مكثفة التكامل لعام 2024-2025

قواعد التكامل:

	التابع	تكامله
1	$f(x) = a$	$F(x) = ax$
2	$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$
3	$f(x) = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$F(x) = \dfrac{-1}{a}\cos(ax+b)$
4	$f(x) = \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$
5	$f(x) = e^{ax+b}$	$F(x) = \dfrac{1}{a}e^{ax+b}$
6	$f(x) = (ax+b)^n$	$F(x) = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$
7	$f(x) = 1+\tan^2 x$ $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x$
8	$f(x) = 1+\cot^2 x$ $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\cot x$
9	$f(x) = u'.\sin(u)$	$F(x) = -\cos(u)$
10	$f(x) = u'.\cos(u)$	$F(x) = \sin(u)$
11	$f(x) = u'.e^u$	$F(x) = e^u$
12	$f(x) = u'.u^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$F(x) = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
13	$f(x) = \dfrac{u'}{u}$	$F(x) = \ln\lvert u\rvert$ $\underset{]0,+\infty[}{\ln(u)}$ $\underset{]+\infty,0[}{\ln(-u)}$
14	$f(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F(x) = 2\sqrt{u}$
15	$f \mp g$ $\lambda.f$	$F \mp G$ $\lambda.F$
16	$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 ax}$ $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 ax}$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\tan x$ $F(x) = \dfrac{-1}{a}\tan x$

قوانين التخفيض:

$$\boxed{1}\quad \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\boxed{2}\quad \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

ملاحظة: لا يوجد تكامل مباشر لـ $\sin^2 x$, $\sin^4 x$, $\cos^2 x$, $\cos^4 x$

$$\sin a \,.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \,.\sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

$$\cos a \,.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \,.\sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

ملاحظة: عندما تكون درجة البسط تساوي درجة المقام $\Leftarrow$ قسمة اقليدية أو تفريق كسور.

مثال:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

الحل:

ط1:

$$\begin{array}{r|l} x+1 & x-2 \\ \hline x-2 & 1 \\ \hline 03 & \end{array}$$

$$\Longrightarrow f(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$$

$$\Longrightarrow F(x) = x + \ln|x-2|$$

ط2:

$$F(x) = \frac{x+1-3+3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$$

$$\Rightarrow F(x) = x + \ln|x-2|$$

1) التابع الأصلي لـ $f(x)=\sqrt[3]{(2x-1)^2}$ المعرف على $\mathbb{R}$

.A	$F(x)=\frac{3}{10}\sqrt[3]{(2x-1)^5}$	.B	$F(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2x-1)^2}$
.C	$F(x)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(2x-1)^5}$	.D	غير ذلك

الحل:

الجذر قوة $\Leftarrow f(x)=(2x-1)^{\frac{2}{3}} \Leftarrow$ تطبيق مباشر $F(x)=\frac{\frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}$

الجواب $\boxed{A}$

---

2) التابع الأصلي لـ $f(n)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

.A	$F(x)=2\sqrt{1+x}$	.B	$F(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1+x}$
.C	$F(x)=4\sqrt{1+x}$	.D	$F(x)=\frac{1}{4}\sqrt{1+x}$

الحل:

نلاحظ أن $\frac{u'}{\sqrt{u}} \Leftarrow 2\sqrt{u} \Leftarrow \boxed{A}$

---

3) التابع الأصلي لـ $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ على $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

.A	$F(x)=2\sqrt{\cos x}$	.B	$F(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{\cos x}$
.C	$F(x)=-2\sqrt{\cos x}$	.D	$F(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\cos x}$

الحل:

نضرب ونقسم على سالب

$$f(x)=-\frac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}} \Rightarrow f(x)=-(-\sin x)(\cos x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow F(x)=-2\sqrt{\cos x} \quad \boxed{C}$$

