = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

حيث:

$$u = x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad u' = 2x - 2$$
$$v = e^x \quad \Rightarrow \quad v' = e^x$$

إذن:

$$f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x$$
$$f'(x) = 2xe^x - 2e^x + x^2e^x - 2xe^x$$
$$f'(x) = -2e^x + x^2e^x$$

---

**الجواب الصحيح هو: (C)**

**السؤال:**

إذا كانت

$$f(x) = e^{-x} \cdot \ln x$$

فإن مشتقة الدالة $f'(x)$ تساوي:

(A) $-e^{-x} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot e^{-x}$

(B) $-e^{-x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot e^{-x}$

(C) $e^{-x} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot e^{-x}$

(D) $e^{-x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot e^{-x}$

**الحل:**

نستخدم قاعدة جداء دالتين:

$$f(x) = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

نضع:

$$u = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad u' = -e^{-x}$$

$$v = \ln x \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{1}{x}$$

نطبق:

$$f'(x) = (-e^{-x}) \cdot \ln x + e^{-x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -e^{-x} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot e^{-x}$$

---

**الجواب الصحيح هو: (A)**

## دراسة تابع لحل معادلة مختلطة

$$x^2 + 1 - e^x = 0$$

هذه المعادلة تحتوي على حدود كثيرة الحدود $(x^2 + 1)$ وحدود أسية $(e^x)$، ولذلك تُسمى:

**معادلة مختلطة.**

**خطوات حل المعادلات المختلطة:**

١. ننقل جميع الحدود إلى طرف واحد من المعادلة بحيث يصبح الطرف الآخر صفرًا:

$$x^2 + 1 - e^x = 0$$

٢. نضع:

$$g(x) = x^2 + 1 - e^x$$

٣. ندرس تغيّرات الدالة $g(x)$ عبر جدول تغيّراتها.

٤. باستخدام جدول التغيّرات، نطرح الأسئلة التالية:

هل يحقق $g(x) = 0$ حلاً؟

٥. نعتمد على الملاحظات التالية:

إذا كان الصفر لا ينتمي إلى مجال التغيّرات لـ $g(x)$، فإن:

**المعادلة مستحيلة الحل**

أما إذا:

ينتمي الصفر إلى مجال التغيّرات لـ $g(x)$، فإننا نبدأ بحل المعادلة بالتجريب، والبحث عن جذر تقريبي لـ $g(x) = 0$

**ملاحظات مهمة:**

١. في حال لم نجد الجذر بدقة، نستخدم طريقة المربعات أو الرسم البياني أو تقريب عدد الحل.

٢. الحلول تكون تقريبية دائمًا، لأن الشكل لا يسمح بحلول جبرية مباشرة.

---

**الهدف:**

تحليل وتفسير ما إذا كانت المعادلة المختلطة قابلة للحل، وفي حال كانت كذلك، تحديد قيمة تقريبية للجذر.

---

**اختر الإجابة الصحيحة التي تُمثّل حل المعادلة:**

$$\frac{2e^x-3}{e^x+1}-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}=0$$



(A) لا يوجد حل للمعادلة
(B) الحل هو $x=1$
(C) الحل هو $x=0$
(D) الحل هو $x=-1$

**الحل:**

نضع:

$$g(x)=\frac{2e^x-3}{e^x+1}-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$$

ندرس نهاية التابع عندما $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\frac{2e^x-3}{e^x+1}-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$$

نقسم البسط والمقام على $e^x$ في الكسر الأول:

$$=\frac{2-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$$

عندما $x\to+\infty$، نعلم أن:

$$\frac{1}{e^x}\to 0$$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=2-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}=-\infty$$

وبما أن $g(x)$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$، نبحث الآن عن جذورها.

نوجد مشتقة $g(x)$:

$$g'(x)=\left(\frac{2e^x-3}{e^x+1}\right)'-\frac{5}{4}$$

نشتق الكسر باستخدام قاعدة القسمة:

$$g'(x)=\frac{(2e^x)(e^x+1)-(2e^x-3)(e^x)}{(e^x+1)^2}-\frac{5}{4}$$

نبسّط البسط:

$$2e^x(e^x+1)=2e^{2x}+2e^x$$

$$(2e^x-3)e^x=2e^{2x}-3e^x$$

إذًا:

$$g'(x)=\frac{2e^{2x}+2e^x-(2e^{2x}-3e^x)}{(e^x+1)^2}-\frac{5}{4}$$

$$g'(x)=\frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}+3e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{5}{4}=\frac{5e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{5}{4}$$

نجعل $g'(x)=0$ للبحث عن جذور الدالة:

$$\frac{5e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{5}{4}$$

نحذف الـ 5 من الطرفين:

$$\frac{e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{1}{4}$$

نضرب طرفين بوسطين:

$$4e^x = (e^x + 1)^2$$

نفتح التربيع:

$$4e^x = e^{2x} + 2e^x + 1$$

ننقل جميع الحدود إلى طرف واحد:

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

نضع:

$$t = e^x \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

إذًا:

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

**نختبر الجذر:**

$$g(0) = \frac{2 \cdot 1 - 3}{1+1} - 0 + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

إذًا:

**الجواب الصحيح هو (C)**

$$x = 0$$

---

# المعادلات التفاضلية

## التمرين الأول

أثبت أن التابع $f(x) = xe^x$ هو حل للمعادلة التفاضلية:

$$y' - y = e^x$$

ثم استنتج أن:

$$(f'' - 2f' + 2f)e^{-x} = x$$

**الحل:**

نحسب المشتقة الأولى:

$$f'(x) = e^x + xe^x$$

ونحسب المشتقة الثانية:

$$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$



نعوّض في طرف المعادلة:

$$y' - y = f'(x) - f(x) = (e^x + xe^x) - xe^x = e^x$$

وبما أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن، فإن:

$f(x) = xe^x$ هو حل للمعادلة التفاضلية.

**الاستنتاج:**

نحسب المقدار:

$$f'' - 2f' + 2f = (2e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + 2xe^x$$

نُبسّط:

$$= 2e^x + xe^x - 2e^x - 2xe^x + 2xe^x = xe^x$$

وبالتالي:

$$(f'' - 2f' + 2f)e^{-x} = xe^x \cdot e^{-x} = x$$

## التمرين الثاني

أثبت أن التابع $f(x) = \frac{2x}{e^x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية:

$$y' + y = 2e^{-x}$$

**الحل:**

نعوّض:

$$y = \frac{2x}{e^x}$$

نحسب المشتقة باستخدام قاعدة القسمة:

$$f'(x) = \frac{2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{2-2x}{e^x}$$

نجمع:

$$f'(x) + f(x) = \frac{2-2x}{e^x} + \frac{2x}{e^x} = \frac{2}{e^x} = 2e^{-x}$$

وبالتالي $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية المطلوبة.

---

## ثانيًا: تعيين قيمة المجهول ليكون التابع حلًا لمعادلة تفاضلية

**نص التمرين**
لتكن $(E)$ المعادلة التفاضلية:

$$y' + 3y = 2e^{-x}$$

عيّن العدد $a$ ليكون التابع:

$$f(x) = ae^{-x}$$

حلًا للمعادلة التفاضلية السابقة.

## فكرة الحل

نقوم بالتعويض في المعادلة التفاضلية، حيث نستبدل $y$ بـ $f(x)$، ونستبدل $y'$ بـ $f'(x)$.
نحصل بعد ذلك على معادلة تتضمن المجهول $a$.
بحل هذه المعادلة نحصل على القيمة المطلوبة لـ $a$.

---

## الحل

نعوّض في المعادلة:

$$f(x) = ae^{-x}$$

نحسب المشتقة الأولى:

$$f'(x) = -ae^{-x}$$

نعود إلى المعادلة:

$$y' + 3y = 2e^{-x}$$

بالتعويض:

$$-ae^{-x} + 3ae^{-x} = 2e^{-x}$$

$$(3a - a)e^{-x} = 2e^{-x}$$

$$2ae^{-x} = 2e^{-x}$$

نقسم الطرفين على $2e^{-x}$:

$$a = \frac{2e^{-x}}{2e^{-x}} = 1$$

---

## كيفية حل **المعادلات**

**التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى** والتي تكون على الشكل:

$$y' + ay = b$$

ويكون الحل دائمًا من الشكل:

$$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

إذا كانت المعادلة من الشكل:

$$y' = ay + b$$

فإننا نعيد كتابتها إلى الصيغة القياسية ونستخرج القيم $a$ و $b$ لنطبق الحل مباشرة.



### ١. المعادلة:

$$y' = 3y$$

نلاحظ أنها من الشكل $y' = ay$، إذًا:

$$a = 3, \quad b = 0$$

الحلول تأخذ الشكل:

$$f_k(x) = ke^{3x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

### ٢. المعادلة:

$$3y' = 5y \Rightarrow y' = \frac{5}{3}y$$

نستخرج:

$$a = \frac{5}{3}, \quad b = 0$$

إذًا الحل العام:

$$f_k(x) = ke^{(\frac{5}{3}x)}, \quad k \in \mathbb{R}$$

### ٣. المعادلة:

$$2y' = y - 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

إذًا:

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}$$

نطبّق الحل

$$f_k(x) = ke^{(\frac{1}{2}x)} + 1, \quad k \in \mathbb{R}$$

### ٤. المعادلة:

$$2y + 3y' - 1 = 0 \Rightarrow 3y' = -2y + 1 \Rightarrow y' = -\frac{2}{3}y +$$

إذًا:

$$a = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{3}$$

فنحصل على الحل:

$$f_k(x) = ke^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

عند حل المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$y' = ay + b$$

نجد الحل العام من الشكل:

$$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

لكن عند إعطاء شرط إضافي (مثلاً: $f'(x_0) = m$) فإننا نعوّض في المشتقة ونجد قيمة $k$ المناسبة التي تحقق هذا الشرط.

**سؤال أتمتة:**

إذا علمت أن ميل المماس لحل المعادلة التفاضلية الآتية في النقطة التي فاصلتها $x = 0$ هو $-2$، فإن الحل الخاص للمعادلة هو:

$$2y' + y = 1$$

**ما هو التابع الصحيح الذي يحقق المعادلة والشرط المعطى؟**

(A) $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

(B) $f(x) = 3e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

(C) $f(x) = 4e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

(D) $f(x) = 5e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

**الحل:**

نبدأ بكتابة المعادلة على الشكل النظامي:

$$2y' + y = 1 \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

نحدد القيم:

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}$$

الحل العام للمعادلة هو:

$$f_k(x) = ke^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

نحسب المشتقة:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}ke^{-\frac{1}{2}x}$$



نستخدم الشرط $f'(0) = -2$:

$$f'(0) = -\frac{1}{2}k = -2 \Rightarrow k = 4$$

إذًا الحل هو:

$$f(x) = 4e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

**الجواب الصحيح هو: (C)**

**سؤال أتمتة:**

نريد أن نعيّن تابعًا من الدرجة الثانية $f(x)=ax^2+bx+c$ بحيث يحقق المعادلة التفاضلية:

$$2y'-y=-x^2+x$$

ما هو التابع الصحيح من الخيارات التالية؟

(A) $f(x)=x^2+3x+6$

(B) $f(x)=x^2+x+3$

(C) $f(x)=2x^2+3x+6$

(D) $f(x)=x^2+2x+1$

**الحل:**

نفرض:

$$f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b$$



نعوّض في طرفي المعادلة:

$$2y'-y=2(2ax+b)-(ax^2+bx+c)$$

نوسّع ونرتّب الحدود:

$$4ax+2b-ax^2-bx-c=-x^2+x$$

نجمع الحدود:

$$-ax^2+(4a-b)x+(2b-c)=-x^2+x$$

بالمقارنة بين المعاملات، نجد:

$$-a=-1 \Rightarrow a=1 \quad 4a-b=1 \Rightarrow 4(1)-b=1 \Rightarrow \quad b=3$$

$$2b-c=0 \Rightarrow 2(3)-c=0 \Rightarrow c=6$$

إذًا:

$$f(x)=x^2+3x+6$$

**الجواب الصحيح هو: (A)**

## التابع الأُسّي بالأساس $a$

العدد $a^x$ يمكن كتابته كحالة خاصة من التابع الأُسّي ذي الأساس $e$، وذلك باستخدام العلاقة:

$$a=e^{\ln(a)} \quad \Rightarrow \quad a^x=\left(e^{\ln(a)}\right)^x=e^{x\ln(a)}$$

هذه الكتابة تُسمى "التمثيل الأُسّي" وهي المفتاح لحل المعادلات والمشتقات التي تحتوي $a^x$.

**ثانياً: كيفية التعامل مع التابع $a^x$**

المهارات التي نحتاجها في دراسة هذا النوع من التوابع هي كما يلي:

**١- النهايات والمشتقات**

عند حساب نهاية أو مشتقة تابع من الشكل $a^x$، نستفيد من العلاقة:

$$a^x=e^{x\ln(a)}$$

فنشتق أو نحسب النهاية كما لو كان التابع أسيًا بقاعدة $e$، ثم نتابع كالمعتاد.

