اختبارات رياضيات مؤتمتة للبكالوريا السورية

اختبار وحدة التكامل والتوابع الأصلية

الجزء الأول : الوحدة السابعة

الإشراف العام

الأستاذ : عبد الحميد السيد

كتابة: أ . صلاح سالم - أ . أمين الحايك

تنسيق وإخراج: أ . أمين الحايك - أ . نادر أبو راس

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	فيصل خالد	محمد السيد علي
هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان	زينب يوسف
حسام خضر قاسم	خالد شوقي الحداد	فادي المحمد	يوسف منصور
نادر أبو راس	محمد زين جعرور	فادي طنوس	زكي طحاوي
أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة	محمد احمد العيسى
مصطفى الرزوق	صلاح سالم	عبد السلام حسن	

1	إن التابع الأصلي F للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق: $f(x)=3x^2+\frac{1}{x^2}+1$ والذي يحقق $F(1)=2$ هو						
A	$x^3+\frac{1}{x}+x+1$	B	$x^3-\frac{1}{x}+x+1$	C	$x^3+\frac{1}{x}+x+2$	D	$x^3-\frac{1}{x}+x+2$

نحو الحل

$$F(x)=x^3-\frac{1}{x}+x+k$$

$$F(1)=2 \quad\Rightarrow\quad 2=1-1+1+k \quad\Rightarrow\quad k=1$$

$$F(x)=x^3-\frac{1}{x}+x+1$$

إعداد: أ. صفوح الأفندي | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

2	بفرض G و F تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال $I=]0,+\infty[$ فإذا كان $F(x)=lnx$ فإن $G(x)$ يمكن أن يكون:						
A	$1-lnx$	B	$ln(2x)-1$	C	lnx^2	D	ln^2x

نحو الحل

لدينا $f(x)=F'(x)=\frac{1}{x}$. ومشتقات التوابع ضمن الخيارات هي

A	B	C	D
$\frac{-1}{x}$	$\frac{2}{2x}=\frac{1}{x}$	$\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$	$\frac{2lnx}{x}$

إعداد: أ. فادي طنوس | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

3	إن قيمة التكامل: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4sin(x)\cdot sin(3x)\,dx$ تساوي:						
A	-1	B	0	C	1	D	2

نحو الحل

نعلم أن: $2sina\cdot sinb=cos(a-b)-cos(a+b)$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2(2sin(3x)\cdot sin(x))\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2(cos(2x)-cos(4x))\,dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}sin(2x)-\frac{1}{4}sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left[sin(2x)-\frac{1}{2}sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\left(sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}sin(\pi)\right)-\left(sin(0)-\frac{1}{2}sin(0)\right)\right]$$

$$=\left[\left(1-\frac{1}{2}(0)\right)-(0-0)\right]=1$$

إعداد: أ. أمين الحايك | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

4	إن قيمة $I=\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx$ تساوي :						
A	$2(e-e^2)$	B	$2(e^2-e)$	C	$2(e^2+e)$	D	e^2-e

نحو الحل

$$I=\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx=2\int_1^4\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx=2\left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^4=2(e^2-e)$$

إعداد: أ.محي الدين اسماعيل | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

5

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $\left]-\frac{1}{a},+\infty\right[$ وفق: $f(x)=\frac{a}{\sqrt{ax+1}}$ ، حيث $a\neq 0$

إذا كانت مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$ تساوي (2) فإن قيمة العدد الحقيقي a هي:

A		B		C		D	
A	1	B	2	C	3	D	4

نحو الحل

$$\int_0^1 \frac{a}{\sqrt{ax+1}}dx=2 \Rightarrow \left[2\sqrt{ax+1}\right]_0^1=2$$

$$\sqrt{a+1}-1=1 \Rightarrow \sqrt{a+1}=2$$

$$a+1=4 \Rightarrow a=3$$

إعداد: أ. علي أحمد شقوف | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

6

ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x+2-x\cdot e^x$ وليكن $\Delta: y=x+2$ مقارباً مائلاً للخط البياني للتابع C_f عند $-\infty$. عندئذ مساحة السطح المحصور بين C_f ومقاربه Δ ضمن المجال $[0,1]$ تساوي:

A	$e-1$	B	1	C	e	D	$e+1$

نحو الحل

ضمن المجال $[0,1]$ يكون $f(x)-y_\Delta=-x\cdot e^x\leq 0$

$$S=\int_0^1\left(y_\Delta-f(x)\right)dx=\int_0^1 x\cdot e^x dx$$

$u=x$	$v'=e^x$
$u'=1$	$v=e^x$

$$S=\left[x\cdot e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=\left[x\cdot e^x-e^x\right]_0^1$$

$$S=(e-e)-(0-1)=1$$

إعداد: أ. رزان البديوي | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

7

إن قيمة التكامل:

$$\int_{-1}^1 \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}dx$$

A	$ln3$	B	$3ln2$	C	$2ln3$	D	$3ln3$

نحو الحل

نبحث عن ثابتين A و B يحققان: $3x-2=A(x-2)+B(x+2)$

نعوض في طرفي المعادلة $x=-2$ نجد: $A=2$

نعوض في طرفي المعادلة $x=2$ نجد: $B=1$

$$\int_{-1}^1 \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}dx=\int_{-1}^1\frac{2}{x+2}dx+\int_{-1}^1\frac{1}{x-2}dx=$$

$$=\left[2ln(x+2)\right]_{-1}^1+\left[ln(2-x)\right]_{-1}^1$$

$$=2ln3-ln3=ln3$$

إعداد: أ. نادر أبو راس | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

8 إذا كان $\int_0^2 \frac{a}{x+1} dx = ln9$ فإن قيمة العدد الحقيقي a تساوي:

A	B	C	D
$ln3$	2	$2ln3$	3

نحو الحل

$x + 1 > 0$ على المجال $[0,2]$

$$\int_0^2 \frac{a}{x+1} dx = ln9 \Rightarrow a[ln(x+1)]_0^2 = ln9$$

$$a(ln3 - ln1) = ln3^2 \Rightarrow aln3 = 2ln3 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

إعداد: أ. منال وردة | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

9 ليكن $I = \int_0^{ln16} \frac{e^x+3}{e^x+4} dx$ و $J = \int_0^{ln16} \frac{1}{e^x+4} dx$. إن قيمة $I - 3J$ تساوي:

A	B	C	D
$ln5$	$ln15$	$ln16$	$ln4$

نحو الحل

$$I - 3J = \int_0^{ln16} \left[\frac{e^x+3}{e^x+4} - 3\frac{1}{e^x+4}\right] dx = \int_0^{ln16} \frac{e^x}{e^x+4} dx$$

$$= [ln(e^x+4)]_0^{ln16} = ln20 - ln5$$

$$I - 3J = ln\frac{20}{5} = ln4$$

إعداد: أ. ماهر المحمد | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

10 إن قيمة التكامل المحدد $I = \int_0^{\pi} 3\cos x . \sin 2x \cdot dx$ تساوي:

A	B	C	D
-4	-2	0	4

نحو الحل

$$I = 3\int_0^{\pi} \cos x . (2\sin x \cos x)\, dx$$

$$= 6\int_0^{\pi} \sin x . (\cos x)^2\, dx = -6\int_0^{\pi} (\cos x)' . (\cos x)^2\, dx$$

$$I = -6\left[\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi} = -2[\cos^3 x]_0^{\pi}$$

$$= -2(\cos^3 \pi - \cos^3 0) = -2(-1-1) = 4$$

إعداد: أ.فادي المحمد | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

11 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0, 1]$ وفق: $f(x) = x.\sqrt{1-x}$

عندما يدور C دورة كاملة حول محور الفواصل يولد مجسماً دورانياً حجمه V يساوي :

A	B	C	D
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	π	2π

نحو الحل

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

$$V = \pi \int_0^1 x^2.(1-x)\, dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$V = \pi\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - (0)\right] = \frac{\pi}{12}$$

إعداد: أ.نور الدين صندفي | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

12 إذا كان $\int_a^b f(x)dx = a+2b$ وبفرض أن a, b عددان حقيقيان مختلفان فإن $\int_a^b (f(x)+5)dx$ يساوي:

A		B		C		D	
A	$a+2b+5$	B	$6a-3b$	C	$7b-4a$	D	$7b-5a$

نحو الحل

بحسب خواص التكامل المحدد فإن:

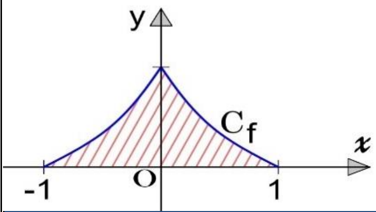
$$\int_a^b (f(x)+5)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b 5dx$$
$$= a+2b+[5x]_a^b$$
$$= a+2b+(5b-5a) = 7b-4a$$

إعداد: أ. خالد العمر | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

13 ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I=[-1,1]$

والمرسوم في الشكل المجاور وفق: $f(x) = min((x-1)^2, (x+1)^2)$

عندئذ قيمة $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ يساوي:



A	$\frac{3}{2}$	B	$\frac{2}{3}$	C	$\frac{1}{2}$	D	$\frac{1}{3}$

نحو الحل

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+1)^2\,dx + \int_{0}^{1} (x-1)^2\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1}$$
$$= \left(\frac{1}{3}-0\right) + \left(0+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

إعداد: أ. رياض الزامل | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

14 ليكن f تابعاً معرفاً على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = 1-\frac{1}{x}$ خطه البياني C_f

ليكن S السطح المحصور بين C_f ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=2$

عندئذ V حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران S حول محور الفواصل دورة كاملة يساوي:

A	$\pi\left(\frac{3}{2}-ln2\right)$	B	$\pi\left(\frac{1}{2}-2ln2\right)$	C	$\pi(3-ln2)$	D	$\pi\left(\frac{3}{2}-2ln2\right)$