---

4) التابع الأصلي لـ $f(x)=\cot^2 x$ المعرف على $I=]0\,,\pi[$

$F(x)=x-\cot x$	.B	$F(x)=-x-\cot x$	.A
$F(x)=-x-\cot x$	.D	$F(x)=x+\cot x$	.C

الحل:

نكتب التابع بشكل $f(x)=1+\cot^2 x-1$

(نضيف ونطرح 1) $\Leftarrow F(x)=-x-\cot x$

---

5) التابع الأصلي لـ $f(x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$ المعرف وفق $I=\left]\frac{3\pi}{2}\,,2\pi\right[$

$F(x)=2\sin x$	.B	$F(x)=-2\sin x$	.A
$F(x)=\cos x$	.D	$F(x)=-\cos x$	.C

الحل:

نسحب 2 عامل مشترك $f(x)=\sqrt{2(1-\cos 2x)} \Leftarrow f(x)=\sqrt{4\sin^2 x}$

$\Leftarrow F(x)=-2\sin x$ $\boxed{A}$

---

6) إن التابع الأصلي لـ $f(x)=\tan x$ على $I=\left[\frac{\pi}{6}\,,\frac{\pi}{3}\right]$

$F(x)=\ln(\cos x)$	.B	$F(x)=-\ln(\cos x)$	.A
$F(x)=\ln(\sin x)$	.D	$F(x)=\ln(-\cos x)$	.C

الحل:

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x} \Leftarrow \boxed{A}$

---

7) التابع الأصلي لـ $f(x)=e^{2x}-e^{-2x}$ هو:

$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$	.B	$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$	.A
غير ذلك	.D	$F(x)=\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}$	.C

الحل:

نطبق القانون $F(x)=\frac{1}{a}e^{a}\pm\frac{1}{a}e^{a} \Leftarrow \boxed{A}$

ثانياً: التكامل المحدد:

بفرض f تابع معرف ومستمر على I عندئذ نفرض التكامل المحدد للتابع من a إلى b

$$\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = [F(b) - F(a)]$$

1) قيمة التكامل الآتي $I = \int_0^{\ln 2} e^{2x}\, dx$ هي:

A.	$\frac{3}{2}$	B.	2	C.	$-\frac{1}{2}$	D.	$\frac{1}{2}$

الحل:

نوجد التابع الأصلي لـ e^{2x} وهو $\frac{1}{2}e^{2x}$ ونعوض القيم $\Leftarrow$ $\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2}$ $\boxed{A}$

2) قيمة $L = \int_{-2}^{-1} \frac{2x-1}{x-1}\, dx$ هي:

A.	$2 + \ln 2 - \ln 3$	B.	$\ln 2 - \ln 3$
C.	$6 + \ln 2 - \ln 3$	D.	$\ln 3 - \ln 2 + 2$

الحل:

قسمة اقليدية $\Leftarrow$ $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$ $\Leftarrow$ التابع الأصلي $[2x + \ln(1-x)]_{-2}^{-1}$

$\Leftarrow$ $-2 + \ln 2 - (-4 + \ln 3) = \boxed{A}$

3) إن التابع الأصلي لـ $f(x) = \frac{-1}{3-x}$ الذي يحقق $F(1) = 1$ هو:

A.	$F(x) = \ln(3-x) - \ln 2 + 1$	B.	$F(x) = \ln(3-x) - \ln 4$
C.	$F(x) = \ln(3-x) + 1$	D.	غير ذلك

الحل:

البسط مشتق المقام أي أن $F(x) = \ln(3-x) + k$ ولكن $F(1) = 1$

أي $1 = \ln(2) + k$ $\Leftarrow$ $k = 1 - \ln 2$ $\Leftarrow$ الإجابة $\boxed{A}$

4) إن قيمة $I = \int_2^{-1} (x^2 - 4x + 3)\, dx$:

A.	-6	B.	$\frac{8}{3} - 6$	C.	$\frac{8}{3} + 6$	D.	$\frac{8}{3}$

الحل:

التابع الأصلي $\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_2^{-1}$ $\Leftarrow$ $\left(-\frac{1}{3} - 2 - 3\right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 6\right)$

$\Leftarrow$ $\boxed{A}$

5) قيمة $I = \int_{2}^{-1}(x-2)(x^2-4x+3)\,dx$:

.A	$\frac{63}{3}$	.B	$\frac{63}{4}$	.C	$\frac{65}{3}$	.D	$\frac{65}{7}$

الجواب هو $\boxed{B}$

ثالثاً: تكامل القيمة المطلقة: من الشكل

$$\int_{\text{حد }1}^{\text{حد }2} |\text{حشوة}|\, dx$$

طريقة الحل:

1) نحدد القيمة التي تقدم الحشوة

2) نعوض قيمة أكبر وأصغر من التي تعدم الحشوة مثلاً تنعدم عند الـ 0 نأخذ أو؟؟؟؟؟؟؟؟؟

في الحشوة إذا كان موجب نضع الحشوة في التكامل هكذا $\int_{\text{الحد }1}^{\text{القيمة التي تعدم الحشوة}} (\text{حشوة})$

إذا كان سالب $-(\text{الحشوة})\int_{\text{الحد }1}^{\text{القيمة}}$ ويفضل دراسة الإشارة بشكل عام.

1) إن قيمة $L = \int_{-1}^{2} x|x-1|\,dx$:

.A	$\frac{1}{6}$	.B	$\frac{-1}{6}$	.C	$\frac{3}{2}$	.D	$\frac{5}{2}$

الحل:

1) القيمة التي تقدم الحشوة في التمرين 1 $\left.\begin{matrix} x-1 & : x \geq 1 \\ -x+1 & : x \leq 1 \end{matrix}\right\}$

2) $\int_{-1}^{1} x(x-1)\,dx + \int_{1}^{2} x(-x+1)\,dx$

3) ننشر ونحل عادي

4) الجواب $\boxed{B}$

2) إن قيمة $m = \int_{-1}^{2} |x^3 - x|\,dx$

.A	$\frac{9}{4}$	.B	$\frac{1}{4}$	.C	$\frac{7}{4}$	.D	$-\frac{1}{4}$

الحل:

1) عدم الحشوة: $x(x^2-1)=0 \Leftarrow$ إما $x=0$ أو $x=\pm 1$

x	-1		0		1	
	0	$+$	0	$-$	0	$+$

2) نعوض $m = \int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx + \int_{0}^{1}(-(x^2)+x)\,dx + \int_{1}^{2} x^3 - x\ dx$

3) عمليات حسابية $\Leftarrow$ الجواب $\boxed{A}$

3) قيمة $s=\int_{-2}^{2}(x)(x+1)\,dx$

A.	B.	C.	D.
12	4	$\frac{8}{3}$	غير ذلك

الحل:
لوحدك

رابعاً: تكامل الكسور:

حركات البطل

⇓

1) نضيف ونطرح رقم ونختصر
2) المقام يحوي أس مثلاً نفرض u وهي حشوة المقام ونكمل عادي
3) كسري ومقامه جذر ولا يمكن اختصار المشتق تكامل بالتجزئة ونفرض البسط هو u
4) نفرض A و B لإيجاد شكل يسمح لنا بالتكامل
5) نظهر $u\,.\,u^{\text{عدد}}$ يسمح لنا بالتكامل

درجة البسط أكبر أو تساوي المقام وهو غير محدود يسمح لنا بالقسمة

⇓

قسمة

⇓

تكامل عادي

$$\frac{u'}{u}=$$

⇓

نحاول اظهار القاعدة

⇓

$(u)=\ln(u)$

---

1) إن قيمة الـ $m=\int_{0}^{3}\frac{x+2}{(x+1)^4}$

A.	B.	C.	D.
$\frac{51}{64}$	$\frac{57}{64}$	$\frac{54}{64}$	$\frac{68}{51}$

الحل:
البسط لا يمكن أن يكون مشتق للمقام + لا يوجد قسمة + لا يمكننا فرض $A\,,B$ بسبب كبر المقام