**٢- المعادلات والمتراجحات**

لحل المعادلات والمتراجحات التي تحتوي على $a^x$ أو مثلًا:

$$a^{2x}\cdot g(a^x) \qquad a^x=b^x$$

نستخدم التحويل اللوغاريتمي:

- نأخذ **لوغاريتم الطرفين** في حالة وجود مساواة
- أو نفرض $t=a^x$ عندما يكون الشكل مناسبًا

ويجب الانتباه إلى:

- إذا كان العدد سالبًا أو صفرًا، نكتب **"مستحيلة الحل"**
- أما إذا كان موجِبًا، نتابع الحل بشكل اعتيادي

القاعدة الذهبية:

$$a^x = e^{x\ln(a)}$$

تمكّننا من:

- الاشتقاق
- حساب النهايات
- حل المعادلات
- تحليل المتراجحات

وهي من أهم الأدوات في التعامل مع التوابع الأُسية ذات أساس مختلف عن $e$.

---

**سؤال أتمتة:**

إذا كان

$$A = 3^{\frac{-1}{\ln 3}}$$

فإنّ قيمة $A$ تساوي:

**الخيارات:**

(A) $e$
(B) $\frac{1}{e}$
(C) $\ln 3$
(D) $\frac{1}{\ln 3}$

**الحل:**

نحوّل الأساس 3 إلى أساس $e$ باستخدام العلاقة:

$$3 = e^{\ln 3}$$

إذن:

$$A = 3^{\frac{-1}{\ln 3}} = \left(e^{\ln 3}\right)^{\frac{-1}{\ln 3}} = e^{\frac{-1}{\ln 3}\cdot \ln 3} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

---

**الإجابة الصحيحة هي:**

**(B)** $\frac{1}{e}$

**سؤال أتمتة:**

إذا كان

$$B = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$$

فإنّ قيمة $B$ تساوي:

**الخيارات:**

(A) $\sqrt{e}$
(B) $\ln 2$
(C) $\frac{1}{e}$
(D) $e^2$

**الحل:**

نحوّل الأساس 2 إلى أساس $e$ باستخدام العلاقة:

$$2 = e^{\ln 2}$$

إذن:

$$B = 2^{\frac{1}{\ln 4}} = \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{1}{\ln 4}} = e^{\frac{1}{\ln 4}\cdot \ln 2}$$

نلاحظ أنّ:

$$\ln 4 = \ln(2^2) = 2\ln 2$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{\ln 4}\cdot \ln 2 = \frac{\ln 2}{2\ln 2} = \frac{1}{2}$$

إذن:

$$B = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

---

**الإجابة الصحيحة هي:**

**(A)** $\sqrt{e}$

**سؤال أتمتة:**

حل المتراجحة

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$$

هو:

(A) $x < \frac{\ln 4}{\ln 3}$

(B) $x > \frac{\ln 4}{\ln 3}$

(C) $x < -\frac{\ln 4}{\ln 3}$

(D) $x > -\frac{\ln 4}{\ln 3}$

**الحل:**

نأخذ لوغاريتم للطرفين:

$$\ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x\right) > \ln 4$$

$$x \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right) > \ln 4$$

$$x \cdot (-\ln 3) > \ln 4$$

$$-x \cdot \ln 3 > \ln 4$$

نقسم على $-\ln 3$ ونبدل إشارة المتراجحة:

$$x < -\frac{\ln 4}{\ln 3}$$

**الإجابة الصحيحة هي:**

**(C)** $x < -\frac{\ln 4}{\ln 3}$

**سؤال أتمتة:**

حل المتراجحة

$$\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$$

هو:

(A) $x > -1$

(B) $x < -1$

(C) $x < 1$

(D) $x > 1$

**الحل:**

نضرب طرفي المتراجحة بالعدد 3:

$$3 \cdot \frac{2^x}{2^x+1} < 1$$

$$\frac{3 \cdot 2^x}{2^x+1} < 1$$



نضرب طرفي المتراجحة بمقام الطرف الأيسر:

$$3 \cdot 2^x < 2^x + 1$$

ننقل الحدود إلى طرف واحد:

$$3 \cdot 2^x - 2^x < 1$$

$$2 \cdot 2^x < 1$$

$$2^{x+1} < 1$$

نأخذ اللوغاريتم للطرفين:

$$\ln(2^{x+1}) < \ln(1)$$

$$(x+1) \cdot \ln(2) < 0$$

$$x + 1 < 0$$

$$x < -1$$

## تعريف التابع الأصلي:

نقول عن تابع $F(x)$ إنه تابع أصلي للتابع $f(x)$ على مجال $I$ إذا تحقق الشرطان الآتيان:

في المجال $I$:

- مشتق $F(x)$.
- $F'(x) = f(x)$.

## فكرة الحل:

لإثبات أن $F(x)$ تابع أصلي لـ $f(x)$، نتّبع الخطوات الآتية:

1. نثبت أن $F(x)$ قابل للاشتقاق على المجال المعطى $I$
2. نحسب المشتقة $F'(x)$
3. نتحقق أن $F'(x) = f(x)$

---

## مثال توضيحي:

ليكن التابع:

$$f(x) = \tan^2 x$$

ونقترح تابعًا أصليًا:

$$F(x) = \tan x - x$$

ونفرض أن المجال هو:

$$I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

## الخطوة الأولى:

نثبت أن التابع $F(x) = \tan x - x$ قابل للاشتقاق على المجال $I$

- التابع $x \mapsto x$ مشتق على $\mathbb{R}$
- التابع $x \mapsto \tan x$ مشتق على $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$
- بالتالي، تقاطع المجالين هو $I$

إذن $F(x)$ مشتق على $I$

## الخطوة الثانية:

نحسب مشتقة $F(x)$:

$$F'(x) = (\tan x - x)' = (\tan x)' - (x)'$$

$$= 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$$

## الخطوة الثالثة:

نقارن:

$$F'(x) = \tan^2 x = f(x)$$

إذن:

$$F'(x) = f(x) \qquad I$$

---



## النتيجة النهائية:

بما أن التابع $F(x)$ قابل للاشتقاق على المجال $I$ و $F'(x) = f(x)$، فإن:

$$F(x) = \tan x - x \qquad f(x) = \tan^2 x \quad I$$

---

أثبت أن $F(x)$ و $G(x)$ تابعان أصليان للتابع $f(x)$ على المجال:

$$I = ]1, +\infty[$$

حيث:

$$F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}, \quad G(x) = \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}$$

**فكرة الحل:**

نستخدم أحد أسلوبين:

**الأسلوب الأول:**
نحسب الفرق بين $F(x)$ و $G(x)$، ثم نميّز حالتين:

- إذا كان الفرق عددًا ثابتًا، فإن التابعين تابعان أصليان لنفس التابع $f(x)$
- إذا لم يكن الفرق ثابتًا، فهما ليسا تابعين أصليين لنفس التابع

**الأسلوب الثاني:**
نحسب الاشتقاق:

- إذا كانت مشتقتا $F(x)$ و $G(x)$ متساويتين، فإن التابعين تابعان أصليان لنفس التابع $f(x)$

---

**الحل باستخدام الأسلوب الأول:**



نحسب:

$$F(x) - G(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1} - \frac{x^2+7x-5}{x-1}$$

نوحّد المقام:

$$F(x) - G(x) = \frac{(x^2+3x-1)-(x^2+7x-5)}{x-1}$$

نقوم بعملية الطرح في البسط:

$$F(x) - G(x) = \frac{x^2+3x-1-x^2-7x+5}{x-1} = \frac{-4x+4}{x-1}$$

نُبسط البسط:

$$F(x) - G(x) = \frac{-4(x-1)}{x-1} = -4$$

النتيجة:

$$F(x) - G(x) = -4$$

---

**الاستنتاج النهائي:**

بما أن الفرق بين التابعين هو عدد ثابت، فإن:

$F(x)$ $G(x)$ $f(x)$ $I$

## كيفية إيجاد تابع أصلي

نعتمد على القواعد التالية حسب نوع التابع المعطى:

إذا كان لدينا تابع على شكل **مجموع**:

نستخدم قاعدة:

$$\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

أي يمكننا **تكامل كل حد على حدة**.

إذا كان لدينا تابع على شكل **جداء عدد حقيقي بثابت**:

نستخدم قاعدة:

$$\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx$$

أي يمكننا **إخراج الثابت خارج التكامل**.

---

إذا كان لدينا تابع على شكل **جداء تابعين**:

**لا يوجد قانون فوري عام** لتكامل مثل هذا الشكل، بل نلجأ إلى:

- إما **التكامل بالتجزئة** إذا كان مناسبًا
- أو نحاول تبسيط الشكل باستخدام علاقات معروفة
- أو قد يكون التابع غير قابل للتكامل تحليليًا

إذا كان لدينا تابع على شكل **قسمة تابعين**:

**أيضًا لا يوجد قانون فوري عام**، بل قد نحتاج إلى:

- تبسيط الكسر إن أمكن
- أو التحويل إلى صيغة قابلة للتكامل
- أو استخدام التبديل المناسب

---

**ملاحظات عامة:**

- أي تابع بسيط نحاول التعرف إن كان من **الجدول الأساسي للتكاملات**
- دائمًا نحاول **إعادة كتابة التابع بشكل مألوف**
- الهدف هو إيصال الشكل إلى إحدى الصيغ التي يمكننا التعامل معها بسهولة

---

### قاعدة تكامل الثابت :



إذا كان التابع من الشكل:

$f(x) = \alpha$

حيث $\alpha$ عدد حقيقي ثابت، فإن تابعًا أصليًا له هو:

$F(x) = \alpha x + c$

حيث $c$ ثابت تكامل.

**أمثلة تطبيقية:**

---

**أولًا:**

$f(x) = 7$

بما أن التابع ثابت، فإن تابعًا أصليًا له هو:

$F(x) = 7x$

**ثانيًا:**

$$f(x) = 1$$

هذا ثابت أيضًا، وتابعُه الأصلي هو:

$$F(x) = x$$

---

**ثالثًا:**

$$f(x) = -2$$

عدد حقيقي ثابت، وتابعُه الأصلي هو:

$$F(x) = -2x$$

**رابعًا:**

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

عدد حقيقي ثابت، وتابعُه الأصلي هو:

$$F(x) = \frac{x}{2}$$

---

**القاعدة:**

إذا كان التابع من الشكل:

$$f(x) = g'(x) \cdot (g(x))^n$$

حيث:

$$n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

فإن تابعًا أصليًا له هو:

$$F(x) = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + c$$

$$f(x) = (2x+1)(x^2+x+5)^7$$

نلاحظ أن:

$$g(x) = x^2 + x + 5 \qquad g'(x) = 2x + 1$$

إذن التابع من الشكل المطلوب، وبتطبيق القاعدة:

$$F(x) = \frac{(x^2+x+5)^8}{8}$$

---

$$f(x) = e^x(e^x - 1)^2$$

نلاحظ أن:

$$g(x) = e^x - 1 \qquad g'(x) = e^x$$

إذن التابع من الشكل المناسب، ونحسب:

$$F(x) = \frac{(e^x - 1)^3}{3}$$

---

$$f(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^2$$

نلاحظ أن:

$$g(x) = \ln x \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$$

إذن:

$$F(x) = \frac{(\ln x)^3}{3}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)^{-7}$$

نلاحظ أن:

$$g(x)=\frac{1}{x} \qquad g'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

إذن نحصل على:

$$F(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{-6}}{-6}$$

---

إذا كان التابع من الشكل:

$$f(x)=x^n \qquad n\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

فإن تابعًا أصليًا له يُعطى بالعلاقة:

$$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

$$f(x)=x \quad\Rightarrow\quad F(x)=\frac{x^2}{2}$$

$$f(x)=x^3 \quad\Rightarrow\quad F(x)=\frac{x^4}{4}$$

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad F(x)=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$f(x)=x^{-5} \quad\Rightarrow\quad F(x)=\frac{x^{-4}}{-4}=-\frac{1}{4}x^{-4}$$

---

إذا كان:

$$f(x)=g'(x)\cdot(g(x))^n \qquad n\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

فإن تابعًا أصليًا له يُعطى بالعلاقة:

$$F(x)=\frac{(g(x))^{n+1}}{n+1}+c$$

## أمثلة

$$f(x)=\frac{1}{2}(2x+2)(x^2+2x)^{-5} \quad\Rightarrow$$

$$F(x)=\frac{(x^2+2x)^{-4}}{-8}=-\frac{1}{8(x^2+2x)^4}$$

$$f(x)=(-5x^4+10)(x^5-10x)^3 \quad\Rightarrow$$

$$F(x)=\frac{(x^5-10x)^4}{-4}$$

$$f(x)=\frac{\ln x}{x} \quad\Rightarrow\quad F(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$$

---

عندما يُكتب التابع على الشكل:

$$f(x) = g'(x) \cdot \frac{1}{(g(x))^n} = g'(x) \cdot (g(x))^{-n}$$

فإن تابعًا أصليًا له يُعطى بالعلاقة:

$$F(x) = \frac{(g(x))^{-n+1}}{-n+1} + c$$

$$f(x) = \frac{5}{(x-2)^7} = 5(x-2)^{-7} \quad \Rightarrow$$

$$F(x) = \frac{5(x-2)^{-6}}{-6} = -\frac{5}{6(x-2)^6}$$

---

في حال وجود جذر، فإننا نحوله إلى قوة ثم نتابع كما سبق

نتذكر أن:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$: 2x\sqrt{(x^2+1)^5} = 2x(x^2+1)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \qquad F(x) = \frac{2}{7}(x^2+1)^{\frac{7}{2}}$$

---



إذا كان التابع على الشكل:

$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

فإن تابعَه الأصلي يُعطى بالشكل:

$$F(x) = \ln|g(x)| + c$$

عند وجود قيمة مطلقة، يجب التخلص منها وفق الخطوات التالية:

**الخطوة الأولى**
ندرس إشارة مضمون القيمة المطلقة ونميّز بين حالتين:

الحالة الأولى:
إذا كان المضمون موجبًا دائمًا، نحذف القيمة المطلقة مباشرة

الحالة الثانية:
إذا كان المضمون غير موجب على كامل المجال، نُبقي على القيمة المطلقة كما هي أو ندرس تغيّر الإشارة حسب الحاجة

**الخطوة الثانية**
نطبّق القاعدة مباشرة حسب الإشارة:

إذا كان المضمون موجبًا، تبقى الإشارة موجبة

إذا كان المضمون سالبًا، تُعكس الإشارة داخل اللوغاريتم

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad I = ]0, +\infty[ \Rightarrow F(x) = \ln|x| = \ln x$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad I = ]-\infty, 1[ \Rightarrow$$

$$F(x) = \ln|x-1| = \ln(-(x-1)) = \ln(1-x)$$

---

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4}\quad I=]2,+\infty[$$

نلاحظ أن مشتقة المقام هي:

$$(x^2-4)'=2x$$

إذن نضرب ونقسم بالبسط لنحصل على الشكل القياسي:

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-4}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln|x^2-4|$$

---

$$f(x)=\frac{2e^x}{e^x-1}\quad I=]0,+\infty[$$

نلاحظ أن مشتقة المقام هي:

$$(e^x-1)'=e^x$$

إذن:

$$f(x)=2\cdot\frac{e^x}{e^x-1}\Rightarrow F(x)=2\ln|e^x-1|$$

---

عند وجود تابع كسري من الشكل:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

وكانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام، فإننا نلجأ إلى **القسمة الإقليدية** أولًا، ثم نكامل كما سبق.

$$f(x)=\frac{3x^2+7}{2x-1}\quad I=]1,+\infty[$$

نجري قسمة إقليدية:

$$\frac{3x^2+7}{2x-1}=\frac{3x^2}{2x-1}+\frac{7}{2x-1}\Rightarrow$$

$$\frac{3x^2}{2x-1}=\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}+\frac{2}{2x-1}$$

إذن:

$$f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}+\frac{2}{2x-1}$$

نقوم الآن بالتكامل:

$$F(x)=\int\left(\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}+\frac{2}{2x-1}\right)dx$$

$$=\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{4}x+\ln|2x-1|$$

---

**القاعدة:**

إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام، فإننا نحل باستخدام:

**تفريق الكسور**
ثم نكامل كل جزء على حدة كما تعلمنا سابقًا.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

## مثال

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4} \quad I = ]-2, 2[$$

نلاحظ أن:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

نقوم بتفريق الكسر:

$$\frac{x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

نقوم بتوحيد المقامات:

$$x + 1 = A(x+2) + B(x-2)$$

نختار قيمًا مناسبة لـ x:

عند $x = -2$ نحصل على:

$$-1 = -4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

عند $x = 2$ نحصل على:

$$3 = 4A \Rightarrow A = \frac{3}{4}$$

إذًا:

$$f(x) = \frac{3}{4(x-2)} + \frac{1}{4(x+2)}$$

نقوم الآن بالتكامل:

$$F(x) = \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2|$$

إذا كان التابع من الشكل:

$$f(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$$

فإن التابع الأصلي يكون:

$$F(x) = e^{g(x)} + c$$

وإذا كان التابع من الشكل:

$$f(x) = e^{ax}$$

فإن التابع الأصلي هو:

$$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + c$$

## مثال

$$f(x) = 2xe^{x^2} \quad I = \mathbb{R}$$

نلاحظ أن:

$$g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 2x$$

إذًا:

$$f(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)} \Rightarrow F(x) = e^{x^2}$$

## مثال

$$f(x) = (\ln x + 1)e^{x \ln x} \quad I = ]0, +\infty[$$

نلاحظ أن:

$$g(x) = x \ln x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \ln x + 1$$

إذًا:

$$F(x) = e^{x \ln x}$$

**مثال**

$$f(x) = e^{5x} \quad I = \mathbb{R}$$

نطبق القاعدة المباشرة:

$$F(x) = \frac{1}{5} e^{5x}$$

---

**مثال**

$$f(x) = e^{2x^5} \quad I = \mathbb{R}$$

هنا لا يظهر الاشتقاق داخل التابع مباشرة، لذا نكامل:

$$F(x) = \frac{2}{5} x^4 e^{2x^5}$$

**مثال**

$$f(x) = e^{-3x} \quad I = \mathbb{R}$$

نستخدم القاعدة:

$$F(x) = -\frac{1}{3} e^{-3x}$$

**مثال**

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad I = \mathbb{R}$$

بما أن:

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

فإننا نكامل باستخدام تعديل مناسب:

$$F(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$$

**مثال**

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \quad I = \mathbb{R}$$

نلاحظ أن:

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

وبالتالي:

$$f(x) = -g'(x) \cdot e^{g(x)} \Rightarrow F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$$

**مثال**

$$f(x) = \sin x \cdot e^{\cos x} \quad I = \mathbb{R}$$

نلاحظ أن:

$$g(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -\sin x$$

إذًا:

$$f(x) = -g'(x) \cdot e^{g(x)} \Rightarrow F(x) = -e^{\cos x}$$

# تكامل التوابع المثلثية

إذا كان التابع على أحد الأشكال التالية:

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\cos x + c$$

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sin x + c$$

$$f(x) = 1 + \tan^2 x \quad \Rightarrow \quad F(x) = \tan x + c$$

$$f(x) = 1 + \cot^2 x \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\cot x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \tan x + c$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\cot x + c$$

## القسم الثاني: تكامل تابع مركب

إذا كان التابع من الشكل:



$$f(x) = g'(x) \cdot \sin(g(x)) \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\cos(g(x)) + c$$

أو:

$$f(x) = g'(x) \cdot \cos(g(x)) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sin(g(x)) + c$$

أي في الحالتين نعمل على تكامل الدالة الأساسية مع الحفاظ على تركيبها الداخلي.

---

## القسم الثالث: تابع مثلثي مركب خطياً

إذا كان التابع من الشكل:

$$f(x) = \cos(\alpha x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)$$

أو:

$$f(x) = \sin(\alpha x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$$

حيث $\alpha$ عدد ثابت حقيقي.

**دساتير مثلثية نحتاجها للإصلاح قبل التكاملة**

### المجموعة الأولى

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

---

### المجموعة الثانية (دساتير الزاوية المزدوجة)

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

---

### المجموعة الثالثة (دستور نصف الزاوية)

$$\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

### المجموعة الرابعة (دساتير ضرب دوال مثلثية)

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

**ملاحظة مهمة**
تُستخدم هذه الهويات المثلثية بشكل أساسي في تبسيط تراكيب الدوال المثلثية داخل التكامل، وخاصة في تكاملات تتضمن جداء أو مربعات أو تراكيب مثل $\sin x \cos x$.

ليكن التابع

$f(x) = \tan x$

معطى على المجال

$I = \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

فإن تابعًا أصليًا له هو:

**اختر الإجابة الصحيحة مما يلي:**

(A)

$F(x) = \ln(\cos x)$

(B)

$F(x) = \ln|\cos x|$

(C)

$F(x) = -\ln(-\cos x)$

(D)

$F(x) = -\ln(\sin x)$

**الحل الصحيح:**

**(C)**

لأنّ

$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

وبالتكامل نحصل على:

$F(x) = \ln|\cos x| \cdot (-1) = -\ln|\cos x|$

لكن في المجال

$\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

يكون

$\cos x < 0$

فيمكننا إزالة القيمة المطلقة بالشكل:

$|\cos x| = -\cos x \Rightarrow F(x) = -\ln(-\cos x)$

ليكن التابع

$f(x) = \cos^2 x$

معطى على المجال

$I = \mathbb{R}$

فإن تابعًا أصليًا له هو:

**اختر الإجابة الصحيحة مما يلي:**

(A)

$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2x$

(B)

$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$

(C)

$F(x) = x + \sin x \cos x$

(D)

$F(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\sin 2x$



**الحل الصحيح:**

**(B)**

**شرح الحل:**

نستخدم متطابقة ضعف الزاوية:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

أي

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

نقوم بالتكامل:

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

وبالتالي التابع الأصلي هو:

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

ليكن التابع

$f(x) = \sin^3 x$

معطى على المجال

$I = \mathbb{R}$

فإن تابعًا أصليًا له هو:

**اختر الإجابة الصحيحة مما يلي:**

(A)

$F(x) = -\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3}$

(B)

$F(x) = -\cos^3 x + \dfrac{\sin^3 x}{3}$

(C)

$F(x) = \dfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$

(D)

$F(x) = -\cos x - \dfrac{\cos^3 x}{3}$

**الحل الصحيح:**

**(A)**

**شرح الحل:**

نستخدم العلاقة التالية:

$\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x \cdot (1 - \cos^2 x)$

أي

$f(x) = \sin x - \sin x \cos^2 x$

نقوم بالتكامل:

$F(x) = \int (\sin x - \sin x \cos^2 x)dx$

نلاحظ أن

$\int \sin x \, dx = -\cos x$

ولدراسة

$\int \sin x \cos^2 x \, dx$

نستخدم التبديل:

$u = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = -\sin x \, dx$

فيصبح:

$$\int \sin x \cos^2 x \, dx = -\int u^2 \, du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{\cos^3 x}{3}$$

وبالتالي:

$$F(x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$$

---

ليكن التابع

$f(x) = 2\cos x \cdot \sin^2 x$

معطى على المجال

$I = \mathbb{R}$

فإن تابعًا أصليًا له هو:

**اختر الإجابة الصحيحة مما يلي:**

(A)

$F(x) = -2\cos^3 x + 3\sin x$

(B)

$F(x) = \dfrac{2}{3}\sin^3 x$

(C)

$F(x) = 2\cos x \cdot \sin x$

(D)

$F(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2 x$

**الحل الصحيح:**

**(B)**

**شرح الحل:**

نلاحظ أن:

$$f(x) = 2\cos x \cdot \sin^2 x$$

نستخدم التبديل:

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x \, dx$$

فيصبح:

$$f(x)\,dx = 2u^2\,du$$

نقوم بالتكامل:

$$F(x) = \int 2u^2\,du = \frac{2}{3}u^3 = \frac{2}{3}\sin^3 x$$

إذن تابع أصلي لـ

$f(x)$

هو:

$$F(x) = \frac{2}{3}\sin^3 x$$

---

## قواعد التكامل المحدد

**أولاً: الرمز**

يرمز للتكامل المحدد بالرمز

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ويُفهم منه أنه تكامل التابع $f(x)$ بين الحدين $a$ و $b$

---

**ثانياً: القانون الأساسي للتكامل المحدد**

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

أي أنّ نتيجة التكامل المحدد هي الفرق بين قيم التابع الأصلي $F(x)$ عند النهاية العليا $b$ والنهاية السفلى $a$

**ثالثاً: الخواص الأساسية للتكامل المحدد**



1. **قابلية النقل**

إذا بدّلنا حدود التكامل:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2. **الثابت يخرج خارج التكامل**

إذا كان هناك ثابت $\lambda$:

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

3. **تكامل مجموع تابعين**

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

وهذه الخاصية تعمل بالعكس أيضاً:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$$

### رابعاً: العلاقة الشاقولية (علاقة التجزئة)

إذا قسمنا مجال التكامل إلى جزأين عند نقطة داخلية $c$ بين $a$ و $b$:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

وبالعكس:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

**شرط التطبيق الأساسي:** أن يكون التابع نفسه على كل المجال المُجزّأ، وإلا لا يجوز الجمع المباشر

### ملاحظات مهمة:

- الرمز

$$\int_a^b d(x)$$

لا يُغيّر شيئاً عند التكامل لكنه ضروري عند الكتابة

- إذا لم تُعطَ قيمة مطلقة داخل اللوغاريتم في التكامل، فيجب الانتباه إلى الحالات السالبة لاحقاً (الإصلاح يكون بعد التكامل)

### سؤال اتمتة:

إذا كان

$$I = \int_{-1}^{2} (2x-2)\,dx$$

فإن قيمة $I$ تساوي:

(A) $-3$
(B) $3$
(C) $1$
(D) $-1$

### الحل:

نبدأ بحساب التكامل:

$$\int (2x-2)\,dx = x^2 - 2x$$

نطبّق حدود التكامل:

$$I = [x^2 - 2x]_{-1}^{2}$$

نعوّض:

$$I = (2^2 - 2\cdot 2) - ((-1)^2 - 2\cdot(-1))$$

$$I = (4-4) - (1+2) = 0 - 3 = -3$$

**سؤال اتمتة:**

إذا كان

$$I = \int_0^1 2x\, e^{x^2}\, dx$$

فإن قيمة $I$ تساوي:

(A) $e + 1$
(B) $e - 1$
(C) $e$
(D) $1 - e$

**الحل:**

نعتمد على التكامل بالتبديل. نلاحظ أن:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

أي أن:

$$\int 2x \cdot e^{x^2}\, dx = e^{x^2}$$

نطبّق حدود التكامل:

$$I = \left[e^{x^2}\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

---

**الإجابة الصحيحة:**

**(B)** $e - 1$

**سؤال اتمتة:**

إذا كان

$$I = \int_2^4 \frac{3}{x-1}\, dx$$

فإن قيمة $I$ تساوي:

(A) $\ln(3)$
(B) $3\ln(3)$
(C) $3\ln(4)$
(D) $\ln(4)$

**الحل:**

نلاحظ أن:

$$\int \frac{1}{x-1}\, dx = \ln|x-1|$$

إذن:

$$I = \int_2^4 \frac{3}{x-1}\, dx = 3\int_2^4 \frac{1}{x-1}\, dx = 3[\ln|x-1|]_2^4$$

نحسب:

$$3\left(\ln(4-1) - \ln(2-1)\right) = 3(\ln(3) - \ln(1)) = 3\ln(3)$$

---

**الإجابة الصحيحة:**

**(B)** $3\ln(3)$

**سؤال اتمتة:**

إذا كان

$$I = \int_{-1}^{2} (x-2)(x^2-4x+3)\,dx$$

فإن قيمة $I$ تساوي:

(A) $-\frac{3}{4}$
(B) $-\frac{63}{4}$
(C) $\frac{63}{4}$
(D) $\frac{3}{4}$

---

**الحل:**

$$I = \int_{-1}^{2} (x-2)(x^2-4x+3)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{1}{2}(2x-4)(x^2-4x+3)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-4x+3)^2}{2}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\frac{(x^2-4x+3)^2}{4}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{64}{4} = -\frac{63}{4}$$

**سؤال اتمتة**
احسب قيمة التكامل المحدد التالي:

$$I = \int_{-1}^{1} \left(x + 1 - \frac{1}{x+2}\right)\,dx$$

**الخيارات**

(A) $\ln(3)$
(B) $2 - \ln(3)$
(C) $2 + \ln(3)$
(D) $-2 + \ln(3)$

**الحل**
نحسب التكامل كما يلي:

$$I = \int_{-1}^{1} \left(x + 1 - \frac{1}{x+2}\right)\,dx$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} + x - \ln(|x+2|)\right]_{-1}^{1}$$

$$I = \left(\frac{1}{2} + 1 - \ln(3)\right) - \left(\frac{1}{2} - 1 - \ln(1)\right)$$

$$I = \frac{1}{2} + 1 - \ln(3) - \frac{1}{2} + 1 = 2 - \ln(3)$$

**الإجابة الصحيحة هي: (B)**

## سؤال اتمتة

احسب قيمة التكامل المحدد التالي:

$$I = \int_1^2 \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x^2}\, dx$$

### الخيارات

(A) $\frac{25}{6} + \ln(2)$
(B) $\frac{29}{6} + \ln(2)$
(C) $\frac{31}{6} + \ln(2)$
(D) $\frac{29}{6} - \ln(2)$

### الحل

نبدأ بتبسيط الكسر:

$$\frac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x^2} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x}$$

وبالتالي:

$$I = \int_1^2 \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

نحسب التكامل:

$$I = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x|\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 2 + 2 + \ln(2)\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + 0\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 4 + \ln(2)\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{7}{3} + 3 - \frac{1}{2} + \ln(2)$$

$$= \frac{14 + 18 - 3}{6} + \ln(2) = \frac{29}{6} + \ln(2)$$

**الإجابة الصحيحة هي: (B)**

## سؤال اتمتة

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{2x - 1}{x - 1}\, dx$$

### الخيارات

(A) $\ln(3) - \ln(2) - 2$
(B) $\ln(2) + 2 - \ln(3)$
(C) $\ln(2) + \ln(3) - 2$
(D) $2 + \ln(3) + \ln(2)$

### الحل

باستخدام القسمة الإقليدية:

$$\frac{2x - 1}{x - 1} = 2 + \frac{1}{x - 1}$$

وبالتالي يصبح التكامل:

$$I = \int_{-2}^{-1} \left(2 + \frac{1}{x - 1}\right) dx$$

نحسب كل جزء:

$$I = [2x + \ln|x - 1|]_{-2}^{-1}$$

$$= (2(-1) + \ln(2)) - (2(-2) + \ln(3))$$

$$= (-2 + \ln(2)) - (-4 + \ln(3)) = 2 + \ln(2) - \ln(3)$$

**الإجابة الصحيحة هي: (B)**

**سؤال اتمتة**

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$$

**الخيارات**

(A) $\sqrt{4} - \sqrt{1}$
(B) $2(\sqrt{4}) - \sqrt{1}$
(C) $2$
(D) $\sqrt{3}$

**الحل**

نكتب التكامل بالشكل:

$$I = \int_0^3 (1+t)^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

نحسب التكامل:

$$I = \left[\frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = \left[2\sqrt{1+t}\right]_0^3$$

$$I = 2(\sqrt{4}) - 2(\sqrt{1}) = 4 - 2 = 2$$

**الإجابة الصحيحة هي: (C)**

**سؤال اتمتة**

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_0^1 t e^{t^2-1}\, dt$$

**الخيارات**

(A) $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$
(B) $1 - \frac{1}{e}$
(C) $\frac{1}{e}$
(D) $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$

**الحل**

نلاحظ أن:

$$I = \int_0^1 t e^{t^2-1}\, dt$$



نضرب بالبسط والمقام بـ ٢:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot 2t e^{t^2-1}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 2t e^{t^2-1}\, dt$$

نستخدم التعويض:

$$u = t^2 - 1 \Rightarrow du = 2t\, dt$$

وبالتالي يصبح التكامل:

$$I = \frac{1}{2}\left[e^{t^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^0 - e^{-1}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

**سؤال اتمتة**

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

**الخيارات**

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{2}{3}$
(D) $1$

**الحل**

نلاحظ أن التكامل على الشكل:

$$I = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

وهو من النوع:

$$\int \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + C$$

وبالتالي:

$$I = \left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^e$$

نحسب الحدود:

$$= \frac{(\ln e)^3}{3} - \frac{(\ln 1)^3}{3} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

**سؤال اتمتة**

احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^2 x\,dx$$

**الخيارات**

(A) $\frac{1}{4}$
(B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{2}{3}$
(D) $\frac{1}{3}$

**الحل**

نلاحظ أن:

$$\cos x \cdot \sin^2 x = \frac{\sin^3 x}{3}$$



إذن:

$$I = \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

**الإجابة الصحيحة هي: (D)**

**سؤال اتمتة**
احسب قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_0^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$$

**الخيارات**

(A) $\sqrt{2}$
(B) $1$
(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(D) $0$

ثم نطبق الحدود:

$$I = \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$I = -\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$I = -\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$I = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

---

**التكامل بالتجزئة:**

---

**الحالة الأولى**
إذا كان التكامل من الشكل:

$$I = \int_a^b x^n \sin x \, dx \qquad I = \int_a^b x^n \cos x \, dx$$

$$I = \int_a^b x^n e^x \, dx$$

فنختار الفرضية المناسبة:

$$u = x^n \quad \rightarrow \quad u' = nx^{n-1}$$

(التابع الصحيح)

$$v' = \sin x \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

(الباقي ← نكامل)

نضع في القانون:

$$I = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \, dx$$

**الحالة الثانية**
إذا كان التكامل من الشكل:

$$I = \int_a^b x^n \ln x \, dx$$

فنختار الفرضية المناسبة:

$$u = \ln x \quad \rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}$$

(لأن اشتقاق اللوغاريتم سهل)

$$v' = x^n \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(نكامل الباقي)

نضع في القانون نفس الشكل السابق:

$$I = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \, dx$$

**الخطوات المعتمدة للتكامل بالتجزئة**
نستخدم دائمًا:

$$\int_a^b u \cdot v' \, dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \, dx$$

---

**ملاحظة هامة**
قد نضطر إلى تكرار التكامل بالتجزئة عدّة مرات عند احتواء الباقي على حدود مماثلة.

---

**ملاحظة أخرى**
أحيانًا نلجأ إلى التكامل بالتجزئة لإيجاد تابع أصلي:

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

نستخدم هذا لإيجاد التابع الأصلي بدلالة حدود متغيرة.



**ملاحظة هامة**
قد نضطر إلى تكرار التكامل بالتجزئة عدّة مرات عند احتواء الباقي على حدود مماثلة.

---

**ملاحظة أخرى**
أحيانًا نلجأ إلى التكامل بالتجزئة لإيجاد تابع أصلي:

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

نستخدم هذا لإيجاد التابع الأصلي بدلالة حدود متغيرة.

### سؤال اتمتة

ما قيمة التكامل المحدد:

$$I = \int_0^{\pi} x \cos x \, dx$$

(A) $0$
(B) $2$
(C) $-2$
(D) $-1$

**الحل:**

نستخدم التكامل بالتجزئة:

نفرض

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x$

وبالتالي:

$$I = [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= [x \sin x]_0^{\pi} - [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= [x \sin x + \cos x]_0^{\pi}$$

$$= (\pi \cdot \sin \pi + \cos \pi) - (0 \cdot \sin 0 + \cos 0)$$

$$= (0 - 1) - (0 + 1) = -1 - 1 = -2$$

## سؤال اتمتة

أوجد قيمة التكامل المحدد:

$$I = \int_1^2 (x-2)e^x \, dx$$

(A) $e^2 - 2e$
(B) $-e^2 + 2e$
(C) $3e - e^2$
(D) $e^2 - 3e$

**الحل:**

نستخدم التكامل بالتجزئة:

نفرض

$$u = x - 2 \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$I = [(x-2)e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x \, dx$$

$$= [xe^x - 2e^x]_1^2 - [e^x]_1^2$$

$$= [xe^x - 3e^x]_1^2$$

$$= (2e^2 - 3e^2) - (e - 3e)$$

$$= -e^2 + 2e$$

إذن:

(B)

## سؤال اتمتة

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cdot \sin(3x) \, dx$$

(A) $\frac{\pi}{6}$
(B) $\frac{\pi}{9}$
(C) $\frac{\pi}{3}$
(D) $\frac{2\pi}{9}$

**الحل:**

نستخدم التكامل بالتجزئة

نفرض

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \sin(3x) \Rightarrow v = -\frac{1}{3}\cos(3x)$$



نطبق القانون:

$$I = \left[-\frac{1}{3}x\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{1}{3}\cos(3x) \, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[-\frac{1}{9}\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\cos(\pi)\right) + \frac{1}{9}\cdot\sin(\pi) - (0+0)$$

$$= \left(-\frac{\pi}{9}\cdot(-1)\right) + 0 = \frac{\pi}{9}$$

الإجابة الصحيحة هي:

(B) $\frac{\pi}{9}$

## سؤال اتمتة

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$I = \int_1^e (x-1)\ln x \, dx$$

(A) $\frac{e^2}{4} - 1$

(B) $\frac{e^2-3}{4}$

(C) $\frac{e^2+1}{4}$

(D) $\frac{e^2-2}{3}$

**الحل:**

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x - 1 \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} - x$$

$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx$$

$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_1^e$$

$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} + x\right]_1^e$$

$$I = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} + x\right]_1^e$$

$$I = \left[\left(\frac{e^2}{2} - e\right) - \frac{e^2}{4} + e\right] - \left[0 - \frac{1}{4} + 1\right]$$

$$I = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$I = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2-3}{4}$$

## سؤال أتمتة

إذا كان

$$f(x) = x\cos x \quad ; \quad I = \mathbb{R}$$

فإن تابعًا أصليًا للتابع $f$ هو:

الخيارات:

(A) $F(x) = x\sin x + \cos x$

(B) $F(x) = x\sin x - \cos x$

(C) $F(x) = x\sin x + \cos x - 1$

(D) $F(x) = x\cos x + \sin x$

**الحل:**

$$F(x) = \int_0^x t\cos t \, dt$$

نفرض:

$$u = t \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \cos t \Rightarrow v = \sin t$$

$$F(x) = [t\sin t]_0^x - \int_0^x \sin t \, dt$$

$$= [t\sin t]_0^x - [-\cos t]_0^x = [t\sin t + \cos t]_0^x$$

$$= (x\sin x + \cos x) - (0 + 1)$$

$$F(x) = x\sin x + \cos x - 1$$

**الإجابة الصحيحة هي:**

(C) $F(x) = x\sin x + \cos x - 1$

سؤال أتمتة

إذا كان

$$f(x) = x^2 \sin(2x), \quad I = \mathbb{R}$$

فإن تابعًا أصليًا للتابع $f$ هو:

الخيارات:

(A) $F(x) = x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x) - \frac{1}{4}$

(B)
$F(x) = -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{4}$

(C) $F(x) = -x^2 \cos(2x) + x \sin(2x)$

(D)
$F(x) = -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{4}$

الحل:

$$F(x) = \int_0^x t^2 \sin(2t)\, dt$$

نستخدم التكامل بالتجزئة:

$$u = t^2 \Rightarrow u' = 2t \quad , \quad v' = \sin(2t) \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos(2t)$$

$$F(x) = \left[-\frac{1}{2} t^2 \cos(2t)\right]_0^x + \int_0^x t \cos(2t)\, dt$$

نرمز:

$$J = \int_0^x t \cos(2t)\, dt$$

ونكامل $J$ بالتجزئة:

$$u = t \Rightarrow u' = 1 \quad , \quad v' = \cos(2t) \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

$$J = \left[\frac{1}{2} t \sin(2t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}\sin(2t)\, dt = \left[\frac{1}{2} t \sin(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t)\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{4}$$

نعوّض في الأصل:

$$F(x) = -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{4}$$

الإجابة الصحيحة هي:

**(B)**
$F(x) = -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{4}$

---

## أولاً: حساب المساحات

نستخدم التكامل غير المحدد أو المحدد لحساب المساحة المحصورة بين منحنى تابع وخط مستقيم (قد يكون أفقيًا أو مائلًا).

