أتمتة منهاج رياضيات البكالوريا السورية

الجزء الأول: الوحدة الرابعة

اختبار نهاية متتالية

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

مصطفى الرزوق   أمين الحايك

تنسيق وإخراج: أمين الحايك

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محيي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبو نبوت	فيصل خالد
محمد السيد علي	هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان
زينب يوسف	حسام قاسم	خالد الحداد	فادي المحمد
يوسف منصور	نادر أبو راس	محمد زين جعرور	فادي طنوس
زكي طحاوي	أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة
محمد العيسى	مصطفى الرزوق	صلاح سالم	عبد السلام حسن

1 نتأمل متتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ ، إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = 3$ كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ تساوي:

A	B	C	D	E
0	$\frac{1}{3}$	1	3	$+\infty$

نحو الحل

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}\left[(x_n\cdot y_n)\cdot\frac{1}{x_n}\right] = (3)(0) = 0$$

إعداد : م. طالب أسعد — الجواب : A — كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

2 عند دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ حيث : $u_n = \frac{5^n-7^n}{1-7^n}$ نجد أنها متقاربة من العدد:

A	B	C	D	E
-1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	1

نحو الحل

$$u_n = \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{7}\right)^n - 1} \quad ; \quad -1 < \frac{1}{7} < \frac{5}{7} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{0-1}{0-1} = 1$$

إعداد : م. صفاء قزق — الجواب : E — كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

3 لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{\sin n}{n}$ عندئذ تكون نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ هي:

A	B	C	D	E
$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$

نحو الحل

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

وبما أن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

فحسب مبرهنة الإحاطة يكون:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

إعداد : م. حسين رشيد — الجواب : C — كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

4	واحدة فقط من المتتاليات الآتية ليس لها نهاية:									
A	$w_n = 2^n - 1$	B	$x_n = 4^n$	C	$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$	D	$v_n = (-2)^n$	E	$t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4^n$	

نحو الحل

المتتالية $v_n = (-2)^n$ هندسية وفيها $q = -2 < -1$

وبالتالي ليس لها نهاية

إعداد : م. وسام علي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

5

ليكن q عدداً حقيقيا يحقق $0 < q < 1$ ولتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

إذا علمت أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ فإن q يساوي:

A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$

نحو الحل

لدينا مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها q وعدد الحدود $n+1$ ومنه:

$$u_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

وبما أن : $0 < q < 1$ فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-q} \Rightarrow \frac{1}{1-q} = 3 \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

إعداد : م. محمد العاشق	الجواب: C	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

6

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = n\sqrt[3]{n}$ ، إن أصغر عدد طبيعي n_0 يحقق الشرط:

من أجل كل $n > n_0$ فإن $u_n > 10^{12}$ هو:

A	B	C	D	E
10^4	10^6	10^8	10^9	10^{12}

نحو الحل

$$u_n > 10^{12} \Rightarrow n\sqrt[3]{n} > 10^{12} \Rightarrow n^4 > 10^{12\times 3} \Rightarrow n > 10^9$$

إذن $n_0 = 10^9$

إعداد : م. عبدالله حناوي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

7	θ عدد حقيقي يحقق $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ و $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية معرفة وفق: $u_n = 2\cdot cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$:								
A	-1	B	0	C	1	D	2	E	$+\infty$
نحو الحل	$u_n = 2\cos\left[\theta\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0\ ;\ -1<\frac{1}{2}<1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\cos(0) = 2$								
إعداد : م. محي الدين اسماعيل			الجواب : D				كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق		

8	المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \ge 1$ وفق: $u_n = \sqrt{\frac{n}{n^3+1}} + \sqrt{\frac{n}{n^3+2}} + \sqrt{\frac{n}{n^3+3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{n^2+1}}$ عندئذ تكون نهاية هذه المتتالية:								
A	0	**B**	$\frac{1}{2}$	**C**	1	**D**	$\sqrt{2}$	**E**	$+\infty$
نحو الحل	يساوي u_n مجموع n حداً أصغرها $\sqrt{\frac{1}{n^2+1}}$ وأكبرها $\sqrt{\frac{n}{n^3+1}}$ إذاً: $n\cdot\sqrt{\frac{1}{n^2+1}} \le u_n \le n\cdot\sqrt{\frac{n}{n^3+1}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sqrt{\frac{1}{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sqrt{\frac{n}{n^3+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3}{n^3+1}} = 1$ وبالتالي حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$								
إعداد : م. موسى حجيج/ أبو نزار			الجواب : C				كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك		

9 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تحقق: $u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ، عندئذ تكون نهاية هذه المتتالية:

A		B		C		D		E	
A	$-\infty$	**B**	0	**C**	$\frac{1}{2}$	**D**	1	**E**	$+\infty$

نحو الحل

لدينا: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ لأنها متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{2} > 1$

وبالتالي حسب مبرهنة المقارنة $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

إعداد : م. خضر سيفو	الجواب : E	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

10 نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n}$

إذا كان: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ عندئذ نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$:

A	-3	**B**	$-\frac{3}{2}$	**C**	0	**D**	$\frac{3}{2}$	**E**	3

نحو الحل

$$S_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{1} + \frac{3}{3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{3} + \dots + \frac{3}{n} - \frac{3}{n-1} + \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n}$$

$$S_n = -3 + \frac{3}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -3$$

إعداد : م. نادر أبو راس	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م. نادر أبو راس

11 لتكن المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ فيهما: $y_0 = 8$, $x_0 = 2$

