# فريق TOGETHER

مجموعة مميَّزين من مختلف الكليات الطبية والهندسية

القناة الرئيسية:
https://t.me/bac2025syria240

مجموعة المُناقشات:
https://t.me/bacsyria240

قناة الملفّات:
https://t.me/TogetherFilesList

**Together**

CamScanner

اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى الرَّحْمَةِ الْمُهْدَاةِ وَالنِّعْمَةِ الْمُسْدَاةِ سَيِّدِنَا وَحَبِيبِنَا مُحَمَّدٍ وَعَلَى آلِهِ وَصَحْبِهِ وَسَلَّمَ

# الخط البياني

## نقاط مميزة

**نقاط التقاطع مع محور الفواصل والتراتيب**

$f(x) = y = 0$

$x = 0$

لإثبات أنّ $f(x) = 0$ لها حل وحيد على المجال $[a,b]$ نتأكد مما يلي:

- التابع مستمر ومطرد تماماً على هذا المجال
- $f(a), f(b)$ من إشارتين مختلفتين، أو 0 ينتمي لصورة المجال

تكون صورة المجال في حال تابع متزايد تماماً

$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

وفي حال متناقص تماماً

$f([a,b]) = [f(b), f(a)]$

إذا كان أحد أطراف المجال مفتوح نأخذ lim

صورة المجال هي المستقر الفعلي

## جدول التغيرات والرسم

**الوضع النسبي لخطين بيانيين**

ندرس إشارة الفرق

$f(x) - g(x)$

موجب فإن الخط البياني لـ $f$ فوق $g$

$f(x) - g(x)$ سالب فإن الخط البياني لـ $f(x)$ تحت $g(x)$

**معادلة مماس**

$y = mx + p$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

**ميل المماس $m$ عند نقطة $x_0$**

$m = f'(x_0)$

**ميل المماس $m$ لمستقيم غلم منه نقطتان أو الزاوية التي يصنعها مع المحور $xx'$**

$m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$m = \tan\theta$

المماس أفقي $f'(x_0) = m = 0$

المماس شاقولي معادلته $x = a$ $m = \pm\infty$

**مماس مشترك لـ $f(x)$ و $g(x)$**

عند نقطة $x_0$

$f(x_0) = g(x_0)$

$f'(x_0) = g'(x_0)$

$m_1 = m_2$

مستقيمان متوازيان

$m_1 \cdot m_2 = -1$

مستقيمان متعامدان

مستقيمان طبوقان (لهما نفس الميل) ونقطة مشتركة

**مجموع تقاطع الخطين**

**التابع العكسي**

$y = f(x)$ لها حل وحيد و $x = f^{-1}(y)$ لها حل وحيد

يكون للتابع المستمر تابع عكسي إذا كان متزايد أو متناقص تماماً على مجموعة تعريفه ومستقره هو المستقر الفعلي، ويكون بذلك تقابلاً

## التناظر

$g(x) = f(-x)$

$g(x)$ نظير $f(x)$ بالنسبة للمحور $yy'$

$g(x) = -f(x)$

$g(x)$ نظير $f(x)$ بالنسبة للمحور $xx'$

$g(x) = -f(-x)$

$g(x)$ نظير $f(x)$ بالنسبة للمبدأ $O$

$g(x) = f(x) + b$

$g(x)$ ناتج عن $f(x)$ بانسحاب شعاعه $b\vec{j}$

$g(x) = f(x + a)$

$g(x)$ ناتج عن $f(x)$ بانسحاب شعاعه $-a\vec{i}$

$g(x) = |f(x)|$

التراتيب السالبة فقط تصبح موجبة (الخط البياني الواقع تحت المحور $xx'$ يؤخذ نظيره بالنسبة لمحور)

**إثبات أنّ نقطة $(a,b)$ مركز تناظر**

$\forall a + x \in D_f \Rightarrow a - x \in D_f$

$f(a+x) + f(a-x) = 2b$

**إثبات أنّ المستقيم $x = a$ ... تناظر**

$\forall a + x \in D_f \Rightarrow a - x \in D_f$

$f(a+x) = f(a-x)$


[illegible]@gmail.com +963941111148 [illegible] +963943608577



CamScanner

اللهم أغنِنا بالاقتِصارِ إليك وكَفِّرنا بالاستِغناءِ عنك

# المتتاليات

حدود متتالية وفق قاعدة معينة

إما تعطى القاعدة ونستنتج الأعداد
أو تعطى الأعداد ونحاول استنتاج القاعدة

$(u_n)_{n\geq n_0}$

## تعريف

### صريح
$u_n = f(n)$

- الحسابية: $u_n = u_0 + nr$
- الهندسية: $u_n = u_0 q^n$

حساب حد انطلاقاً من حد محدد
إيجاد الأساس من حدين محددين

$u_n = u_p + (n-p)r$

$u_n = u_p \cdot q^{n-p}$

### بالتدريج
$u_n = f(u_n)$

- الحسابية: $u_{n+1} = u_n + r$ — كل حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد $r$ (يسمى الأساس)
- الهندسية: $u_{n+1} = q\,u_n$ — كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد $q$ (يسمى الأساس)