نحو الحل

$$V = \pi\int_1^2 (f(x))^2dx = \pi\int_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\int_1^2 \left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$V = \pi\left[x-2lnx-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \pi\left[\left(2-2ln2-\frac{1}{2}\right)-(2-2ln1-1)\right]$$
$$V = \pi\left(\frac{1}{2}-2ln2\right)$$

إعداد: أ. أنطوان جلوف | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

15 إن قيمة التكامل $I=\int_{-1}^{1}(|2x-4|-|x+3|)\,dx$ تساوي:

A		B		C		D	
A	2	B	1	C	-1	D	-2

نحو الحل

لدينا $2x-4<0$ على المجال $[-1,1]$ & وكذلك $x+3>0$ على المجال $[-1,1]$

وعليه يكون : $I=\int_{-1}^{1}\big((-2x+4)-(x+3)\big)\,dx$

$$I=\int_{-1}^{1}(-3x+1)\,dx=\left[-\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left(-\frac{3}{2}+1\right)-\left(-\frac{3}{2}-1\right)=2$$

إعداد: أ. موسى حجيج	الجواب: A	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

16 العدد $I=\int_0^1\frac{2x}{(x+1)^2}dx$ يساوي :

A		B		C		D	
A	$ln2$	B	$ln2+1$	C	$2ln2-1$	D	$2ln2+1$

نحو الحل

$$I=\int_0^1\frac{2x+2-2}{(x+1)^2}dx=\int_0^1\left(\frac{2}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\left[2ln(x+1)+\frac{2}{x+1}\right]_0^1=(2ln2+1)-(2ln1+2)$$

$$I=2ln2-1$$

إعداد: أ. أحمد الكلش	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

17 بفرض g تابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا $J=\int_{-1}^{1}(x^2-1)\cdot g'(x)dx=2$

بالاستفادة من التكامل بالتجزئة نستنتج أن قيمة $I=\int_{-1}^{1}x\cdot g(x)dx$ تساوي:

A		B		C		D	
A	-2	B	-1	C	1	D	2

نحو الحل

من J:

$u=x^2-1$	$v'=g'(x)$
$u'=2x$	$v=g(x)$

$$J=[(x^2-1)\cdot g(x)]_{-1}^{1}-2\int_{-1}^{1}x\cdot g(x)dx$$

$$2=[(0)-(0)]-2I$$

$$I=-1$$

إعداد: أ. غيث شمسو	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

18

ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^x \cdot ln(1+e^{-x})$ ويحقق العلاقة $f(x) - f'(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

حيث f' التابع المشتق للتابع f على $\mathbb{R}$. عندئذ أحد التوابع الأصلية للتابع f على $\mathbb{R}$ يعطى بالصيغة:

A	$F(x) = ln(1+e^x) + e^{-x}$	B	$F(x) = ln(1+e^x) + e^x \cdot ln(1+e^{-x})$
C	$F(x) = ln(1+e^x) - e^x \cdot ln(1+e^{-x})$	D	$F(x) = ln(1+e^x) + e^{-x} \cdot ln(1+e^{-x})$

نحو الحل

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + f'(x)$$
$$F(x) = ln(1+e^x) + f(x)$$
$$F(x) = ln(1+e^x) + e^x \cdot ln(1+e^{-x})$$

إعداد: أ. محمد المصري	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

19

ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x \cdot cosx$ ويحقق العلاقة $f(x) + f''(x) = -2sinx$

حيث f'' المشتق الثاني للتابع f على $\mathbb{R}$. عندئذ للتابع f تابع أصلي F على $\mathbb{R}$ يعطى بالصيغة:

A	$F(x) = -cosx + x \cdot sinx$	B	$F(x) = cosx + sinx$
C	$F(x) = cosx - x \cdot sinx$	D	$F(x) = cosx + x \cdot sinx$

نحو الحل

$$F(x) + f'(x) = 2cosx$$
$$F(x) + cosx - x \cdot sinx = 2cosx$$
$$F(x) = cosx + x \cdot sinx$$

إعداد: أ. حسن علي سليمان	الجواب: D	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

20

ليكن التابع $f(x) = e^x$ خطه البياني C_f و $g(x) = e^{-x}$ خطه البياني C_g

عندئذ مساحة السطح المحصور بين C_f و C_g والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$ تساوي:

A	$\frac{e-1}{2}$	B	$\frac{(e-1)^2}{2}$	C	$\frac{e-1}{e}$	D	$\frac{(e-1)^2}{e}$

نحو الحل

نعلم أن $e^x \geq e^{-x}$ ضمن المجال $[0,1]$ ومنه $e^x - e^{-x} \geq 0$ ومنه $f(x) - g(x) \geq 0$

$$S = \int_0^1 (f(x) - g(x)).dx = \int_0^1 (e^x - e^{-x}).dx = [e^x + e^{-x}]_0^1$$
$$S = e + e^{-1} - 2 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e} = \frac{(e-1)^2}{e}$$

إعداد: أ. عبد الله الكناوي	الجواب: D	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك