أولاً: المستوي في الفراغ:

حالات كتابة معادلة المستوي في الفراغ:

* تعطى معادلة المستوي بالشكل القياسي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

1 معي نقطة وناظم:

نعوض النقطة والناظم في معادلة المستوي القياسية ثم ننشر

مثال: معادلة المستوي R الذي يمر من النقطة $A(4,-1,0)$ ويقبل $\vec{n}(-2,-2,1)$ شعاع ناظم عليه:

A: $-4x-y-6=0$ B: $-2x+2y+z+6=0$

C: $-2x+2y+z+10=0$ D: $3x-2y+5z-16=0$

الحل: نعوض النقطة والناظم:

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$-2(x-4)-2(y+1)+1(z-0)=0$

$-2x+8-2y-2+z=0$

$-2x-2y+z+6=0$

2 كتابة معادلة مستوي يمر من نقطة ويوازي مستوٍ معلوم

مثال: معادلة المستوي R الذي يمر من النقطة $A(1,0,-2)$ ويوازي المستوي $P: x-y+3z-4=0$ هي:

A: $x-3z+7=0$ B: $x-y+3z-7=0$

C: $x-y+3z+5=0$ D: $x-y+3z+4=0$

الحل: R ← نقطة: $A(1,0,-2)$ ، ناظم: $\vec{n}_R=\vec{n}_P=(1,-1,3)$

كون المستويان متوازيان لهم نفس الناظم

نعوض بالقياسية:

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

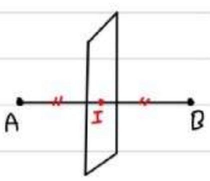
$1(x-1)-1(y-0)+3(z+2)=0$

$x-1-y+3z+6=0$

$R: x-y+3z+5=0$

3 كتابة مستوي محوري لقطعة مستقيمة [AB]

P ← نقطة: منتصف [AB] ، ناظم: $\vec{n}=\vec{AB}$



مثال: معادلة المستوي المحوري للقطعة [AB] حيث $A(0,1,2)$ $B(1,2,-1)$:

A: $-2x-6y+6z+7=0$ B: $-2x-6y+6z-7=0$

C: $2x+2y-6z-1=0$ D: $2x+2y-2z-1=0$

الحل: P ← نقطة: $I(\frac{1+0}{2},\frac{2+1}{2},\frac{-1+2}{2})$ ، ناظم: $\vec{n}=\vec{AB}=(1,1,-3)$

$I(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

نعوض بالقياسية: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$1(x-\frac{1}{2})+1(y-\frac{3}{2})-3(z-\frac{1}{2})=0$

$2\times$ $x+y-3z-\frac{1}{2}=0$

$2x+2y-6z-1=0$

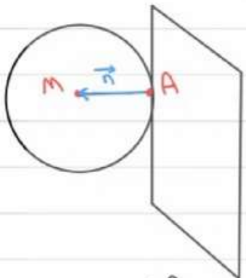
4 كتابة معادلة المستوي مار من نقطة A ويعامد مستقيم (BC)

P ← نقطة: A ، ناظم: $\vec{n}=\vec{BC}$ شعاع توجيه المستقيم.

5 كتابة معادلة مستوي يمس كرة في نقطة منها.

P ← نقطة: نقطة التماس (بتكون معي)

← ناظم: هو الشعاع المار من نقطة التماس ومركز الدائرة



مثال: في معلم متجانس لدينا الكرة:

$$S: (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=5$$

فإن معادلة المستوي P المماس للكرة في النقطة $A(-2,1,1)$ هي:

A: $2x-y+z+4=0$ B: $2x-y+2z+4=0$

C: $2x+y-z=0$ D: $2x-y-3z+8=0$

الحل: P ← النقطة: $A(-2,1,1)$ ، مركز الكرة هو $M(2,-1,3)$

← ناظم: $\vec{n}=\vec{AM}=(4,-2,2)$

نعوض بالقياسية: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$4(x+2)-2(y-1)+2(z-1)=0$

$2\div$ $4x-2y+2z+8=0$

$2x-y+z+4=0$

6 كتابة معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط A,B,C ليست على استقامة واحدة.

P_{ABC}
- نقطة: نختار أي نقطة A أو B أو C
- ناظم: $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$ (جداء خارجي)

نعوض بالقياسية.

مثال: لتكن النقاط: $A(1,2,1)$ $B(-1,-2,3)$ $C(3,-3,0)$
إن معادلة المستوي (ABC) هي:

$\boxed{A}$ $7x+y+9z-5=0$ $\boxed{B}$ $7x+9y+z=0$

$\boxed{C}$ $7x+y+9z-18=0$ $\boxed{D}$ $7x+9y+z+2=0$

الحل: P_{ABC}
- نقطة: $A(1,2,1)$
- ناظم: $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$

$\vec{AB}(-2,-4,2)$ $a: 4+10 = 14$

$\vec{AC}(2,-5,-1)$ $b: 2-4 = -2$

$c: 10+8 = 18$ $\rightarrow \vec{n}(14,2,18) \xrightarrow{\div 2} \vec{n}(7,1,9)$

نعوض بالقياسية:

$7(x-1)+1(y-2)+9(z-1)=0$

$7x-7+y-2+9z-9=0$

$7x+y+9z-18=0$

7 كتابة معادلة مستوي يمر من نقطة A ويقبل شعاعي توجيه فيه: $\vec{u}, \vec{v}$

P
- نقطة: A
- ناظم: $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

مثال: معادلة المستوي P المار من النقطة $A(2,2,-1)$ ويقبل شعاعي توجيه له: $\vec{u}(1,0,2)$ $\vec{v}(0,-2,1)$

$\boxed{A}$ $4x-y-2z-8=0$ $\boxed{B}$ $4x-y-2z-10=0$

$\boxed{C}$ $\frac{1}{2}x-y-2z-3=0$ $\boxed{D}$ $\frac{1}{2}x+y+2z-3=0$

الحل: P
- نقطة: $A(2,2,-1)$
- ناظم: $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{u}(1,0,2)$ $a = 0+4 = 4$

$\vec{v}(0,-2,1)$ $b = 1-0 = 1$

$c = -2-0 = -2$ $\rightarrow \vec{n}(4,-1,-2)$

نعوض بالقياسية:

$4(x-2)-1(y-2)-2(z+1)=0$

$4x-8-y+2-2z-2=0$

$4x-y-2z-8=0$

8 كتابة معادلة مستوي R مار من نقطة ويعامد مستويين P , Q:

R:
- نقطة: $A(x_0,y_0,z_0)$
- ناظم: نوجد الجداء الخارجي لـ $\vec{n}_P, \vec{n}_Q$

مثال: معادلة المستوي R الذي يمر من النقطة $A(-4,0,1)$ ويعامد كلاً من المستويين P و Q:

$P: 2x-y-2z-2=0$

$Q: -x+y+z-3=0$

$\boxed{A}$ $x+z+3=0$ $\boxed{B}$ $-x+y+z-3=0$

$\boxed{C}$ $x-y+3z+5=0$ $\boxed{D}$ $-4x+y+z+3=0$

الحل: R
- نقطة: $A(-4,0,1)$
- ناظم:

$\vec{n} = \vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q$

$\vec{n}_P(2,-1,-2)$ $a = -1+2 = 1$

$\vec{n}_Q(-1,1,1)$ $b = 2-2 = 0$

$c = 2-1 = 1$ $\rightarrow \vec{n}_R(1,0,1)$

نعوض بالقياسية:

$1(x+4)+0(y-0)+1(z-1)=0$

$x+4+z-1=0$

$R: x+z+3=0$

9 كتابة معادلة مستوي R مار من نقطتين A,B ويعامد مستوي P معلوم

R
- نقطة: A أو B
- ناظم: $\vec{n}_R = \vec{n}_P \wedge \vec{AB}$

مثال: معادلة المستوي R المار من النقطتين $A(2,3,1)$ و $B(1,1,3)$ ويعامد المستوي P

$P: 2x-y-2z-2=0$

$\boxed{A}$ $6x+2y+5z-23=0$ $\boxed{B}$ $2x+3y+z-23=0$

$\boxed{C}$ $2x+3y+z+23=0$ $\boxed{D}$ $6x+2y+5z+23=0$

الحل: R
- نقطة: $A(2,3,1)$
- ناظم: $\vec{n}_R = \vec{n}_P \wedge \vec{AB}$

$\vec{n}_P(2,-1,-2)$ $a = -2-4 = -6$

$\vec{AB}(-1,-2,2)$ $b = 4-2 = 2$

$c = -4-1 = -5$

$\vec{n}_R(-6,-2,-5)$ $\times(-)$

$\vec{n}_R(6,2,5)$

نعوض بالقياسية ---- رح يطلع الجواب $\boxed{A}$

المعادلات الوسيطية للمستقيم

لكتابة المعادلات الوسيطية نحن بحاجة لنقطة من المستقيم (x_0, y_0, z_0) وشعاع توجيه للمستقيم $\vec{U}(a, b, c)$

ثم نعوض بالمعادلات:

$$d: \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \quad : t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

ونميز الحالات التالية:

$\boxed{1}$ نتأمل في معلم متجانس النقطتين $A(2, -1, 4)$ $B(1, 1, 2)$ فالمعادلات الوسيطية للمستقيم (AB) هي:

$\boxed{A}$ $(AB): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t + 2 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$

$\boxed{B}$ $(AB): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \quad : t \in \mathbb{R} \\ z = t + 2 \end{cases}$

$\boxed{C}$ $(AB): \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = t + 2 \quad : t \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\boxed{D}$ $(AB): \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = t + 1 \quad : t \in [0, 1] \end{cases}$

الحل: (AB)

- نقطة: A أو B (منشوف هوي شو مستخدم)
- شعاع توجيه: $\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{BA}$ (كمان منشوف شو مستخدم)

ثم نعوض بالوسيطية .... الجواب Ⓑ.

$\boxed{2}$ ليكن لدينا المستويان، $P: x + y - 2z = 1$

$Q: 2x - y + z + 1 = 0$

فإن المعادلات الوسيطية للمستقيم d الفصل المشترك للمستويين P و Q:

$\boxed{A}$ $d: \begin{cases} x = t \\ y = 3t \quad : t \in \mathbb{R} \\ z = 3t + 1 \end{cases}$

$\boxed{B}$ $d: \begin{cases} x = t \\ y = 5t + 1 \quad : t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$

$\boxed{C}$ $d: \begin{cases} x = t \\ y = 3t \quad : t \in \mathbb{R} \\ z = 5t + 1 \end{cases}$

$\boxed{D}$ $d: \begin{cases} x = t \\ y = 5t \quad : t \in \mathbb{R} \\ z = 5t + 1 \end{cases}$

الحل: بالحل المشترك بين P و Q نجمع:

$P + Q: 3x - z = 0$

$z = 3x$

نفرض $\boxed{x = t}$

$: z = 3t$

نعوض في Q: $2t - y + 3t + 1 = 0$

$y = 5t + 1$ نعوض بالوسيطية

$d: \begin{cases} x = t \\ y = 5t + 1 \quad : t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$ الجواب Ⓑ

$\boxed{3}$ المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ العامودي على المستوي (HFI) والمار من G حيث $(HFI): x + 2y - z = 1$ ، $G(2, 1, 1)$

$\boxed{A}$ $(\Delta): \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = -t + 1 \end{cases}$

$\boxed{B}$ $(\Delta): \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t + 1 \end{cases}$

$\boxed{C}$ $(\Delta): \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = t + 1 \end{cases}$

$\boxed{D}$ $(\Delta): \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t + 1 \end{cases}$

الحل: (Δ)

- نقطة: $G(2, 1, 1)$
- شعاع التوجيه: $\vec{U} = \vec{n} = (1, 2, -1)$

نعوض بالوسيطية

$(\Delta): \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \quad : t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 1 \end{cases}$ الجواب $\boxed{D}$

* الوضع النسبي لمستويين:

$P_1: a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$

$P_2: a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

لدراسة الوضع بين المستويين نناسب الامثال وغيره

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$ فالمستويان منطبقان

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ فالمستويان متوازيان

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ فالمستويان متقاطعان

\# حالة خاصة: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

فإن: $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

ومنه المستويان متعامدان.

$\boxed{1}$ المستويان $P: 2x - y + z + 3 = 0$ ، $Q: x + 2y - 7 = 0$

$\boxed{A}$ متوازيان $\boxed{B}$ متعامدان $\boxed{C}$ منطبقان $\boxed{D}$ لا يشتركان بأي نقطة.

الحل: ندرس الامثال:

$\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{2}$ متقاطعان: يجب دراسة التعامد:

$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q$

$(2, -1, 1) \cdot (1, 2, 0)$

$2 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{n}_P \perp \vec{n}_Q$

فالمستويان متعامدان.

الوضع النسبي لمستقيمين:

لدراسة الوضع النسبي لمستقيمين عنا مرحلتين:

مرحلة ١: نناقش أشعة التوجيه

وعنا

مرتبطة — غير مرتبطة

• إما توازي أو انطباق (المرحلة ٢) — إما تقاطع أو تخالف

ولتحديد الوضع: نأخذ نقطة من أحدهم ونتعوض بالآخر
- محققة: منطبقان
- غير محققة: متوازيان

ولتحديد الوضع نقوم بالحل المشترك حيث:

$x_1 = x_2$

$y_1 = y_2$

$z_1 = z_2$

نحل من معادلتين لنوجد t و s المرتبطة ثم نتأكد بالمعادلة الثالثة
- محققة: تقاطع
- غير محققة: تخالف

1 ليكن لدينا المستقيمان:

$$d:\begin{cases} x = t+3 \\ y = 2t+2 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \qquad d':\begin{cases} x = s \\ y = -3s+1 \quad ; s\in\mathbb{R} \\ z = -2s \end{cases}$$

عندما يكون المستقيمان:

A متقاطعان في نقطة $(1,0,0)$ B متقاطعان في نقطة $(1,-2,-2)$

C متوازيان D متخالفان

الحل:

ندرس أشعة التوجيه:

$\vec{u}_d(1,2,1)$

$\vec{u}_{d'}(1,-3,-2)$ $\quad \frac{1}{1} \neq \frac{2}{-3}$ إما تقاطع أو تخالف

نقوم بالحل المشترك:

$x_1 = x_2$: $t+3 = s$ ⟹ $\boxed{t-s=-3}$ ①

$y_1 = y_2$: $2t+2 = -3s+1$ ⟹ $\boxed{2t+3s=-1}$ ②

$z_1 = z_2$: $t = -2s$ ⟹ $\boxed{t+2s=0}$ ③

نطرح ① و ③: $3s = 3$

$\boxed{s=1}$ نعوض في ①:

$t-1=-3 \Rightarrow \boxed{t=-2}$

نتأكد في ②:

$2(-2)+3(1) = -1$

$-4+3=-1$

$-1=-1$ محققة ومنه متقاطعان بنقطة:

• ولنوجد نقطة التقاطع نعوض $t=-2$ في d

$x=1 \;,\; y=-2 \;,\; z=-2$

$(1,-2,-2)$

2 ليكن المستقيمان

$$d:\begin{cases} x = 3t-4 \\ y = -t+3 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z = 7t-5 \end{cases}$$

$$D:\begin{cases} x = -6s+2 \\ y = 2s+1 \\ z = -14s+m \end{cases}$$

عندما قيمة m التي تجعل المستقيمان منطبقان هي:

A -9 B -2 C 3 D 9

الحل: كون المستقيمان منطبقان: فإن أشعة التوجيه مرتبطة ومنه إذا أخذنا نقطة من d يجب أن تكون محققة في D

نقطة من d لما $t=0$: $(-4,3,-5)$ نعوض في D:

$-4 = -6s+2$ ⟹ $6s = 6$ ⟹ $\boxed{s=1}$

$3 = 2s+1$ ⟹ $2s=2$ ⟹ $\boxed{s=1}$

$-5 = -14s+m$ ⟹ $14s = m+5$ وكون $\boxed{s=1}$

$14(1) = m+5$

$\boxed{m=9}$ الجواب $\boxed{D}$

3 قيمة العدد الحقيقي a ليكون المستقيمين d و L متوازيين هي:

$$d:\begin{cases} x = t+3 \\ y = 2t+2 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \qquad L:\begin{cases} x = (a+1)t \\ y = at \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z = -t+3 \end{cases}$$

A -2 B -1 C 0 D 1

الحل: كون المستقيمان متوازيان فإن أشعة التوجيه مرتبطة خطيا:

$\frac{a+1}{1} = \frac{a}{2} = \frac{-1}{1}$ ① ② ③

من ① و ②

$2a+2 = a$

$\boxed{a=-2}$

الوضع النسبي لمستقيم ومستوي.

عند دراسة الوضع النسبي لمستقيم ومستوي نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم بمعادلة المستوي ونميز الحالات:

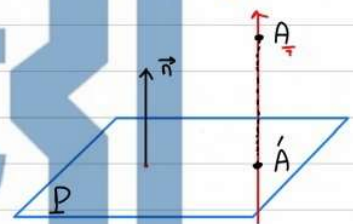
- معادلة محققة (طرفين متساويين) ← المستقيم محتوى بالمستوي
- معادلة غير محققة (طرفين غير متساويين) ← المستقيم يوازي المستوي
- $t =$ عدد ← المستقيم قاطع

* حالة خاصة $\vec{n}\cdot\vec{U}=0$ عندها نعوض قيمة t بالتمثيل الوسيطي لنحصل على احداثيات نقطة التقاطع

لاثبات أن المستقيم يعامد المستوي يكفي اثبات أن $\vec{n}, \vec{U}$ مرتبطين خطياً.

ملاحظة هامة جداً: عند طلب احداثيات المسقط القائم لنقطة على مستوي P:

* ندرس تقاطع المستقيم المار من A والذي يقبل ناظم المستوي $\vec{n}$ شعاع توجيه له.



1 الوضع النسبي للمستقيم $d: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -2t-1 \\ z = t+3 \end{cases}$ والمستوي $P: 2x-2y+z-24=0$

A المستقيم عامودي على المستوي   B المستقيم يوازي المستوي   C المستقيم قاطع للمستوي   D المستقيم محتوى

الحل: نعوض الوسيطية بالمستوي:

$2(2t+1)-2(-2t-1)+t+3-24=0$

$4t+2+4t+2+t-21=0$

$9t=17$

$t=\frac{17}{9}$ فالمستقيم قاطع للمستوي

* يجب دراسة التعامد كذلك ضمن الخيارات.

$\left.\begin{array}{l}\vec{n}(2,-2,1)\\ \vec{U}(2,-2,1)\end{array}\right\} \Rightarrow$ كون الناظم مرتبط مع شعاع التوجيه فالمستقيم يعامد P

2 في معلم متجانس نتأمل المستوي P المعطى بالعلاقة: $P: 2x-2y+\alpha z+3=0$

والمستقيم d المعطى وفق: $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \; ; t\in\mathbb{R} \\ z = 3+2t \end{cases}$

إن قيمة α التي يكون من أجلها المستقيم d موازياً للمستوي P هي:

A -4 B -2 C -1 D 2

* الحل: كون المستقيم يوازي المستوي.

فإن:

* $\vec{n}\cdot\vec{U}=0$

$(2,-2,\alpha)\cdot(1,-1,2)=0$

$2+2+2\alpha=0$

$2\alpha=-4 \rightarrow \alpha=-2$

3 ليكن d معطى وفق: $d: \begin{cases} x = t+1 \\ y = t-2 \; ; t\in\mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$

* والمستوي P المعطى بالمعادلة $P: 2x+ay-z+b=0$ حيث a,b عددان حقيقيان

إذا علمت أن المستقيم d محتوى بالمستوي P فإن الثنائية (a,b) تساوي:

A $(0,1)$ B $(-1,4)$ C $(-1,-4)$ D $(1,0)$

الحل: كون المستقيم محتوى يعني إذا عوضناه بمعادلة المستوي ① المستقيم رح يكون الناتج محقق.

(يلا يا بطل عوض)

$2(t+1)+a(t-2)-3t+b=0$

$2t+2+at-2a-3t+b=0$

$at-t-2a+b+2=0 \quad (*)$

② تاني معادلة:

$\vec{n}\cdot\vec{U}=0$

$(2,a,-1)\cdot(1,1,3)=0$

$2+a-3=0 \rightarrow \boxed{a=1}$

نعوض في (*)

$t-t-2+b+2=0$

$\boxed{b=0}$

هنا: احتجنا إلى معادلتين كون يوجد مجهولين.

41 ليكن المستوي $P: x+2y-z=1$
فإن G' مسقط النقطة $G(2,1,1)$ على المستوي P هي

A $\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ B $\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ C $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$ D $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$

الحل: نوجد المستقيم المار من G وشعاعه $\vec{n}_P$

لـ $\vec{u}=\vec{n}=(1,2,-1)$ ، $G(2,1,1)$

$$d: \begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t+1 \quad : t\in R \\ z = -t+1 \end{cases}$$

ثم نعوض في P:

$$t+2+4t+2+t-1=1$$
$$6t=-2 \to t=-\frac{1}{3}$$

نعوض بالوسطية: $x=-\frac{1}{3}+2$ ، $y=-\frac{2}{3}+1$ ، $z=\frac{1}{3}+1$

$x=\frac{5}{3}$ ، $y=\frac{1}{3}$ ، $z=\frac{4}{3}$

$$G'\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$$

الوضع النسبي لثلاث مستويات:

لدراسة وضع نسبي بين ثلاث مستويات

P_1 ، P_2 ، P_3

ندرس الوضع النسبي لمستويين ثم ندرس الناتج مع الثالث.

ونميز الحالات:

① إذا كان لدينا مستويان متوازيان ← نقول إن المستويات الثلاث لا تشترك بأي نقطة.

② إذا لم يكن لدينا مستويان متوازيان

ندرس تقاطع مستويان (على كيفك تنقي أي مستويين)

ثم ندرس الفصل الناتج مع المستوي الثالث.

• نعوض الوسطية بالمستوي الثالث

(وهيك منكون رجعنا لدراسة مستقيم ومستوي)

ويلي بجيب على المستقيم والمستوي الثالث بجيب على المستويات الثلاث.

حيث بعد التعويض رح نميز حالة من الحالات الآتية:

- $t=$ عدد: فالمستويات الثلاث تشترك بنقطة واحدة
- مثلاً $0=0$: معادلة محققة، المستويات الثلاث تشترك بالفصل المشترك
- مثلاً $5=0$: معادلة غير محققة، المستويات الثلاث لا تشترك بأي نقطة.

1 في معلم متجانس لدينا المستويات الثلاث

$P_1: x+y-z=3$ ، $P_2: y+z=2$ ، $P_3: x+z=1$

تتقاطع هذه المستويات بنقطة احداثياتها:

A $(-2,-1,3)$ B $(0,1,2)$ C $(2,3,-1)$ D $(1,2,0)$

الحل: ندرس P_2 ، P_3 : $\vec{n}_2(0,1,1)$ ، $\vec{n}_3(1,0,1)$ غير متوازيين

نوجد الفصل المشترك لهم: من ③ $x+z=1$

$x=1-z$

نفرض $z=t$ ← $x=1-t$

نعوض في ② $y=2-t$

$$d: \begin{cases} x=1-t \\ y=2-t \quad : t\in R \\ z=t \end{cases}$$

نعوض في P_1:

$P_1: 1-t+2-t-t=3$

$-3t=0$

$t=0$ نعوض بالوسطية لتجد:

$x=1$ ، $y=2$ ، $z=0 \to (1,2,0)$ نقطة تقاطع المستويات الثلاث.

2 في معلم متجانس لدينا المستويات الثلاث

$P_1: x-y+2z=1$ ، $P_2: -x+y-2z=-2$

$P_3: -x+y+2z=3$

عند دراسة الوضع النسبي لهذه المستويات الثلاث، نجد أن مجموعة النقاط المشتركة:

A نقطة وحيدة B المستوي P_1 C مجموعة خالية D مستقيم.

الحل: ندرس P_1 ، P_2

$$\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}=\frac{2}{-2}\neq\frac{-1}{2}$$

فالمستويان P_1 ، P_2 متوازيان ومنه المستويات الثلاث لا تشترك بأي نقطة: تمثل مجموعة خالية.

3 نتأمل في معلم متجانس ثلاث مستويات:

$P_1: 2x + y - 3z = 5$

$P_2: -2x + 5y + 9z = 13$

$P_3: x + 3y + z = 10$

عند حل جملة المعادلات الخطية الموافقة نجد أنها تتقاطع بـ:

A النقطة $(2,1,-1)$ B النقطة $(1,4,-1)$

C المستقيم $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = -2t + 3 \end{cases}$ D $d: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t + 3 \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

الحل: ندرس P_1, P_2:

نلاحظ أن الناظمين غير مرتبطين ← حالة تقاطع (نوجد d)

نجمع P_1, P_2

$6y + 6z = 18 \quad \div 6$

$y + z = 3$

$y = 3 - z$

نفرض $z = t$

فيكون $\boxed{y = 3 - t}$

نعوض في ①

$2x + 3 - t - 3t = 5$

$2x = 4t + 2 \quad \div 2$

$\boxed{x = 2t + 1}$

الفصل المشترك لـ P_1, P_2 $\Rightarrow d: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3 - t \; : t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

نعوض في P_3:

$2t + 1 + 9 - 3t + t = 10$

محققة $10 = 10$

فالمستويات الثلاث P_1, P_2, P_3 تشترك بفصل مشترك (d).

~ الكرة ~

تعطى معادلة الكرة بالشكل:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

ولكتابة معادلة الكرة (S) نحتاج إلى

مركز الكرة $M(x_0, y_0, z_0)$

نصف قطر: R

ثم نعوض بالمعادلة.

1 في معلم الفراغ معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(0,5,-1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ هي:

A $x^2 + (y+5)^2 + (z-1)^2 = 3$ B $x^2 + (y+5)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{3}$

C $x^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 3$ D $x^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{3}$

2 معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(0,0,1)$ وتمر من النقطة $A(1,1,1)$ هي:

A $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \sqrt{2}$ B $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$

C $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = \sqrt{2}$ D $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$

الحل: S

مركز: $\Omega(0,0,1)$

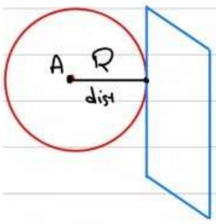
نصف قطر: $R = A\Omega = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{2}$

نعوض بمعادلة الكرة B.

3 معادلة الكرة التي مركزها $A(2,-2,2)$ وتمس المستوي $P: x + 2y + 3z - 5 = 0$ هي:

A $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = -\frac{1}{14}$ B $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{14}$

C $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = -\frac{1}{28}$ D $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{28}$



الحل: نوجد بعد A عن P حسب القانون فيكون هو R.

$dist(A, P) = \frac{|2 - 4 + 6 - 5|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$

S

مركز $A(2,-2,2)$

نصف القطر: $R = dist = \frac{1}{\sqrt{14}}$ نعوض بمعادلة الكرة B

4 في معلم متجانس لدينا المستوي P

$P: x - 2y + 2z + \lambda = 0$

حيث λ عدد حقيقي موجب

والكرة S التي معادلتها

$S: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$

إذا علمت أن المستوي P يمس الكرة S عندها قيمة λ تساوي:

A 1 B 2 C 4 D 6

[5] معادلة الكرة التي قطرها [AB]
حيث $A(-3,3,0)$ و $B(1,-1,4)$ هي:

S: مركزها: نأخذ منتصف [AB] $I:\left(\frac{1-3}{2},\frac{-1+3}{2},\frac{4+0}{2}\right)$
$I(-1,1,2)$
نصف قطر: $R=\frac{AB}{2}$

تحديد طبيعة مجموعة نقاط من الشكل:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

[1] نتمم لمربع كامل لتصبح العبارة من الشكل:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=K$$

ونميز:

- $K<0$: تمثل مجموعة خالية
- $K=0$: تمثل نقطة هي النقطة (x_0,y_0,z_0)
- $K>0$: معادلة كرة مركزها (x_0,y_0,z_0) ونصف قطرها $\sqrt{K}$

الوضع النسبي لمستقيم وكرة:

عند دراسة الوضع بين مستقيم وكرة نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة الكرة لينتج معادلة درجة ثانية نحلها حسب Δ ونميز

- $\Delta<0$: المستقيم خارج الكرة
- $\Delta=0$: المستقيم يمس الكرة بنقطة واحدة
- $\Delta>0$: المستقيم يقطع الكرة بنقطتين

ملاحظة: عند طلب احداثيات نقاط التقاطع نكمل حل المعادلة لنوجد t ثم نعوضها بمعادلة المستقيم الوسيطية

[1] في معلم متجانس ليكن لدينا مجموعة النقاط: [2] +

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+\frac{5}{2}=0$$

عندها مجموعة النقاط تمثل:

[A] كرة مركزها $(1,2,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{\frac{5}{2}}$
[B] كرة مركزها $(-1,-2,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{\frac{5}{2}}$
[C] مجموعة خالية
[D] نقطة $(1,2,0)$

الحل: نتمم العبارة لمربع كامل: $\pm\left(\frac{b^2}{4a}\right)$

$$x^2-2x+y^2-4y+z^2+\frac{5}{2}=0$$

$$\underline{x^2-2x+1}-1+\underline{y^2-4y+4}-4+z^2+\frac{5}{2}=0$$

$$S:(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=\frac{5}{2}$$

ومنه تمثل معادلة كرة مركزها $(1,2,0)$
ونصف قطرها $\sqrt{\frac{5}{2}}$

[2] من معلومات السؤال السابق: ليكن لدينا المستقيم d المعطى وفق: $d:\begin{cases}x=2t+2\\ y=0\\ z=-2t+1\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$ عند دراسة الوضع النسبي بين المستقيم d والكرة S نجد أن:

[A] المستقيم قاطع للكرة في $(1,1,2)$
[B] المستقيم يمس الكرة
[C] المستقيم خارج الكرة
[D] قاطع بالنقطة $(-1,-1,2)$

الحل: نعوض الوسيطي بالكرة:

$$(2t+2-1)^2+(-2)^2+(-2t+1)^2=\frac{5}{2}$$

$$4t^2+4t+1+4+4t^2-4t+1=\frac{5}{2}$$

$$8t^2=\frac{5}{2}-6$$

$$8t^2=\frac{-7}{2}\Rightarrow t^2=\frac{-7}{16}$$

مرفوضة
الحل فالمستقيم خارج الكرة.

[3] لتكن مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تحقق المعادلة:

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+K=0$$

إن مجموعة قيم K التي تجعل المجموعة تمثل مجموعة خالية هي:

[A] $]0,+\infty[$ [B] $]-5,+\infty[$ [C] $]-\infty,0[$ [D] $]5,+\infty[$

الحل: نتمم لمربع كامل

$$x^2-2x+y^2-4y+z^2+K=0$$

$$\underline{x^2-2x+1}-1+\underline{y^2-4y+4}-4+z^2+K=0$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=-K+5$$

هاد الطرف لازم يكون سالب لتصير مجموعة خالية

$$-K+5<0 \Rightarrow 5<K$$ ومنه

$$K\in]5,+\infty[$$

4 في معلم متجانس لدينا النقاط $A(2,0,-1)$ $B(0,4,3)$ $M(x,y,z)$

إذا علمت أن: $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$ فإن مجموعة النقاط $M(x,y,z)$

تمثل كرة مركزها ونصف قطرها:

A $(1,2,1)$ $\sqrt{3}$ — B $(-1,2,1)$ 3 — C $(-1,-2,-1)$ 3 — D $(1,2,1)$ 3

الحل:

$$\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$$
$$(2-x,-y,-1-z)\cdot(-x,4-y,3-z)=0$$
$$-2x+x^2-4y+y^2-3+z-3z+z^2=0$$
$$x^2-2x+y^2-4y+z^2-2z-3=0$$
$$x^2-2x+1-1+y^2-4y+4-4+z^2-2z+1-1-3=0$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$$

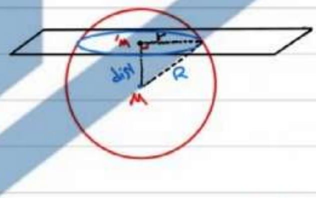
ومنه مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها $(1,2,1)$ ونصف قطرها 3.

الوضع النسبي بين مستوي وكرة:

نحسب البعد بين مركز الكرة والمستوي ونسميه L ونقارنه مع نصف القطر ونميز:

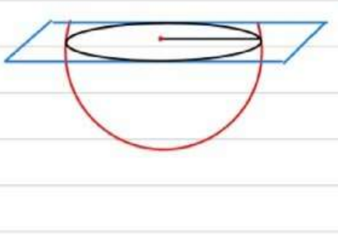
$dist > R$	$dist = R$	$dist < R$
المستوي خارج الكرة	المستوي يمس الكرة	المستوي يقطع الكرة بدائرة

ملاحظة: المستوي يقطع الكرة في دائرة مركزها هو المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي ونصف قطر دائرة المقطع حسب فيثاغورث:



$$R^2=dist^2+r^2$$
$$r=\sqrt{R^2-dist^2}$$

حالة خاصة: إذا كان $dist(M,P)=0$ فإن دائرة المقطع هي دائرة كبرى يكون مركز الدائرة هو نفسه مركز الكرة ونصف قطر الدائرة هو نفسه نصف قطر الكرة.



1 المستوي $2x-2y+z-24=0$ يقطع الكرة $x^2+y^2+z^2-18x-3y-18z+160=0$ بدائرة نصف قطرها

A $\frac{\sqrt{17}}{2}$ — B $\frac{\sqrt{15}}{2}$ — C $\frac{\sqrt{13}}{2}$ — D $\frac{\sqrt{11}}{2}$

الحل: نوجد معادلة الكرة أولاً:

$$x^2-18x+y^2-3y+z^2-18z+160=0$$
$$x^2-18x+81-81+y^2-3y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+z^2-18z+81-81+160=0$$
$$(x-9)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-9)^2=\frac{17}{4}$$

لـ $M\left(9,\frac{3}{2},9\right)$ ، $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$

نوجد بعد مركز الكرة عن المستوي

$$dist(P,M)=\frac{|18-3+9-24|}{\sqrt{4+4+1}}=0$$

ومنه $dist < R$

فالمستوي يقطع الكرة بدائرة.

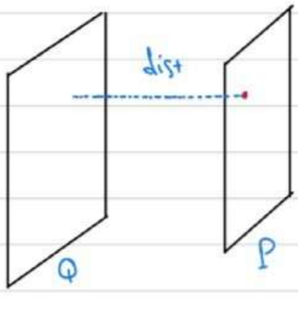
"وهنا لدينا حالة خاصة حيث تكون دائرة المقطع هي الدائرة الكبرى"

فيكون $r=R=\frac{\sqrt{17}}{2}$

ويكون مركز دائرة المقطع هو نفسه مركز الكرة $m\left(9,\frac{3}{2},9\right)$

البعد بين مستويين متوازيين:

* نتأكد أن المستويين متوازيين
* نوجد احداثيات نقطة من أحد المستويين بوضع قيمتين لمجهولين ونحسب الثالث.
* نحسب بعد النقطة عن المستوي الآخر وبذلك نكون قد أوجدنا البعد بين المستويين.



$\boxed{1}$ إن البعد بين المستويين

$P: 2x+y-z=3$

$Q: 4x+2y-2z=1$

$\boxed{A}$ $\frac{5\sqrt{24}}{24}$ $\boxed{B}$ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{24}}$ $\boxed{C}$ $\frac{\sqrt{24}}{24}$ $\boxed{D}$ 5

الحل: نلاحظ أن المستويين P , Q متوازيين لأن:

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{-3}{-1}$

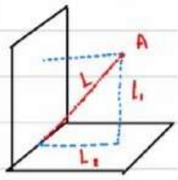
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{1}$

* نوجد نقطة من P
نفرض $x=0$ و $y=0$ ← $z=-3$ ⇐ $M(0,0,-3)$

* نوجد بعد M عن Q:

$$dist(M,Q) = \frac{|0+0+6-1|}{\sqrt{16+4+4}} = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5\sqrt{24}}{24}$$

بعد نقطة عن مستقيم في الفراغ:
فيه حالتين:
← حالة خاصة: مستقيم محدد بتقاطع مستويين متعامدين
← حالة عامة: مستقيم محدد بتقاطع مستويين غير متعامدين.



حالة خاصة: ① نتأكد أن المستويين متعامدين
② نحسب بعد النقطة عن المستوي الأول L_1
③ نحسب بعد النقطة عن المستوي الثاني L_2
④ يكون بعد النقطة عن المستقيم L حسب فيثاغورث:

$$L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}$$

$\boxed{1}$ في معلم متجانس لتكن لدينا النقطة $A(1,0,-1)$ والمستويين:

$P: 3x+y-z+1=0$

$Q: 2x-3y+3z=0$

إن البعد بين A والفصل المشترك للمستويين P, Q:

$\boxed{A}$ $\sqrt{\frac{51}{22}}$ $\boxed{B}$ $\sqrt{\frac{50}{23}}$ $\boxed{C}$ $\frac{\sqrt{51}}{22}$ $\boxed{D}$ $\frac{51}{22}$

الحل: ندرس تعامد P و Q:

$\overrightarrow{n_P}(3,1,-1)$, $\overrightarrow{n_Q}(2,-3,3)$

$\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{n_Q} = 6-3-3 = 0$

ومنه P و Q متعامدان.

نوجد بعد A عن P, Q:

$$L_1 : dist(P,A) = \frac{|3+0+1+1|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$L_2 : dist(Q,A) = \frac{|2-0-3|}{\sqrt{4+9+9}} = \frac{1}{\sqrt{22}}$$

* حسب فيثاغورث:

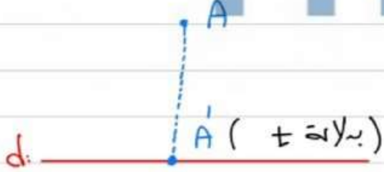
$$L = \sqrt{\frac{25}{11}_{(2)} + \frac{1}{22}} = \sqrt{\frac{51}{22}}$$

* حالة عامة: نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم الناتج عن تقاطع المستويين (إذا ما كان معنا المعادلات تبع المستقيم) + طبعاً بالحالة ما يكون عنا تعامد المستويين.

$\boxed{1}$ نفرض A' المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d وهي تحقق تمثيله الوسيطي

$\boxed{2}$ يكون $\overrightarrow{U_d} \perp \overrightarrow{AA'}$ ومنه $\overrightarrow{U_d} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$

$\boxed{3}$ نوجد قيمة t ونحسب طول القطعة المستقيمة $[AA']$ وهو نفسه بعد A عن d.



1) في الفضاء المنسوب لمعلم متجانس ليكن لدينا المستقيم d المعرف بالتمثيل الوسيطي

$$d: \begin{cases} x = -t-1 \\ y = 2t+1 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t-3 \end{cases}$$

والنقطة $C(1,0,-1)$

فإن بعد C عن المستقيم d :

A) 3 B) 2 C) 4 D) 5

الحل: نفرض $C'(x,y,z)$ مسقط C على المستقيم d

فهي تحقق تمثيله $C'(-t-1, 2t+1, 2t-3)$

ومنه: $\overrightarrow{CC'}(-t-2, 2t+1, 2t-2)$

ومنه: $\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{U_d} = 0$

$(-t-2, 2t+1, 2t-2) \cdot (-1, 2, 2) = 0$

$t+2+4t+2+4t-4 = 0$

$t = 0$

نعوض في d : $C'(-1,1,-3)$ وهو مسقط C $\boxed{D}$

فيكون بعد C عن d هو CC' :

$CC' = \sqrt{4+1+4} = 3$

$$\cos(D\hat{J}B) = \frac{36+20-32}{2\times 6\times 2\sqrt{5}} = \frac{24}{24\sqrt{5}}$$

الجداء السلمي

قوانين الجداء السلمي.

1) $\vec{U}\cdot\vec{V} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{U}+\vec{V}\|^2 - \|\vec{U}\|^2 - \|\vec{V}\|^2\right]$

2) $\vec{U}\cdot\vec{V} = \|\vec{U}\|\cdot\|\vec{V}\|\cdot\cos(\theta)$

حيث θ هي الزاوية بين الشعاعين $\vec{U}, \vec{V}$

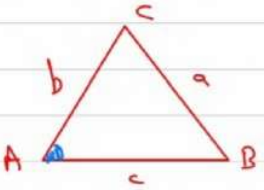
ويمكن إيجاد قانون كساب $\cos(\theta)$ من خلال الجداء

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{U}\cdot\vec{V}}{\|\vec{U}\|\cdot\|\vec{V}\|}$$

3) $\vec{U}(x_1, y_1, z_1)$ $\vec{V}(x_2, y_2, z_2)$ بجملة معلم متجانس:

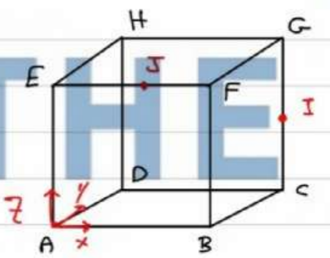
$\vec{U}\cdot\vec{V} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

* علاقة الـ cos :



$$\cos(A) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه يساوي 4 والنقطتين I و J منتصفا القطعتين $[CG]$ ، $[EF]$



أجب عن الأسئلة التالية:
(3 + (2 + (1

1) إن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JC}$ يساوي:

A) 0 B) 2 C) 4 D) 8

الحل: نفرض معلم $(A; \frac{\overrightarrow{AB}}{4}, \frac{\overrightarrow{AD}}{4}, \frac{\overrightarrow{AE}}{4})$ متجانس:

$A(0,0,0)$ $B(4,0,0)$ $C(4,4,0)$ $D(0,4,0)$
$E(0,0,4)$ $F(0,4,4)$ $G(4,4,4)$ $H(0,4,4)$
$I(4,4,2)$ $J(2,0,4)$

* نوجد الجداء السلمي :

\# $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JG}$

$(4,0,0)\ (2,4,0) = 8+0+0 = 8$

$\boxed{2}$ إن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$ يساوي :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$

$(4,0,0)\cdot(4,4,4) = 16+0+0 = 16$

$\boxed{3}$ إن $\cos(D\hat{J}B)$ يساوي :

$\overrightarrow{JD}\cdot\overrightarrow{JB} = \|\overrightarrow{JD}\|\cdot\|\overrightarrow{JB}\|\cdot\cos(D\hat{J}B)$

* $\overrightarrow{JD}\cdot\overrightarrow{JB} = (-2,4,-4)\cdot(2,0,-4)$
$= -4+0+16 = 12$

* $\|\overrightarrow{JD}\| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$

* $\|\overrightarrow{JB}\| = \sqrt{4+0+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow \cos(D\hat{J}B) = \dfrac{\overrightarrow{JD}\cdot\overrightarrow{JB}}{\|\overrightarrow{JD}\|\cdot\|\overrightarrow{JB}\|} = \dfrac{12}{6\times 2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

بحث: يمكن أن يطلب $\sin(D\hat{J}B)$ عندها نحسب $\cos(D\hat{J}B)$ ثم من علاقة $\sin^2(DJB)+\cos^2(DJB)=1$ ثم نعزل ال Sin ونجذر الطرفين.

ملاحظة: يمكن حساب ال cos من علاقة الكاشي.

$\boxed{1}$ إذا علمت أن الشعاعين $\vec{U}$, $\vec{V}$ متعامدان:

وأن:

$\|\vec{U}\| = \sqrt{3}\quad,\quad \|\vec{V}\| = 1$

عندها قيمة $\|\vec{U}+\vec{V}\|$ تساوي :

$\vec{U}\cdot\vec{V} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{U}+\vec{V}\|^2 - \|\vec{U}\|^2 - \|\vec{V}\|^2\right]$

$0 = \frac{1}{2}\left[\|\vec{U}+\vec{V}\|^2 - 3 - 1\right]$ ×2

$\|\vec{U}+\vec{V}\|^2 - 4 = 0 \rightarrow \|\vec{U}+\vec{V}\| = 2$

الارتباط الخطي لشعاعين :

• نقول عن شعاعين انهم مرتبطين خطياً إذا نتج أحدهم من الآخر عند ضربه بعدد حقيقي :

$\vec{U}=K\vec{V}$ أو $\vec{V}=K\cdot\vec{U}$

أو يمكن القول إن الأشعة مرتبطة إذا كانت المركبات متناسبة:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

ويستخدم في اثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة أو اثبات توازي مستقيمين.

1 عند البحث عن العدد الحقيقي a ليكون الشعاعان : $\vec{U}(2,a,5)$ $\vec{V}(1,-2,a)$ مرتبطين خطياً وجدنا أنه:

A) $a=-10$ B) $a=-4$ C) $a=0$ D) لا يمكن تعيين a

الحل: لتكون الأشعة مرتبطة يجب أن تتناسب المركبات.

$$\underset{①}{\frac{2}{1}}=\underset{②}{\frac{a}{-2}}=\underset{③}{\frac{5}{a}}$$

من ② و ③: $a^2=-10$ مرفوض، لا يمكن تعيين a.

2 تأمل النقاط $A(3,5,2)$ $B(2,-1,3)$ $C(0,-2,2)$ في معلم متجانس. إن إحداثيات النقطة K التي تجعل $ABCK$ متوازي أضلاع هي:

A) $K(1,-4,1)$ B) $K(1,4,1)$ C) $K(-1,-8,3)$ D) $K(-1,-4,3)$

الحل: ليكون الشكل متوازي أضلاع يجب أن يتحقق، نفرض $K(x,y,z)$

$\vec{AB}=\vec{KC}$

$(-1,-6,1)=(-x,-2-y,2-z)$

$-x=-1$ ، $-2-y=-6$ ، $2-z=1$

$\boxed{x=1}$ ، $\boxed{y=4}$ ، $\boxed{z=1}$ $\Rightarrow K(1,4,1)$

3 النقطة M تحقق: $\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}=\vec{0}$ والنقطة $A\notin(BC)$ عندها متوازي الأضلاع هو:

A) ABCM B) ACBM C) ACMB D) ABMC

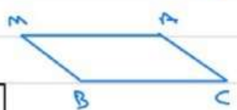
الحل: من العلاقة المعطاة:

$\vec{MA}+\vec{MB}-\vec{MC}=\vec{0}$

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{CM}=\vec{0}$

$\vec{MA}+\vec{CB}=\vec{0}$

$\vec{MA}=-\vec{CB}\Rightarrow\vec{MA}=\vec{BC}$



ومنه: حسب الخيارات: الخيار الصحيح هو $\boxed{ACBM}$

4 إن قيمة كل من a ، b لتقع النقاط: $A(2,3,0)$ $B(3,2,1)$ $M(a,b,2)$ على استقامة واحدة:

A) $a=1,b=4$ B) $a=-4,b=1$ C) $a=4,b=1$ D) $a=4,b=-1$

لتكون على استقامة واحدة يجب أن تكون مركبات $\vec{AB},\vec{AM}$ مرتبطة خطياً:

$\vec{AB}(1,-1,1)$
$\vec{AM}(a-2,b-3,2)$ $\Rightarrow$ $\underset{①}{\frac{1}{a-2}}=\underset{②}{\frac{-1}{b-3}}=\underset{③}{\frac{1}{2}}$

من ① و ③: $\frac{1}{a-2}=\frac{1}{2}$

$a-2=2\Rightarrow\boxed{a=4}$

من ② و ③: $\frac{-1}{b-3}=\frac{1}{2}$

$b-3=-2\Rightarrow\boxed{b=1}$

الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

نقول عن الأشعة الثلاث $\vec{W},\vec{U},\vec{V}$ مرتبطة خطياً إذا تحقق أحد الحالتين.

حالة 1: إذا كان هناك شعاعين مرتبطين عندها نقول عن الأشعة الثلاث مرتبطة خطياً

حالة 2: إذا لم يتحقق شعاعين مرتبطين عندها ① نحدد شعاعين غير مرتبطين ② نحاول إيجاد a ، b حقيقيان : نكتب الشعاع الثالث بدلالة الشعاعين الغير مرتبطين.

$\vec{W}=a\vec{U}+b\vec{V}$

1 لدينا النقاط: $A(2,0,1)$ $B(1,-2,1)$ $C(5,5,0)$ $D(-3,-5,6)$ غير واقعة على استقامة واحدة. إذا علمت أن النقطة D الواقعة في المستوي (ABC) تحقق العلاقة $\vec{AD}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$ فإن الثنائية α,β تساوي:

A) $(-10,5)$ B) $(-10,-5)$ C) $(5,10)$ D) $(5,-10)$

الحل: كون النقاط A,B,C,D واقعة في مستوي واحد
فإن الأشعة $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ مرتبطة خطياً

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$(-5,-5,5) = \alpha(-1,-2,0) + \beta(3,5,-1)$$

$$(-5,-5,5) = (-\alpha+3\beta, -2\alpha+5\beta, -\beta)$$

$$-\alpha+3\beta = -5 \quad \text{①}$$

$$-2\alpha+5\beta = -5 \quad \text{②}$$

$$-\beta = 5 \quad \text{③}$$

من ③ $\beta = -5$

نعوض في ② $-2\alpha - 25 = -5$

$$-2\alpha = 20 \Rightarrow \boxed{\alpha = -10}$$

نتأكد في ① $10 - 15 \overset{?}{=} -5$

$-5 = -5$ محققة

مركز الابعاد المتناسبة:

ليكن G (م م) للنقاط: $G: (A,\alpha)(B,\beta)$

* يجب أن يحقق (علاقة مركز الابعاد):

1) $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
2) $\alpha + \beta \neq 0$

* علاقة الانشاء: $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

* يمكن التعبير على أن G (م م) بدلالة نقطة خارجية M وفق:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

" نستخدم هذه الخاصية لتحديد طبيعة مجموعة نقاط "

• الخاصة التجميعية: تستخدم لتقليل عدد النقاط:

$$G: \underbrace{(A,\alpha)(B,\beta)}_{(I,\alpha+\beta)}\underbrace{(C,\gamma)(D,\delta)}_{(J,\gamma+\delta)} \rightarrow (G, \alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

• فوائد واستخدامات مراكز الابعاد المتناسبة:

1) تفيد في اثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة
2) تفيد في اثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد
3) تفيد في اثبات تقاطع مستقيمين.

مثال 1) ABCDEFGH مكعب فيه K منتصف $[EC]$، L منتصف $[AB]$، وليكن M (م م) للنقاط

$M: (E,1)(G,1)(B,1)(A,1)$

عندها M تنتمي للمستقيم:

A) (KL) B) (EC) C) (KA) D) (GL)

الحل: لدينا: $G: \underbrace{(E,1)(C,1)}_{(K,2)}\underbrace{(B,1)(A,1)}_{(L,2)}$

وحسب الخاصة التجميعية

G (م م) لـ $G: (K,2)(L,2)$

ومنه $G \in (KL)$

2) ABCD رباعي وجوه G مركز ثقل المثلث BCD

عندها مجموعة النقاط M المحققة للمعادلة

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\|$$

A) مستوي محوري لـ (AC) B) كرة مركزها G

C) مستوي محوري لـ (DC) D) كرة مركزها A

الحل:

$L_1: \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}$

* كون G مركز ثقل (BCD) بان G (م م) للنقاط $(B,1)(C,1)(D,1)$

$L_2: 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$

$= 3\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$

$= 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MG}$

$3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GM}) = 3\overrightarrow{GA}$

نعوض بالاساس:

$\|\cancel{3}\overrightarrow{MG}\| = \|\cancel{3}\overrightarrow{GA}\|$

$\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{GA}\|$

كرة مركزها G ونصف قطرها GA

3) ABCDEFGH مكعب فيه I منتصف $[AE]$

J منتصف $[BC]$ ولتكن M (م م) للنقاط

$(A,1)(B,1)(C,1)(E,1)$

وتحقق $\overrightarrow{IM} = k\cdot\overrightarrow{IJ}$ فإن k تساوي:

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 2 D) 4

الحل: $\overrightarrow{IM} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{IJ}$

* بما I و J:

$I: (A,1)(E,1) \rightarrow (I,2)$
$J: (B,1)(C,1) \rightarrow (J,2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{2}{4}\overrightarrow{IJ} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$\boxed{4}$ رباعي وجوه ABCD لتكن النقطتان E , F المعرفتان وفق:

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \quad , \quad \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

ولتكن G (م.م) النقاط

$$(A,1)(B,3)(C,1)(D,2)$$

عندما تكون النقطة G واقعة على القطعة المستقيمة:

A) AF B) $[BF]$ C) $[CF]$ D) $[EF]$

الحل: لدينا: $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

ومنه E (م.م) لـ $(C,1)(B,3) \to (E,4)$

لدينا: $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

ومنه: F (م.م) للنقاط: $(D,2)(A,1) \to (F,3)$

لدينا: G (م.م):

$$G: \underbrace{(A,1)\,\underbrace{(B,3)\,(C,1)}_{(E,4)}\,(D,2)}_{(F,3)}$$

* ومنه الصحيح:

$$G \in [EF]$$

$\boxed{5}$ A-BCDE هرم، النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

عندها النقطة M تنتمي إلى المستوي

A) (ABE) B) (ABC) C) (ACD) D) (ADE)

الحل: لدينا:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

شال

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

مرتبطة لتصير علاقة انشاء ثلاثية:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

ومنه M (م.م) للنقاط $(C,2)(B,1)(A,-1)$

ومنه $M \in (ABC)$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2$$

$$\alpha + 1 + 2 = 2$$

$$\alpha = -1$$

$\boxed{6}$ ABCDEFGH مكعب فيه K نقطة تحقق العلاقة:

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG}$$

إن قيم α ، β ، γ لتكون K (م.م) النقاط $(C,\gamma)(C,\beta)(B,\alpha)$ هي:

A) $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ B) $\alpha = -1$, $\beta = -2$, $\gamma = -3$ C) $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$ D) $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 3$

الحل:

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG}$$

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{KG}$$

$$2\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{KG} - 2\overrightarrow{AK} = \vec{0}$$

$$-2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KG} = \vec{0}$$

ومنه K (م.م) النقاط

$$(C,-2)(B,1)(G,3)$$

$\beta = -2$ $\alpha = 1$ γ