### 1. قاعدة حساب المساحة المحصورة بين منحنيين:

إذا كان لدينا منحنيان:

في الأعلى: منحنى تابع $f(x)$
في الأسفل: خط مستقيم معادلته $y_\Delta$

وكان المطلوب حساب المساحة بينهما من $x = a$ إلى $x = b$، فإننا نستخدم القانون:

$$S = \int_a^b \left(f(x) - y_\Delta\right)\, dx$$

أمّا إذا كان الخط المستقيم هو الأعلى والمنحنى في الأسفل، فإننا نستخدم:

$$S = \int_a^b \left(y_\Delta - f(x)\right)\, dx$$

**تنبيه مهم:**
عند استخدام القانون $\int(-)\,dx$، يجب الانتباه إلى ترتيب المنحنيين، وإلّا قد نحصل على نتيجة سالبة. لذلك نراعي دائمًا وضع القيمة الأكبر ناقص القيمة الأصغر.

**ملاحظات هامة:**

عند استخدام هذه القوانين:

- إذا كانت حدود التكامل غير معطاة صراحة، فإننا نستخرجها من نقاط تقاطع المنحنيين.
- إذا كانت إحدى الدالتين هي محور الأفاصيل، فإن $y=0$، وتصبح قاعدة المساحة:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

- عند التقاطع مع محور التراتيب، نضع $x=0$.
- نتيجة المساحة يجب أن تكون موجبة دائمًا، مهما كان ترتيب المنحنيين.

## ثانيًا: حساب حجم جسم دوراني

إذا دار منحنى تابع $f(x)$ حول محور الأفاصيل (محور $x$)، فإن الجسم الناتج يُسمى جسمًا دورانيًا.

ولإيجاد حجمه بين $x=a$ و $x=b$، نستخدم القانون:

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

حيث $f(x)$ يمثّل نصف القطر من محور الدوران إلى المنحنى.

---

- نحصل على المساحة دائمًا بالتكامل بين منحنيين، حيث نطرح الأصغر من الأكبر.
- نحصل على الحجم عندما يكون لدينا تدوير حول المحور، بشرط أن يكون الشكل مغلقًا بالنسبة لمحور الدوران.
- عند وجود أكثر من نقطة تقاطع، نحدّد أولًا الفواصل المشتركة بدقة ثم نجزئ التكامل إذا لزم الأمر.

**سؤال أتمتة:**

احسب حجم الجسم الناتج عن دوران المنحني

$f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

حول محور الأفاصيل دورة كاملة على المجال

$[1,2]$

**ما هو الحجم الصحيح للجسم الدوراني؟**

**الخيارات:**

(A)

$\frac{5}{8}\pi$

(B)

$\frac{3}{8}\pi$

(C)

$\frac{7}{8}\pi$

(D)

$\frac{2}{3}\pi$



**الحل:**

نستخدم قانون الحجم الناتج عن الدوران:

$$V=\pi\int_1^2 (f(x))^2\,dx$$

نعوّض عن $f(x)$:

$$V=\pi\int_1^2\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^2dx=\pi\int_1^2\frac{1}{x^3}dx=\pi\int_1^2 x^{-3}dx$$

نحسب التكامل:

$$=\pi\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2=\pi\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^2$$

$$=\pi\left(\frac{-1}{8}-\left(\frac{-1}{2}\right)\right)=\pi\left(\frac{-1}{8}+\frac{1}{2}\right)=\pi\cdot\frac{3}{8}$$

**سؤال أتمتة:**

احسب حجم الجسم الناتج عن دوران المنحني

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

حول محور الأفاصيل دورة كاملة على المجال

$[0, 1]$

**ما هو الحجم الصحيح للجسم الدوراني؟**

**الخيارات:**

(A)

$\pi\,(1 - \ln(1+e))$

(B)

$\pi\,(1 + \ln(1+e))$

(C)

$\pi\,(1 - \ln(1+e) + \ln 2)$

(D)

$\pi\,(\ln(1+e) - 1 + \ln 2)$

**الحل:**

نبدأ باستخدام قانون الحجم الدوراني:

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2\,dx$$

نعوّض عن $f(x)$:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

نحوّل الكسر:

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

إذن:

$$V = \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = \pi\,[x - \ln(1+e^x)]_0^1$$

نحسب النتيجة:

$$= \pi\,(1 - \ln(1+e) - (0 - \ln(1+1)))$$

$$= \pi\,(1 - \ln(1+e) + \ln 2)$$

**الإجابة الصحيحة هي: (C)**

$\pi\,(1 - \ln(1+e) + \ln 2)$

**سؤال أتمتة:**

احسب حجم الجسم الناتج عن دوران المنحني

$f(x) = x \cdot \sqrt{x(1-x)}$

حول محور الأفاصيل دورة كاملة، على المجال

$[0, 1]$

**ما هو حجم الجسم الدوراني؟**

**الخيارات:**

(A)

$\frac{\pi}{10}$

(B)

$\frac{\pi}{5}$

(C)

$\frac{\pi}{20}$

(D)

$\frac{\pi}{4}$



نحسب:

$$V = \pi \int_0^1 \left(x \cdot \sqrt{x(1-x)}\right)^2 dx =$$

$$\pi \int_0^1 x^2 \cdot x(1-x) dx = \pi \int_0^1 x^3 - x^4 dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \pi \cdot \frac{1}{20}$$

**الإجابة الصحيحة هي: (C)**

$\frac{\pi}{20}$

### تعريف المتتالية:

المتتالية هي تابع يُعرَّف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

أي من النمط $\{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$

حيث $n_0$ عدد طبيعي يُعطى كقيمة ابتدائية.

### الترميز:

نرمز إلى المتتالية بـ $(u_n)_{n\geq n_0}$ $\quad (u_n)$

ويسمى $u_n$ **الحد العام** أو **حد المتتالية** الموافق للعدد $n.$

### ملاحظة مهمة جداً:

إذا تحقق أن $\lim_{n\to\infty} u_n=\ell$

وكان $\ell$ عددًا حقيقيًا، فإننا نقول:

**المتتالية تقبل نهاية حقيقية.**

أما إذا كانت $\ell$ عددًا غير حقيقي أو غير موجود، فإن النهاية غير معرفة.

### أمثلة على حدود متتالية:

$$u_1=3 \quad , \quad u_2=-7 \quad , \quad u_3=-\frac{5}{2}$$

### ملاحظة:

لا يمكن تعريف $u_{2.5}$ لأن دليل المتتالية يجب أن يكون عددًا طبيعيًا حصراً.

### أشكال المتتاليات:

يمكن التعبير عن المتتالية بإحدى الشكلين الآتيين:

---

### الشكل الصريح:

في هذا الشكل، يُعطى الحد $u_n$ بصيغة صريحة بدلالة $n$، أي أن $u_n$ يُحسب مباشرةً من $n$ دون الرجوع إلى الحدود السابقة.

### أمثلة:

$$u_n=2-7n$$

$$u_n=n^2-3n+1$$

$$u_n=\sqrt{n+1}$$

$$u_n=\frac{n+1}{2-n}$$

$$u_n=3^n$$

$$u_n=\ln(n+3)$$

$$u_n=e^{2n+7}$$

هذا النوع من المتتاليات يُعتبر الأبسط من حيث الدراسة والتحليل، لأن الحد يُحسب مباشرة من قيمة $n.$

### كيفية إيجاد حد من متتالية معطاة بالشكل الصريح:

إذا كانت المتتالية معرفة بصيغة صريحة، فإننا نحصل على أي حد منها عن طريق **استبدال** كل ظهور للرمز $n$ في الصيغة بقيمة دليل الحد المطلوب.

---

**تمرين:**

لتكن لدينا المتتالية

$$(u_n)_{n\geq 0} \qquad u_n = 5n - 1$$

أوجد كلًا من:

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_{50}, \quad u_{n+1}, \quad u_{2n}$$

**الحل:**

نحسب كل حد بإجراء تعويض مباشر:

$$u_0 = 5(0) - 1 = -1$$

$$u_1 = 5(1) - 1 = 4$$

$$u_2 = 5(2) - 1 = 9$$

$$u_{50} = 5(50) - 1 = 249$$

$$u_{n+1} = 5(n+1) - 1 = 5n + 5 - 1 = 5n + 4$$

$$u_{2n} = 5(2n) - 1 = 10n - 1$$

**ملاحظة مهمة:**

في كل مرة نريد فيها حساب حد من المتتالية، نقوم فقط بالتعويض في الصيغة المعطاة، مع الحرص على ترتيب العمليات بشكل صحيح.

### أمثلة على متتاليات معرفة بالعلاقة التراجعية:

نكتب المتتالية على الشكل:

$$u_{n+1} = \quad u_n \qquad u_0 =$$

$$u_{n+1} = 2 - 7u_n, \quad u_0 = 1$$

$$u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 1, \quad u_0 = -1$$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}, \quad u_0 = 3$$

$$u_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{2 - u_n}, \quad u_0 = 1$$

$$u_{n+1} = 3^{u_n}, \quad u_0 = 0$$

$$u_{n+1} = \ln(u_n + 3), \quad u_0 = 1$$

$$u_{n+1} = e^{2u_n - 7}, \quad u_0 = -1$$



**ملاحظات هامة:**

إذا كانت المتتالية معرفة تراجعيًا، فهذا يعني أننا لا نستطيع حساب أي حد إلا بعد معرفة الحد السابق له، ويجب أن يكون معطًى **شرط ابتدائي** (مثل $u_0$) حتى نبدأ في توليد حدود المتتالية.

يمكن استخدام هذه الصيغ لإيجاد $u_1$ ثم $u_2$ ثم $u_3$ وهكذا، وفقًا للحاجة.

**المتتالية**

$(u_n)_{n\geq 0}$

**معرّفة بالعلاقة**

$u_0 = 1$
$u_{n+1} = 2u_n - 3$

$$u_1 = 2u_0 - 3 = 2(1) - 3 = -1$$

$$u_2 = 2u_1 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$$

$$u_3 = 2u_2 - 3 = 2(-5) - 3 = -13$$

$$u_4 = 2u_3 - 3 = 2(-13) - 3 = -29$$

$$u_5 = 2u_4 - 3 = 2(-29) - 3 = -61$$

$$u_6 = 2u_5 - 3 = 2(-61) - 3 = -125$$

$$u_7 = 2u_6 - 3 = 2(-125) - 3 = -253$$

$$u_8 = 2u_7 - 3 = 2(-253) - 3 = -509$$

---

**مجموع يحوي نقاط**

مجموع يحوي نقاطاً، حيث وجود النقاط يعني وجود حدود متخفّية تحمل صفات الحدود التي قبلها والتي بعدها

**مثال:**

$$u_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$$

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^n}$$

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}$$

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$$



**كيفية إيجاد حد من متتالية المجموع:**

نقوم بالخطوات التالية:

نحدد الحد الأول، وذلك باستبدال كل $n$ بالدليل المطلوب
(هذه الخطوة تطبّق عند اللزوم)

نحدد الحد الأخير، باستبدال كل $n$ بالدليل المطلوب

نملأ ما بينهما (عند اللزوم) وفقاً للمتتالية

**سؤال أتمتة:**

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة بالعلاقة:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

ما قيمة $u_3$؟

**الخيارات:**

(A) $\frac{11}{6}$
(B) $\frac{3}{2}$
(C) $\frac{7}{6}$
(D) $\frac{13}{6}$

**الحل:**

نحسب $u_3$ كما يلي:

$$u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

نقوم بتوحيد المقامات:

$$u_3 = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{11}{6}$$

---

**الإجابة الصحيحة هي:**

$$(A) \ \frac{11}{6}$$

**المتتالية الحسابية**

هي متتالية كل حد فيها ينتج عن الحد الذي يسبقه
**بإضافة عدد حقيقي ثابت**
يُسمّى هذا العدد الثابت **أساس المتتالية الحسابية**
ويرمز له:

$$r = -$$

**أمثلة على متتاليات حسابية:**

$$2, 4, 6, 8, ...$$

$$1, 4, 7, 10, ...$$

$$-5, -3, -1, ...$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, ...$$



**المتتالية الهندسية**

هي متتالية كل حد فيها ينتج عن الحد الذي يسبقه
**بضربه بعدد حقيقي ثابت**
يُسمّى هذا العدد الثابت **أساس المتتالية الهندسية**
ويرمز له:

$$q =$$

**أمثلة على متتاليات هندسية:**

$$1, 2, 4, 8, 16, ...$$

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...$$

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, ...$$

**مثال 1:**

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \ldots$$

هذه متتالية هندسية لأن كل حد ناتج عن ضرب الحد السابق بـ:

$$q = \frac{1}{3}$$

**مثال 2:**

$$3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots$$

أيضاً متتالية هندسية:

$$q = \frac{1}{3}$$

**مثال 3:**

$$2, 3, 2, 1, \ldots$$

ليست لا حسابية ولا هندسية لأن الفرق أو النسبة غير ثابتة

**مثال 4:**

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

متتالية هندسية:

$$q = \frac{1}{2}$$

**مثال 5:**

$$\frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^3}, \ldots$$

متتالية هندسية:

$$q = \frac{1}{e}$$

**مثال 6:**

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

متتالية حسابية:

$$r = 1$$

**مثال 7:**

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

متتالية حسابية:

$$r = 2$$

**مثال 8:**

$$1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \ldots$$

متتالية حسابية:

$$r = -\frac{1}{3}$$

**مثال 9:**

$$\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \dots$$

متتالية هندسية:

$$q = \frac{1}{3}$$

**مثال 10:**

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots$$

متتالية هندسية:

$$q = \frac{1}{10}$$

**مثال 11:**

$$1, \frac{1}{9}, \frac{1}{9^2}, \dots$$

متتالية هندسية:

$$q = \frac{1}{9}$$

**مثال 12:**

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$$

متتالية هندسية:

$$q = \alpha$$

## ثانياً: إثبات نوع المتتالية

لدينا نوعان من المتتاليات:

**١. المتتالية الحسابية**
**٢. المتتالية الهندسية**

### أولاً: المتتالية الحسابية

لإثبات أن المتتالية حسابية، نتبع الخطوات التالية:

١. نجد العلاقة بين الحدين المتتالين:

$$u_{n+1} - u_n$$

٢. ندرس هذا الناتج

٣. نميز:

إذا كان ناتج الفرق **يتعلق بـ** $n$
فالفرق ليس ثابتاً وبالتالي **المتتالية ليست حسابية**

إذا كان ناتج الفرق **لا يتعلق بـ** $n$
أي أنه **عدد ثابت**، فالمتتالية تكون **حسابية**
وأساسها هو **ناتج الفرق**



### ثانياً: المتتالية الهندسية

لإثبات أن المتتالية هندسية، نتبع الخطوات التالية:

١. نجد العلاقة النسبية بين الحدين المتتالين:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

٢. ندرس هذا الناتج

٣. نميز:

إذا كان ناتج النسبة **يتعلق بـ** $n$
فالنتيجة ليست ثابتة وبالتالي **المتتالية ليست هندسية**

إذا كان ناتج النسبة **لا يتعلق بـ** $n$
أي أنه **عدد ثابت**، فالمتتالية تكون **هندسية**
وأساسها هو **ناتج النسبة**

**خلاصة:**

لإثبات نوع المتتالية:

نحسب:

**في الحسابية:**

$$u_{n+1} - u_n$$

**في الهندسية:**

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

ثم نقرر حسب النتيجة إذا كانت تحتوي على $n$ أو لا، فإذا كانت لا تحوي $n$ فالمتتالية من ذلك النوع وإلا فهي ليست كذلك.

**سؤال أتمتة:**

هل المتتالية

$(u_n)_{n\geq 0} \qquad u_n = 5n - 1$

هي متتالية حسابية؟ وما هو أساسها إن وُجد؟

**الخيارات:**

(A) ليست حسابية
(B) حسابية أساسها

$r = 4$

(C) حسابية أساسها

$r = 5$

(D) حسابية أساسها

$r = -1$

**الحل:**

نحسب:

$$u_{n+1} = 5(n+1) - 1 = 5n + 5 - 1 = 5n + 4$$



$$u_{n+1} - u_n = (5n + 4) - (5n - 1) = 5$$

إذن:

$$r = 5$$

**الإجابة الصحيحة: (C)** حسابية أساسها

$r = 5$

**سؤال أتمتة:**

هل المتتالية

$$(u_n)_{n\geq 0} \qquad u_n = \frac{3}{2} - 7n$$

هي متتالية حسابية؟ وما هو أساسها؟

**الخيارات:**

(A) ليست حسابية

(B) حسابية أساسها

$r = 7$

(C) حسابية أساسها

$r = -7$

(D) حسابية أساسها

$r = -\frac{7}{2}$

**الحل:**

نحسب:

$$u_{n+1} = \frac{3}{2} - 7(n+1) = \frac{3}{2} - 7n - 7 = -7n - \frac{11}{2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(-7n - \frac{11}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} - 7n\right) = -\frac{14}{2} = -7$$

إذن:

$r = -7$

**الإجابة الصحيحة: (C)** حسابية أساسها

$r = -7$

**سؤال أتمتة:**

هل المتتالية

$$(u_n)_{n\geq 0} \qquad u_n = (n+1)^2 - 3$$

هي متتالية حسابية؟

**الخيارات:**

(A) حسابية أساسها

$r = 2$

(B) حسابية أساسها

$r = 3$

(C) حسابية أساسها

$r = 2n + 3$

(D) ليست حسابية

**الحل:**

نبدأ بتبسيط التعبير:



$$u_n = (n+1)^2 - 3 = n^2 + 2n + 1 - 3 = n^2 + 2n - 2$$

نحسب:

$$u_{n+1} = (n+2)^2 - 3 = n^2 + 4n + 4 - 3 = n^2 + 4n + 1$$

نحسب الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = (n^2 + 4n + 1) - (n^2 + 2n - 2) = 2n + 3$$

بما أن ناتج الفرق يعتمد على

$n$

فالمتتالية **ليست حسابية**.

**الإجابة الصحيحة: (D)** ليست حسابية.

**سؤال أتمتة:**

هل المتتالية

$$(u_n)_{n\geq 0} \qquad u_n = 2n^2 + 3n$$

هي متتالية حسابية؟

**الخيارات:**

(A) حسابية أساسها

$r = 5$

(B) حسابية أساسها

$r = 4n + 5$

(C) حسابية أساسها

$r = 4n$

(D) ليست حسابية

**الحل:**

نحسب الحد التالي:

$$u_{n+1} = 2(n+1)^2 + 3(n+1)$$

$$= 2(n^2 + 2n + 1) + 3n + 3 = 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 = 2n^2 + 7n + 5$$

نحسب الفرق:

$$u_{n+1} - u_n = (2n^2 + 7n + 5) - (2n^2 + 3n) = 4n + 5$$

بما أن ناتج الفرق يعتمد على

$n$

فالمتتالية **ليست حسابية**.

**الإجابة الصحيحة: (D) ليست حسابية.**

**سؤال أتمتة:**

هل المتتالية

$$(u_n)_{n\geq 0} \qquad u_n = \frac{2}{3^n}$$

هي متتالية هندسية؟ وإذا كانت كذلك فما هو أساسها؟

**الخيارات:**

(A) نعم، هندسية أساسها

$q = \frac{1}{3}$

(B) لا، ليست هندسية

(C) نعم، هندسية أساسها

$q = 3$

(D) نعم، هندسية أساسها

$q = \frac{2}{3}$

**الحل:**

نحسب النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3^{n+1}} \div \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$$

بما أن النسبة بين كل حد والذي قبله عدد ثابت

$q = \frac{1}{3}$

فالمتتالية **هندسية**.

**الإجابة الصحيحة: (A) نعم، هندسية أساسها**

$q = \frac{1}{3}$

**سؤال أتمتة:**

هل المتتالية

$(u_n)_{n\geq 0} \qquad u_n = n+2$

هي متتالية هندسية؟ وإذا لم تكن كذلك، فما السبب؟

**الخيارات:**

(A) نعم، هندسية أساسها

$q = 1$

(B) نعم، هندسية أساسها

$q = 2$

(C) لا، لأن النسبة

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+3}{n+2}$

تتغير مع

$n$

(D) لا، لأن الفرق

$u_{n+1} - u_n = 2$

**الحل:**

نحسب النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+3}{n+2}$$

وبما أن هذه النسبة **تتغير** مع

$n$

فالمتتالية **ليست هندسية**.

**الإجابة الصحيحة: (C) لا، لأن النسبة**

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$

**تتغير مع**

$n$

**سؤال أتمتة:**

هل المتتالية

$(u_n)_{n\geq 0} \qquad u_n = \sqrt{2^n}$

هي متتالية هندسية؟ وإذا كانت كذلك، فما هو أساسها؟

**الخيارات:**

(A) نعم، هندسية أساسها

$q = 2$

(B) نعم، هندسية أساسها

$q = \sqrt{2}$

(C) لا، لأنها ليست على شكل

$u_n = ar^n$

(D) لا، لأن الفرق

$u_{n+1} - u_n$

ليس ثابتاً

**الحل:**

نحسب النسبة:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2^n}}{\sqrt{2^n}} = \sqrt{2}$$

إذن المتتالية **هندسية أساسها**

$q = \sqrt{2}$

**الإجابة الصحيحة: (B)**

**المتتالية الحسابية**

إذا كانت $(u_n)$ متتالية حسابية ولدينا حدان كيفيان منها $u_n$ و $u_m$ فإن العلاقة بين هذين الحدين تُعطى وفق القانون التالي:

$$u_n - u_m = (n - m) \cdot r$$

أو يمكن أيضاً كتابة العلاقة بشكل مكافئ:

$$u_m - u_n = (m - n) \cdot r$$

حيث $r$ هو أساس المتتالية الحسابية

**الفائدة**
تُفيد هذه العلاقة في حساب أحد الحدود أو الأساس إذا عُرِف حدان منها فقط



**المتتالية الهندسية**

إذا كانت $(u_n)$ متتالية هندسية ولدينا حدان كيفيان منها $u_n$ و $u_m$ فإن العلاقة بين هذين الحدين تُعطى وفق القانون التالي:

$$u_n = q^{n-m} \cdot u_m$$

أو بشكل مكافئ:

$$\frac{u_m}{u_n} = q^{m-n}$$

حيث $q$ هو أساس المتتالية الهندسية

**الفائدة**
تُفيد هذه العلاقة في حساب أحد الحدود أو الأساس إذا عُرف حدان منها فقط

**ملاحظة مهمة**
في كل من الحالتين السابقة، يجب الانتباه إلى ترتيب الحدود وفق الترتيب الصحيح لأدلة الحدود $n$ و $m$ لضمان صحة تطبيق القوانين الرياضية.

---

## علاقة الحد العام $u_n$ بدلالة $n$

### أولاً: نوع المتتالية معلوم

نميز بين المتتاليتين الحسابية والهندسية:

**المتتالية الحسابية:**

إذا كانت المتتالية حسابية ونعلم أحد حدودها، يمكن كتابة العلاقة العامة كما يلي:

**في حال معرفة الحد $u_0$:**

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

**في حال معرفة الحد $u_7$ مثلاً:**

$$u_n = u_7 + (n - 7) \cdot r$$

**المتتالية الهندسية:**

إذا كانت المتتالية هندسية ونعلم أحد حدودها، تكون العلاقة على الشكل التالي:

**في حال معرفة الحد $u_0$:**

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

**في حال معرفة الحد $u_7$ مثلاً:**

$$u_n = u_7 \cdot q^{n-7}$$

## ثانياً: نوع المتتالية غير معلوم

في حال لم يكن نوع المتتالية معلوماً (أي لم تُذكر في نص السؤال إن كانت حسابية أو هندسية) وكانت المعطيات تحتوي على متتالية أخرى معرفة بدلالة $n$، فإننا نتبع الخطوات التالية:

١. نكتب

$u_n$

بدلالة $n$ وفق نوع المتتالية الأخرى

٢. من علاقة التعشير (أي العلاقة التي تربط المتتاليتين)، نعوّض الحد العام

$v_n$

بالعلاقة الجديدة التي كتبناها لـ

$u_n$

وبهذه الطريقة نحصل على تعبير

$u_n$

بدلالة

$n$

حتى لو لم يكن نوع المتتالية واضحاً في البداية.

---



**السؤال:**

ليكن

$(u_n)_{n\geq 0}$

متتالية حسابية، حيث

$u_0 = -1$

و

$r = 4$

أي من التالي يُمثّل علاقة

$u_n$

بدلالة

$n$؟

**الخيارات:**

(A)
$u_n = 4n - 1$

(B)
$u_n = 4n + 1$

(C)
$u_n = -1n + 4$

(D)
$u_n = -4n + 1$

**الحل:**

بما أن المتتالية حسابية، نستخدم العلاقة:

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

نعوّض:

$$u_n = -1 + n \cdot 4 = 4n - 1$$

إذن العلاقة هي:

$$u_n = 4n - 1$$

**الإجابة الصحيحة هي:**
**(A)**

---

**السؤال:**

ليكن

$(u_n)_{n\geq 0}$

متتالية حسابية، حيث

$u_0 = \frac{45}{2}$

و

$r = 10^{-2}$

أي من التالي يُمثّل

$u_n$

بدلالة

$n$؟

**الخيارات:**

(A)
$u_n = 10^{-2}n + \frac{45}{2}$

(B)
$u_n = \frac{45}{2}n + 10^{-2}$

(C)
$u_n = \frac{45}{2} - 10^{-2}n$

(D)
$u_n = \frac{45-2n}{2\cdot 10^2}$

**الحل:**

نستخدم العلاقة المعروفة للمتتالية الحسابية:

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

نعوّض القيم:

$$u_n = \frac{45}{2} + n \cdot 10^{-2}$$

أو بشكل مرتّب:

$$u_n = 10^{-2} n + \frac{45}{2}$$

**الإجابة الصحيحة هي:**
**(A)**

---

**السؤال:**

ليكن

$(u_n)_{n\geq 0}$

متتالية هندسية، حيث

$u_0 = 10$

و

$q = -\frac{1}{2}$

أي من التالي يُمثّل

$u_n$

بدلالة

$n$؟

**الخيارات:**

(A)
$u_n = 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(B)
$u_n = -\frac{10}{2^n}$

(C)
$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 10$

(D)
$u_n = 10 \cdot (-2)^n$

**الحل:**

بما أن المتتالية هندسية، فإن:

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

نُعوّض:

$$u_n = 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

**الإجابة الصحيحة هي:**
**(A)**

---

## مجموع حدود متتالية منتهية

### أولًا: في حال كانت المتتالية حسابية

إذا كانت المتتالية $(u_n)$ حسابية، فإن مجموع أول $n$ حد يُحسب بالعلاقة:

$$S = \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$$

حيث:

- $u_1$ هو الحد الأول
- $u_n$ هو الحد الأخير
- $n$ هو عدد الحدود

وإذا لم يُعطَ الحد الأخير، يمكن استخدام العلاقة:

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$



### ثانيًا: في حال كانت المتتالية هندسية

إذا كانت المتتالية $(u_n)$ هندسية، فإن مجموع أول $n$ حد منها يُحسب وفق العلاقة:

$$= \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \cdot u_1$$

حيث:

- $u_1$ هو الحد الأول
- $q$ هو أساس المتتالية $q \neq 1$
- $n$ هو عدد الحدود

وإذا كان $q = 1$، فإن المتتالية تصبح ثابتة، ويُحسب المجموع كالتالي:

$$S = n \cdot u_1$$

### ملاحظات مهمة:

- في كلتا الحالتين، يجب الانتباه إلى معرفة نوع المتتالية قبل تطبيق القانون.
- إذا لم يُعطَ عدد الحدود، نستخرجه باستخدام العلاقة بين حدود المتتالية.

---

## مجموع أرقام

### أولاً: في المتتالية الحسابية

إذا كانت المتتالية حسابية، فإن مجموع أول $n$ حد يُحسب بالعلاقة:

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

حيث:

فيها $u_1$ هو الحد الأول، و $u_n$ هو الحد الأخير، و $n$ هو عدد الحدود.

### ثانياً: في المتتالية الهندسية

إذا كانت المتتالية هندسية، فإن مجموع أول $n$ حد يُحسب بالعلاقة:

$$S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

## العلاقة بين ثلاثة حدود متتالية من متتالية حسابية أو هندسية

### أولاً: المتتالية الحسابية

إذا كانت الحدود $a$ و$b$ و$c$ تمثل ثلاثة حدود متتالية من متتالية حسابية، فإن:

$$a + c = 2b$$

وهذه العلاقة تعني أن **الحد الأوسط يساوي متوسط الحدين الآخرين.**

**بالتعويض من صيغة الحد العام:**

إذا كان أساس المتتالية الحسابية هو $r$، فإن:

$$b = a + r$$

$$c = a + 2r$$

### ثانياً: المتتالية الهندسية

إذا كانت الحدود $a$ و$b$ و$c$ تمثل ثلاثة حدود متتالية من متتالية هندسية، فإن:

$$a \cdot c = b^2$$

أي أن **مربع الحد الأوسط يساوي حاصل ضرب الحدين الآخرين.**

**بالتعويض من صيغة الحد العام في المتتالية الهندسية التي أساسها $q$:**

$$b = a \cdot q$$

$$c = a \cdot q^2$$

**خلاصة مهمة للمقارنة:**

في المتتالية الحسابية:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

في المتتالية الهندسية:

$$b = \sqrt{a \cdot c}$$

## دراسة أطراف متتالية

لدراسة أطراف متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، يمكننا اتباع إحدى الطرق الثلاث الآتية:

### أولاً: طريقة الفرق

**الشرط اللازم:**
لا يوجد شروط محددة، ويمكن تطبيقها دائماً

**كيفية التطبيق:**
نحسب الفرق:

$$u_{n+1} - u_n$$

ثم نقارن الناتج مع الصفر، ونميز:

إذا كان:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

فإن المتتالية **متناقصة تماماً**



إذا كان

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

فإن المتتالية **متناقصة**

إذا كان

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

فإن المتتالية **متزايدة تماماً**

إذا كان

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

فإن المتتالية **متزايدة**

إذا كان

$$u_{n+1} - u_n = 0$$

فإن المتتالية **ثابتة**

لدراسة أطراف المتتالية باستخدام **طريقة النسبة**، ندرس الشكل التالي:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

ثم نقارن مع العدد $1$ ونميز كما يلي:

عندما

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

فإن المتتالية متناقصة تماماً

عندما

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

فإن المتتالية متناقصة

عندما

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

فإن المتتالية متزايدة تماماً

عندما

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

فإن المتتالية متزايدة

عندما

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

فإن المتتالية ثابتة

## طريقة التابع لدراسة أطراف المتتالية

$$u_n = f(n)$$

نتّبع الخطوات التالية:

أولاً
نحدد التابع المناسب $f(x)$، بحيث نعوّض مكان $n$ بالمتغير $x$

ثانياً
نقوم بدراسة **اطراد التابع** $f(x)$، وذلك باستخدام المشتقة أو دراسة إشارته

ثالثاً
نستنتج أن جهة أطراف المتتالية هي نفس **جهة أطراد التابع**، أي:

إذا كان التابع $f(x)$ متزايداً
فإن المتتالية $u_n$ متزايدة

وإذا كان التابع $f(x)$ متناقصاً
فإن المتتالية $u_n$ متناقصة

وإذا كان التابع ثابتاً
فإن المتتالية ثابتة أيضاً



**السؤال:**

لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث:

فيما يلي النسبة بين حدين متتاليين:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

بناءً على ذلك، فإن المتتالية:

**الخيارات:**

(A) متزايدة تماماً
(B) متناقصة تماماً ابتداءً من الحد $n = 1$
(C) ثابتة
(D) متناقصة لكن ليس دائماً

**الحل:**

لدينا:

$$u_n = \frac{3}{n^2}$$

نحسب النسبة بين حدين متتاليين:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

بما أن:

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} < 1 \qquad n > 0$$

فإن المتتالية:

$$u_n \qquad n = 1$$

---



السؤال:

**أيٌّ مما يلي يعبّر عن صفة المتتالية التالية؟**

$$u_n = \frac{1}{n^2+1}$$

(A) متزايدة
(B) متناقصة
(C) متناقصة تماماً
(D) ثابتة

الحل:

نحسب الفرق بين حدّين متتالين:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2+1} - \frac{1}{n^2+1}$$

نوحّد المقامات:

$$= \frac{n^2+1-(n^2+2n+2)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$$

$$= \frac{-2n-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0$$

إذن:

$$u_n$$

**الإجابة الصحيحة هي:** (C)

**السؤال:**

لدينا المتتالية المعرفة بـ

$$u_n = \frac{n}{10^n}$$

ما الصفة الصحيحة لهذه المتتالية اعتباراً من الحد $n = 1$؟

(A) متزايدة تماماً
(B) متزايدة
(C) متناقصة تماماً
(D) ثابتة

**الحل:**

نحسب نسبة حدّين متتالين:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}} = \frac{n+1}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n} = \frac{n+1}{10n}$$

وبما أن

$$\frac{n+1}{10n} < 1 \qquad n \geq 1$$

فإن المتتالية متناقصة تماماً بدءاً من الحد $n = 1$

**الإجابة الصحيحة هي:** (C)

**السؤال:**

لدينا المتتالية المعرفة بالعلاقة:

$$u_n = 2^n$$

ما الصفة الصحيحة لهذه المتتالية؟

(A) متناقصة تماماً
(B) متزايدة تماماً
(C) ثابتة
(D) متناقصة بدءاً من $n = 1$

**الحل:**

نحسب نسبة حدّين متتالين:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

وبما أن:

$$2 > 1$$

فإن المتتالية:

**الإجابة الصحيحة هي:** (B)

**السؤال:**

لتكن المتتالية

$$u_n = \frac{n^2}{n!}$$

ما الصفة الصحيحة للمتتالية؟

**الخيارات:**

(A) متزايدة تماماً
(B) متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذو الدليل $n = 1$
(C) متزايدة بدءاً من $n = 2$
(D) ثابتة

**الحل:**

نشكل النسبة بشرط

$$n > 0$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot n^2} = \frac{n+1}{n^2}$$

$$< 1$$

إذاً المتتالية

$$u_n$$

**متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذو الدليل**

$$n = 1$$

**الإجابة الصحيحة هي:**

**(B)**

**السؤال:**

إذا كانت المتتالية

$$u_n = -\sqrt{3^n}$$

فما الصفة الصحيحة لهذه المتتالية؟

**الخيارات:**

(A) متناقصة تماماً بدءاً من $n = 0$
(B) ثابتة
(C) متزايدة تماماً
(D) ليست متزايدة ولا متناقصة

**الحل:**

نشكل النسبة بشرط

$$n \geq 0$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-\sqrt{3^{n+1}}}{-\sqrt{3^n}} = \frac{\sqrt{3^n}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3^n}} = \sqrt{3} > 1$$

إذاً المتتالية

$$u_n$$

**متزايدة تماماً**

**الإجابة الصحيحة هي:**

**(C)**

**السؤال:**

إذا كانت المتتالية

$u_n = 7 - 3n$

فما الصفة الصحيحة لهذه المتتالية؟

**الخيارات:**

(A) متزايدة تماماً
(B) ثابتة
(C) متناقصة تماماً
(D) ليست متزايدة ولا متناقصة

**الحل:**

نشكل الفرق

$$u_{n+1} - u_n = (7 - 3(n+1)) - (7 - 3n)$$

$$= 7 - 3n - 3 - 7 + 3n = -3 < 0$$

إذاً المتتالية

$u_n$

**متناقصة تماماً**

**الإجابة الصحيحة هي:**

**(C)**

---

**السؤال:**

لدينا المتتالية

$(u_n)n \geq 0$

معطاة بالعلاقة:

$un + 1 = 7 + u_n$
$u_0 = -1$

ما هو توصيف تغير هذه المتتالية؟

**الخيارات:**

(A) متزايدة تماماً
(B) متناقصة تماماً
(C) ثابتة
(D) ليست متزايدة ولا متناقصة

**الحل:**

$$u_{n+1} - u_n = 7 + u_n - u_n = 7 > 0$$

إذن
المتتالية $u_n$ **متزايدة تماماً**

الإجابة الصحيحة هي: **(A)**

---

لدراسة نهاية المتتالية

$(u_n)n \geq 0$

نحسب النهاية عند المالانهاية، أي نحسب

$\lim n \to +\infty u_n$

ونميز:

إذا كانت

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

أي أن النهاية عدد حقيقي
فإننا نقول إن **المتتالية متقاربة** أو **تتقارب نحو** $l$

أما إذا كانت

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

فإننا نقول إن **المتتالية تتباعد نحو المالانهاية**

---

**أولاً: إيجاد نهاية متتالية معطاة بشكل صريح**



عندما تكون المتتالية معرفة بصيغة صريحة، أي على شكل

$u_n = f(n)$

فإننا نتعامل مع النهاية تماماً كما نتعامل مع نهايات التوابع.

مثال على قاعدة شهيرة نستخدمها في هذا السياق:

$$\lim_{n\to+\infty} (n!) = +\infty$$

أي أن نهاية عاملي العدد $n$ عندما $n \to +\infty$ تساوي مالانهاية

**السؤال:**

إذا كانت المتتالية

$$u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3n+1}\right)$$

فأي مما يلي يمثل نهاية هذه المتتالية عندما

$n \to +\infty$

**الخيارات:**

(A)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

(B)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$$

(C)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{2}$$

(D)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

**الحل:**

بما أن

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n\pi}{3n+1}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

فإن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = = -\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

إذاً

$u_n \quad ( \quad -\frac{1}{2})$

**الإجابة الصحيحة هي:**

(C)

$-\frac{1}{2}$

**قاعدة نهاية متتالية من الشكل**

$$()^n$$

وهذا النوع من النهايات يعتمد بشكل مباشر على قيمة "العدد"، ويتم التمييز وفق الحالات التالية:

إذا كان:

$$> 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} ()^n = +\infty$$

$$= 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 1^n = 1$$

$$-1 << 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} ()^n = 0$$

$$< -1 \Rightarrow$$

$$= -1 \Rightarrow$$



وهاتان المرحلتان هما:

المرحلة الأولى:

الحصر

$$-1 \le (-1)^n \le 1$$

ثم نؤلف المتتالية المناسبة

المرحلة الثانية:

نقوم بإيجاد النهاية باستخدام مبرهنات الإحاطة والمقارنة، وذلك لتحديد النهاية إذا كانت موجودة أو لا.

في الشكل التالي، لدينا المتتالية:

$$u_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n}$$

ما هي نهاية المتتالية $u_n$ عندما $n \to +\infty$؟

**الخيارات:**

(A) $\frac{1}{3}$
(B) $\frac{2}{3}$
(C) $1$
(D) $\frac{3}{2}$

**الحل:**

نستخدم الحصر كما هو موضح في الصورة:

نعلم أن:

$$-1 \le (-1)^n \le 1$$

نضيف:

$$(2n) \Rightarrow 2n - 1 \le 2n + (-1)^n \le 2n + 1$$

نقسم على $3n > 0$:

$$\frac{2n-1}{3n} \le \frac{2n + (-1)^n}{3n} \le \frac{2n+1}{3n}$$

وبالتالي:

$$\frac{2n-1}{3n} \le u_n \le \frac{2n+1}{3n}$$

نحسب النهايتين:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{3n} = \frac{2}{3} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$$

**استناداً إلى مبرهنة الإحاطة الأولى:**

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$$

لتكن المتتالية:

$$x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

ما نهاية المتتالية $x_n$ عندما $n \to +\infty$ ؟

**الخيارات:**

(A) $0$

(B) $1$

(C) $+\infty$

(D) غير موجودة

**الحل:**

بما أن:

$$\frac{3}{2} > 1$$



فإن:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$$

أي أن المتتالية $x_n$ تتباعد إلى $+\infty$

ا

**تمرين:**

أوجد نهاية المجموع:

$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$

نلاحظ أن $S_n$ يمثّل مجموع حدود من متتالية هندسية

حدها الأول:

$$a = 1$$

أساسها:

$$q = \frac{1}{5}$$

عدد حدودها:

$$n+1$$

باستخدام قانون مجموع متتالية هندسية:

$$S_n = a\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

نعوّض:

$$S_n = 1 \cdot \left(\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}}\right)$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n}$$

وبما أنّ:

$$-1 < \frac{1}{5} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{5}{4}$$

---

المتتاليتان المتجاورتان

التعريف

نقول إن المتتاليتين

$$(s_n)n \geq 0 \qquad (t_n)n \geq 0$$

متجاورتان إذا وفقط إذا تحقّق الشرط الآتي

إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة، ويكون الفرق بينهما يقترب من الصفر عندما

$$n \to +\infty$$

أي

$$\lim_{n\to+\infty} (s_n - t_n) = 0$$

المبرهنة

إذا كانت المتتاليتان

$$(s_n)n \geq 0 \qquad (t_n)n \geq 0$$

متجاورتين، فإنّهما تكونان متقاربتين وتملكان النهاية نفسها، أي

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} t_n$$

نصّ السؤال النموذجي

بيّن أن المتتاليتين

$(x_n)$ و $(y_n)$

متجاورتان

فكرة الحل

نبيّن أن إحدى المتتاليتين متزايدة والأخرى متناقصة، ثم نثبت أن

$$\lim_{n\to+\infty} (y_n - x_n) = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن المتتاليتين متجاورتان، وبالتالي نهايتهما متساويتان.

---

**السؤال:**

ليكن

$$s_n = \frac{1}{n+1} \qquad t_n = -\frac{1}{2n+4}$$

هل المتتاليتان

$$(s_n)n \geq 0 \qquad (t_n)n \geq 0$$

متجاورتان وتملكان النهاية نفسها؟

**الخيارات:**

(A) نعم، لأن المتتاليتين متجاورتان ونهايتهما صفر
(B) لا، لأن المتتاليتين غير متجاورتين
(C) نعم، لأن الفرق بين المتتاليتين ثابت
(D) لا، لأن المتتاليتين غير متقاربتين

**الجواب الصحيح: (A)**

**الحل:**

ندرس أطراف المتتالية

$t_n$

نحسب الفرق:

$$t_{n+1} - t_n = -\frac{1}{2n+6} + \frac{1}{2n+4}$$

$$= \frac{-2n-4+2n+6}{(2n+4)(2n+6)} = \frac{2}{(2n+4)(2n+6)} > 0$$

إذًا

$t_n$

ندرس أطراف المتتالية

$s_n$

نحسب الفرق:

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

إذًا

$s_n$

نحسب الفرق بين المتتاليتين:

$$t_n - s_n = -\frac{1}{2n+4} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{-(n+1)-(2n+4)}{(2n+4)(n+1)} = \frac{-3n-5}{2n^2+6n+4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (t_n - s_n) = 0$$

وبما أن الفرق بين المتتاليتين يقترب من الصفر، فإنهما متجاورتان، ونحسب النهاية المشتركة:

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} s_n = 0$$

---

النهاية المشتركة:

$0$

## محدودية متتالية

نقول إن المتتالية

$(u_n)_{n\geq 0}$

محدودة من الأعلى إذا وُجد عدد حقيقي

$M$

يحقق المتراجحة التالية عند كل عدد طبيعي

$n$

أي:

$u_n \leq M$

ويُدعى هذا العدد

$M$

عنصرًا راجحًا أو حدًا أعلى للمتتالية.

نقول إن المتتالية

$(u_n)_{n\geq 0}$

محدودة من الأسفل إذا وُجد عدد حقيقي

$m$

يحقق عند كل عدد طبيعي

$n$

المتراجحة:

$m \leq u_n$

ويُدعى هذا العدد

$m$

عنصرًا قاصرًا أو حدًا أدنى للمتتالية.

نقول إن المتتالية

$(u_n)_{n\geq 0}$

محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل معًا.

**نص السؤال:**

لكي نثبت أن المتتالية

$(u_n)$

محدودة من الأعلى، نثبت أن:

$u_n \leq M$

ولكي نثبت أنها محدودة من الأسفل، نثبت أن:

$m \leq u_n$

**طريقة الحل:**

في حال كانت المتتالية معرفة بشكل صريح، نحاول تحليل الشكل واستخدام التقدير أو عدم المساواة أو قواعد النهايات أو المقارنات المباشرة للوصول إلى عدد

$M$

أو

$m$

يثبت أن المتتالية محدودة.



في بعض الأحيان يُطلب منا إثبات أن مجموعًا معينًا محدود، أي أنه لا يتجاوز عددًا معينًا أو أنه محصور ضمن مجال. في هذه الحالة نعتمد ما يلي:

إذا كان المجموع نوعه معلومًا (حسابي أو هندسي)، نقوم بإيجاد مجموع الحدود ثم نُقدّر هذا الناتج أو نتابع تحليله وفق القاعدة المعروفة للمحدودية.

أما إذا لم يكن نوع المجموع معلومًا، نحاول استخدام التقدير المباشر للحدود، بحيث نجد عددًا أكبر من جميع الحدود وآخر أصغر منها، ثم نُقدّر المجموع بناءً على ذلك.

وفي حال أعطانا التمرين عددًا قاطعًا (أي: "أثبت أن المجموع أصغر من 10")، نستخدم هذا العدد في عملية المقارنة بعد أن نُقدّر المجموع أو الحدود المطلوبة.

**السؤال**

لتكن المتتالية

$(u_n)_{n\geq 0}$

المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

ما هي الإجابة الصحيحة فيما يلي؟

(A)

$u_n < 1$ لكل $n$ طبيعي

(B)

$u_n > 3$ لكل $n$ طبيعي

(C)

$1 \leq u_n \leq 3$ لكل $n$ طبيعي

(D)

$u_n = 1$ لكل $n$ طبيعي

**الحل:**

من جهة أولى:

$$u_n - 1 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 1 = \frac{n^2+n+1-n^2+n-1}{n^2-n+1}$$

$$= \frac{2n}{n^2-n+1} \geq 0$$

$$u_n - 1 \geq 0 \Rightarrow u_n \geq 1$$

من جهة ثانية:

$$u_n - 3 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 3$$

$$= \frac{n^2+n+1-3n^2+3n-3}{n^2-n+1} = \frac{-2n^2+4n-2}{n^2-n+1}$$

$$u_n - 3 \leq 0 \Rightarrow u_n \leq 3$$

مما سبق نجد أن:

$$1 \leq u_n \leq 3$$

**الإجابة الصحيحة هي:**

**(C)**

---

**السؤال**

المتتالية

$(u_n)_{n\geq 4}$

معرّفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{n^2-5n+6}$$



ما الصحيح بخصوص هذه المتتالية؟

(A)

غير محدودة من الأعلى

(B)

محدودة من الأعلى بالعدد

$\frac{1}{2}$

(C)

محدودة من الأعلى بالعدد

$1$

(D)

محدودة من الأسفل بالعدد

$\frac{1}{2}$

**الحل:**

لدراسة كون المتتالية محدودة من الأعلى بالعدد

$\frac{1}{2}$

نحسب:

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{n^2-5n+6} - \frac{1}{2} = \frac{2-(n^2-5n+6)}{2(n^2-5n+6)}$$

$$= \frac{2-n^2+5n-6}{2(n^2-5n+6)} = \frac{-n^2+5n-4}{2(n^2-5n+6)}$$

$$= \frac{-n^2+5n-4}{2(n^2-5n+6)} = \frac{-(n-4)(n-1)}{2(n-3)(n-2)} \leq 0$$

إذن:

$$u_n - \frac{1}{2} \leq 0 \Rightarrow u_n \leq \frac{1}{2}$$



**الإجابة الصحيحة هي:**
**(B)**

---

**السؤال**
المتتالية

$u_n$

معرّفة من أجل

$n \geq 1$

وفق:

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \qquad u_0 = 0$$

ما العبارة الصحيحة بخصوص هذه المتتالية؟

(A)
$u_n < 0$

(B)
$u_n > 2$

(C)
$0 \leq u_n \leq 2$

(D)

المتتالية غير محدودة

**الحل:**

نستخدم الإثبات بالتدريج

رمز الخاصة:

$$E(n): \quad 0 \leq u_n \leq 2$$

نثبت صحة الخاصة من أجل

$n = 1$:

$$0 \leq u_1 = \sqrt{2} \leq 2 \quad \Rightarrow$$

نفرض صحة الخاصة

$E(n)$:

$$(*) \quad 0 \leq u_n \leq 2$$

نثبت صحة

$E(n+1)$

أي نثبت:

$$0 \le u_{n+1} \le 2$$

من الفرض:

$$0 \le u_n \le 2$$

نضيف $2$ لكل طرف:

$$2 \le u_n + 2 \le 4$$

نأخذ الجذر:

$$\sqrt{2} \le \sqrt{2+u_n} \le \sqrt{4} \Rightarrow 0 \le \sqrt{2+u_n} \le 2 \Rightarrow$$

$$0 \le u_{n+1} \le 2$$

إذن المتتالية محصورة تماماً

**الإجابة الصحيحة هي: (C)**

$$0 \le u_n \le 2$$

---

## دراسة المتتاليات المطردة

لدراسة وجود طلب محدودية لمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$

نتّبع الخطوات التالية:

أولًا: ندرس **إطراد المتتالية**
ثم ندرس **المحدودية** (حتى وإن لم يُطلب ذلك صراحة)

ثانيًا: نميز بين الحالات حسب الإطراد والمحدودية:

إذا كانت المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى،
أو كانت متناقصة ومحدودة من الأسفل،
فإنها تمتلك نهاية حقيقية.

### الحالات الخاصة:

الحالة الأولى:
إذا كانت المتتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى،
فنقول إنها **تتناقص إلى** $+\infty$



الحالة الثانية:
إذا كانت المتتالية متناقصة وغير محدودة من الأسفل،
فنقول إنها **تتناقص إلى** $-\infty$

أثبت أن المتتالية تمتلك نهاية حقيقية
(أي نهاية عددية واقعية)

### كيف نثبت ذلك؟

نستخدم طريقتين رئيسيتين:

**الطريقة الأولى:**
نبرهن أن $\lim_{n\to+\infty} u_n$ يوجد

فإذا كانت نهاية المتتالية عددًا حقيقيًا،
نقول إنها متقاربة

أما إذا كانت النهاية غير منتهية،
فنقول إنها متباعدة

**الطريقة الثانية:**
ندرس المحدودية ونثبت إطراد المتتالية

ثم نستنتج المحدودية باستخدام المبرهنات.

**السؤال:**

هل المتتالية

$$x_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$$

متقاربة؟

(A) $0$ نعم، نهايتها تساوي

(B) $1$ نعم، نهايتها تساوي

(C) لا، غير متقاربة

(D) لا يمكن تحديد ذلك

**الحل:**

نحسب:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$$

نكتب الشكل:

$$x_n = \frac{3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3^n}}$$

بما أن:

$$0 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

و

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

نستنتج:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

إذن:

$x_n$

**الجواب الصحيح هو:**

**$1$ نعم، نهايتها تساوي (B)**

@SASABAC2025

@SASA.BAC