$u_{n+1} - u_n = r$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

## المجاميع الجزئية $S_n$

- الحسابية: $S_n = \frac{n}{2}(a+\ell)$ — مجموع $n$ حد متتالي، حيث $a$ الحد الأول منهم و $\ell$ الحد الأخير، و $n$ عدد الحدود
- الهندسية: $S_n = a.\frac{1-q^n}{1-q}$ — مجموع $n$ حد متتالي، حيث $a$ الحد الأول منهم و $n$ عدد الحدود

عدد الحدود $n = (\text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول}) + 1$

في حال كان الانتقال بين الحدود وفق خطوة $k$ يصبح مجموع الهندسية

عدد الحدود $n = \frac{(\text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول})}{\text{الخطوة } k} + 1$

$S_n = a.\frac{1-q^{kn}}{1-q^k}$

في حال كان الحد العام للمتتالية معطى ككسر (والمقام جداءات)

تفريق كسور

$\frac{\text{بسط}}{(n-\alpha)(n-\beta)} = \frac{A}{(n-\alpha)} + \frac{B}{(n-\beta)}$

نوجد $A,B$ من خلال توحيد المقامات ثم مطابقة البسط الناتج مع البسط الأصلي

## الإثبات بالتدريج

- لإثبات اي علاقة تابعة للمتحول الطبيعي $n$
- نتحقق من صحتها من أجل قيمة ابتدائية $n_0$
- نفرض صحتها من أجل $n$
- نبرهن صحتها من أجل $n+1$
- نستفيد من الخطوة الثانية لبرهان الخطوة الثانية

$a,b,c$ ثلاثة حدود متوالية

$b^2 = a.c$

$2b = a+c$


+963943608577 +963941111148

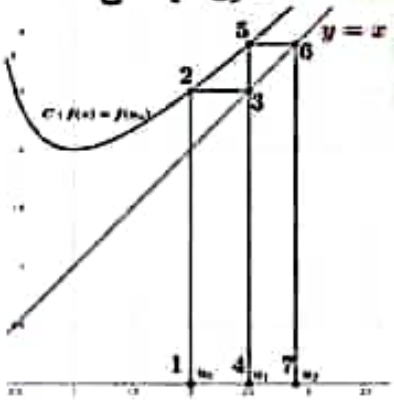


CamScanner

اللَّهُمَّ اقْسِمْ لَنَا مِنْ خَشْيَتِكَ مَا تَحُولُ بِهِ بَيْنَنَا وَبَيْنَ مَعَاصِيكَ وَمِنْ طَاعَتِكَ مَا تُبَلِّغُنَا بِهِ جَنَّتَكَ وَمِنَ الْيَقِينِ مَا تُهَوِّنُ بِهِ عَلَيْنَا مَصَائِبَ الدُّنْيَا

# المتتاليات $(u_n)_{n\geq n_0}$

## التمثيل الهندسي




## اطراد متتالية

متزايدة تماما — متناقصة تماما

- $u_{n+1} - u_n > 0$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$
- $u_{n+1} - u_n < 0$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

يمكن استخدام الاثبات بالتدريج

أو يمكن تعريف المتتالية كتابع ودراسة إشارة المشتق

متتالية ثابتة

$u_{n+1} - u_n = 0$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

## نهاية متتالية

### معرفة بشكل صريح

تحسب النهاية مباشرة

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$ عدد

### معرفة بالتدريج

$u_{n+1} = f(u_n)$

نحل المعادلة $f(x) = x$

## متتاليتان متجاورتان

إذا تحقق الشرطان

- إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة
- $\lim_{n\to+\infty} [u_n - v_n] = 0$

وتكونان متقاربتين ولهما نفس النهاية

## متتالية متقاربة

- متزايدة ومحدودة من الأعلى
- متناقصة ومحدودة من الأدنى

## متتالية محدودة

- من الأدنى $u_n \geq m$ ($m$ حد قاصر)
- من الأعلى $u_n \leq M$ ($M$ حد راجح)

متتالية $u_n$ محدودة: $m \leq u_n \leq M$

## نهاية متتالية هندسية

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} q^n = 0, & -1 < q < 1 \\ \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty, & 1 < q \\ \lim_{n\to+\infty} q^n = \text{ليس لها نهاية}, & q < -1 \\ \lim_{n\to+\infty} q^n = 1, & q = 1 \text{ متتالية ثابتة} \end{cases}$$

## إثبات الاطراد (يمكن التنبؤ بحساب بعض الحدود) ثم حساب النهاية

أو

## نتوسل تغيرات التابع $f(x)$ المماثل للمتتالية $u_n$

- صريح: $n_0 \leq n \leq +\infty$
- بالتدريج: $m \leq x \leq M$

مطرد تماماً على مجال التعريف ← نأخذ صورة مجال التعريف


+963941111448 +963943608577



CamScanner

الحمد لله عدد ما خلق

$\boxed{\frac{0}{0}}, \boxed{\frac{\infty}{\infty}}, \boxed{\infty - \infty}, \boxed{0.\infty}, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