ولتكن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $w_n = x_n \cdot y_n$

إذا علمت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ ثابتة، وأن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

عندئذ فإن النهاية المشتركة لهما:

A	8	**B**	4	**C**	3	**D**	2	**E**	0

نحو الحل

$$w_n = w_0 = x_0 \cdot y_0 = 16$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = L$$

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$16 = L^2 \quad \Rightarrow L = 4$$

إعداد : م. علي جمول	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

12

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = u_n + 4$$

إذا علمت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية، وأن: $s_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

عندئذ نهاية المتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$:

A	14	**B**	12	**C**	8	**D**	6	**E**	3

نحو الحل

$$\left.\begin{array}{r} v_0 = 2 + 4 = 6 \\ v_1 = \left(\frac{1}{2}(2) - 2\right) + 4 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow q = \frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{2}$$

$$s_n = 6\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 12\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

لدينا: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ لأنها متتالية هندسية وفيها $-1 < q = \frac{1}{2} < 1$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 12$$

إعداد : م. مروان بركة	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

13

ليكن a و b عددين يحققان $a < b < 0$ ولتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_n = \frac{b^n - a^n}{b^n}$$

عندئذ نهاية المتتالية:

A	$-\infty$	B	0	C	1	D	$+\infty$	E	غير موجودة

نحو الحل

$$\mathrm{u_n} = 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad ; \quad \frac{a}{b} > 1 > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

إعداد : م.عبد الحميد السيد	الجواب : A	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

14

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{n!+(-1)^n}{n!}$

عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

A	B	C	D	E
$-\infty$	-1	0	1	غير موجودة

نحو الحل

$$u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n!} \quad \Rightarrow u_n - 1 = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow |u_n - 1| = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$$

بما أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

وبالتالي حسب مبرهنة المقارنة $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

إعداد : م. يوسف منصور	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

15

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+1}$$

عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

A	B	C	D	E
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	3	$+\infty$

نحو الحل

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2n^2+2} = \frac{n^2+n}{2n^2+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

إعداد : م. زكي طحاوي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

16

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقة:

$$\begin{cases} u_0 = 3\,, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{u^2{}_{n+1}}{u_n} \end{cases}$$

عندئذ تكون نهاية هذه المتتالية:

A		B		C		D		E	
A	غير موجودة	**B**	0	**C**	$\frac{1}{3}$	**D**	3	**E**	$+\infty$

نحو الحل

العلاقة $u_{n+2} = \dfrac{u^2{}_{n+1}}{u_n}$ تكافىء $u^2{}_{n+1} = u_{n+2} \cdot u_n$

إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها:

$$q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{3} < 1$$

وبالتالي: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

إعداد : م. عمرو معدل	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك

17

المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق :

$$u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \cdots + \frac{n}{5^n}$$

إذا علمت أن: $n \leq 2^n$ عندئذ أصغر عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ من بين الأعداد الآتية هو:

A	$\frac{1}{5}$	**B**	$\frac{1}{4}$	**C**	$\frac{2}{3}$	**D**	$\frac{4}{5}$	**E**	$\frac{4}{3}$

نحو الحل

$$u_n \leq \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$u_n \leq \frac{2}{5}\,\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$$

$$u_n \leq \frac{2}{3}$$

إعداد : م. رياض الزامل	الجواب : C	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

أتمتة تمارين رياضيات البكالوريا السورية

18

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق:

$$u_{n+1} = u_n - (u_n)^2 \quad ; \quad u_0 = \frac{1}{2}$$

إذا علمت أن: $u_n \in]0,1[$ ، عندئذ نهاية هذه المتتالية:

A	0	**B**	$\frac{1}{2}$	**C**	1	**D**	$+\infty$	**E**	غير موجودة

نحو الحل

$u_n \in]0,1[$ و $u_{n+1} - u_n = -(u_n)^2 < 0$

فالمتتالية متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

نهايتها هو L هو حل المعادلة $f(x) = x$:

$$x - x^2 = x \Rightarrow x = 0$$

مع ملاحظة أن التابع f مستمر عند 0 وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

إعداد : م. رابعة سليمان	الجواب : A	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

19

متتالية معرفة وفق: $(u_n)_{n\geq 1}$ ، $u_n = \frac{(-1)^n n+1}{n+\sqrt{n}}$ فإن نهاية هذه المتتالية:

A	$-\infty$	**B**	-1	**C**	0	**D**	1	**E**	غير موجودة

نحو الحل

n زوجي: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

n فردي: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n+1}{n+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = -1$

بالتالي ليس للمتتالية نهاية

إعداد : م. خالد العمر	الجواب : E	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

20

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$$

إذا علمت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ تحقق: $u_n < u_{n+1} < 4$

عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

A		B		C		D		E	
	4		3		2		$\sqrt{3}$		غير موجودة

نحو الحل

لدينا $u_n < u_{n+1}$ إذاً المتتالية متزايدة تماماً
ولدينا $u_n < 4$ إذاً المتتالية محدودة من الأعلى
وبالتالي فالمتتالية متقاربة

إذاً نهايتها حل المعادلة: $f(x) = x$

$$\sqrt{2x+3} = x \quad (\text{شرط الحل } x \geq 0)$$

$$2x + 3 = x^2 \quad \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 & \text{مرفوض} \\ x = 3 \end{cases}$$

مع ملاحظة أن التابع f مستمر عند 3 وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$

إعداد : م. محمد زين جعرور	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م. أمين الحايك