1) نفرق 2 إلى $1+1$ $\quad f(x)=\frac{x+1+1}{(x+1)^4}=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^4}$

2) نكامل ونوجد التابع الأصلي $\quad f(x)=(x+1)^{-3}+(x+1)^{-4}$

$$\Longrightarrow F(x)=\left[\frac{-1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)^3}\right]_0^3=\frac{51}{64}$$

2) التابع الأصلي لـ $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$ الذي يحقق $F(0) = 0$ هو:

.A	$F(x) = \frac{-x^2}{2(x^2-1)}$	.B	$F(x) = \frac{x^2}{2(x^2-1)}$
.C	$F(x) = \frac{-x}{2(x^2-1)}$	.D	$F(x) = \frac{-x}{2(x^2-1)}$

الحل:

البسط ممكن أن يصبح مشتق المقام (بعمل حالي موشايف التربيع)

1) نفرض $u = x^2 - 1 \quad \Leftarrow \quad u' = 2x$

2) أي أن التابع الأصلي $F(x) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{x^2-1} + k$

3) نطيق الشرط $F(0) = 0$

4) $F(x) = \frac{-x^2}{2(x^2-1)}$ $\boxed{A}$

---

3) إن قيمة $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}$

.A	$\ln\frac{4}{3}$	.B	$\ln 4\ .3$	.C	$\ln 4\ .\ln 5$	.D	$\ln 4 + \ln 3$

الحل:

البسط لا يمكن جعله مشتق المقام + لا يمكننا التقسيم + لا يوجد أس في المقام

1) نفرض A , B نحلل المقام $(x+1)(x+2)$

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = A(x+2) + b(x+1)$$

2) نعوض $\boxed{x = -1} \Rightarrow 1 = A(-1+2)$

$$\boxed{A = 1} \Rightarrow \boxed{B = -1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

3) تكامل عادي

4) الجواب $\boxed{A}$

---

4) إن التابع الأصلي لـ $f(x) = \frac{2x-1}{(x+2)^2}$ وفق $]-\infty , -2[$

.A	$F(x) = \ln(-x-2) + \frac{5}{x+2}$	.B	$F(x) = \ln(-x-2) - \frac{5}{x+2}$
.C	$F(x) = \ln(x+2) + \frac{5}{x+2}$	.D	غير ذلك

الحل:

البسط لا يمكن أن يكون مشتق المقام + لا يمكن القسمة ولا إضافة وطرح عدد

1) $f(x)=(2x-1)(x+2)^{-2}$

$$f(x)=(2x+4-5)(x+2)^{-2}$$
$$f(x)=(2x+4)(x+2)^{-2}-5(x+2)^{-2}$$
$$=2\frac{1}{x+2}-5(x+2)^{-2}$$

2) التابع الأصلي $F(x)=\ln(-x-2)+\frac{5}{x+2}$

---

5) ليكن $f(x)=\frac{x^3}{x^2-x-2}$ إن التابع الأصلي المعرف على $]2\,,+\infty[$

.A	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{8}{3}\ln(x-2)+\frac{1}{3}\ln(x+1)$
.B	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{8}{3}\ln(x-2)+\frac{1}{3}\ln(x+1)$
.C	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{8}{3}\ln(x-2)-\frac{1}{3}\ln(x+1)$
.D	غير ذلك

الحل:

1) قسمة اقليدية وتحليل المقام نلاحظ

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-2)(x+1)}=x+1+\frac{3x+2}{(x-2)(x+1)}$$

2) نفرض $B\,,A$ $\quad 3x-2=A(x+1)+B(x-2)$

3) توجد قيمة A مثل ما تعلمنا $A=\frac{8}{3}\ ,\ B=\frac{1}{3}$

4) نكامل

خامساً: التكامل بالتجزئة:

يستخدم عندما يكون هناك تابعين v و u اشتقاقين على مجال I والتابعين مستمرين عند I عندئذ:

$$\int_a^b u\,.\,v'=[u\,.v]_a^b-\int_a^b u'\,.\,v$$

ملاحظة لتسهيل الحل:

$\underbrace{e^?}_{v'\ \text{أو}\ u}\times\underbrace{\cos?\ \sin?}_{u\ \ v'}$	$\underbrace{e^?\ \sin?\ \cos?}_{v'}\times\underbrace{\text{كثير حدود}}_{u}$	$\underbrace{ln}_{u}\times\underbrace{\text{كثير حدود}}_{v'}$

مكثفة التكامل لعام 2024-2025

1) قيمة التكامل $\int_e^{2e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$:

.A	$\frac{-\ln 2+2}{2e}$	.B	$\frac{\ln 2+e}{e}$	.C	$\frac{\ln 2+2}{e}$	.D	$\frac{\ln 2+2e}{2e}$

الحل:

$v' = \frac{1}{x^2}$	$u = \ln x$
$v = \frac{-1}{x}$	$u' = \frac{1}{x}$

$$\Leftarrow \quad \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_e^{2e} - \int_e^{2e} -\frac{1}{x^2}\,dx$$

تعويض مباشر بعد إيجاد التابع الأصلي لـ $\frac{-1}{x^2}$ وهو $\frac{1}{x}$

$$\Leftarrow \quad \frac{-\ln 2+2}{2e}$$

---

2) إن قيمة التكامل $\int_1^2 x^3 \ln x\,dx$ هي:

.A	$4\ln 2+\frac{15}{16}$	.B	$4\ln 2-\frac{15}{16}$	.C	$\ln 2-\frac{15}{16}$	.D	$4\ln 2+\frac{15}{6}$

الحل: دوماً

$v' = x^2$	$u = \ln x$
$v = \frac{x^4}{x}$	$u' = \frac{1}{x}$

$$\Leftarrow \quad \left[\frac{x^4 \ln x}{4}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{4}\,dx$$

تعويض بعد إيجاد التابع الأصلي لـ $\frac{x^3}{4}$ وهو $\frac{x^4}{16}$ $\Leftarrow$ $\boxed{4\ln 2-\frac{15}{16}}$

---

3) التابع الأصلي لـ $f(x)=x^2.e^x$ المعرف على $I=\mathbb{R}$:

.A	$F(x)=x^2e^x-2xe^x+2e^x$	.B	$F(x)=x^2e^x-2e^x+2xe^x$
.C	$F(x)=xe^x+2e^x-x$	.D	$F(x)=x^2e^x-x+2e^x$

الحل:

$$u = x^2 \qquad v' = e^x$$
$$u' = 2x \qquad v = e^x$$

$$\Leftarrow \quad [x^2e^x]_0^x - 2\int_0^x xe^x\,dx$$

نعوض بدل كل x t لكي نجد التابع الأصلي

$$[t^2e^t]_0^x - 2\int_0^x t\, e^t\, dt$$

تجزئة مرة 2 لـ $t\, e^t$

$$u_1 = t \qquad v' = e^t$$
$$u_1' = 1 \qquad v = e^t$$

$$[t\, e^t]_0^x - 2\int e^t\, dt$$

نعوض في التكامل الأول

$$[t^2e^t]_0^x - 2[te^t]_0^x + 2\int_0^x e^t\, dt$$

$$\Leftarrow \quad F(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

---

4) التابع الأصلي لـ $f(x) = x^2 \ln x$ هو المعرف على $]0\,, +\infty[$:

A.	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 . \ln x - \frac{1}{9}x^3$	**B.**	$F(x) = \frac{1}{9}x^3 . \ln x - \frac{1}{9}x^3$
C.	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 . \ln x - \frac{1}{9}$	**D.**	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 . \ln x - \frac{1}{3}x^3$

الحل:

$$u = \ln t \qquad v' = t^2$$
$$u' = \frac{1}{t} \qquad v = \frac{1}{3}t^2$$

$$\Leftarrow \quad \left[\frac{1}{3}t^3 \ln t\right]_1^x - \frac{1}{3}\int t^2\, dt$$

الجواب هو $\boxed{A}$

إن $f(x) = x^2 \sin 2x$, $f(x) = x^2 \cos 3x$ لإيجاد التابع الأصلي لهم نحل نفس رقم 3.

---

5) التابع الأصلي لـ $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$ المعرف على $I = \mathbb{R}_+^*$:

A.	$F(x) = -\frac{\ln x}{x}$	**B.**	$F(x) = \frac{\ln x}{x}$
C.	$F(x) = \frac{x}{\ln x}$	**D.**	$F(x) = -\frac{x}{\ln x}$

الحل:

$$u = \ln t - 1 \qquad v' = \frac{1}{t^2}$$
$$u' = \frac{1}{t} \qquad v = -\frac{1}{t}$$

$$\Leftarrow \quad \int_1^x f(t)\,dt = \left[-\frac{1}{t}(\ln t - 1)\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$$
$$F(x) = -\frac{\ln x}{x}$$

---

6) التابع الأصلي لـ $f(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$ المعرف $I =]-1\,,+\infty[$:

A.	$F(x) = x\sqrt{x+1}$	**B.**	$F(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$
C.	$F(x) = (3x+2)\sqrt{x+1}$	**D.**	$F(x) = 3x\sqrt{x+1}$

الحل:

البسط صعب يكون مشتق المقام وصعب التفريق

$v' = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$	$u = 3t+2$
$v = \sqrt{t+1}$	$u' = 3$

$$\Leftarrow \quad \int_{-1}^x f(t)\,dt = \left[(3t+2)\left(\sqrt{t+1}\right)\right]_{-1}^x - \int_{-1}^x 3\sqrt{t+1}\,dt$$
$$\Leftarrow \quad = \left[\sqrt{(t+1)(3t+2)}\right]_{-1}^x - \left[2\sqrt{(t+1)^2}\right]_{-1}^x$$
$$= \sqrt{x+1}(3x+2) - 2\sqrt{(x+1)^3} = x\sqrt{x+1}$$

---

7) التابع الأصلي لـ $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$ المعرف على $I = \mathbb{R}_+^*$:

A.	$F(x) = -\frac{\sin^2 x}{x}$	**B.**	$F(x) = \frac{\sin x}{x}$
C.	$F(x) = \frac{\cos x}{x}$	**D**	$F(x) = \frac{x}{\sin x}\ n$

الحل:

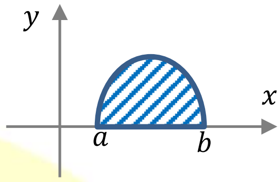
$v' = \frac{1}{t^2}$	$u = \sin t - t\cos t$
$v = -\frac{1}{t}$	$u' = t\sin t$

$$\left[-\frac{1}{t}(\sin t - t\cos t)\right]_1^x + \int_1^x \sin t\, dt \quad \Leftarrow$$

$$= \left[-\frac{1}{t}(\sin t - t\cos t)\right]_1^x + [-\cos t]_1^x = -\frac{\sin x}{x} \quad \Leftarrow$$

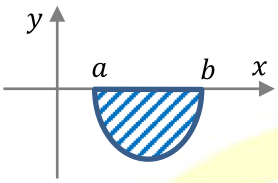
حساب مساحة السطح:

1) السطح فوق محور الفواصل:



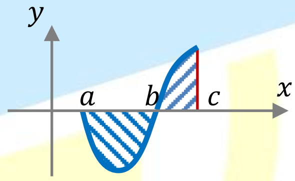
$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\ dx}$$

2) السطح تحت محور الفواصل:



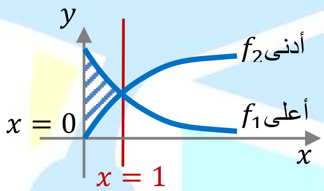
$$\boxed{S = -\int_a^b f(x)\ dx}$$

3) السطح يقطع محور الفواصل:



$$\boxed{S = \int_a^c |f(x)|\ dx}$$

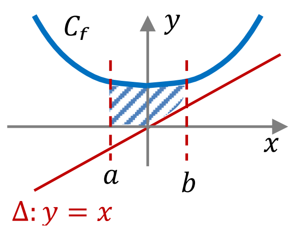
4) السطح يقع بين خطين بيانيين:



$$\boxed{S = \int_a^b \left(f_{\text{أعلى}} - f_{\text{أدنى}}\right)\ dx}$$

في حالتنا: $\boxed{S = \int_0^1 (f_1 - f_2)\ dx}$

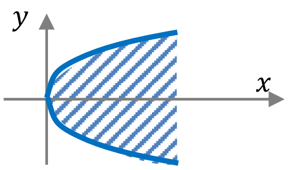
5) السطح بين مستقيم وخط بياني:



$$\boxed{S = \int_a^b \left(f_{\text{أعلى}} - f_{\text{أدنى}}\right)\ dx}$$

في حالتنا: $\boxed{S = \int_a^b (f(x) - y_\Delta)\ dx}$

6) حجم جسم ناتج عن دوران خط بياني حول محور الفواصل:



$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx}$$

1) إن المساحة المحصورة بين الخط البياني للتابع $f(x) = x + \frac{1}{x\ln x}$ ومقاربه المائل والمستقيمين $x = e^2\ ,\ x = e$

.A	$s = -\ln 2$	.B	$s = \ln 2$	.C	$s = 2$	.D	$s = 1$

الحل:

المقارب المائل هو $y = x$ $\qquad S = \int_e^{e^2} |f(x) - y_\Delta|\, dx$

$$s = \int_e^{e^2} \left|\frac{1}{x\ln x}\right| dx$$

ضمن المجال $[e\ ,e^2]$ إن $\frac{1}{x\ln x} > 0 \Leftarrow S = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$

$$\boxed{s = \ln 2} \Leftarrow [\ln(\ln x)]_e^{e^2}$$

---

2) المساحة المحصورة بين خطي التابعين $f(x) = x^2\ \ ,\ \ g(x) = \sqrt{x}$

.A	$s = \frac{1}{3}$	.B	$s = \frac{1}{4}$	.C	$s = 3$	.D	$s = 1$

الحل:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 = \sqrt{x}$$

$\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftarrow \boxed{x_1 = 0\ \ ,\ \ x_2 = 1} \Leftarrow$ على المجال $[0\ ,1]$ نجد

$$g(x) \geq f(x)$$

$$s = \int_0^1 g(x) - f(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{3}$$

---

3) مساحة السطح المحصور بين $f(x) = \frac{1}{e^{-x}+1}$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1\ , x = 0$

.A	$s = \ln\frac{e+1}{2}$	.B	$s = \ln(e+1)$
.C	$s = \ln(e+1) - 2$	D	$s = \ln(e+1) + \ln 2$

الحل:

$$s = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad \Rightarrow \quad [\ln(e^x + 1)]_0^1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

---

4) إن الحجم الناتج عن دوران $f(x) = x\sqrt{x(1-x)}$ دورة كاملة حول محور الفواصل:

.A	$V = \dfrac{\pi}{20}$	.B	$V = \dfrac{\pi}{6}$	.C	$V = \dfrac{3\pi}{10}$	.D	$V = \dfrac{\pi}{10}$

الحل:

f معرف على $[0 , 1]$

$$V = \pi \int_0^1 \left(f(x)\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{20}$$