# النهايات وحالات عدم التعيين

## يوجد كثيرات حدود فقط

- $\frac{0}{0}$ نحلل (متطابقات، $\Delta$، قسمة اقليدية،...) ثم نختصر
- $\frac{\infty}{\infty} \Leftarrow \frac{\text{المسيطر}}{\text{المسيطر}}$
- $\infty - \infty$ نهاية الحد المسيطر
- كسر $\pm$ كسر $\Leftarrow$ توحيد مقامات

$0.\infty$ يمكن ردها إلى $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$ (بالضرب والقسمة بعامل مناسب)

## يوجد جذر

- $\frac{0}{0}$ ضرب بالمرافق
- $\frac{\infty}{\infty} \Leftarrow$ عامل مشترك (أكبر حد داخل الجذر)
- $\infty - \infty$ ضرب بالمرافق إذا كان $\left(\sqrt{ax^n - b} \pm \sqrt{ax^n}\right)$ وغير ذلك إخراج عامل مشترك

انتبه إلى أن

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} +x, x \in [0, +\infty[ \\ -x, x \in ]-\infty, 0] \end{cases}$$

$$|f(x) - \lambda| \leq g(x) \;\&\; \lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \lambda$$

$$\underbrace{g(x)}_{+\infty} \leq \underbrace{f(x)}_{+\infty} \Rightarrow \qquad \underbrace{g(x)}_{-\infty} \geq \underbrace{f(x)}_{-\infty} \Rightarrow$$

انتبه (للمجال) لوجود نهاية يمين ويسار (يقيم أكبر وقيم أصغر) عند $\frac{\text{عدد}}{0}$

$$\frac{\text{عدد}}{0^+} = +\infty \;\&\; \frac{\text{عدد}}{0^-} = -\infty \;\&\; \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

## يوجد تابع مثلثي

$$\lim_{\square \to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

قوانين مثلثية

إحاطة

$$\underbrace{g(x)}_{\lambda} \leq \underbrace{f(x)}_{\lambda} \leq \underbrace{h(x)}_{\lambda} \Rightarrow \lim f(x) = \lambda$$

$$-1 \leq \frac{\sin x}{\cos x} \leq 1$$

حسب تعريف العدد المشتق

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## يوجد تابع أسي

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} x.e^x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n.e^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

ليست حالة لعدم التعيين $\infty^0, 0^0, 1^{\infty}$

## يوجد تابع لوغاريتمي

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} x.\ln x = 0^- \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

انتبه تستخدم ايضا من اجل تابع الجزء الصحيح

$x - 1 \leq E(x) < x$

العدد الصحيح الذي يسبق $x$ مباشرة

CamScanner

+963943608577 +963941111148

اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى قُدْوَتِنَا وَشَفِيعِنَا مُحَمَّدٍ وَعَلَى آلِهِ وَصَحْبِهِ وَسَلَّمَ

# معادلات شهيرة

## مستقيم

### المعادلة الديكارتية

لتعيين مستقيم في المستوي نحتاج نقطة $A(x_0,y_0)$ وناظم $\vec{n}(a,b)$ أو شعاع توجيه $\vec{u}(-b,a)$

$$d: ax+by+c=0$$

### المعادلة الوسيطية

لتعيين مستقيم في الفراغ باستخدام المعادلات الوسيطية له نحتاج نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وشعاع توجيه $\vec{u}(a,b,c)$:

$$d:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt, t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

$t\in R$ مستقيم
$t\in[0,\infty)$ نصف مستقيم
$t\in[0,1]$ قطعة مستقيمة

## مستوي

لتعيين المستوي نحتاج إلى نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وناظم $\vec{n}(a,b,c)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

- مستويان متوازيان يمكن أخذ $\vec{n}=\vec{n}_2$
- بعدهما مستويين $\vec{n}.\vec{n}_1=0$ و $\vec{n}.\vec{n}_2=0$
- نقطتين معلومتين A,B وبعدهما مستوي $\vec{n}.\vec{n}_1=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$
- ثلاثة نقاط معلومة (شعاعي توجيه (حيث يكون الناظم $\vec{n}$ عمودي عليهم)).

معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$

نوجد منتصف القطعة المستقيمة (وهي نقطة من المستوي)، والشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو ناظم المستوي

$M(x,y,z)$ نقطة من المستوي، فإن $\|\overrightarrow{MA}\|=\|\overrightarrow{MB}\|$

## كرة

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

المسافة بين أي نقطة على سطح الكرة والمركز $(x_0,y_0,z_0)$ تساوي $R$

## أسطوانة

محورها $(o,\vec{i})$ نصف قطرها $r$
مركزي قاعدتيها $(a,0,0),(b,0,0)$

$$y^2+z^2=r^2,\quad a\le x\le b$$

محورها $(o,\vec{j})$ نصف قطرها $r$
مركزي قاعدتيها $(0,a,0),(0,b,0)$

$$x^2+z^2=r^2,\quad a\le y\le b$$

محورها $(o,\vec{k})$ نصف قطرها $r$
مركزي قاعدتيها $(0,0,a),(0,0,b)$

$$x^2+y^2=r^2,\quad a\le z\le b$$

## مخروط

رأسه $O$ ومحوره $(o,\vec{i})$ ومركز قاعدته $(h,0,0)$ ونصف قطر القاعدة $r$

$$y^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}x^2=0,\quad 0\le x\le h$$

رأسه $O$ ومحوره $(o,\vec{j})$ ومركز قاعدته $(0,h,0)$ ونصف قطر القاعدة $r$

$$x^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}y^2=0,\quad 0\le y\le h$$

رأسه $O$ ومحوره $(o,\vec{k})$ ومركز قاعدته $(0,0,h)$ ونصف قطر القاعدة $r$

$$x^2+y^2-\frac{r^2}{h^2}z^2=0,\quad 0\le z\le h$$

الإتمام إلى مربع كامل

$$\underbrace{(\quad)^2}_{\text{مربع كامل}}$$

1 $x^2+bx+c=0$

$$\rightarrow x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=0$$

$$\rightarrow \left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=0$$

2 $ax^2+bx+c=0$

$$a\underbrace{\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)}_{\text{نتم إلى مربع كامل كما في 1}}+c=0$$

+963943608577 +963941111414

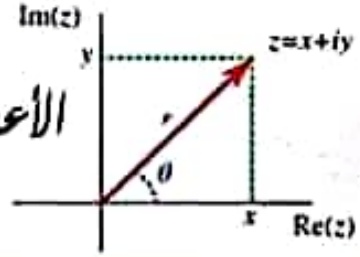
CamScanner

اللَّهُمَّ اشْرَحْ لِي صَدْرِي وَيَسِّرْ لِي أَمْرِي وَاحْلُلْ عُقْدَةً مِنْ لِسَانِي يَفْقَهُوا قَوْلِي

# الأعداد العقدية

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$




يمكن التعبير عن طويلة (مسافة) أي موجهة دوما

## الشكل الجبري

$z = x + iy$

جزء تخيلي $y$ $+i$ $x$ جزء حقيقي

## الشكل المثلثي

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\theta = \arg z, \quad r = |z|$

$r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta \begin{cases} \cos\theta = x/r \\ \sin\theta = y/r \end{cases}$

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$

الطويلة — المرافق

عند جمع عددين نجمع القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

بالضرب نضرب وننشر حسب القواعد المعروفة

## الشكل الأسي

$z = re^{i\theta}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad e^{i\pi} = -1$

$\bar{z} = re^{-i\theta}$

علاقة أويلر

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$

دستور دوموافر

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

$\bar{z} = x - iy \quad |z| = \sqrt{x^2+y^2} \quad z.\bar{z} = |z|^2$

$z$ حقيقي ← إذا انعدم الجزء التخيلي

$z = \bar{z}$

$z$ تخيلي بحت ← إذا انعدم الجزء الحقيقي

$z = -\bar{z}$

$(\bar{z})^n = \overline{z^n}$

ملاحظات

- $z_1/z_2$ نضرب البسط والمقام بالمرافق $\bar{z_2}$
- يتساوى عددان عقديان إذا تساوى القسم الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

---

النقطة $A$ تقابل العدد العقدي $z_A = x_A + y_A i$

والنقطة $B$ تقابل العدد العقدي $z_B = x_B + y_B i$

العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i$

## تطبيقات

$I$ منتصف قطعة مستقيمة $[AB]$

$z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

$G$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

$z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

### ضرب/قسمة عددين عقديين

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ $\quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$z_1 z_2 = r_1 \times r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$

$z_1 z_2 = r_1 \times r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

### الزاوية بين شعاعين

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

لدينا أربع نقاط $A,B,C,D$

لدينا ثلاثة نقاط

إذا كان العدد العقدي $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

- حقيقي ← مرتبطان خطيا — تقع النقاط على استقامة واحدة
- تخيلي بحت ← الشعاعان متعامدان

### لإيجاد جذور من المرتبة $n$ لأعداد عقدية بالشكل الأسي

$(w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n})$

$w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, k = 0,1,\ldots,n-1$


+963943608577 +963941111414 8



CamScanner

اللَّهُمَّ اهْدِنِي لِأَحْسَنِ الْأَخْلَاقِ لَا يَهْدِي لِأَحْسَنِهَا إِلَّا أَنْتَ

# متطابقات شهيرة

## درجة ثانية

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

## درجة ثالثة

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

## درجة $n$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n$$

$$= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{r}a^{n-r}b^r}_{T_r}, \qquad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

عندما يطلب التعامل مع حد معين نكتب صيغة الحد $T_r$ بأبسط صورة ثم نعين r

الحد المستقل عن $x$ (الحد الذي لا يحوي $x$) أي عندما يكون $x^0$

فائدة

إذا كان للمعادلة $a\,bx^{n-1} + \cdots + d = 0$ جذراً من الشكل $x_1 = \frac{p}{q}$ فإنّ $p$ يقسم $d$ و $q$ يقسم $a$، ونقسم المعادلة على $(qx-p)$

# دراسة إشارة

- ❖ بعد إيجاد الجذور الحقيقية وتحليل كثير الحدود نشكل الجدول
- ☐ كثيرة حدود من الدرجة الأولى إشارتها (ما قبل الجذر يخالف إشارة $x$ وما بعد يوافق)
- ☐ كثيرة حدود من الدرجة الثانية إشارتها (ما بين الجذرين يخالف إشارة $x^2$ وما عدا يوافق)
- ☐ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة إشارتها (تكتب كجداء لكثيرة حدود درجة ثانية مع كثيرة حدود درجة أولى وتدرس إشارة كل منهما على حدا ثم تضرب)
- ☐ تابع كسري (ادرس إشارة البسط لوحده وإشارة المقام ثم قسم)
- ☐ تابع دوري (تدرس الإشارة على دورة واحدة ثم تعمم النتيجة)
- ☐ تابع يحوي جذر (هل ما داخل الجذر أكبر/أصغر من مربع الحدود الباقية $x - \sqrt{x^2+1}$ أو استنتج بطرق أخرى)

$$x^2+1 > x^2 \Rightarrow x - \sqrt{x^2+1} < 0$$

- ☐ الجذر لوحده موجب
- ☐ التابع الأسي لوحده موجب
- ☐ التابع اللوغاريتمي لوحده موجب تماما إذا كان ما داخله بين $]1, +\infty[$ وسالب تماماً إذا كان بين $]0,1[$

+963943608577 +963941111148

CamScanner

لَا إِلَهَ إِلَّا أَنْتَ سُبْحَانَكَ إِنِّي كُنْتُ مِنَ الظَّالِمِينَ

# خواص

## القوى

$$a^n.a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n.m}$$

$$a^n.b^n = (a.b)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$$

انتبه $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a \pm b}$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

العدد النيبري $e \approx 2.71828$

## اللوغاريتم

إذا كانت $a,b > 0$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$\ln a.b = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^b = b \ln a$$

$$a = \ln e^a \quad | \quad a = e^{\ln a}$$

$$\ln e = 1 \quad | \quad \ln 1 = 0$$

$a \neq 1$ | $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ | $\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a}$ | $\log_e x = \ln x$

## متراجحات ومعادلات

$$a \leq b \Rightarrow \ln a \leq \ln b$$

$$a \leq b \Rightarrow e^a \leq e^b$$

$$\ln x \leq x \leq e^x$$

$$\ln a = \ln b \overset{e}{\Rightarrow} a = b$$

$$e^a = e^b \overset{\ln}{\Rightarrow} a = b$$

## معادلة تفاضلية

حلها من الشكل: $y' = ay + b$

$$y = k.e^{ax} - \frac{b}{a}$$

حلها من الشكل: $y' = ay$

$$y = k.e^{ax}$$

ثابت توجد من المعطيات

الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ Complex numbers

$\{x+iy : x,y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$

الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ Real numbers

الأعداد غير الكسرية (غير المنطقية) Irrational numbers

أي عدد لا يمكن كتابته ككسر هو عدد غير كسري

جذور الأعداد الأولية... $\sqrt{2}, \sqrt{7}, ...$

$e, \pi, \sin 10, ...$

$\ln 5, \cos \pi/4, ...$

الأعداد الجذرية غير الدورية وغير المنتهية هي أعداد غير كسرية

الأعداد الكسرية (المنطقية) rational numbers $\mathbb{Q}$

$\left\{\frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

الأعداد الصحيحة integers numbers $\mathbb{Z}$

$\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

الأعداد الطبيعية Natural numbers $\mathbb{N}$

$\{1, 2, 3, ...\}$

لحل معادلة أو متراجحة نوجد مجموعة التعريف ونقبل من الحلول ما ينتمي إلى مجموعة التعريف

mathematiquesetapplications@gmail.com +963941111148 +963943608577

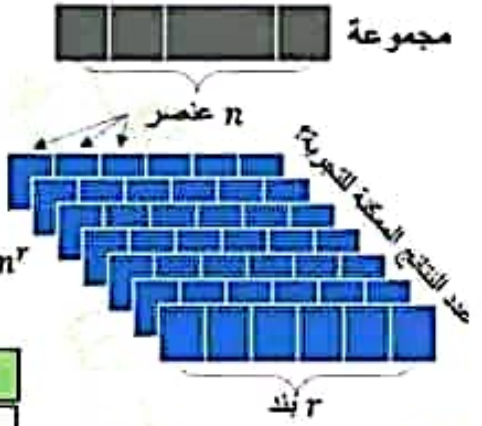
CamScanner

اللَّهُمَّ أَعِنِّي عَلَى حُسْنِ الظَّنِّ بِكَ وَصِدْقِ التَّوَكُّلِ عَلَيْكَ

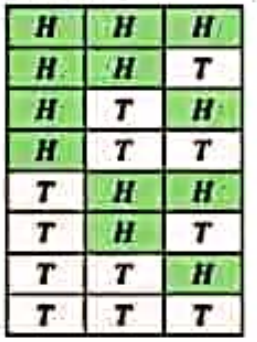
# التحليل التوافقي والاحتمالات

## العد

مجموعة



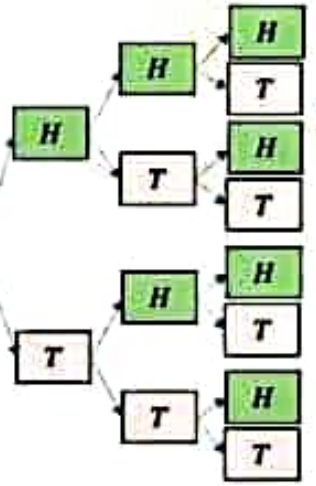

مثال: إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية



| | | |
|---|---|---|
| H | H | H |
| H | H | T |
| H | T | H |
| H | T | T |
| T | H | H |
| T | H | T |
| T | T | H |
| T | T | T |

$2^3 = 8$

المخطط الشجري




## التكرار مسموح

يمكن ملئ كل بند بـ $n$ طريقة

عدد القوائم $= \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{r \text{ مرة}} = n^r$

## التكرار غير مسموح والترتيب مهم

يمكن ملئ أول بند بـ $n$ طريقة والثاني بـ $(n-1)$ طريقة ... و ×

**تبديل** $r = n$

عدد القوائم $= n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$

**ترتيب** $1 \le r \le n$

عدد القوائم $P_n^r = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

## التوافيق

التكرار غير مسموح والترتيب غير مهم

السحب معا — اختيار مجموعة جزئية من مجموعة أوسع

$1 \le r \le n$

عدد المجموعات الممكنة

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

### خواص

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, 0 \le r \le n$$

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

$1 \le r \le n$

عدد المجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من $n$ عنصر $= 2^n$

عليك بفهم المسألة جيدا قبل الحل (يوجد تكرار او لاء الترتيب مهم او لا)، قد يكون في بعض الطلبات الترتيب مهم في جزء وغير مهم في جزء

**مثال** كم رمز من 4 خانات يمكن أن نتشئ من المجموعة {1,5,9,9}
حيث التكرار غير مسموح والترتيب مهم
لاحظ أن الـ 9 هنا مكررة فالترتيب بين (التبديل بين) 9,9 غير مهم
عدد طرق إدخال {1,5} لأربع خانات × عدد طرق إدخال {9,9} للخانتين المتبقيتين

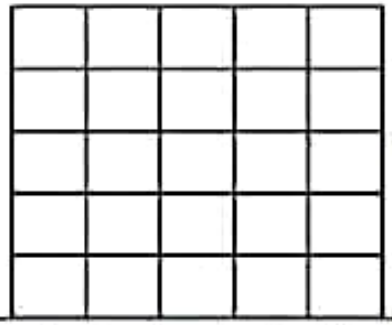
$$= \binom{2}{2} \times P_4^2 = 1 \times 4 \times 3 = 12$$

CamScanner

اللَّهُمَّ إِنِّي أَسْتَغْفِرُكَ لِكُلِّ ذَنْبٍ يَرُدُّ عَنِّي دُعَاءَكَ وَيَقْطَعُ مِنْكَ رَجَائِي وَيُطِيلُ فِي سَخَطِكَ عَنَائِي وَيَقْصُرُ بِي عَنْكَ أَمَلِي

# التحليل التوافقي والاحتمالات

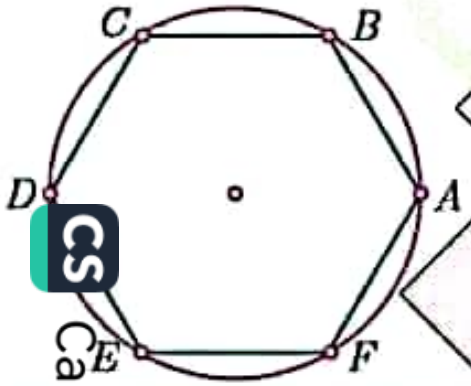
كم مستطيل في هذا المربع؟



ينتج المستطيل من تقاطع مستقيمين شاقولين مع مستقيمين أفقيين (الترتيب غير مهم)

عدد طرق اختيار مستقيمين شاقولين × عدد طرق اختيار مستقيمين أفقيين

$$= \binom{6}{2} \cdot \binom{6}{2} = 15 \times 15 = 225$$




عدد المثلثات (المثلث ثلاثة نقاط ليست على استقامة واحدة (الترتيب غير مهم))

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$$

عدد المثلثات القائمة (إذا كان أحد أضلاعها قطر في الدائرة المارة من الرؤوس)

$$\underbrace{3}_{\text{عدد الأقطار}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{اختيار الرأس المتبقي}} = 12$$

عدد المثلثات المنفرجة الزاوية (إذا كان أحد رؤوسها رأس في المسدس)= 6

## الاستقلال الاحتمالي

### لمتحول

حالات لاستقلال احتمالي تعرف بدون ذكره (حيث النتيجة لا تتأثر بغيرها)

إلقاء حجر نرد أو قطعة نقود عدداً من المرات أو إلقاء عدة قطع أو أحجار.

السحب من صناديق مختلفة أو السحب من الصندوق نفسه مع الإعادة

### لمتحولين

ليكن $X$ و $Y$ متحولين عشوائيين معرفين على $\Omega$

فالزوج $(X,Y)$ هو إعطاء الاحتمال $p_{i,j}$ لكل حدث، حيث

$$p_{i,j} = P((X = x_i) \cap (Y = y_i))$$

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين $X$ و $Y$

الاستقلال الاحتمالي للحدثين $(X = x_i)$ و $(Y = y_i)$

$$p_{i,j} = P(X = x_i).P(Y = y_i)$$

| $X$ \ $Y$ | $y = y_0$ | $y = y_1$ | ... | $y = y_m$ | $P(X = x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x = x_0$ | $P((X = x_0) \cap (Y = y_0))$ | | $+ \dots + \dots + \dots$ | | $P(X = x_0)$ |
| $x = x_1$ | | | | | |
| ⋮ | | | $P((X = x_i) \cap (Y = y_i))$ | | $P(X = x_i)$ |
| $x = x_n$ | | | | | |
| $P(Y = y_j)$ | $P(Y = y_0)$ | ‖ | $P(Y = y_j)$ | | |


+963941111448 +963943608577



CamScanner

اللهم لك الحمد أن هديتنا ووفقتنا وأعنتنا وأنعمت علينا إنك أهل الثناء والحمد

# التحليل التوافقي والاحتمالات

## الاحتمال

$0 \le P(A) \le 1$

فضاء العينة: $\Omega$ مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ما

الحدث: مجموعة جزئية من فضاء العينة $\Omega$

$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$P(\Omega) = P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_n)$

- الحدث الأكيد: $\Omega$ — $P(\Omega) = 1$
- الحدث المستحيل: $\phi = \{\}$ — $P(\phi) = 0$
- الحدث البسيط: مجموعة جزئية مكونة من عنصر واحد من فضاء العينة — $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$
- الحدث المعاكس: $A'$ الذي يقع عندما لا يقع $A$ — $P(A') = 1 - P(A)$
- $A \cup A' = \Omega, \quad A \cap A' = \phi$
- $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$
- $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$
- الحدث $A$ و $B$: $A \cap B$ يقع الحدثان معاً
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- الحدث $A$ أو $B$: يقع أحد الحدثين على الأقل — $A \cup B$

حدثان متنافيان (منفصلان): $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad P(A \cap B) = 0$

## الاحتمال الشرطي

احتمال الحدث $A$ شرط وقوع $B$ (علماً أن $B$ قد وقع)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$

حدثان مستقلان: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

## التمثيل الشجري

$P(C_1) + P(B_1) + P(A_1) = 1$

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1).P(A_1)$

$P(C_1)$ — $P(B_1)$ — $P(A_1)$

$P(A_2|C_1)$ — $P(A_2|B_1)$ — $P(A_2|A_1)$

$C_1$ $B_1$ $A_1$

$C_2$ $B_2$ $A_2$ $C_2$ $B_2$ $A_2$ $C_2$ $B_2$ $A_2$

$\cdots + \cdots + \cdots = 1$

## المتحول العشوائي

كل تابع معرف على $\Omega$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}$ $(x_i \in \mathbb{R})$

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_m$ |

$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$

### التوقع الرياضي

$E(X) = x_1.p_1 + x_2.p_2 + \cdots + x_m.p_m$

$E(X) = n.p$

### التباين

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$V(X) = n.p.q$

### الانحراف المعياري

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

## القانون الحداني (اختبار بيرنولي)

عندما نهتم بوقوع حدث محدد بعينه $A$

$P(A) = p, \quad P(A') = q = 1 - p$

$X$ متحول عشوائي يأخذ قيمه من $\{0,1,2,\dots,n\}$ وأياً كان $0 \le k \le n$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$= B(n,p)$

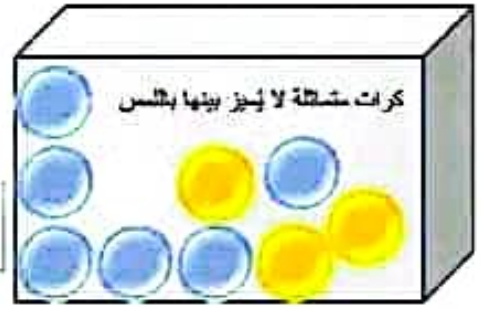

+963943608577 +963941111148



CamScanner

اللهم لك الحمد حتى ترضى ولك الحمد إذا رضيت ولك الحمد بعد الرضا

# عدد النتائج




نسحب عشوائياً ثلاثة كرات

عدد النتائج الكلية الممكنة التجربة

**السحب مع الإعادة**

$(10)^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

**السحب بدون الإعادة** ترتيب

$P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

**السحب معاً (الترتيب غير مهم)** توفيق

$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$

عدد النتائج التي تشمل على ثلاثة كرات من لون واحد

| إما ثلاثة زرقاء أو ثلاثة صفراء أو ثلاثة بيضاء | إما ثلاثة زرقاء أو ثلاثة صفراء | إما ثلاثة زرقاء أو ثلاثة صفراء |
|---|---|---|
| $(6)^3 + (3)^3 + (1)^3 = 244$ | $P_6^3 + P_3^3 = 6 \times 5 \times 4 + 3 \times 2 = 126$ | $\binom{6}{3} + \binom{3}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} + 1 = 21$ |

عدد النتائج التي تشمل على كرتين فقط من لون واحد

مثل

| إما اثنتان زرقاء وواحدة صفراء أو اثنتان صفراء وواحدة غير صفراء أو اثنتان بيضاء وواحدة غير بيضاء | إما اثنتان زرقاء وواحدة غير زرقاء أو اثنتان صفراء وواحدة غير صفراء | إما اثنتان زرقاء وواحدة غير زرقاء أو اثنتان صفراء وواحدة غير صفراء |
|---|---|---|
| $3 \times ((6)^2(4)^1 + (3)^2(7)^1 + (1)^2(9)^1) = 648$ | $3 \times (P_6^2 \times P_4^1 + P_3^2 \times P_7^1) = 3(6 \times 5 \times 4 + 3 \times 2 \times 7) = 486$ | $\binom{6}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{7}{1} = 60 + 21 = 81$ |

الترتيب هنا مهم لذا ضربنا بـ 3

عدد النتائج التي تشمل على ثلاثة كرات مختلفة الألوان

| واحدة زرقاء وواحدة صفراء وواحدة بيضاء | واحدة زرقاء وواحدة صفراء وواحدة بيضاء | واحدة زرقاء وواحدة صفراء وواحدة بيضاء |
|---|---|---|
| $(6 \times 3 \times 1) \times 3! = 108$ | $(P_6^1 \times P_3^1 \times P_1^1) \times 3! = 108$ | $\binom{6}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1} = 18$ |

الترتيب هنا مهم لذا ضربنا بـ 3!

عدد النتائج التي تشمل على ثلاثة كرات ليست من لون واحد

| (من لون واحد) – (الحالات الكلية) | (من لون واحد) – (الحالات الكلية) | (من لون واحد) – (الحالات الكلية) |
|---|---|---|
| $1000 - 244 = 756$ | $720 - 126 = 594$ | $120 - 21 = 99$ |

عدد النتائج التي تشمل على كرة زرقاء على الأقل

| (غير زرقاء) – (الحالات الكلية) | (غير زرقاء) – (الحالات الكلية) | (غير زرقاء) – (الحالات الكلية) |
|---|---|---|
| $1000 - (4)^3 = 936$ | $720 - P_4^3 = 696$ | $120 - \binom{4}{3} = 116$ |

عدد النتائج التي تشمل على كرة بيضاء على الأقل

| (غير بيضاء) – (الحالات الكلية) | (غير بيضاء) – (الحالات الكلية) | (غير بيضاء) – (الحالات الكلية) |
|---|---|---|
| $1000 - (9)^3 = 271$ | $720 - P_9^3 = 216$ | $120 - \binom{9}{3} = 36$ |

عدد النتائج التي تشمل على الكرة الأولى زرقاء والثانية صفراء والثالثة بيضاء

| | | |
|---|---|---|
| $6 \times 3 \times 1 = 18$ | $6 \times 3 \times 1 = 18$ | لا يوجد ترتيب في السحب معاً |

الترتيب محقق

CamScanner

لا إله إلا أنت وحدك لا شريك لك أستغفرك وأتوب إليك

# احتمالات

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq 1$$

عدد النتائج الكلية الممكنة التجربة

**نسحب عشوائياً ثلاثة كرات**

| | السحب مع الإعادة | السحب بدون الإعادة (ترتيب) | السحب معاً (الترتيب غير مهم) (توافق) |
|---|---|---|---|
| | $(10)^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$ | $P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ | $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ |
| احتمال الحصول على ثلاثة كرات من لون واحد | $\frac{244}{1000} = 0.244$ | $\frac{126}{720} = 0.175$ | $\frac{21}{120} = 0.175$ |
| احتمال الحصول على كرتين فقط من لون واحد | $\frac{648}{1000} = 0.648$ | $\frac{486}{720} = 0.675$ | $\frac{81}{120} = 0.675$ |
| احتمال الحصول على ثلاثة كرات مختلفة الألوان | $\frac{108}{1000} = 0.108$ | $\frac{108}{720} = 0.15$ | $\frac{18}{120} = 0.15$ |
| احتمال الحصول على ثلاثة كرات ليست من لون واحد | $\frac{756}{1000} = 0.756$ | $\frac{594}{720} = 0.825$ | $\frac{99}{120} = 0.825$ |
| احتمال الحصول على كرة زرقاء على الأقل | $\frac{936}{1000} = 0.936$ | $\frac{696}{720} = 0.9666$ | $\frac{116}{120} = 0.9666$ |
| احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل | $\frac{271}{1000} = 0.271$ | $\frac{216}{720} = 0.3$ | $\frac{36}{120} = 0.3$ |
| احتمال أن تكون الكرة الأولى زرقاء والثانية صفراء والثالثة بيضاء | $\frac{18}{1000} = 0.018$ | $\frac{18}{720} = 0.025$ | لا يوجد ترتيب في السحب معاً |

الترتيب معطى

CamScanner