أتمتة تمارين رياضيات
البكالوريا السورية

مجموعة اختبارات رياضيات مؤتمتة للبكالوريا

بإشراف الأستاذ
عبد الحميد السيد

تمت بوساطة
مجموعة كبيرة من مدرسين الرياضيات بسورية

اختبارات مؤتمتة لرياضيات البكالوريا السورية

إشراف الأستاذ : عبد الحميد السيد

كتابة وتنسيق الأساتذة

أمين الحايك - حسام قاسم - صلاح سالم - محمد السيد علي - مصطفى الرزوق

مهند حريقة - نادر أبو راس

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	فيصل خالد	محمد السيد علي	هيثم ديوب
صفوح الأفندي	بشار كنعان	زينب يوسف	حسام خضر قاسم	خالد شوقي الحداد
فادي المحمد	يوسف منصور	نادر أبو راس	محمد زين جعرور	فادي طنوس
زكي طحاوي	أمين الحايك	علي جمّول	مهند حريقة	محمد أحمد العيسى
مصطفى الرزوق		صلاح سالم		عبد السلام حسن

أتمتة منهاج رياضيات البكالوريا السورية

الجزء الأول: الوحدة الأولى

اختبار المتتاليات والإثبات بالتدريج

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

صلاح سالم مهند حريقة مصطفى الرزوق

تنسيق و اخراج: مصطفى الرزوق

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محيي الدين إسماعيل	خالد الحداد	محمد السيد علي	زينب يوسف
يوسف منصور	زكي طحاوي	محمد أحمد العيسى	بشار كنعان
نادر أبو راس	محمد زين جعرور	هيثم ديوب	أمين حايك
آلدار كلابدون	مصطفى الرزوق	فادي طنوس	فادي الحمد
حسام قاسم	علي جمول	صلاح سالم	عبد السلام حسن

(1	من أجل عدد حقيقي x لدينا الأعداد: $a = 2x + 2$ و $b = 6x - 3$ و $c = 4x$ بهذا الترتيب تشكل حدوداً متعاقبة لمتتالية حسابية، عندئذ قيمة x تساوي:						
A	$\frac{3}{4}$	B	0	C	$\frac{4}{3}$	D	1
الحل	$2b = a + c \Longrightarrow 2(6x - 3) = 2x + 2 + 4x \Longrightarrow x = \frac{4}{3}$						
إعداد: أ. محي الدين إسماعيل		الجواب: C		كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق			

(2	a و b و c أعداد حقيقية ولتكن a و $2b$ و $3c$ ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية تحقق $a.b.c = \frac{32}{3}$ عندئذٍ قيمة b هي:						
A	$\sqrt[3]{\frac{32}{3}}$	B	$\sqrt{\frac{32}{3}}$	C	8	D	2
الحل	بما أن a و $2b$ و $3c$ ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن: $4b^2 = 3a.c \Longrightarrow 4b^3 = 3a.b.c$ $4b^3 = 3 \cdot \frac{32}{3} \Longrightarrow b^3 = 8 \Longrightarrow b = 2$						
إعداد: أ. أحمد الرفاعي		الجواب: D		كتابة: أ. صلاح سالم		تنسيق: د. مصطفى الرزوق	

(3	$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_0 = 6$, $u_3 = 384$ إن u_n يكتب بدلالة n بالشكل:						
A	$u_n = 6(2)^n$	B	$u_n = 6(3)^n$	C	$u_n = 6(4)^n$	D	$u_n = 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$
الحل	$\frac{u_3}{u_0} = q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{384}{6} = 64 \Rightarrow q = 4 \Rightarrow u_n = u_0 q^n \Rightarrow u_n = 6(4)^n$						
إعداد: أ. سمر الشهابي		الجواب: C		كتابة: أ. مهند حريقة		تنسيق: د. مصطفى الرزوق	

(4	لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق : $u_{n+1} = (2\lambda - 1)u_n + 8 , u_0 = 2$ فإن قيمة λ التي تجعل المتتالية ثابتة هي :						
A	2	B	-3	C	-1	D	-2
الحل	$u_{n+1} = u_n = u_0 \Longrightarrow 2 = 2(2\lambda - 1) + 8$ $4\lambda = 2 - 6$ ومنه نجد: $\boxed{\lambda = -1}$						
إعداد: أ. علي جمول		الجواب: C		كتابة: أ. صلاح سالم		تنسيق: د. مصطفى الرزوق	

5) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_0 = 2 \;,\; u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$ هي متتالية:

A	متزايدة تماماً	B	متناقصة تماماً	C	ثابتة	D	غير مطردة

نحو الحل

المتتالية تآلفية وبالتالي بحساب حدين منها نجد:

$$u_1 = \frac{1}{2}(2) - 3 = -2$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(-2) - 3 = -4$$

فهي متناقصة تماماً

إعداد: أ. زينب يوسف	الجواب: B	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

6) تأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق: $u_0 = 2 \;,\; u_{n+1} = u_n + n - n!$ فإن هذه المتتالية:

A	غير مطردة	B	ثابتة	C	متناقصة	D	متزايدة

نحو الحل

$u_{n+1} - u_n = n - n! \;\leq 0$ ومنه المتتالية متناقصة

إعداد: أ. فادي طنوس	الجواب: C	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

7) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = 2\cos^2\frac{n}{2} - \cos n + 1$ هي متتالية:

A	متزايدة تماما	B	متناقصة تماما	C	ثابتة	D	غير مطردة

نحو الحل

$$u_n = 2\cos^2\frac{n}{2} + 1 - \cos n = 2\cos^2\frac{n}{2} + 2\sin^2\frac{n}{2} = 2$$

إعداد: أ. هيثم ديوب	الجواب: C	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

8) $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق: $u_n = -(3)^n + n$ عندئذٍ يكون ناتج $u_{n+1} - u_n$ هو:

A	$3^n + 1$	B	$-(3)^n + 1$	C	$-2(3)^n + 1$	D	$2(3)^n + 1$

نحو الحل

$$u_{n+1} - u_n = -(3)^{n+1} + (n+1) + 3^n - n = -3\,(3)^n + 3^n + 1 = -2\,(3)^n + 1$$

إعداد: أ. محسن القصير	الجواب: C	كتابة: أ. مهند حريقة	تنسيق: د. مصطفى الرزوق

9)	$(u_n)_{n\geq0}$ متتالية تحقق: $u_0 = -1$ وأياً كان n فإن $u_n \neq 0$ ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $v_n = \frac{1}{u_n} + 3$ حسابية أساسها 3 ، عندئذ يعطى u_n بدلالة n بالشكل:						
A	$-\frac{1}{3n+1}$	B	$\frac{1}{3n-1}$	C	$\frac{1}{3n+2}$	D	$\frac{1}{3n+2} - 3$
نموذج الحل	لدينا $v_0 = 2$ ومنه $v_n = 3n + 2$ لدينا $\frac{1}{u_n} = v_n - 3$ ومنه $u_n = \frac{1}{3n-1}$						
	إعداد: أ. خالد الحمد		الجواب: B		كتابة: أ. مهند حريقة		تنسيق: د. مصطفى الرزوق

10)	المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n+2)(3-u_n)}{u_n+\sqrt{u_n+6}}$ ، إذا علمت أن $0 < u_n < 3$ عندئذ تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$:						
A	متزايدة تماما	B	متناقصة تماما	C	ثابتة	D	غير مطردة
نموذج الحل	$$0 < u_n < 3 \Rightarrow \begin{cases} u_n + 2 > 0 \\ 3 - u_n > 0 \\ u_n + \sqrt{u_n + 6} > 0 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً						
	إعداد: أ. أمين الحايك		الجواب: A		كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق		

11)	نتأمل المتتاليتين $(T_n)_{n\geq0}$ و $(S_n)_{n\geq0}$ حيث: $T_0 = 1$ و $S_0 = 2$ ، ولتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $U_n = 3T_n + 5S_n$ ثابتة ، عندئذ U_{10} يساوي:						
A	8	B	10	C	11	D	13
نموذج الحل	بما أن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ ثابتة $U_{10} = U_0 = 3T_0 + 5S_0 = 13$						
	إعداد: أ. يوسف منصور		الجواب: D		كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق		

12)	المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق: $u_0 = 2$ ، $u_{n+1} = 2 - u_n$ هي متتالية:						
A	متزايدة تماماً	B	متناقصة تماماً	C	ثابتة	D	غير مطردة
نموذج الحل	$u_0 = 2 , u_1 = 0 , u_2 = 2 , u_3 = 0 , \dots$ $$u_n = \begin{cases} 2 & n \text{ زوجي} \\ 0 & n \text{ فردي} \end{cases} \Leftarrow$$ غير مطردة						
	إعداد: أ. عبد الحميد السيد		الجواب: D		كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق		

(13

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 11$ و $u_8 = 41$ عندئذ قيمة المجموع:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + u_6 + u_8 + u_{10}$$

هي:

A		B		C		D	
A	136	**B**	146	**C**	156	**D**	166

نحو الحل

$$S = 2u_2 + u_2 + 2u_8 + u_8 = 3u_2 + 3u_8 =$$
$$3(u_2 + u_8) = 3(11 + 41) = 156$$

إعداد: أ. آلدار كلابدون | الجواب: C | كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

(14

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $u_0 = 3$ فإن قيمة المجموع :

$$S_n = u_0 + u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n}$$

هو:

A	$-1 + 4(4)^n$	**B**	$1 - 4(4)^n$	**C**	$-1 + (4)^n$	**D**	$1 - 4^n$

نحو الحل

$$S_n = a \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \quad , \quad a = u_0 = 3 \ , q = 4 \ , \text{عدد الحدود} = \frac{2n - 0}{2} + 1 = n + 1$$

$$S_n = 3 \times \frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} = -1 + 4(4)^n$$

إعداد: أ. فادي المحمد | الجواب: A | كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

(15

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_0 = 7 \ , \ u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a \neq 1$ و $b \neq 0$

إذا علمت أن: $u_n = 5(10)^n + 2$ فإن (a, b) يساوي:

A	$(5,2)$	**B**	$(10, -18)$	**C**	$(10,18)$	**D**	$(7,5)$

نحو الحل

الصيغة مألوفة حيث $a = 10$ ويبقى حساب b:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 10u_0 + b = 70 + b \\ u_1 = 5(10) + 2 = 52 \end{array}\right\} \Longrightarrow 70 + b = 52 \Longrightarrow b = -18$$

إعداد: أ. باسل سمير حسين | الجواب: B | كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

16) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = 2n + n(-1)^n$ هي متتالية:

A		B		C		D	
A	متزايدة تماماً	B	متناقصة تماماً	C	ثابتة	D	غير مطردة

في الحل:

$$u_n = \begin{cases} 2n - n, & n \text{ فردي} \\ 2n + n, & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

لدينا حالتين لحساب : $A = u_{n+1} - u_n$

إما: $A = 3(n+1) - n = 2n + 3 > 0$

أو: $A = (n+1) - 3n = -2n + 1 < 0$

يتضح أنه عند الانتقال من حد دليله فردي إلى حد دليله زوجي تتزايد u_n وبالعكس تتناقص فهي غير مطردة.

إعداد: أ. خالد الحداد	الجواب: D	كتابة: أ. مهند حريقة	تنسيق: د. مصطفى الرزوق

17) من أجل كل عدد طبيعي إذا علمت أن:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})$$

فإن العدد $3^{33} - 2^{22}$ مضاعف للعدد:

A	4	B	27	C	23	D	11

في الحل:

$$3^{33} - 2^{22} = (3^3)^{11} - (2^2)^{11} = 27^{11} - 4^{11} =$$

$$= (27-4)(27^{10} + 27^9 \times 4 + \cdots + 4^{10}) =$$

$$= (23)(27^{10} + 27^9 \times 4 + \cdots + 4^{10})$$

إعداد: د. مصطفى الرزوق	الجواب: C	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

(18

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \ , \ u_0 = 2$

نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = u_n + a$ فإن قيمة a التي تجعل $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية هي:

A	2	***B***	-3	***C***	-1	***D***	-2

نحو الحل

$$v_{n+1} = u_{n+1} + a = \frac{1}{3}u_n + 2 + a = \frac{1}{3}(u_n + 6 + 3a)$$

تكون $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية إذا كان $v_n = u_n + 6 + 3a$

ولدينا $v_n = u_n + a$ ومنه $u_n + a = u_n + 6 + 3a$

$2a = -6$ ومنه $\boxed{a = -3}$

إعداد: أ. محمد السيد علي	الجواب: B	كتابة: أ. صلاح سالم	تنسيق: د. مصطفى الرزوق

(19

إن قيمة المجموع: $S = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \cdots + 20$ يساوي:

A	1210	***B***	3630	***C***	1200	***D***	605

نحو الحل

المجموع هو مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{6}$ وعدد الحدود:

$$n = \frac{20 - \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} + 1 = 120$$

$$S = \frac{a + \ell}{2} \times n = \frac{\frac{1}{6} + 20}{2} \times 120 = 1210$$

إعداد: أ. صلاح سالم	الجواب: A	كتابة: أ. صلاح سالم	تنسيق: د. مصطفى الرزوق

(20

a و b و c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية متناقصة أساسها r وتحقق: $b^2 = ac + 4$

عندئذ أساسها r يساوي:

A	-2	***B***	2	***C***	-1	***D***	-3

نحو الحل

لدينا $a = b - r$ و $c = b + r$ نعوض في العلاقة المفروضة:

$b^2 = (b - r)(b + r) + 4$ ومنه $b^2 = b^2 - r^2 + 4$

$r^2 = 4$ ومن نجد $\{r = 2, r = -2\}$

وبما أن ال متتالية متناقصة فالحل المقبول هو $\boxed{r = -2}$

إعداد: أ. عدي الخميس	الجواب: A	كتابة: أ. صلاح سالم	تنسيق: د. مصطفى الرزوق

(21

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية ليست مطردة، فيها $u_3 = \frac{1}{2}$ و $u_7 = \frac{1}{32}$

فإن الحد ذي الدليل n هو:

A		B		C		D	
A	$32\left(\frac{1}{4}\right)^n$	B	$-4\left(\frac{-1}{2}\right)^n$	C	$4\left(\frac{-1}{2}\right)^n$	D	$32\left(\frac{-1}{4}\right)^n$

نحو الحل

$$q = \mp\frac{1}{2} \Leftarrow q^4 = \frac{1}{16} \Leftarrow q^4 = \frac{1}{32}/\frac{1}{2} \Leftarrow q^4 = \frac{u_7}{u_3} \Leftarrow u_7 = u_3.q^4$$

وبما أن المتتالية ليست مطردة فإن $q = -\frac{1}{2}$ ومنه:

$$u_n = u_3.q^{n-3} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}(-2)^3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_n = -4\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

إعداد: أ. محمد غوش | الجواب: B | كتابة: أ. صلاح سالم | تنسيق: د. مصطفى الرزوق

(22

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q > 0$ وحدها البدء $u_0 = \frac{30}{7}$، إذا علمت أن:

$u_0 + u_1 + u_2 = 30$فإن قيمة الأساس q تساوي:

A		B		C		D	
A	8	B	3	C	4	D	2

نحو الحل

$$u_0 + u_0q + u_0q^2 = 30 \Longrightarrow u_0(1+q+q^2) = 30$$

$$\frac{30}{7}(1+q+q^2) = 30 \Longrightarrow 1+q+q^2 = 7$$

ومنه إما $q = -3$ (مرفوض) أو $q = 2$ (مقبول)

إعداد: أ. زكي طحاوي | الجواب: D | كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

(23

نتأمل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين تدريجياً وفق:

$$u_0 = 1 \quad , \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + s_n}{3} \quad ، \quad s_0 = 4 \quad , \quad s_{n+1} = \frac{2S_n + u_n}{3}$$

ونعرف المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ وفق $w_n = s_n - u_n$ فإن:

A		B		C		D	
A	$w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n$	B	$w_{n+1} = -\frac{1}{3}w_n$	C	$w_{n+1} = w_n$	D	$w_{n+1} = 3w_n$

نحو الحل

$$w_{n+1} = s_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2s_n + u_n}{3} - \frac{2u_n + s_n}{3} = \frac{s_n - u_n}{3} = \frac{1}{3}w_n$$

إعداد: أ. مهند الشريف | الجواب: A | كتابة: أ. صلاح سالم | تنسيق: د. مصطفى الرزوق

(24

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها وحدها الأول $u_0 = 1$, $q = 2$ إذا علمت مجموع الحدود الآتية:

$u_3 + u_4 + \cdots + u_n = 248$ فإن قيمة n تساوي:

A	5	*B*	6	*C*	7	*D*	8

الحل

$$\frac{u_3}{u_0} = q^3 = 2^3 \Longrightarrow u_3 = 8$$

وإذا كان عدد الحدود هو r فإن: $8\left(\frac{1-2^r}{1-2}\right) = 248 \Longrightarrow r = 5$

ولمعرفة n رتبة الحد الأخير لدينا علاقة عدد الحدود:

$$r = n - m + 1 \Longrightarrow 5 = n - 3 + 1 \Longrightarrow n = 7$$

إعداد: أ. نادر أبو راس	الجواب: *C*	كتابة: أ. مهند حريقة	تنسيق: د. مصطفى الرزوق

(25

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{1}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{3^2}{5^3} + \ \ldots\ldots + \frac{3^{n-1}}{5^n}$

عندئذٍ يكتب u_n بدلالة n:

A	$\frac{1}{5}\left(1+\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right)$	*B*	$\frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$	*C*	$\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\right)$	*D*	$\frac{2}{5}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\right)$

الحل

$$u_n = \frac{1}{5}\left[1 + \frac{3}{5} + \frac{3^2}{5^2} + \ \ldots\ldots + \frac{3^{n-1}}{5^{n-1}}\right]$$

$$u_n = \frac{1}{5}\left[1 + \left(\frac{3}{5}\right)^1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \ \ldots\ldots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right]$$

ما بين قوسين هو مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ وعدد الحدود n

$$u_n = \frac{1}{5}\frac{\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{5}} = \frac{1}{5}\frac{\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$$

إعداد: أ. محمد أحمد العيسى	الجواب: *C*	كتابة: أ. صلاح سالم	تنسيق: د. مصطفى الرزوق

26) $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 1 وفيها $v_0 = 4$ ولتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{1}{v_n - 3}$

عندئذٍ يكتب المجموع $S = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots\dots + \frac{1}{u_n}$ بدلالة n بالشكل:

A		B		C		D	
A	$\frac{(n+8)(n+1)}{2}$	B	$\frac{n^2+3n+8}{2}$	C	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	D	$\frac{n^2-1}{2}$

نحو الحل

لدينا:

$$u_n = \frac{1}{v_n - 3}$$

ومنه:

$$\frac{1}{u_n} = v_n - 3$$

$$S = v_0 - 3 + v_1 - 3 + \dots\dots + v_n - 3$$

$$S = \frac{(v_0 + v_n)}{2}(n+1) - 3(n+1)$$

$$S = \frac{(v_0 + v_0 + nr)(n+1) - 6(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+8) - 6(n+1)}{2}$$

$$S = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

إعداد: أ. عبدو عبدو	الجواب: C	كتابة: أ. صلاح سالم	تنسيق: د. مصطفى الرزوق

27) نتأمل المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $x_n = 3n - 2^n$ إن قيمة المجموع:

$$S = x_0 + x_1 + \dots + x_5$$

تساوي:

A	$-13/2$	**B**	$137/2$	**C**	108	**D**	-18

نحو الحل

نضع $t_n = 3n$ متتالية حسابية و $v_n = 2^n$ هي متتالية هندسية فيكون:

$$S = t_0 + t_1 + \dots + t_5 - (v_0 + v_1 + \dots\dots + v_5)$$

$$S = \frac{6}{2}(t_0 + t_5) - 2^0\left(\frac{1-2^6}{1-2}\right)$$

$$S = 3(0+15) + 1 - 64 = 45 - 63 = -18$$

إعداد: أ. محمود المحمود	الجواب: D	كتابة: أ. صلاح سالم	تنسيق: د. مصطفى الرزوق

(28

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r>0$ ، تحقق: $u_1+u_5-u_3=3$ و $u_2\times u_4=5$
فإنها تعطى تدريجياً وفق:

A	$u_{n+1}=u_n+4$ $u_0=3$	**B**	$u_{n+1}=u_n+3$ $u_0=1$	**C**	$u_{n+1}=u_n+2$ $u_0=-3$	**D**	$u_{n+1}=u_n+1$ $u_0=-1$

نحو الحل

$$u_1+u_5-u_3=3 \implies u_0+r+u_0+5r-u_0-3r=3$$

$$u_0=3-3r \quad (*)$$

$$u_2\times u_4=5 \implies (u_0+2r)(u_0+4r)=0$$

بالاستفادة من العلاقة $(*)$ نجد أن:

$$(3-r)(3+r)=5 \implies 9-r^2=5$$

$$r^2=4 \implies \begin{cases} r=-2 & \text{مرفوض} \\ r=2 & \text{مقبول} \end{cases}$$

$$u_0=3-3(2)=-3$$

ومنه $u_{n+1}=u_n+2\,,\ u_0=-3$

إعداد: أ. محمد زين جعرور	الجواب: C	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

(29

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل $u_1=2\,,\ u_0=1\ ,\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ فإذا علمت أن
$u_3=1$ و $u_2=-1$ فإن قيمة (a,b) هي:

A	$\left(-\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$	B	$\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$	C	$\left(-\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$	D	$\left(2,\frac{1}{3}\right)$

نحو الحل

$$u_2=au_1+bu_0 \Rightarrow -1=2a+b$$

$$u_3=au_2+bu_1 \Rightarrow -a+2b=1$$

$$\begin{cases} 2a+b=-1 \\ -a+2b=1 \end{cases} \Rightarrow b=\frac{1}{5}\ ,a=-\frac{3}{5}$$

إعداد: أ. وائل عنيزان	الجواب: C	كتابة: أ. مهند حريقة	تنسيق: د. مصطفى الرزوق

30) $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة وفق $u_n = P(n)$ حيث $P(n)$ كثير حدود من الدرجة الثانية، ونعلم أنها تعطى تدريجياً بالشكل: $u_1 = -1$, $u_{n+1} = u_n + 2n$ عندها تكون عبارة u_n بدلالة n هي:

A	B	C	D
$n^2 - n - 1$	$n^2 - 2$	$n^2 + 2n - 4$	$2n^2 - 3n$

نحو الحل

$$u_n = an^2 + bn + c \Longrightarrow u_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$$

$$an^2 + 2an + a + bn + b + c = an^2 + bn + c + 2n$$

$$(2a+b)n + a + b + c = (b+2)n + c$$

بالمطابقة نجد:

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b = b + 2 \quad \Longrightarrow a = 1 \\ a + b + c = c \quad \Longrightarrow b = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n = n^2 - n + c$$

ولأن: $u_1 = -1$ نجد: $-1 = 1 - 1 + c$ ومنه: $c = -1$

إعداد: أ. مهند حريقة	الجواب: A	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

اختبارات مؤتمتة لرياضيات البكالوريا السورية

الجزء الأول : الوحدة الثانية

اختبار النهايات والاستمرار

إشراف الأستاذ : عبد الحميد السيد

كتابة وتنسيق

الأستاذ : محمد السيد علي

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

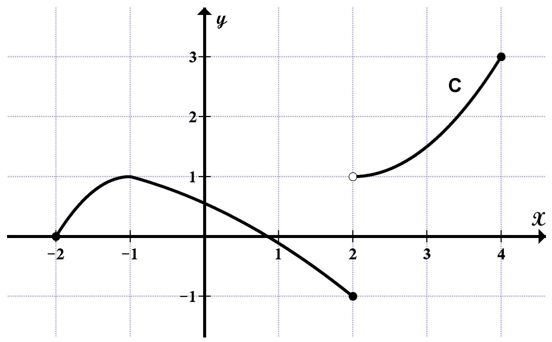
محي الدين إسماعيل	مروان بركة	عبد الحميد السيد	محمد السيد علي	حسام قاسم
خالد الحداد	هيثم ديوب	بشار كنعان	صفوح الأفندي	زينب يوسف
نادر أبو راس	فادي المحمد	يوسف منصور	زكي طحاوي	عامر سيو
محمد زين جعرور	فادي طنوس	أمين الحايك	مصطفى الرزوق	مهند حريقة
علي جمّول	محمد العيسى	عبد السلام حسن	صلاح سالم	آلدار كلابدون

1

في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f

المعرف على $I = [-2, 4]$

عندئذٍ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ تساوي :



A		B		C		D	
A	-2	B	-1	C	0	D	1

الحل

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -1$$

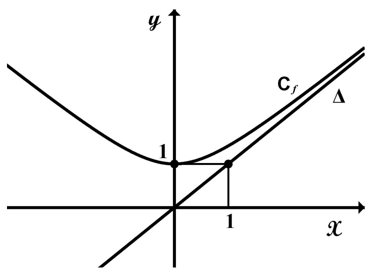
إعداد : أ . عبد السلام زكريا	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

2

الشكل المجاور يمثل C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$

والمستقيم Δ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$

عندئذٍ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ تساوي :



A	1	B	2	C	-1	D	0

الحل

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_\Delta = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

إعداد : أ . مضر الأحمد	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

3

نتأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty \|\| +\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty \|\| -\infty$	$\nearrow$	1

إنَّ عدد حلول المعادلة $f(x) - 1 = 0$ هو :

A	0	B	1	C	2	D	3

الحل

من جدول التغيرات نلاحظ أن المعادلة $f(x) = 1$ ليس لها حلول

إعداد : أ . أحمد الكلش	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

4 ليكن $E(x)$ الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x عندئذٍ قيمة $E(2-\pi)$ هي :

A	2	B	-1	C	-2	D	-3

الحل: $2-\pi \simeq 2-3.14 = -1.14$ و منه نجد : $E(2-\pi) = -2$

إعداد : أ . حسن آصف سليمان	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

5 الخطان البيانيان C_g , C_f للتابعين f , g المعرفان على المجال $]2,+\infty[$ بحيث $f(x)-g(x) \geq 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

عندئذٍ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ تساوي :

A	-2	B	0	C	$-\infty$	D	$+\infty$

الحل: لدينا $g(x) \leq f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ وحسب مبرهنة المقارنة الثالثة نجد $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

إعداد : أ . علي فؤاد علي	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

6 ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2mx + 4}$ خطه البياني C

عندئذٍ قيمة m ليكون المستقيم $\Delta : y = x+1$ مقارباً مائلاً للخط C في جوار $+\infty$ هي :

A	2	B	1	C	0	D	-1

الحل:

$x^2 - 2mx + 4 = x^2 - 2mx + m^2 - m^2 + 4 = (x-m)^2 + 4 - m^2$

ومنه المستقيم الذي معادلته $y = x - m$ مستقيماً مقارباً للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$

وبالمقارنة مع المستقيم $\Delta : y = x+1$ نستنتج أن $\boxed{m=-1}$

إعداد : أ . محمد السيدعلي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

7 ليكن f تابعاً معرفاً على $]0,+\infty[$

إذا علمت أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+2x\right] = 1-\sqrt{2}$ عندئذٍ معادلة المستقيم المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$ هي :

A	$y = 2x+1-\sqrt{2}$	B	$y = -2x-1+\sqrt{2}$	C	$y = 2x+1+\sqrt{2}$	D	$y = -2x+1-\sqrt{2}$

الحل:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+2x\right] = 1-\sqrt{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x+1-\sqrt{2})\right] = 0$

ومنه معادلة المقارب المائل هي : $y = -2x+1-\sqrt{2}$

إعداد : أ . محمد زين جعرور	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

8

ليكن التابع f المعرف على $I=[0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{kx} & : 0\le x\le 2\\ x & : x>2\end{cases}$ حيثُ k عدد موجب تماماً

عندئذٍ قيمة k التي تجعل f مستمراً على I هي :

A		B		C		D	
A	$\frac{1}{2}$	B	1	C	2	D	$\sqrt{2}$

الحل

يكون التابع f مستمراً على I إذا كان مستمراً عند $x=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=\sqrt{2k}\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{2k}=2\Rightarrow k=2$$

إعداد : أ . غياث منصور	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

9

ليكن f التابع المعرف على $]-\infty,b[$ وفق : $f(x)=\dfrac{ax+3}{x-b}$ حيث a,b عددان حقيقيان موجبان تماماً

إذا علمت أن لخطه البياني مقاربين معادلتاهما $y=3$ و $x=2$ عندئذٍ (a,b) تساوي :

A		B		C		D	
A	$(3,2)$	B	$(2,3)$	C	$(3,1)$	D	$(1,2)$

الحل

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=a$ ومنه نجد $y=a$ مقارب أفقي وبالتالي $a=3$

$\lim\limits_{x\to b} f(x)=-\infty$ ومنه $x=b$ مقارب شاقولي وبالتالي $b=2$

إعداد : أ . محمد جمال خطيب	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

10

C_f هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

إذا علمت أن C_f يقبل مقارباً مائلاً Δ في جوار $+\infty$

عندئذٍ معادلة المستقيم d المار بالنقطة $(2,1)$ والذي يوازي Δ هي :

A		B		C		D	
A	$y=x-1$	B	$y=2x-3$	C	$y=x+3$	D	$y=x+1$

الحل

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}=1$$

$$d \parallel \Delta \Rightarrow m_d=m_\Delta \Rightarrow m_d=1$$

والمستقيم d يمر بالنقطة $(2,1)$ ومعادلته من الشكل $y-y_0=m(x-x_0)$

بالتعويض نجد : $d: y=x-1$

إعداد : أ . أمين الحايك	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

11

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}^*$ وفق $f(x) = |x+3| - \frac{1}{x}$

إذا علمت أن للخط C مقاربين مائلين d في جوار $+\infty$ و d' في جوار $-\infty$ عندئذٍ يتقاطع d و d' في النقطة :

A	$(0,3)$	B	$(0,-3)$	C	$(-3,0)$	D	$(0,0)$

الحل

في جوار $+\infty$ يكون $d : y = x + 3$

في جوار $-\infty$ يكون $d' : y = -x - 3$

وعند الحل المشترك للمعادلتين السابقتين نجد : $x + 3 = -x - 3$ ومنه نجد $x = -3$ و $y = 0$

إعداد : أ . محمد أحمد العيسى	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

12

ليكن C_f الخط البياني لتابع f معرف على $\mathcal{R}_+^*$ إذا علمت أنه أياً كان $x > 0$ كان $-\frac{1}{x} + 1 \le f(x) - x \le \frac{1}{x} + 1$

عندئذٍ C_f يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ معادلته :

A	$y = x - 1$	B	$y = -x + 1$	C	$y = x$	D	$y = x + 1$

الحل

نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x} + 1) = 1$ $= \lim\limits_{x \to +\infty} (-\frac{1}{x} + 1)$

وحسب مبرهنة الإحاطة يكون $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 1$ ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x+1)\right] = 0$

أي المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$

إعداد : أ . رابعة سليمان	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

13

ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}^*$ وفق : $f(x) = 1 - x - \frac{1}{x}$ خطه البياني C

إذا قطع المستقيم $\Delta : y = m$ الخط C في نقطتين فإن إحداثيي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما :

A	$(\frac{m-1}{2}, m)$	B	$(\frac{m-1}{2}, \frac{m}{2})$	C	$(m-1, m)$	D	$(\frac{1-m}{2}, m)$

الحل

$$f(x) = m \Rightarrow 1 - x - \frac{1}{x} = m \Rightarrow x^2 + (m-1)x + 1 = 0$$

للمعادلة جذران مختلفان : $x_1 + x_2 = \frac{-(m-1)}{1} = 1 - m$

ومنه نجد إحداثيي المنتصف $(\frac{1-m}{2}, m)$

إعداد : أ . زكي محمود طحاوي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

14

C_f هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(x) = x - 3\cos\frac{x}{2}$

إنَّ C_f محدود بالمستقيمين اللذين معادلتاهما :

A		B		C		D	
A	$y = x - 3$ $y = x + 3$	B	$y = x - 3$ $y = x - 5$	C	$y = x + 3$ $y = x + 5$	D	$y = x + 3$ $y = x + 1$

الحل

نعلم أن $-1 \le \cos\frac{x}{2} \le 1$ ومنه $-3 \le -3\cos\frac{x}{2} \le 3$

وبالتالي $x - 3 \le x - 3\cos\frac{x}{2} \le x + 3$

إعداد : أ . مصطفى الرزوق	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

15

ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}$ وفق $f(x) = a + \frac{bx}{\sqrt{x^2+2}}$ حيثُ $a, b \in \mathcal{R}$ ، إذا علمت أن C الخط البياني للتابع f

يقبل مقاربين $d : y = 6$ في جوار $+\infty$ و $d' : y = 2$ في جوار $-\infty$ عندئذٍ (a, b) تساوي :

A		B		C		D	
A	$(3, 3)$	B	$(4, -2)$	C	$(-4, 2)$	D	$(4, 2)$

الحل

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[a + \frac{bx}{\sqrt{x^2+2}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(a + \frac{b}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}\right) \Rightarrow a + b = 6 \quad .... (1)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[a + \frac{bx}{\sqrt{x^2+2}}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(a - \frac{b}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}\right) \Rightarrow a - b = 2 \quad .... (2)$$

بجمع المعادلتين نجد : $2a = 8 \Rightarrow a = 4$ ، نعوض في إحدى المعادلتين السابقتين نجد : $b = 2$

إعداد : أ . باسل سطمة	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

16

f تابع معرف على $\mathcal{R}$ وفق : $f(x) = 2 + \frac{4}{x^2+4}$ عندئذٍ المستقر الفعلي للتابع f هو :

A		B		C		D	
A	$[0, 3]$	B	$[2, 3]$	C	$]2, 3[$	D	$]2, 3]$

الحل

$$\forall x \in \mathcal{R} : x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 + 4 \ge 4 \Rightarrow 0 < \frac{4}{x^2+4} \le 1 \Rightarrow 2 < 2 + \frac{4}{x^2+4} \le 3 \Rightarrow f(x) \in]2, 3]$$

ملاحظة : يمكن البحث عن المستقر الفعلي عن طريق دراسة تغيرات التابع

إعداد : أ . صفوح الأفندي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

17 ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}^*$ وفق : $f(x)=\dfrac{|2x-1|-|1-3x|}{x}$ ، عند دراسة نهاية f عند الصفر نجدها :

A		B		C		D	
A	0	B	1	C	2	D	غير موجودة

الحل

في جوار الصفر نجد $2x-1<0$ و $1-3x>0$

وبالتالي نجد : $f(x)=\dfrac{1-2x-(1-3x)}{x}=\dfrac{1-2x-1+3x}{x}=\dfrac{x}{x}=1$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

إعداد : أ . سومر سليمان | الجواب : B | كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

18 ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}\setminus\{3\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{x-3}{|x-3|}$ عندئذٍ المستقر الفعلي للتابع f هو :

A	$\{-3,3\}$	B	$\{-1,1\}$	C	$[-3,3]$	D	$[-1,1]$

الحل

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-3}=1 & : x>3\\[2mm] \dfrac{x-3}{3-x}=-1 & : x<3\end{cases}$$

إعداد : أ . سلمى عبدو | الجواب : B | كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

19 ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}\setminus\{1\}$ وفق : $f(x)=\dfrac{x}{2}+1-\dfrac{2}{x-1}$ خطه البياني C

عندئذٍ عدد المقاربات للخط C هو :

A	1	B	2	C	3	D	4

الحل

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty\end{cases}$ ومنه $x=1$ مقارب شاقولي

لدينا $\Delta : y=\dfrac{x}{2}+1$ مقارب مائل لأن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$

ومنه للخط C مقارب شاقولي ومقارب مائل

إعداد : أ . هيثم ديوب | الجواب : B | كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

20 عند البحث عن نهاية التابع المعطى بالعلاقة $f(x)=\sin(\frac{1}{x})+\sin x$ عند $+\infty$ نجد أنها :

A	B	C	D
0	1	$+\infty$	غير موجودة

الحل

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\frac{1}{x})=0$

فإن نهاية f تؤول إلى نهاية التابع $x\mapsto\sin x$

وهذا التابع دوري وليس ثابتاً وبالتالي ليس له نهاية عند $+\infty$

إعداد : أ . عبد الحميد السيد	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

21 ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}-|x|$ عندئذٍ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ تساوي :

A	B	C	D
$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\infty$

الحل

في جوار $-\infty$ يكون $|x|=-x$ ويصبح $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}+x$

وعند إيجاد $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ نحصل على عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$ لذلك نكتب :

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+3x+1}+x)(\sqrt{x^2+3x+1}-x)}{\sqrt{x^2+3x+1}-x}=\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}-x}$$

$$=-\frac{x(3+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)}=-\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{3}{2}$

إعداد : أ . ابتسام عيسى	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

22 إذا علمت أنّ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos ax}{x.\sin ax}=\frac{1}{6}$ (حيثُ a عدد حقيقي غير معدوم) فإن قيمة a تساوي :

A	B	C	D
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

الحل

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos ax}{x.\sin ax}=a.\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos ax}{(ax)^2}}{\frac{\sin ax}{ax}}=a.\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{a}{2}=\frac{1}{6}\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

(علماً أن : $\lim\limits_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}$)

إعداد : أ . نادر أبوراس	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

23 ليكن f التابع المعرف على المجال $I=[-2,0[$ وفق العلاقة $f(x)=(x+mE(x))^2$ حيث $E(x)$ يرمز إلى الجزء الصحيح للعدد x ، إن قيمة العدد الحقيقي m غير المعدوم التي تجعل f مستمراً عند -1 هي :

A		B		C		D	
A	$-\frac{1}{2}$	B	$\frac{3}{2}$	C	$-\frac{2}{3}$	D	$-\frac{3}{2}$

الحل

$$E(x)=\begin{cases}-2 : x\in[-2,-1[\\ -1 : x\in[-1,0[\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}(x-2m)^2 : x\in[-2,-1[\\ (x-m)^2 : x\in[-1,0[\end{cases}$$

f مستمراً عند -1 عندئذٍ $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=f(-1)$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)$

ومنه $\lim\limits_{x\to-1^-}(x-2m)^2=\lim\limits_{x\to-1^+}(x-m)^2$

$$(-1-2m)^2=(-1-m)^2\Rightarrow$$
$$1+4m+4m^2=1+2m+m^2\Rightarrow$$
$$3m^2+2m=0\Rightarrow m(3m+2)=0$$

إما $m=0$ مرفوض ، أو $m=-\frac{2}{3}$ مقبول

إعداد : أ . عبد الله حناوي	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

24 نتأمل جدول التغيرات للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1

إنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left[f(x)\right]$ تساوي :

A		B		C		D	
A	$-\infty$	B	-1	C	$+\infty$	D	0

الحل

وبما أن f تابع متزايد على المجال $]1,+\infty[$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1^-$

ومنه فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left[f(x)\right]=\lim\limits_{X\to1^-} f(X)=+\infty$

إعداد : أ . خالد أحمد شوقي الحدّاد	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

25

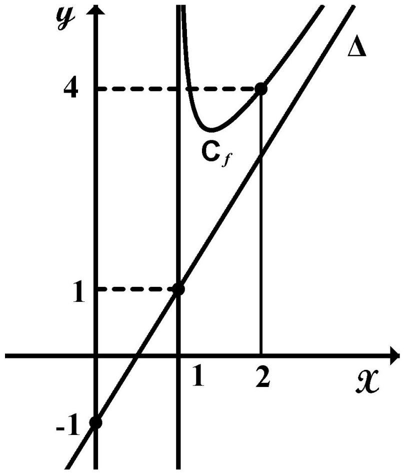
الشكل المجاور يمثل C_f الخط البياني للتابع f المعرف وفق :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{\sqrt{x - d}}$$

والمستقيم Δ مقارب مائل لخطه البياني في جوار $+\infty$

و $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

عندئذٍ (a, b, c, d) تساوي :



A	$(\frac{1}{2}, -1, 2, 1)$	B	$(2, -1, 1, 1)$	C	$(2, -1, 2, 1)$	D	$(2, -1, 1, -1)$

الحل

مجموعة التعريف : من الخط البياني $D_f =]1, +\infty[$ ومن قاعدة الربط $D_f =]d, +\infty[$ ومنه $d = 1$

المقارب المائل : من الخط البياني $m_\Delta = \frac{1+1}{1-0} = 2$ و يكون : $\Delta : y = 2x - 1$

من قاعدة الربط $\Delta : y = ax + b$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{\sqrt{x - d}} = 0$

ومنه نجد : $a = 2, b = -1$

$(2, 4) \in C_f$ حيث $f(x) = 2x - 1 + \frac{c}{\sqrt{x - 1}}$

$f(2) = 4 \Rightarrow 4 - 1 + \frac{c}{1} = 4 \Rightarrow c = 1$

وبالتالي نجد : عندئذٍ $(a, b, c, d) = (2, -1, 1, 1)$

إعداد : أ . أنس البوشي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

26

ليكن f التابع المعرف على $[0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$

عندئذٍ أصغر قيمة للعدد A الذي يحقق الشرط أياً كان $x > A$ كان $f(x) \in]0.9, 1.1[$ هي :

A	100	B	81	C	29	D	9

الحل

$$|f(x) - c| < r \Rightarrow |f(x) - 1| < 0.1 \Rightarrow |\frac{1}{\sqrt{x} + 1}| < \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} + 1 > 10 \Rightarrow \sqrt{x} > 9 \Rightarrow x > 81$$

ومنه $A = 81$

إعداد : أ . عمر محمد	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

27 ليكن f التابع المعرف وفق : $f(x) = 2 + (x^2 - x)\sin\frac{1}{x-1}$ عندئذٍ $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ تساوي :

A	1	B	-1	C	2	D	0

الحل

$|f(x) - 2| = |x^2 - x|.|\sin\frac{1}{x-1}|$

في حالة $x \neq 1$ لدينا $|\sin\frac{1}{x-1}| \leq 1$

ومنه : $|f(x) - 2| \leq |x^2 - x|$

وبما أن $\lim\limits_{x\to1}(x^2 - x) = 0$ فإنَّ : $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 2$

إعداد : أ . محي الدين اسماعيل	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

28 إذا علمت أنَّ $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2 + ax + b}{x-3} = 2$ حيث $a , b \in \mathcal{R}$ عندئذٍ (a , b) تساوي :

A	$(4,3)$	B	$(-4,3)$	C	$(-4,-3)$	D	$(4,-3)$

الحل

بالقسمة الإقليدية نجد :

$$\frac{x^2 + ax + b}{x-3} = x + a + 3 + \frac{3a + b + 9}{x-3}$$

بما أن النهاية عدد حقيقي فإن : (1) ..... $3a + b + 9 = 0$

$$\lim_{x\to3}\left[x + a + 3\right] = 2 \quad ..... (2)$$

بالحل المشترك نجد : $a = -4$ و $b = 3$

إعداد : أ . علي الأحمد	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

29 ليكن f كثير حدود من الدرجة n معرفاً وفق : $f(x) = x^n + x^5 + x^3 + x + 1$ حيثُ $(n > 5)$
إذا كان n عدداً فردياً فإن عدد نقاط تقاطع الخط البياني للتابع f مع محور الفواصل هو :

A	نقطة واحدة	B	نقطتان	C	ثلاث نقاط	D	أربع نقاط

الحل

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = n x^{n-1} + 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ ($n-1$ عدد زوجي)

وبالتالي f مستمر ومتزايد تماماً على $\mathcal{R}$ وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حلّ وحيد

إعداد : أ . يوسف منصور	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

30	ليكن f التابع المعرف على $\mathcal{R}^*$ وفق : $f(x)=\frac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}$ ، عند دراسة نهاية f عند الصفر نجدها :						
A	غير موجودة	B	1	C	$-\infty$	D	$+\infty$

الحل

عند إيجاد نهاية f عند الصفر نحصل على حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

سندرس النهاية في جوار الصفر ونكتفي بالدراسة على $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}=\frac{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|}{x}=\begin{cases}\dfrac{-2\sin\frac{x}{2}}{x} & : x\in]-\pi,0[\\[2ex] \dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{x} & : x\in]0,\pi[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-2\sin\frac{x}{2}}{x}=-\lim_{x\to0^-}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=-1$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$$

مما سبق نجد $\lim_{x\to0^+}f(x)\neq\lim_{x\to0^-}f(x)$ ومنه النهاية غير موجودة

إعداد : أ . سوسن كنعان	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

أتمتة منهاج رياضيات البكالوريا السورية

الجزء الثاني: الوحدة الثانية

اختبار وحدة الاشتقاق

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة :

م. حسام قاسم م. مهند حريقة د. مصطفى الرزوق

تنسيق و اخراج: المهندس حسام قاسم

ساعد في التنسيق الاستاذ نادر أبو راس

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محيي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبو نبوت	محمد السيد علي
هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان	زينب يوسف
حسام قاسم	خالد الحداد	فادي المحمد	يوسف منصور
نادر أبو راس	محمد زين جعرور	فادي طنوس	زكي طحاوي
أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة	محمد العيسى
مصطفى الرزوق	صلاح سالم	عبد السلام حسن	

1	f تابع معرف و اشتقاقي على R وفق : $f(x) = cos\frac{\pi}{2}$ عندئذٍ $f'(x)$ يساوي :						
A	$\frac{\pi}{2}$	B	0	C	$-sin\frac{\pi}{2}$	D	$sin\frac{\pi}{2}$
نحو الحل	f تابع ثابت مشتقه صفر						
	إعداد : د. مصطفى الرزوق		الجواب : B		كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم		

2	نعرف التابع f على R وفق : $f(x) = (2+x)(2-x)$ عندئذٍ يكون f متزايد تماماً على المجال:						
A	$[+2, +\infty[$	B	$]0, +\infty[$	C	$]-\infty, +2[$	D	$]-\infty, 0]$
نحو الحل	$f(x) = 4 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$						
	إعداد : م نادر أبوراس		الجواب : D		كتابة وتنسيق: م مهند حريقة		

3	ليكن f تابعاً معرفاً واشتقاقياً على R^* وفق : $f(x) = sin\frac{1}{x}$ عندئذٍ قيمة $f'\left(\frac{1}{\pi}\right)$ تساوي:						
A	-1	B	$-\frac{1}{\pi}$	C	π	D	π^2
نحو الحل	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{\pi}\right) = -\pi^2(-1) = \pi^2$						
	إعداد : م محمد احمد العيسى		الجواب : D		كتابة وتنسيق: م مهند حريقة		

4	ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x)=x^3-7$ إن معادلة المماس للخط C_f في النقطة منه التي ترتيبها (1) هي:						
A	$y=12x+1$	B	$y=12x-25$	C	$y=3x-5$	D	$y=12x-23$
نحو الحل	$y=1\Rightarrow 1=x^3-7\Rightarrow x=2\Rightarrow A(2,1)$ $f'(x)=3x^2\Rightarrow f'(2)=12$ $\Delta: y=12x-23$						
	إعداد : م هيثم ديوب		الجواب : D		كتابة وتنسيق: م مهند حريقة		

5	ليكن f تابع معرف واشتقاقي على $R\setminus\{-1\}$ وفق: $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ إن مجموعة جميع قيم x التي تعدم $f'(x)$ هي :						
A	$\{0,1\}$	B	$\{-2,0\}$	C	$\{0,2\}$	D	$\{-2,1\}$
نحو الحل	$f'(x)=\frac{2x(x+1)-1(x^2)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x^2+2x=0\Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=-2\end{cases}$						
	إعداد : م محمد زين جعرور		الجواب : B		كتابة وتنسيق: م مهند حريقة		

6	f تابع اشتقاقي على R^* ومعطى وفق : $f(x)=\frac{1}{x^2}$ عندئذٍ $x\,f'(x)=a\,f(x)$ حيث a يساوي :						
A	-2	B	-1	C	$\frac{1}{2}$	D	1
نحو الحل	$f'(x)=-\frac{2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$ ومنه $x\,f'(x)=-\frac{2}{x^2}=-2f(x)$ بالتالي $a=-2$						
	إعداد : م عبد الحميد السيد		الجواب : A		كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم		

7	f و g تابعان معرفان واشتقاقيان على R حيث : $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ و $g(x)=f(-x)-f(x)$ عندئذ $g'(x)$ يساوي:

A		B		C		D	
A	0	B	$-f'(x)$	C	$2f'(x)$	D	$-2f'(x)$

نحو الحل:

$$g'(x)=-f'(-x)-f'(x)=-\frac{-x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}=0$$

إعداد: م. فادي طنوس	الجواب : A	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

8	ليكن f تابع دوري معرف على R وفق : $f(x)=sin\left(-\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$ فإن أصغر دور للتابع f هو:

A		B		C		D	
A	8π	B	-4π	C	$\frac{\pi}{4}$	D	2π

نحو الحل:

$T=\frac{2\pi}{|a|}$ ولدينا $a=-\frac{1}{4}$ وبالتالي $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$

إعداد : م هبة مرهج	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

9	ليكن f تابع اشتقاقي على $I=]-1,1[$ ويحقق : $f(0)=0\ ,f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ عندئذٍ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ تساوي :

A		B		C		D	
A	-1	B	0	C	1	D	2

نحو الحل:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$$

إعداد : م عدي الخميس	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

10

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\setminus\{4\}$ وفق: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-4}$ وليكن b عدداً حقيقياً.

إن قيمة b التي تجعل النقطة $A(4,b)$ مركز تناظر للخط البياني C هي :

A	8	B	4	C	2	D	-2

نحو الحل

$$f(x)+f(2x_0-x)=2y_0$$

$$x=0\ :f(0)+f(8-0)=2b$$

$$-\frac{1}{4}+\frac{65}{4}=2b\Rightarrow b=8$$

إعداد: م . أحمد ذياب الرفاعي	الجواب: A	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

11

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x)=x^2$

ولتكن النقاط A و B و D من C التي فواصلها على الترتيب هي: $1\ ,\ -3\ ,\ \alpha$

إن قيمة α التي تجعل المماس لـ C في النقطة D موازياً للمستقيم (AB) هي :

A	-2	B	-1	C	1	D	3

نحو الحل

$$f'(x)=2x\quad ,\quad m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{9-1}{-3-1}=-2$$

$$f'(\alpha)=2\alpha\Rightarrow 2\alpha=-2\ \Rightarrow\alpha=-1$$

إعداد : م عبد السلام زكريا	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

12

g و h تابعان اشتقاقيان على R ويحقق : $h(0)=-1\ ,h'(0)=-1\ ,\ g(0)=3\ ,\ g'(0)=-1$

عندها تكون معادلة المماس للخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x)=g(x).h(x)$

في النقطة التي فاصلتها **صفر** هي :

A	$y=2x-3$	B	$y=3x+2$	C	$y=-2x+3$	D	$y=-2x-3$

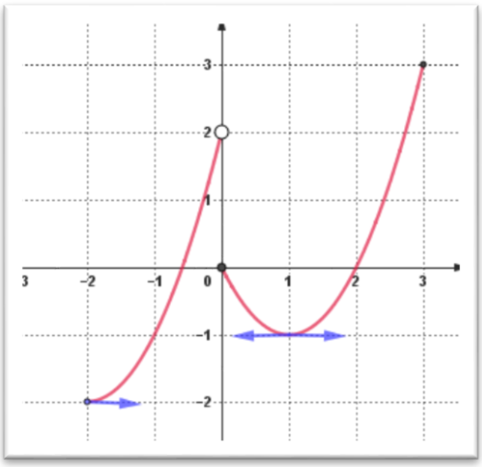
نحو الحل

$$f'=g'.h+h'.g\ \Rightarrow\ m=f'(0)=g'(0).h(0)+h'(0).g(0)=-2$$

$$f(0)=g(0).h(0)=-3\ \Rightarrow\ T:y=-2x-3$$

إعداد : م خالد العمر	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

13	ليكن f التابع المعرف على $]1,\infty[$ وفق : $f(x) = -2x + 4\sqrt{x-1} + 1$ إن C_f الخط البياني للتابع f يقبل مماس أفقي في نقطة منه إحداثياتها :						
A	$(2,-1)$	B	$(2,1)$	C	$(1,-1)$	D	$(5,-1)$
نحو الحل	الخط C_f يقبل مماس أفقي عندما $f'(x) = 0$ f اشتقاقي على $]1,\infty[$ و مشتقه : $f'(x) = -2 + \frac{4}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow x = 2 \;,\quad f(2) = 1$ إذا نقطة التماس هي $(2,1)$						
إعداد: م . محسن قصير			الجواب : B			كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق	

14	ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[-2,3]$. عدد القيم الحدية التي يبلغها التابع f هو: 						
A	1	B	2	C	3	D	4
نحو الحل	يوجد ثلاث قيم حدية هي: $f(-2) = -2$ قيمة حدية صغرى محلياً $f(1) = -1$ قيمة حدية صغرى محلياً $f(3) = 3$ قيمة حدية كبرى محلياً						
إعداد: م . حسن آصف سليمان			الجواب: C			كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق	

15

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = \dfrac{x}{x^{2}+1}$

عندئذٍ يقبل C مماسين أفقيين معادلتيهما :

A		B		C		D	
A	$y = \frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{2}$	B	$y = 2$ $y = \frac{1}{2}$	C	$y = 2$ $y = -\frac{1}{2}$	D	$y = -2$ $y = 2$

الحل

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^{2}+1)^2}$$

بما أن المماسات أفقية عندئذٍ ميلها معدوم

$$f'(x) = 0$$

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = -\dfrac{1}{2} \\ x = 1 \Rightarrow y = f(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

إعداد : م محمد حصرية	الجواب : A	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

16

لتكن التوابع f و g و h التي تحقق : $f(x) = h(g(x))$

وبفرض أنّ $h'(3) = -2$ و $g'(2) = -1$ و $g(2) = 3$ فإن $f'(2)$ تساوي :

A		B		C		D	
A	-6	B	-3	C	-2	D	2

الحل

$$f'(x) = h'(g(x)) . g'(x)$$

$$f'(2) = h'(g(2)) . g'(2)$$

$$f'(2) = h'(3) . (-1) = -2(-1) = 2$$

إعداد : م سامر الجهماني	الجواب : D	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

17	f تابع معرف واشتقاقي على R ويحقق : $f(0)=-1$ و $\sqrt{1+x^2}\,f'(x)=-f(x)$ إنّ قيمة $f''(0)$ تساوي :						
A	1	B	0	C	-1	D	$-\sqrt{2}$
	نشتق طرفي المساواة $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x)+\sqrt{1+x^2}\,f''(x)=-f'(x)$ نعوض $x=0$ $0+1.f''(0)=-f'(0)$ $\sqrt{1+(0)^2}\,f'(0)=-f(0) \Rightarrow f'(0)=-(-1) \Rightarrow f'(0)=1$ $f''(0)=-1$						
	إعداد : د محمد غوش		الجواب : C		كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم		

18	ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف والاشتقاقي على R وفق العلاقة: $f(x)=\frac{ax+b}{\sqrt{x^2+1}}$ حيث a و b عددان حقيقيان. إذا علمت أن المماس T للخط C في النقطة $A(0,2)$ منه يعامد المستقيم الذي معادلته $d: y=-x$. فإن قيمة (a,b) هي :						
A	$(-1,2)$	B	$(2,0)$	C	$(2,1)$	D	$(1,2)$
الحل	$f(0)=2$ ومنه نجد $b=2$ ميل المستقيم d هو $m=-1$ فيكون ميل T هو 1 ومنه نجد $f'(0)=1$ $f'(x)=\dfrac{a\sqrt{x^2+1}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(ax+b)}{x^2+1}$ نعوض $x=0$ فنجد $a=1$						
	إعداد : م عبد الله حناوي		الجواب : D		كتابة وتنسيق : م مهند حريقة		

19

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{1}{3}x + 1$

حيث $a, b \in R^*$. عندئذ C_f يقبل مماساً أفقياً وحيداً إذا كان:

A	B	C	D
$b = a$	$b^2 = a$	$b = a^2$	$b^2 = 2a$

نحو الحل

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + \frac{1}{3}$ المماس أفقي $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3ax^2 + 2bx + \frac{1}{3} = 0$

$\Delta = 4b^2 - 4a$

حتى يقبل الخط C_f مماساً وحيداً يجب أن يكون $\Delta = 0$ ومنه : $4b^2 - 4a = 0 \Rightarrow b^2 = a$

إعداد: م. يوسف منصور	الجواب: B	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

20

عند استخدام التقريب التآلفي المحلي لحساب قيمة تقريبية للعدد $f(1.2)$ حيث f تابع معرف واشتقاقي على R

وفق $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 3}$ نجد أنها تساوي :

A	B	C	D
-1.1	-0.9	0	0.9

نحو الحل

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \quad , f(1) = -1, f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a).h$$

$$f(1.2) \approx -1 + \left(\frac{1}{2}\right)(0.2) = -0.9$$

إعداد: م. مروان بركة	الجواب: B	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

21

نعرف التابع f على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = sin^2 \sqrt{x}$

عندئذٍ $f'(x)$ يساوي:

A	B	C	D
$\frac{sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$	$\frac{sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	$\frac{cos\,(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$	$\frac{sin2x}{2x}$

نحو الحل

$$f'(x) = 2\, sin\sqrt{x}\, (sin\sqrt{x})' = 2sin\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} cos\sqrt{x}\right) = \frac{2sin\sqrt{x}cox\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

إعداد : م فادي المحمد	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

22	ليكن التابع f المعرف على $R\setminus\left\{0\,,\ \frac{\pi}{4}+\pi k\ \ : k\in Z\right\}$ وفق العلاقة : $$f(x)=\frac{(\sin x-\cos x)^2}{x.\sin 2x-x}$$ عندئذٍ $f'(3)$ يساوي :						
A	$-\frac{1}{3}$	B	$-\frac{1}{9}$	C	$\frac{1}{9}$	D	$\frac{1}{3}$
نحو الحل	$$f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}{x(\sin 2x-1)}=\frac{1-\sin 2x}{x(\sin 2x-1)}=-\frac{1}{x}$$ $$f'(x)=\frac{1}{x^2}\ \Rightarrow f'(3)=\frac{1}{9}$$						
إعداد : م محمد السيد علي			الجواب : C			كتابة وتنسيق : م مهند حريقة	

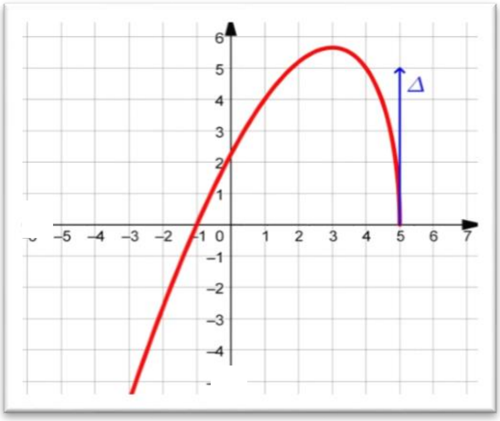
23	f تابع معرف على R وفق : $f(x)=x^3+\lambda x^2+3x-1$ حيث λ وسيط حقيقي. إن مجموعة قيم λ التي من أجلها يكون التابع f متزايد تماما على R هي :						
A	$[-3,3]$	B	$]-\infty,+\infty[$	C	$]3,+\infty[$	D	$\mathbb{R}\setminus[-3,3]$
نحو الحل	f معرف واشتقاقي على R ومشتقه : $f'(x)=3x^2+2\lambda x+3$ f متزايد تماما على R $\Leftrightarrow f'(x)\geq 0$ بالتالي المعادلة $f'(x)=0$ اما مستحيلة الحل أو لها جذر مضاعف $3x^2+2\lambda x+3=0\,,\quad \Delta\leq 0\ \Rightarrow\ \lambda^2-9\leq 0\ \Rightarrow\ \lambda\in[-3,3]$						
إعداد: م . بلال أبو حصيني			الجواب : A			كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق	

24

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, 5]$.

Δ مماس شاقولي للخط البياني C_f عند 5.

عندئذ $\lim_{x \to 5} \frac{f(x)}{x-5}$ تساوي :



A	$-\infty$	B	-5	C	0	D	5

نحو الحل

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=-\infty$$

توضيح: لأن المماس شاقولي عند $x = 5$ فإن نهاية معدل التغير لانهاية. والاشارة سالبة لأن التابع متناقص بجوارها فالمشتق سالب.

إعداد: م. زينب يوسف	الجواب: A	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

25

C_f و C_g الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفان على R وفق:

$$g(x)=x^2-\frac{1}{2}x \quad , \quad f(x)=\frac{1}{2}x^3$$

عندئذٍ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في نقطة منهما :

A	$(0,0)$	B	$\left(1,\frac{1}{2}\right)$	C	$(2,1)$	D	$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

نحو الحل

بالتعويض نجد أن الخيارين A, B فقط فيهما نقاط مشتركة بين الخطين البيانين:

ولدينا $g'(x)=2x-\frac{1}{2}\ ,f'(x)=\frac{3}{2}x^2$

باختيار A نجد $f(0)=0=g(0)$ و $f'(0)=0\neq g'(0)=-\frac{1}{2}$

فالخيار A خاطئ .. ولكن من أجل الخيار B نجد أن:

$$f(1)=\frac{1}{2}=g(1) \quad , \quad f'(1)=\frac{3}{2}=g'(1)$$

إعداد : م صفوح الأفندي	الجواب: B	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

26 ليكن التابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق : $f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$ حيث : a و b عددان حقيقيان

إذا علمت أنَ C الخط البياني للتابع f يقبل مماساً موازياً للمستقيم d الذي معادلته $2x + y - 4 = 0$

في النقطة $A(2,5)$ ، فإنّ قيمة (a,b) هي :

A		B		C		D	
A	$(1,3)$	B	$(3,-1)$	C	$(2,1)$	D	$(-1,7)$

نحو الحل

$A(2,5) \in C \quad \Rightarrow \quad f(2) = 5 \quad \Rightarrow \quad 2a + b = 5 \quad \dots(1)$

$f'(x) = a - \frac{b}{(x-1)^2}$

ميل المستقيم d : $d:\ y = -2x + 4 \quad \Rightarrow m = -2$

$f'(2) = m = -2 \quad \Rightarrow \quad a - b = -2 \quad \dots(2)$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد : $3a = 3$ ومنه $a = 1$ بالتعويض في (1) نجد : $b = 3$

إعداد : م أحمد الكلش	الجواب : A	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

27 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\{1\}$ وفق : $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

إن عدد المماسات T للخط C والمارة من النقطة $(1,3)$ يساوي :

A		B		C		D	
A	0	B	1	C	2	D	3

نحو الحل

لنفرض فاصلة نقطة التماس a :

$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3}$

$f(a) = \frac{1}{(a-1)^2}$ ، $f'(a) = -\frac{2}{(a-1)^3}$

معادلة المماس للخط C :

$T:\ y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$T:\ y = -\frac{2}{(a-1)^3}(x-a) + \frac{1}{(a-1)^2}$

T مار من النقطة $(1,3)$ عندئذٍ :

$3 = -\frac{2}{(a-1)^3}(1-a) + \frac{1}{(a-1)^2}$

$3 = \frac{2}{(a-1)^2} + \frac{1}{(a-1)^2}$

$3(a-1)^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 0\ ,\ a = 2$

يوجد مماسين

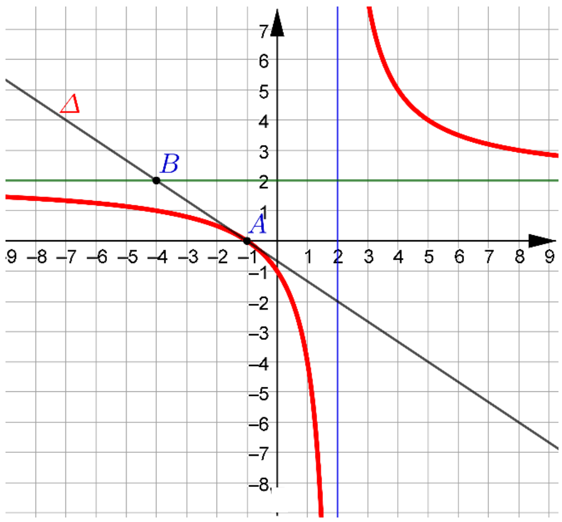
إعداد : م عبد الرحمن الحصني	الجواب : C	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

في الشكل المجاور لدينا C الخط البياني للتابع f

المعرف على $R\backslash\{2\}$

و Δ المماس للخط C في النقطة $(-1,0)$

اجب عن الأسئلة 28 - 29 - 30



28

إن $\lim_{x\to-\infty} f(f(x))$ تساوي:

A		B		C		D	
A	$-\infty$	B	-2	C	1	D	2

نحو الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(f(x)) = \lim_{X\to2^-} f(X) = -\infty$$

29

إن مجموعة تعريف التابع $g(x)=\sqrt{f(x)}$ هي:

A	$R\backslash\{2\}$	B	$]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$	C	$]2,+\infty[$	D	$]-\infty,-1]\cup]2,+\infty[$

نحو الحل:

يجب أن يكون $f(x)\geq 0$. من الخط البياني نجد أنه يقع فوق محور الفواصل على

$]-\infty,-1]\cup]2,+\infty[$

30

إن $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}$ هي :

A	$-\infty$	B	$-\frac{3}{2}$	C	$-\frac{2}{3}$	D	0

نحو الحل:

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1) = m_\Delta = -\frac{2}{3}$$

إعداد : م خالد الحداد	الجواب			كتابة وتنسيق : م مهند حريقة
	28	29	30	
	A	D	C	

أتمتة منهاج رياضيات البكالوريا السورية

الجزء الأول: الوحدة الثالثة

اختبار وحدة الاشتقاق

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة:

م. حسام قاسم م. مهند حريقة د. مصطفى الرزوق

تنسيق وإخراج: م مهند حريقة - المهندس حسام قاسم

ساعد في التنسيق الاستاذ نادر أبو راس

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محيي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبو نبوت	محمد السيد علي
هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان	زينب يوسف
حسام قاسم	خالد الحداد	فادي المحمد	يوسف منصور
نادر أبو راس	محمد زين جعرور	فادي طنوس	زكي طحاوي
أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة	محمد العيسى
مصطفى الرزوق	صلاح أحمد سالم	عبد السلام حسن	

1

نتأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على R :
فإن حلول المتراجحة $f'(x) < 0$ هي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

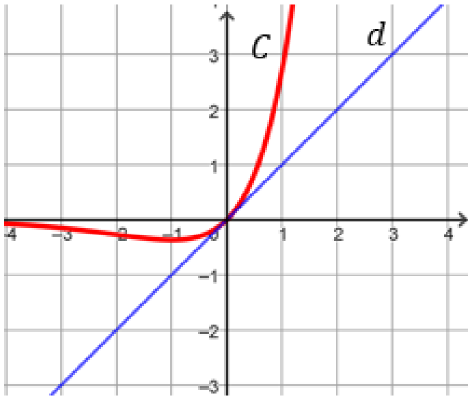
A		B		C		D	
A	$]-\infty,-1[$	B	$]1,+\infty[$	C	$]-1,1[$	D	$]-\infty,+\infty[$

نحو الحل: $f'(x) < 0$ على المجال $]-1,1[$

إعداد: م يوسف منصور — الجواب: C — كتابة وتنسيق: المهندس حسام قاسم

2

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R
و المستقيم d مماس للخط C في المبدأ
إن قيمة $f'(0)$ هي:



A	-1	B	0	C	$\frac{1}{2}$	D	1

نحو الحل: المماس هو منصف الربع الأول وميله **واحد** و هي قيمة العدد المشتق

إعداد: م خالد الحدّاد — الجواب: D — كتابة وتنسيق: م مهند حريقة

3

إن معادلة المماس لمنحني التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x.sinx$
في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب هي:

A	$y = x$	B	$y = 1$	C	$x = 0$	D	$y = 0$

نحو الحل:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad , \quad f'(x) = sinx + x\,cosx \Rightarrow f'(0) = 0$

فتكون معادلة المماس $y = 0$

إعداد: م مهند حريقة — الجواب: D — كتابة وتنسيق: م مهند حريقة

4

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف والاشتقاقي على R وفق : $f(x) = x^2 - 3x$
عندئذ C يقبل مماس في المبدأ معادلته :

A	$y = -3x + 2$	B	$y = 3x$	C	$y = -3x$	D	$y = 2x - 3$

نحو الحل

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = 2x - 3 \quad , \quad f'(0) = -3$$

معادلة المماس للخط C في المبدأ $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$\Rightarrow \; y = -3x$$

إعداد : م زينب يوسف | الجواب : C | كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

5

f تابع معرف و اشتقاقي على R وفق : $f(x) = sinx$ عندئذٍ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{sinx - sin\frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}$ تساوي :

A	0	B	1	C	2	D	3

نحو الحل

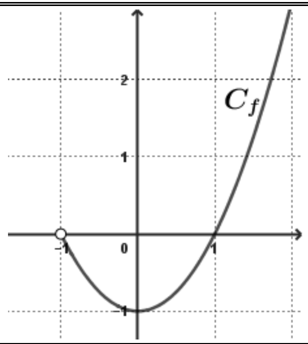
$$f'(x) = cosx \quad \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

حسب تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{2}$ نجد : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{sinx - sin\frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

إعداد : م صفوح الأفندي | الجواب : A | كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

6

تأمل جانباً C_f الخط البياني لتابع f معرف على
$I =]-1, +\infty[$
عندئذٍ $f(I)$ يساوي :



A	$[-1, +\infty[$	B	$]-1, +\infty[$	C	$[-1, +\infty[\backslash\{0\}$	D	$[-1,0]$

نحو الحل

$$f(I) = [-1, +\infty[$$

إعداد : م فادي المحمد | الجواب : A | كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

7

ليكن f التابع المعرف على R وفق : $f(x) = \sqrt{3 + sinx + cosx}$
عندئذٍ $f'(0)$ يساوي :

A	0	B	$\frac{1}{4}$	C	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	D	$\frac{1}{2}$

نحو الحل

$$f'(x) = \frac{cosx - sinx}{2\sqrt{3 + sinx + cosx}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1 - 0}{2\sqrt{3 + 0 + 1}} = \frac{1}{4}$$

إعداد : م عمرو معدل | الجواب : B | كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

8

ليكن التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق : $f(x) = \left(\sqrt{x}-1\right)^3$

والاشتقاقي على $]0,+\infty[$ فإن $f'(x)$ يساوي :

A		B		C		D	
$\dfrac{3\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{2\sqrt{x}}$	B	$\dfrac{2\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{3\sqrt{x}}$	C	$\dfrac{3\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2x\sqrt{x}}$	D	$\dfrac{3\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2\sqrt{x}}$	

نحو الحل

$$f'(x) = 3 \times \left(\sqrt{x}-1\right)^2 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

إعداد : م هشام مصطفى	الجواب : D	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

9

f تابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$ بحيث $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$ و $h(x) = f(3x)$

عندئذ $h'(x)$ يساوي :

A		B		C		D	
$\dfrac{1}{3x^2-1}$	B	$\dfrac{-1}{1+3x^2}$	C	$\dfrac{3}{x^2+3}$	D	$\dfrac{1}{3x^2+1}$	

نحو الحل

$$h'(x) = f'(3x) \times (3x)' = \frac{3}{3+(3x)^2} = \frac{1}{1+3x^2}$$

إعداد: م. محي الدين اسماعيل	الجواب : D	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

10

ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x^4 - 4x + 1$

إنّ عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ هو :

A		B		C		D	
0	B	1	C	2	D	3	

نحو الحل

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \,,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = -2$$

من جدول التغيرات نجد أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلين في R

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

إعداد : م رياض الحسين	الجواب : C	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

11

ليكن f تابع معرف على R وفق: $f(x) = \sin x$ وليكن $f^{(n)}$ المشتق من المرتبة n للتابع f على R.

عندئذ المجموع : $f^{(2)}(\pi) + f^{(3)}(\pi) + f^{(4)}(\pi)$ يساوي :

A		B		C		D	
-2	B	-1	C	0	D	1	

نحو الحل

$$f'(x) = \cos x$$

$$f^{(2)}(x) + f^{(3)}(x) + f^{(4)}(x) = -\sin x - \cos x + \sin x = -\cos x$$

$$f^{(2)}(\pi) + f^{(3)}(\pi) + f^{(4)}(\pi) = -\cos \pi = 1$$

إعداد: م. محمد زين جعرور	الجواب: D	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

12

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

عندئذٍ إحدى النقاط التي يقبل فيها C_f مماساً موازياً للمستقيم $d: 2x+y=0$ هي:

A		B		C		D	
A	$\left(4,\frac{5}{3}\right)$	B	$(0,1)$	C	$(-1,0)$	D	$(2,3)$

نحو الحل

ميل d هو $m=-2$ و بالتالي ميل المماس هو -2 ومنه يجب أن يكون $f'(x)=-2$

$$-\frac{2}{(x-1)^2}=-2 \Rightarrow (x-1)^2=1$$

إما $x=0$ والنقطة هي $(0,-1)$ أو $x=2$ والنقطة هي $(2,3)$

إعداد : م شاكر كنجو	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

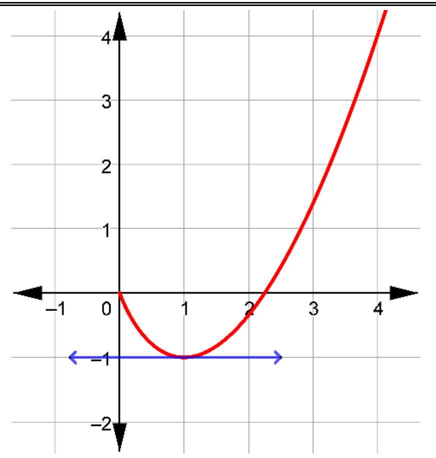
13

في الشكل المجاور C_f الخط البياني لتابع f المعرف والاشتقاقي

على $[0,+\infty[$ وفق :

$$f(x)=ax+bx\sqrt{x}$$

إن قيم (a,b) تساوي :



A		B		C		D	
A	$(-3,2)$	B	$(-3,-2)$	C	$(3,-2)$	D	$(2,-3)$

نحو الحل

$$\begin{cases} (1,-1)\in C_f \Rightarrow a+b=-1 \\ f'(x)=a+\frac{3}{2}b\sqrt{x}\ ;\ f'(1)=0 \Rightarrow a+\frac{3}{2}b=0 \end{cases}$$

بالحل المشترك نجد $(a=-3\ ,b=2)$

إعداد : م نادر أبوراس	الجواب: A	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

14

ليكن f التابع المعرف والاشتقاقي على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x.\cos x$ عندئذ فإن: $f''(x)+f(x)$ يساوي:

A		B		C		D	
A	$-2\sin x$	B	$2\sin x$	C	$2\cos x$	D	$-2\cos x$

نحو الحل

$$f(x)=x.\cos x$$

$$f'(x)=\cos x-x\sin x$$

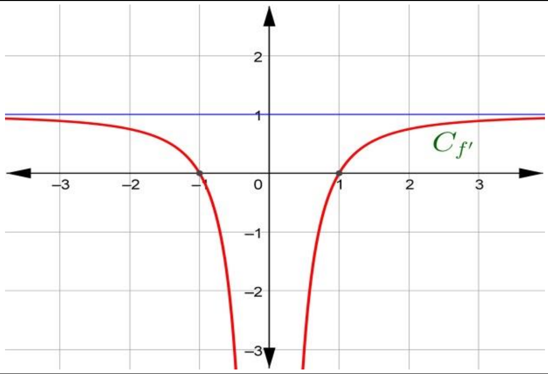
$$f''(x)=-\sin x-\sin x-x\cos x$$

$$f''(x)+f(x)=-2\sin x$$

إعداد: م. أمين الحايك	الجواب: A	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

15

يوضح الشكل جانباً $C_{f'}$ الخط البياني للتابع f'
مشتق التابع f المعرف والاشتقاقي على R^* .
عندئذ عدد القيم الحدية للتابع f يساوي :



A		B		C		D	
A	0	B	1	C	2	D	3

نحو الحل

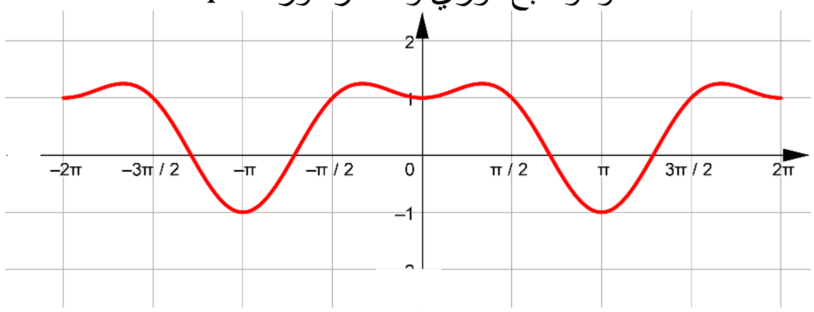
ينعدم المشتق عند $x = -1$ ويغير إشارته .

كما ينعدم عند $x = 1$ ويغير إشارته . لذا للتابع قيمتان حديتان

إعداد: م. نور الدين صندفي	الجواب: C	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

16

يوضح الشكل المرفق الخط البياني C للتابع f المعرف على المجال $[-2\pi, 2\pi]$
وهو تابع دوري وأصغر دور له T



فالتابع f و T :

A	f زوجي $T = 2\pi$	B	f زوجي $T = \pi$	C	f فردي $T = \pi$	D	f فردي $T = 2\pi$

نحو الحل

واضح من الرسم أن الخط C متناظر بالنسبة لمحور التراتيب ويكرر نفسه على مجال طوله 2π

إعداد : م عبد السلام حسن	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

17

ليكن لدينا التابع f المعرف والاشتقاقي على R وفق : $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b}$ حيث a و b $\in R^*$
فإنَ قيمة (a, b) التي لأجلها يكون للتابع f قيمة حدية محلية تساوي 2 عند $x = -2$ هي:

A	$(-4, 8)$	B	$(4, 8)$	C	$(2, 4)$	D	$(-2, 4)$

نحو الحل

$$f(-2) = 2 \Rightarrow \sqrt{4 - 2a + b} = 2 \Rightarrow 4 - 2a + b = 4 \Rightarrow b = 2a \ \dots(1)$$

$$f'(x) = \frac{2x + a}{2\sqrt{x^2 + ax + b}} \quad , \quad f'(-2) = 0$$

$$\frac{-4 + a}{2\sqrt{4 - 2a + b}} = 0 \Rightarrow -4 + a = 0 \Rightarrow a = 4$$

نعوض في (1) نجد : $b = 8$

إعداد : م باسل سطمة	الجواب : B	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

18

ليكن لدينا تابعان f و g معرفان واشتقاقيان على المجال $]0,+\infty[$
ولدينا $g(x)=f(\sqrt{x})$. فإذا علمت أن $g'(x)=\frac{x^2+2}{\sqrt{x}}$. عندئذٍ $f'(x)$ يساوي:

A	$\frac{x+2}{\sqrt{x}}$	B	$2x^4+4$	C	$\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$	D	x^4+2

نحو الحل

$$f(\sqrt{x})=g(x)\Rightarrow f(x)=g(x^2)$$
$$f'(x)=2x.g'(x^2)$$
$$f'(x)=2x\ .\ \frac{x^4+2}{x}=2x^4+4$$

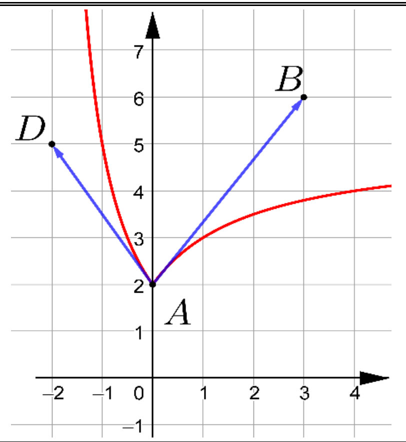
إعداد : م يونس حمود	الجواب B:	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

19

في الشكل المجاور C_f الخط البياني للتابع f المعرف على R ولدينا:

$$a=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\quad,\quad b=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

عندئذٍ تكون قيمة الجداء $a.b$ تساوي :



A	-4	B	-2	C	-1	D	$-\frac{1}{2}$

نحو الحل

لدينا النقطتان $D(-2,5)\ ,A(0,2)$

$$a=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0^-)=\frac{2-5}{0+2}=-\frac{3}{2}$$

لدينا النقطتان $B(3,6),A(0,2)$

$$b=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0^+)=\frac{2-6}{0-3}=\frac{4}{3}\Rightarrow a.b=\ -2$$

إعداد : م زكي طحاوي	الجواب :B	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

20

ليكن التابع f المعرف على R وفق: $f(x)=sin^4x-cosx$
إن التابع f هو تابع :

A	زوجي ودوري دوره الاصغر π	B	فردي ودوري دوره الاصغر 2π	C	فردي ودوري دوره الاصغر π	D	زوجي ودوري دوره الاصغر 2π

نحو الحل

زوجي لأن $f(-x)=(sin(-x))^4-cos(-x)=sin^4x-cosx=f(x)$

$$f(x+\pi)=sin^4(x+\pi)-cos(x+\pi)=sin^4x+cosx\neq f(x)$$

2π هو دوره

إعداد : م محمد احمد العيسى	الجواب D:	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

21

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق: $f(x)=\sqrt{x}$

وليكن Δ المستقيم المماس لـ C_f في النقطة التي فاصلتها 4 منه . نعرف النقطتان $A(1,\alpha)$ و $B(2,1)$.

إن قيمة α التي تجعل المستقيمان Δ و (AB) متعامدان هي :

A		B		C		D	
A	-5	B	-1	C	2	D	5

نحو الحل

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقه : $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$m_\Delta=f'(4)=\frac{1}{4}\ ,\ m_{(AB)}=\frac{\alpha-1}{1-2}=1-\alpha$$

$$\Delta\perp(AB)\Leftrightarrow m_\Delta\times m_{(AB)}=-1\Rightarrow\frac{1}{4}(1-\alpha)=-1\Rightarrow\alpha=5$$

إعداد: م . خضر سيفو	الجواب: D	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

22

ليكن C_f الخط البياني لتابع f معرف واشتقاقي على R ولتكن $\Delta: y-2x=3$ معادلة المماس للخط C_f في نقطة منه فاصلتها **صفر** . فإن $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-3}{x}$ تساوي:

A		B		C		D	
A	-2	B	-1	C	$-\frac{1}{2}$	D	2

نحو الحل

من معادلة المماس $f(0)=3$ و $f'(0)=m_\Delta=2$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-3}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$$

إعداد : م علي جمول	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

23

ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=(m-1)\,x^{n+1}$ حيث $n\in N$ و $m\in R\backslash\{1\}$

إذا علمت أنَ $f''(x)=-6x^2$ فإنّ قيمة (n,m) هي :

A		B		C		D	
A	$(3,-2)$	B	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	C	$\left(3,-\frac{1}{2}\right)$	D	$\left(3,\frac{2}{3}\right)$

نحو الحل

$$f'(x)=(n+1)(m-1)\,x^n$$
$$f''(x)=n(n+1)(m-1)\,x^{n-1}$$

بالمطابقة مع عبارة $f''(x)$ نجد $n-1=2$ ومنه $n=3$

$$n(n+1)(m-1)=-6$$

$$3(3+1)(m-1)=-6\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

ملاحظة ((كان بالإمكان معرفة درجة التابع أنها من الدرجة الرابعة كون المشتق الثاني من الدرجة الثانية))

إعداد : م محمد نصر الله	الجواب : B	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

24

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\,;k\in Z\right\}$ وفق :
$f(x)=a\,tanx+b$ حيث : a و b عددان حقيقيان
إ نّ قيمة (a,b) التي من أجلها يكون المستقيم $\Delta: \boldsymbol{y=x-\pi}$ مماساً للخط C في النقطة التي فاصلتها π هي:

A	$(2,0)$	B	$(1,-1)$	C	$(1,0)$	D	$(-1,-1)$

الحل

$$x_0=\pi \quad\Rightarrow\quad y_0=\pi-\pi=0 \quad\Rightarrow\quad \text{نقطة التماس } (\pi,0)$$
$$(\pi,0)\in C \quad\Rightarrow\quad f(\pi)=0$$
$$a\,tan(\pi)+b=0 \quad\Rightarrow\quad a(0)+b=0 \quad\Rightarrow\quad b=0$$
$$f'(x)=a\,(1+tan^2x) \;\Rightarrow\; f'(\pi)=m_\Delta=1$$
$$a\,(1+tan^2\pi)=1 \quad\Rightarrow\quad a\,(1+0)=1 \quad\Rightarrow\quad a=1$$

إعداد : م أنطوان جلوف	الجواب : C	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

25

التابع f معرف على $\mathbb{R}_+$ وفق :
$$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & ,\ x>0 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases}$$
إن قيمة مشتق التابع f عند الصفر هي :

A	-1	B	0	C	1	D	$\sin 1$

الحل

$$x>0\,,\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x}\,sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\,sin\frac{1}{x}$$
$$-1\le sin\frac{1}{x}\le 1 \Longrightarrow -\sqrt{x}\le\sqrt{x}\,sin\frac{1}{x}\le\sqrt{x} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0}(-\sqrt{x})=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x})=0$$
حسب مبرهنة الإحاطة: $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}.\,sin\frac{1}{x}=0$ ومنه : $f'(0)=0$

إعداد: م. عبد الحميد السيد	الجواب: B	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

26

ليكن التابع f المعرف على المجال $I=[-1,1]$ وفق : $f(x)=(x+1)\sqrt{1-x^2}$
عندئذٍ يكون للخط البياني C_f مماساً شاقولياً معادلته هي :

A	$x=1$	B	$x=-1$	C	$x=0$	D	$y=0$

الحل

من أجل $x=-1$ نجد أن $f(-1)=0$ ويكون:
$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\sqrt{1-x^2}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\sqrt{1-x^2}=0$$
أي أن f قابل للاشتقاق عند $x=-1$ و من أجل $x=1$ لدينا $f(1)=0$ ويكون
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\sqrt{1-x^2}}{x-1}=$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{-(x+1)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+1)\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}=-\infty$$
f مستمر عند $x=1$ ولخطه البياني عندها مماس شاقولي

إعداد : م صفوان شلّار	الجواب: A	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

تأمل جدول تغيرات التابع f المعرف على $R\backslash\{-1\}$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

أجب عن الأسئلة $27 - 28 - 29$

27	مجموعة تعريف التابع $g(x) = \sqrt{f'(x)}$ هي:

A	$]-\infty , -3[$	B	$]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$	C	$]-\infty , -3] \cup [1,+\infty[$	D	$[1,+\infty[$

الحل: يجب أن يكون $f'(x) \geq 0$. من الجدول نجد أن المتراجحة محققة أيا كانت x تنتمي إلى :

$]-\infty , -3] \cup [1,+\infty[$

28	عدد حلول المعادلة $f^2(x) - 1 = 0$ هو :

A	4	B	3	C	2	D	1

الحل: المعادلة تكافئ $f^2(x) = 1$ وبالتالي

إما $f(x) = 1$ ليس لها حلول . أو $f(x) = -1$ ولها حل وحيد

29	عدد المماسات الافقية للخط البياني للتابع f هو:

A	0	B	1	C	2	D	3

الحل: من سطر المشتق نجد أنه ينعدم مرتين فلخطه البياني مماسين أفقيين

إعداد : م هيثم ديوب

الجواب		
27	28	29
C	D	C

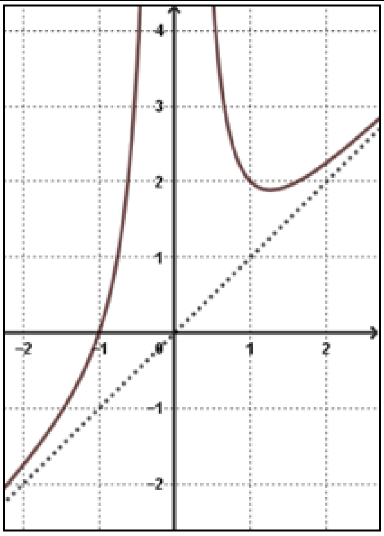
كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

30

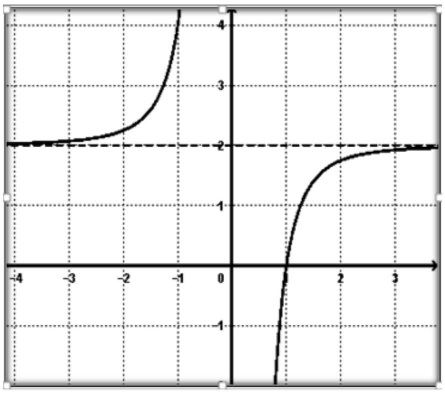
في الشكل المجاور C هو الخط البياني لتابع f

معرف واشتقاقي على $R\backslash\{0\}$

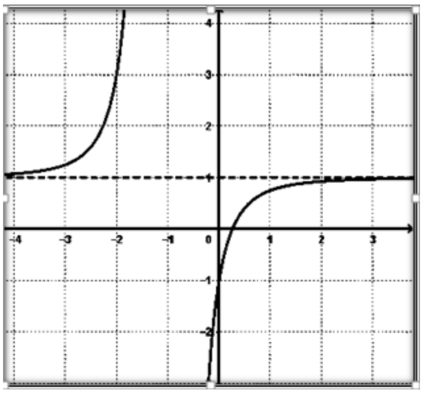
الخط البياني الذي يمثل التابع المشتق f' هو:



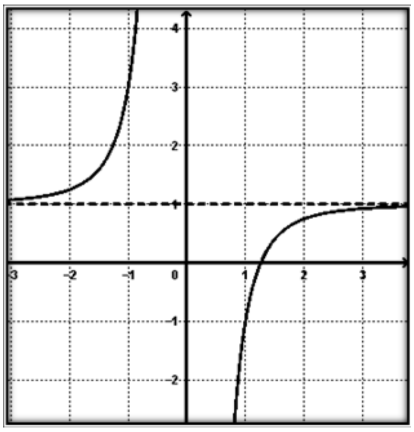
A



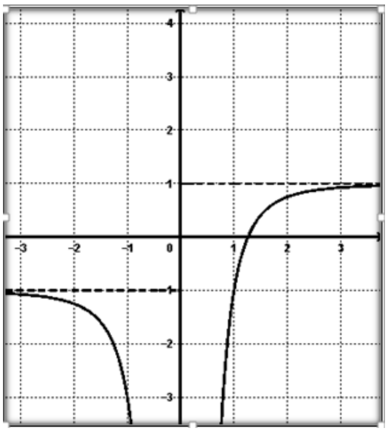
B



C



D



نحو الحل

۞ نلاحظ من الرسم أن C الخط البياني للتابع f يملك مماس أفقي في نقطة فاصلتها $\alpha \in]1,2[$
أي $f'(\alpha) = 0$ وهذا لا يتحقق في A و B

۞ التابع f متزايد تماماً على المجال $]-\infty, 0[$ وبالتالي يجب أن يتحقق $f'(x) > 0$
وهذا لا يتحقق في D و E ۞ بالتالي الخيار الصحيح هو C

طريقة أخرى : C يقبل مقارب مائل معادلته $y = x$ في جوار $\pm\infty$ فيحقق $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 0$
وبالاشتقاق $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f'(x) - 1) = 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = 1$ أي أن الخط البياني للتابع المشتق يقبل
مقارب أفقي معادلته $y = 1$ نستبعد الخيارات التي لا تحقق ذلك ثم نتابع للوصول إلى الإجابة الصحيحة

إعداد : المهندس حسام قاسم	الجواب : C	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

أتمتة منهاج رياضيات البكالوريا السورية

الجزء الأول: الوحدة الرابعة

اختبار نهاية متتالية

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

صلاح أحمد سالم   مصطفى الرزوق   أمين الحايك

تنسيق و اخراج: أمين الحايك

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبونبوت	فيصل خالد
محمد السيد علي	هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان
زينب يوسف	حسام قاسم	خالد الحداد	فادي المحمد
يوسف منصور	نادر أبوراس	محمد زين جعرور	فادي طنوس
زكي طحاوي	أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة
محمد العيسى	مصطفى الرزوق	صلاح أحمد سالم	عبد السلام حسن

1 نتأمل متتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ ، إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = 3$ كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ تساوي:

A		B		C		D	
A	0	B	$\frac{1}{3}$	C	3	D	$+\infty$

نحو الحل:

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}\left[(x_n\cdot y_n)\cdot\frac{1}{x_n}\right] = (3)(0) = 0$$

إعداد : أ. طالب أسعد | الجواب : A | كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

2 عند دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ حيث : $u_n = \frac{5^n-7^n}{1-7^n}$ نجد أنها متقاربة من العدد:

A	-1	B	0	C	$\frac{1}{7}$	D	1

نحو الحل:

$$u_n = \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{7}\right)^n - 1} \quad ; \quad -1 < \frac{1}{7} < \frac{5}{7} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n = 0 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{0-1}{0-1} = 1$$

إعداد : أ. صفاء قزق | الجواب : D | كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

3 لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{\sin n}{n}$ عندئذ تكون نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ هي:

A	-2	B	0	C	2	D	$+\infty$

نحو الحل:

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Longrightarrow \frac{-1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

وبما أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

فحسب مبرهنة الإحاطة يكون: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

إعداد : أ. حسين رشيد | الجواب : B | كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

4 واحدة فقط من المتتاليات الآتية ليس لها نهاية:

A	$w_n = 2^n - 1$	B	$x_n = 4^n$	C	$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$	D	$v_n = (-2)^n$

نحو الحل:

المتتالية $v_n = (-2)^n$ هندسية وفيها $q = -2 < -1$ وبالتالي ليس لها نهاية

إعداد : أ. وسام علي | الجواب : D | كتابة وتنسيق : أ. صلاح أحمد سالم

5

ليكن q عدداً حقيقيا يحقق $0 < q < 1$ ولتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

إذا علمت أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ فإن q يساوي:

A	$\frac{1}{3}$	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{2}{3}$	D	$\frac{3}{5}$

نحو الحل

لدينا مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها q وعدد الحدود $n+1$ ومنه:

$$u_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

وبما أن : $0 < q < 1$ فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-q} \Rightarrow \frac{1}{1-q} = 3 \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

إعداد : أ. محمد العاشق	الجواب : C	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

6

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = n\sqrt[3]{n}$ ، إن أصغر عدد طبيعي n_0 يحقق الشرط:

من أجل كل $n > n_0$ فإن $u_n > 10^{12}$ هو:

A	10^4	B	10^6	C	10^8	D	10^9

نحو الحل

$$u_n > 10^{12} \Rightarrow n\sqrt[3]{n} > 10^{12} \Rightarrow n^4 > 10^{12\times 3} \Rightarrow n > 10^9$$

إذن $n_0 = 10^9$

إعداد : أ. عبد الله حناوي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

7

θ عدد حقيقي يحقق $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق: $u_n = 2\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

A	0	B	1	C	2	D	$+\infty$

نحو الحل

$$u_n = 2\cos\left[\theta\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad ; \; -1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2\cos(0) = 2$$

إعداد : أ. محي الدين اسماعيل	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ. صلاح أحمد سالم

8

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \sqrt{\frac{n}{n^3+1}} + \sqrt{\frac{n}{n^3+2}} + \sqrt{\frac{n}{n^3+3}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{n^2+1}}$$

عندئذ تكون نهاية هذه المتتالية:

A	0	**B**	$\frac{1}{2}$	**C**	1	**D**	$+\infty$

نحو الحل

يساوي u_n مجموع n حداً أصغرها $\sqrt{\frac{n}{n^3+n}} = \sqrt{\frac{1}{n^2+1}}$ وأكبرها $\sqrt{\frac{n}{n^3+1}}$ إذاً:

$$n \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2+1}} \leq u_n \leq n \cdot \sqrt{\frac{n}{n^3+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sqrt{\frac{n}{n^3+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3}{n^3+1}} = 1$$

وبالتالي حسب مبرهنة الإحاطة $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

إعداد : أ. موسى حجيج/ أبو نزار	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

9

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تحقق: $u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ، عندئذ تكون نهاية هذه المتتالية:

A	0	**B**	$\frac{1}{2}$	**C**	1	**D**	$+\infty$

نحو الحل

لدينا: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ لأنها متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{2} > 1$

وبالتالي حسب مبرهنة المقارنة $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$

إعداد : أ. خضر سيفو	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ. صلاح أحمد سالم

10

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n}$

إذا كان: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ عندئذ نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$:

A	-3	**B**	$-\frac{3}{2}$	**C**	0	**D**	$\frac{3}{2}$

نحو الحل

$$S_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{1} + \frac{3}{3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{3} + \cdots + \frac{3}{n} - \frac{3}{n-1} + \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n}$$

$$S_n = -3 + \frac{3}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -3$$

إعداد : أ. نادر أبو راس	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ. نادر أبو راس

11

لتكن المتتاليتان $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ فيهما: $y_0 = 8 \quad , \quad x_0 = 2$

ولتكن المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $w_n = x_n \cdot y_n$

إذا علمت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ ثابتة، وأن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان

عندئذ فإن النهاية المشتركة لهما:

A		B		C		D	
A	8	B	4	C	3	D	2

نحو الحل

$$w_n = w_0 = x_0 \cdot y_0 = 16$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = L$$

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$16 = L^2 \quad \Rightarrow L = 4$$

إعداد : أ. علي جمول	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ. صلاح أحمد سالم

12

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ المعرفتان وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = u_n + 4$$

إذا علمت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية، وأن: $s_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

عندئذ نهاية المتتالية $(s_n)_{n\geq0}$:

A		B		C		D	
A	14	B	12	C	8	D	6

نحو الحل

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= 2 + 4 = 6 \\ v_1 &= \left(\frac{1}{2}(2) - 2\right) + 4 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad q = \frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{2}$$

$$s_n = 6\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 12\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

لدينا: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ لأنها متتالية هندسية وفيها $-1 < q = \frac{1}{2} < 1$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 12$$

إعداد : أ. مروان بركة	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

13

ليكن a و b عددين يحققان $a < b < 0$ ولتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_n = \frac{b^n - a^n}{b^n}$$

عندئذ نهاية المتتالية:

A	$-\infty$	B	0	C	$+\infty$	D	غير موجودة

نحو الحل

$$u_n = 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad ; \quad \frac{a}{b} > 1 > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

إعداد : أ. عبد الحميد السيد | الجواب : A | كتابة وتنسيق : أ. صلاح أحمد سالم

14

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{n!+(-1)^n}{n!}$

عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

A	$-\infty$	B	0	C	1	D	غير موجودة

نحو الحل

$$u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n!} \quad \Rightarrow u_n - 1 = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow |u_n - 1| = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$$

بما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

وبالتالي حسب مبرهنة المقارنة $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

إعداد : أ. يوسف منصور | الجواب : C | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

15

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+1}$$

عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

A	$\frac{1}{3}$	B	$\frac{1}{2}$	C	0	D	$+\infty$

نحو الحل

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2n^2+2} = \frac{n^2+n}{2n^2+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

إعداد : أ. زكي طحاوي | الجواب : B | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

16

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقة: $\begin{cases} u_0 = 3\,, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{u^2{}_{n+1}}{u_n} \end{cases}$

عندئذ تكون نهاية هذه المتتالية:

A		B		C		D	
A	0	B	$\frac{1}{3}$	C	3	D	$+\infty$

نحو الحل

العلاقة $u_{n+2} = \dfrac{u^2{}_{n+1}}{u_n}$ تكافيء $u^2{}_{n+1} = u_{n+2} \cdot u_n$

إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها:

$$q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{3} < 1$$

وبالتالي: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

إعداد : أ. عمرو معدل	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ. صلاح أحمد سالم

17

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \cdots + \frac{n}{5^n}$

إذا علمت أن: $n \leq 2^n$ عندئذ أصغر عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ من بين الأعداد الآتية هو:

A		B		C		D	
A	$\frac{1}{5}$	B	$\frac{1}{4}$	C	$\frac{2}{3}$	D	$\frac{4}{5}$

نحو الحل

$$u_n \leq \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$u_n \leq \frac{2}{5}\,\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$$

$$u_n \leq \frac{2}{3}$$

إعداد : أ. رياض الزامل	الجواب : C	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

18

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق:

$$u_{n+1} = u_n - (u_n)^2 \quad ; \quad u_0 = \frac{1}{2}$$

إذا علمت أن: $u_n \in \,]0,1[$ ، عندئذ نهاية هذه المتتالية:

A		B		C		D	
A	0	B	$\frac{1}{2}$	C	1	D	$+\infty$

نحو الحل

$u_n \in \,]0,1[$ و $u_{n+1} - u_n = -(u_n)^2 < 0$

فالمتتالية متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

نهايتها هو L هو حل المعادلة $f(x) = x$:

$$x - x^2 = x \Longrightarrow x = 0$$

مع ملاحظة أن التابع f مستمر عند 0 وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

إعداد : أ. رابعة سليمان	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ. صلاح أحمد سالم

19	$(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة وفق: $u_n=\frac{(-1)^n n+1}{n+\sqrt{n}}$ ، فإن نهاية هذه المتتالية:							
A	$-\infty$	B	-1	C	1	D	غير موجودة	

نحو الحل

n زوجي: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$

n فردي: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n+1}{n+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=-1$

بالتالي ليس للمتتالية نهاية

إعداد : أ. خالد العمر	الجواب : D	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

20

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3} \end{cases}$$

إذا علمت أن $(u_n)_{n\geq0}$ تحقق: $u_n<u_{n+1}<4$

عندئذ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$:

A	4	B	3	C	2	D	$\sqrt{3}$

نحو الحل

لدينا $u_n<u_{n+1}$ إذاً المتتالية متزايدة تماماً
ولدينا $u_n<4$ إذاً المتتالية محدودة من الأعلى
وبالتالي فالمتتالية متقاربة

إذاً نهايتها حل المعادلة: $f(x)=x$

$\sqrt{2x+3}=x$ (شرط الحل $x\geq0$)

$2x+3=x^2 \quad \Rightarrow x^2-2x-3=0$

$$\begin{cases} x=-1 & \text{مرفوض} \\ x=3 \end{cases}$$

مع ملاحظة أن التابع f مستمر عند 3 وبالتالي $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=3$

إعداد : أ. محمد زين جعرور	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

اختبارات رياضيات مؤتمتة للبكالوريا السورية

الجزء الأول : الوحدة الخامسة

اختبار وحدة التابع اللوغاريتمي النيبري

إشراف الأستاذ : عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

صلاح أحمد سالم - عماد كزو - أمين الحايك

تنسيق و إخراج : أ . أمين الحايك / أ . نادر أبوراس

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبونبوت	فيصل خالد
محمد السيد علي	هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان
زينب يوسف	حسام قاسم	خالد الحداد	فادي المحمد
يوسف منصور	نادر أبوراس	محمد زين جعرور	فادي طنوس
زكي طحاوي	أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة
محمد العيسى	مصطفى الرزوق	صلاح أحمد سالم	عبد السلام حسن

1 حل المعادلة $2lnx - 3 = 0$ هو:

A	**B**	**C**	**D**
$\sqrt{e}$	$\frac{3}{2}$	e	$e\sqrt{e}$

نحو الحل

$$lnx = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$$

إعداد : أ . محمد جمال الخطيب | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

2 العدد: $L = \frac{1}{2}\ln(125) + 2ln\left(\frac{1}{5}\right) + ln\sqrt{5}$ يساوي:

A	**B**	**C**	**D**
0	$ln5$	1	$\sqrt{5}$

نحو الحل

$$L = \frac{1}{2}\ln 5^3 - 2ln5 + \frac{1}{2}ln5$$

$$L = \frac{3}{2}\ln 5 - 2ln5 + \frac{1}{2}ln5 = 0$$

إعداد: أ. محي الدين اسماعيل | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

3 ليكن المقدار $A = ln\left(\sqrt{4+e} - 2\right)^4 + ln\left(\sqrt{4+e} + 2\right)^4$

عندئذ قيمة A تساوي:

A	**B**	**C**	**D**
2	4	8	16

نحو الحل

$$A = 4ln\left(\sqrt{4+e} - 2\right) + 4ln\left(\sqrt{4+e} + 2\right)$$

$$A = 4\left(ln\left(\sqrt{4+e} - 2\right) \cdot \left(\sqrt{4+e} + 2\right)\right)$$

$$A = 4ln(4 + e - 4) = 4$$

إعداد: أ. رياض الحسين | الجواب: B | كتابة وتنسيق : أ. صلاح أحمد سالم

4 مجموعة تعريف التابع f المعطى وفق : $f(x) = \sqrt{ln\,(2x-3)}$ هي:

A	**B**	**C**	**D**
$\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$	$]2, +\infty[$	$\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$	$[2, +\infty[$

نحو الحل

$$ln\,(2x-3) \geq 0$$

$$2x - 3 \geq 1$$

$$2x \geq 4 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2$$

إعداد: أ. علي فؤاد علي | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

5	عند البحث عن حل المعادلة: $ln^2 x - ln\, x^2 + 1 = 0$ نجد أنه:

A		B		C		D	
A	غير موجود	B	$\frac{1}{e}$	C	1	D	e

نحو الحل

شرط الحل $x > 0$

$$ln^2 x - 2\, ln\, x + 1 = 0$$

$$(ln\, x - 1)^2 = 0$$

$$lnx = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e$$

إعداد: أ. محمد المصري | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

6	ليكن التابع f المعرف والاشتقاقي على $]1, +\infty[$ وفق : $f(x) = ln\left(ln\sqrt{x}\right)$ عندئذٍ يعطى مشتقه $f'(x)$ بالصيغة :

A		B		C		D	
A	$\frac{1}{x\, ln\, x}$	B	$\frac{1}{\sqrt{x}\, ln\, x}$	C	$\frac{1}{x\, ln\sqrt{x}}$	D	$\frac{1}{\sqrt{x}\, ln\sqrt{x}}$

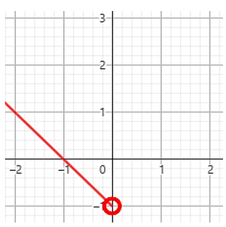
نحو الحل

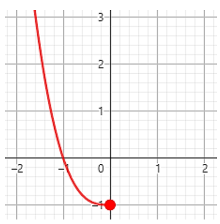
$$f'(x) = \frac{\left(ln\sqrt{x}\right)'}{ln\sqrt{x}} = \frac{\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}}}{ln\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\, ln\sqrt{x}}$$

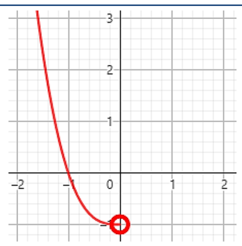
$$f'(x) = \frac{1}{2x\, ln\sqrt{x}} = \frac{1}{x\, ln\, x}$$

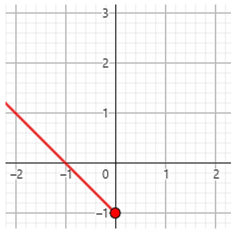
إعداد: أ. ربيع الشيخ عبيد | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

7	في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، إن التمثيل البياني لمجموعة النقاط $M(x, y)$ التي تحقق العلاقة: $3ln(-x) = ln(y+1)$

A


B


C


D


نحو الحل

الشرط $x < 0$ و $y > -1$ وهو محقق في الخيارين A و C والمعادلة تكتب بالشكل:
$ln(-x^3) = ln(y+1)$ ومنه $y = -x^3 - 1$

إعداد: أ. عبد الله حناوي | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

8 لتكن المعادلة $x^2 + 4x + \ln(m-1) = 0$
إن قيمة العدد الحقيقي m التي من أجلها يكون للمعادلة جذر مضاعف هي:

A		B		C		D	
A	$e^2 - 1$	**B**	$e^4 - 1$	**C**	$e^2 + 1$	**D**	$e^4 + 1$

نحو الحل

شرط الحل $m > 1$

للمعادلة جذر وحيد $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$$16 - 4ln(m-1) = 0$$

$$ln(m-1) = 4 \Rightarrow m - 1 = e^4 \Rightarrow m = e^4 + 1$$

إعداد : أ . ياسر عبادي | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

9 ليكن f تابعاً معرفاً واشتقاقياً على R_+^* وفق : $f(x) = \frac{ln^2(x)}{x}$
إن مجموعة جميع قيم x التي تحقق المعادلة $f'(x) = 0$ هي :

A	$\left\{\frac{1}{e^2}, 1\right\}$	**B**	$\{1, e^2\}$	**C**	$\{2, e\}$	**D**	$\left\{\frac{1}{e}, e^2\right\}$

نحو الحل

$$f'(x) = \frac{2\,ln(x)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)x - ln^2 x}{x^2} = \frac{ln\,x\cdot(2 - ln\,x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \implies \begin{cases} ln\,x = 0 \\ ln\,x = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

إعداد: أ. نورالدين صندفي | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

10 مجموعة حلول المعادلة $ln(x+3) + ln(x-1) = ln(2x+6)$ حيث $x > 1$ هي :

A	$\{2, 3\}$	**B**	$\{2\}$	**C**	$\{3\}$	**D**	$\{-3, 3\}$

نحو الحل

$$\ln((x+3)(x-1)) = \ln(2x+6)$$

$$x^2 + 2x - 3 = 2x + 6$$

$$x^2 = 9$$

$x = -3$ مرفوض , $x = 3$ مقبول

إعداد: أ. صفاء قزق | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

11 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D =]-\infty, 2[\cup]4, \infty[$ وفق : $f(x) = ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right)$
إن قيمة b التي تجعل النقطة $A(3, b)$ مركز تناظر للخط C هي :

A	-2	**B**	0	**C**	1	**D**	2

نحو الحل

$$f(x) + f(2x_0 - x) = 2y_0$$

لدينا $x_0 = 3$ ولنأخذ $x = 0 \in D$

$$f(0) + f(6) = 2b \Rightarrow ln\left(\frac{-2}{-4}\right) + ln\left(\frac{4}{2}\right) = 2b$$

$$-ln2 + ln2 = 2b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

إعداد: أ. يونس حمود | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

12 ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{ln(x)}{x}$ فإن معادلة المماس الأفقي لخطه البياني هي :

A	$y=\frac{1}{e}$	**B**	$y=-\frac{1}{e}$	**C**	$y=-e$	**D**	$y=e$

نحو الحل

$$f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}\ \Rightarrow f'(x)=0$$
$$1-\ln(x)=0\ \Rightarrow\ \ln(x)=1\ \Rightarrow x=e$$
$$y=f(e)=\frac{1}{e}$$

إعداد : أ . حيدرة زعبية | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

13 ليكن f تابعاً معرفاً واشتقاقياً على المجال $]1\,,+\infty[$ مشتقه : $f'(x)=\frac{1}{x\,ln\,x}$

عندئذٍ مشتق التابع $g(x)=f(\sqrt{x})$ هو :

A	$g'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}\,ln\,x}$	**B**	$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}\,ln\sqrt{x}}$
C	$g'(x)=\frac{1}{2x\,ln\,x}$	**D**	$g'(x)=\frac{1}{x\,ln\,x}$

نحو الحل

$$g'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'\cdot f'(\sqrt{x})$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\,ln\sqrt{x}}$$
$$g'(x)=\frac{1}{x\,ln\,x}$$

إعداد: أ. موسى حجيج / أبو نزار | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

14 إن عدد نقاط تقاطع الخط البياني الممثّل للتابع f المعرف على R^* وفق : $f(x)=\ ln\,x^4-\ ln\,x^2-2$
مع محور الفواصل يساوي :

A	1	**B**	2	**C**	3	**D**	4

نحو الحل

$$f(x)=0\ \Longrightarrow\ 2ln\,x^2-\ ln\,x^2=2$$
$$ln\,x^2=2\quad\Longrightarrow\quad x^2=e^2\quad\Longrightarrow\quad x=\mp e$$

إعداد: أ. رامي شقرة | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

15

لدينا في $\mathcal{R}^2$ جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} lnx \cdot lny = -2 \\ lnx - lny = 3 \end{cases}$$

إن إحدى القيم الممكنة للثنائية (x, y) لتكون حلاً للجملة السابقة هي:

A		B		C		D	
A	$(e, \sqrt{e})$	B	$\left(\sqrt{e}, \frac{1}{e^4}\right)$	C	$\left(e, \frac{1}{e^2}\right)$	D	$(e^3, 1)$

نحو الحل

نفرض $lnx = X$ و $lny = Y$ نعوض:

$$\begin{cases} X \cdot Y = -2 & (1) \\ X - Y = 3 & (2) \end{cases}$$

نعوض (2) في (1) $\quad X^2 - 3X + 2 = 0$

$$(X-1)(X-2) = 0$$

$$\begin{cases} \text{إما } X = 1 \quad \Rightarrow x = e \;, y = \frac{1}{e^2} \quad \Rightarrow \quad \left(e, \frac{1}{e^2}\right) \\ \text{أو } X = 2 \quad \Rightarrow x = e^2 \;, y = \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad \left(e^2, \frac{1}{e}\right) \end{cases}$$

إعداد: أ. مصطفى الرزوق | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

16

ليكن f التابع المعرف على $[0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{lnx}{x - lnx} & : x > 0 \\ m & : x = 0 \end{cases}$$

إن قيمة m التي تجعل f مستمراً عند الصفر هي:

A	-2	B	-1	C	0	D	1

نحو الحل

التابع f مستمر عند الصفر $\Leftrightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = m$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{x}{lnx} - 1} = -1$$

$$\Rightarrow m = -1$$

إعداد: أ. صفوح الأفندي | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

17

حلول المتراجحة $lnx \cdot (lnx - 1) < 0$ هي:

A	$]1, e[$	B	$\left]\frac{1}{e}, 1\right[$	C	$\left]0, \frac{1}{e}\right[$	D	$]0,1[\cup]e, +\infty[$

نحو الحل

شرط الحل $x > 0$

$$lnx \cdot (lnx - 1) < 0 \;\Rightarrow\; 0 < lnx < 1$$

$$1 < x < e$$

إعداد: أ. خضر سيفو | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

18

ليكن $\mathbb{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على R_+^* وفق: $f(x)=\frac{a+b\ln(2x)}{4x^2}$ حيث $a\,,b \in R^*$

فإذا كان $\mathbb{C}$ يقبل مماساً أفقياً في نقطة منه $M\left(\frac{1}{2},1\right)$ عندئذ قيمة (a,b) تساوي:

A	B	C	D
$(2,4)$	$(-1,-2)$	$(1,2)$	$(1,-2)$

نحو الحل

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1 \Rightarrow \frac{a+0}{1}=1 \Rightarrow a=1$$

$$f'(x)=\frac{b\left(\frac{2}{2x}\right)\cdot(4x^2)-8x\cdot(a+b\cdot\ln(2x))}{16x^4}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{2b-4}{1}=0 \Rightarrow b=2$$

إعداد: أ. محمد مصطفى اختيار | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

19

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x)=ax^2+b\,x\ln x$

فإذا كان مماس C في نقطة منه $A(1,1)$ يوازي المستقيم الذي معادلته $y=x-2$ عندئذ قيمة (a,b) هي:

A	B	C	D
$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,-3)$	$(1,-1)$

نحو الحل

$$A\in C \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow 1=a+0 \Rightarrow a=1$$

$$m=1=f'(1)$$

$$f'(x)=2a\,x+b\ln x+b \Rightarrow 1=2+0+b \Rightarrow b=-1$$

إعداد : أ . عبدالله الكناوي | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

20

نهاية التابع f المعطى بالشكل : $f(x)=(x+1)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)$ عند $+\infty$ هي :

A	B	C	D
$-\infty$	-1	0	1

نحو الحل

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x+1}}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

إعداد: أ. محمد الحموش | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

21

إن التابع f المعرف على $]0\,,+\infty[$ وفق: $f(x)=\ln x^2-(\ln x)^2$ متزايد تماماً على كامل المجال:

A	B	C	D
$]1,e^2[$	$\left]\frac{1}{2},2e\right[$	$]e,+\infty[$	$]0,e]$

نحو الحل

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}=\frac{2-2\ln x}{x}$$

يكون متزايد تماماً من أجل $2-2\ln x\geq 0$

ومنه $\ln x\leq 1$ إذاً $x\leq e$

إعداد: أ. نادر أبو راس | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

22

a و b عددان حقيقيان موجبان تماماً بحيث $a.b > 2$ ويحققان

$$ln\left(a-\frac{2}{b}\right)+ln\left(a+\frac{2}{b}\right)=ln\left(\frac{3a}{b}\right)$$

عندها تكون قيمة الجداء $a \cdot b$ تساوي

A		B		C		D	
A	2	B	3	C	4	D	5

نحو الحل

$$ln\left(a^2-\frac{4}{b^2}\right)=ln\left(\frac{3a}{b}\right)$$

$$a^2-\frac{4}{b^2}=\frac{3a}{b}$$

$$a^2b^2-4=3ab$$

$$a^2b^2-3ab-4=0$$

$$(ab+1)(ab-4)=0$$

$$ab=4$$

إعداد: أ. مهند حريقة | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة

23

ليكن لدينا العددين

$$a=ln\left(\frac{e^2}{2e-1}\right) \quad \text{و} \quad b=ln\left(\frac{2e+1}{4}\right)$$

بالمقارنة بين العددين a و b نجد أن:

A	$a>b$	B	$a<b$	C	$a=b$	D	$a=-b$

نحو الحل

$$a-b=ln\left(\frac{e^2}{2e-1}\right)-ln\left(\frac{2e+1}{4}\right)$$

$$ln\left(\frac{e^2}{2e-1}\times\frac{4}{2e+1}\right)=ln\left(\frac{4e^2}{4e^2-1}\right)>0$$

لأن $\frac{4e^2}{4e^2-1}>1$ بالتالي $a>b$

إعداد: أ. يوسف منصور | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

24

إذا كان $log_a(b)=2$ و $log(a)=2$ حيث $a\in\mathcal{R}_+^*/\{1\}$ و $b\in\mathcal{R}_+^*$

عندئذٍ الثنائية (a, b) تساوي:

A	$(10^2, 10^3)$	B	$(10^2, 10^4)$	C	$(10^4, 10^2)$	D	$(10^4, 10^3)$

نحو الحل

$$\log(a)=2 \Rightarrow \frac{\ln a}{\ln 10}=2 \Rightarrow \ln a=2\ln 10 \Rightarrow a=10^2$$

$$\log_a(b)=2 \Rightarrow \frac{\ln b}{\ln a}=2 \Rightarrow \ln b=2\ln a \Rightarrow b=a^2=10^4$$

إعداد: أ. حسن آصف سليمان | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

25

ليكن f التابع المعرف على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{1}{x\,ln^3 x}$

عند حساب نهاية التابع f عند الصفر نجد أنها تساوي :

A	B	C	D
$-\infty$	0	$\sqrt[3]{e^2}$	$\frac{1}{27}$

نحو الحل

$$f(x)=\frac{1}{x\,ln^3 x}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\,ln\,x\right)^3}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\,.3ln\,\sqrt[3]{x}\right)^3}=\frac{1}{27\left(\sqrt[3]{x}\,.ln\,\sqrt[3]{x}\right)^3}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{1}{27}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\,.ln\,\sqrt[3]{x}\right)^3}=-\infty$$

إعداد: أ. عمرو ماهر معدل | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

26

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R_+^* وفق : $f(x)=ln\,x$

إن مماس C في نقطة منه فاصلتها $2e$ يقطع محور التراتيب بنقطة ترتيبها يساوي :

A	B	C	D
-1	$-ln\,2$	$ln\,2$	$1+ln\,2$

نحو الحل

$$f(2e)=ln(2e)=ln\,2+1$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad f'(2e)=\frac{1}{2e}$$

وبالتالي معادلة المماس: $y=f(2e)+f'(2e)(x-2e)$

$$y=ln\,2+1+\frac{1}{2e}(x-2e)=ln\,2+\frac{1}{2e}x$$

المماس يقطع محور التراتيب $\Rightarrow x=0\Rightarrow y=ln\,2$

إعداد: أ. غياث منصور | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. عماد كزو

27

ليكن التابع f المعرف على $]0,\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{\ln(1+x)-(xlnx)^2}{x}$ فإن نهاية هذا التابع عند الصفر هي:

A	B	C	D
$-\infty$	-1	0	1

نحو الحل

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{(xlnx)^2}{x}\quad و\quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(xlnx)^2}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{xlnx}{\sqrt{x}}\right)^2=4\lim_{x\to0}\left(\sqrt{x}ln\sqrt{x}\right)^2=4(0)^2=0$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=1-0=1$$

إعداد: أ. مازن علي | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

28

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$ وفق $f(x)=ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$

عندئذ الخط البياني C_g للتابع $g(x)=ln(x-1)-ln\,(x-3)$ هو:

A	B	C	D
C_f	نظير C_f بالنسبة لـ $(1,3)$	جزء من C_f على المجال $]3,+\infty[$	جزء من C_f على المجال $]-\infty,1[$

نحو الحل

$$D_g=]3,+\infty[$$

$$g(x)=ln(x-1)-l\,n(x-3)=ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)=f(x)$$

بالتالي C_g جزء من C_f على المجال $]3,+\infty[$

إعداد: أ. هيثم ديوب	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

29

لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على $\mathcal{N}^*$ وفق: $u_n=ln\left(\frac{n\cdot e}{n+1}\right)$

وليكن: $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ ، عندئذ فإن S_n يساوي:

A	B	C	D
$-ln(n+1)$	$ln(n+1)$	$n-ln(n+1)$	$n+ln(n+1)$

نحو الحل

$$S_n=ln\left(\frac{e}{2}\right)+ln\left(\frac{2e}{3}\right)+\cdots+ln\left(\frac{(n-1)\cdot e}{n}\right)+ln\left(\frac{n\cdot e}{n+1}\right)$$

$$S_n=ln\left(\frac{e}{2}\times\frac{2e}{3}\times\ldots\times\frac{(n-1)\cdot e}{n}\times\frac{n\cdot e}{n+1}\right)$$

$$S_n=ln\left(e^n\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{(n-1)}{n}\times\frac{n}{n+1}\right)$$

$$S_n=ln(e^n)+ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{(n-1)}{n}\times\frac{n}{n+1}\right)$$

$$S_n=n+ln\left(\frac{1}{n+1}\right)=n-ln(n+1)$$

إعداد: أ. علي جمّول	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

30

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,0[$ وفق : $f(x)=\ln(-x)$

إذا علمت أن C يقبل مماساً في النقطة $A(a,f(a))$ يمر من المبدأ عندئذٍ العدد الحقيقي a يساوي:

A	B	C	D
$-e$	$-\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	e

نحو الحل

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

والمماس يمر من المبدأ ومنه $y=\frac{1}{a}(x-a)+\ln(-a)$

$$0=\frac{1}{a}(0-a)+\ln(-a)\ \Rightarrow\ln(-a)=1\Rightarrow\boxed{a=-e}$$

إعداد : أ . أحمد ذياب الرفاعي	الجواب: A	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

اختبارات رياضيات مؤتمتة للبكالوريا السورية

الجزء الأول: الوحدة السادسة

اختبار وحدة التابع الأسي

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

صلاح أحمد سالم – حسام قاسم – مهند حريقة

تنسيق وإخراج: المهندس حسام خضر قاسم

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	فيصل خالد	محمد السيد علي
هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان	زينب يوسف
حسام قاسم	خالد الحداد	فادي المحمد	يوسف منصور
نادر أبو راس	محمد زين جعرور	فادي طنوس	زكي طحاوي
أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة	محمد العيسى
مصطفى الرزوق	صلاح أحمد سالم	عبد السلام حسن	

1	عند حساب نهاية التابع $f(x)=x-1+e^{1-x}$ عند $-\infty$ كانت :

A		B		C		D	
A	$-\infty$	**B**	**0**	**C**	**1**	**D**	$+\infty$

نحو الحل

$$f(x)=e^{-x}(xe^{x}-e^{x}+e)$$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

إعداد : أ . محسن القصير	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م. صلاح أحمد سالم

2	إن العدد $L=\dfrac{3^{ln5}}{5^{ln3}}$ يساوي :

A	1	**B**	$ln\dfrac{5}{3}$	**C**	$\dfrac{ln5}{ln3}$	**D**	$ln5.ln3$

نحو الحل

$$L=\frac{e^{ln5.ln3}}{e^{ln3.ln5}}=1$$

إعداد : أ . زكريا الزعبي	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

3	ليكن التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=e^{x}-lnx-x$ فإنَ نهاية f عند $+\infty$ هي :

A	$-\infty$	**B**	-1	**C**	0	**D**	$+\infty$

نحو الحل

$$f(x)=x\left(\frac{e^{x}}{x}-\frac{lnx}{x}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

إعداد : أ . مرعي المصلح	الجواب : D	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

4	لتكن (E) المعادلة التفاضلية : $y'+y=2e^{x}$ إن قيمة العدد الحقيقي a التي من أجلها يكون التابع $f(x)=ae^{x}$ حلاً للمعادلة (E) هي :

A	**-2**	**B**	**-1**	**C**	**1**	**D**	**2**

نحو الحل

$y=ae^{x}$ ومنه $y'=ae^{x}$

$$ae^{x}+ae^{x}=2e^{x}$$

إذن : $\boxed{a=1}$

إعداد : أ . مازن الزعبي	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م. صلاح أحمد سالم

5	العبارة $F = 7^{-\frac{2}{ln\,7}}$ يمكن تبسيطها لتكتب وفق الصيغة:							
A	$\frac{1}{e^7}$	B	$\frac{1}{e^2}$	C	e^2	D	e^7	
نحو الحل	$F = e^{ln7 .\left(-\frac{2}{ln7}\right)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$							
إعداد : أ . أنطوان جلوف			الجواب : B			كتابة وتنسيق : م مهند حريقة		

6	مجموعة تعريف التابع f المعطى وفق : $f(x) = \sqrt{ln(e^x - 1)}$ هي :							
A	$[0, +\infty[$	B	$]ln2, +\infty[$	C	$]0, +\infty[$	D	$[ln2, +\infty[$	
نحو الحل	$ln(e^x - 1) \geq 0$ $e^x - 1 \geq 1$ $e^x \geq 2$ $x \geq ln2$							
إعداد : أ . أحمد البنية			الجواب : D			كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم		

7	$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + e^x)^{e^{-x}}$ تساوي :							
A	$\frac{1}{e}$	B	1	C	e	D	$+\infty$	
نحو الحل	$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + e^x)^{e^{-x}} = \lim\limits_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$							
إعداد : أ . محمود الأحمد			الجواب : C			كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم		

8	نهاية التابع $f(x) = x\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)$ المعرف على R^* عند $+\infty$ هي :							
A	-1	B	0	C	1	D	e	
نحو الحل	لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty)\,(\mathbf{0})$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to0} \frac{1-e^t}{t} = -1$							
إعداد : أ . رابعة سليمان			الجواب : A			كتابة وتنسيق : م مهند حريقة		

9	لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث : $u_n = \frac{1-n}{n\,.\,e^n}$ نهايتها تساوي :

A	-1	**B**	0	**C**	1	**D**	$+\infty$

نحو الحل

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n} - 1}{e^n} = 0$$

إعداد : أ . عبد الحميد السيد	الجواب : B	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

10	ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = e^x$ والتابع g المعرف على $]0,+\infty[$ وفق : $g(x) = lnx$ عندها $(fog)(x)$ تساوي :

A	$-\frac{1}{x}$	**B**	$\frac{1}{x}$	**C**	$-x$	**D**	x

نحو الحل

$$f\big(g(x)\big) = f(lnx) = e^{lnx} = x$$

إعداد : أ. حسام قاسم	الجواب : D	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

11	إن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$ تساوي :

A	$\frac{1}{e}$	**B**	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	**C**	$\sqrt{e}$	**D**	e

نحو الحل

$$\frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$$

نضع $\frac{1}{x+1} = t$ فيكون $x = \frac{1}{t} - 1$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2t} - \frac{1}{2} \quad , x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad t \to 0$$

$$L = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{2}} . \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

إعداد : أ . محمد مصطفى اختيار	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

12 مجموعة حلول المتراجحة : $9^x - \frac{3^x}{27} \geq 0$ هي :

A		B		C		D	
A	$[-3,+\infty[$	**B**	$]-9,-3[$	**C**	$]-\infty,-9]$	**D**	خالية

نحو الحل

$$3^{2x} \geq 3^{-3} \times 3^x$$

$$2x \geq -3 + x$$

$$x \geq -3$$

إعداد : أ . هيثم ديوب — الجواب : A — كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

13 ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = x\,e^x - e^x$ وليكن جدول اطراده :

x	$-\infty$		m		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	n	$\nearrow$	

عندئذٍ (m,n) تساوي :

A	$(0,e)$	**B**	$(1,-1)$	**C**	$(0,-1)$	**D**	$(1,0)$

نحو الحل

$$f'(x) = e^x + x\,e^x - e^x = x\,e^x$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x\,e^x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

$$f(0) = -1$$

إعداد : أ . محمد السيد علي — الجواب : C — كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

14 لدينا في R^2 جملة المعادلتين :

$$\begin{cases} x + y = 0 & \dots(1) \\ e^x + e^{-y} = 4 & \dots(2) \end{cases}$$

إنَ الحل الوحيد لجملة المعادلتين هو الثنائية (x,y) تساوي :

A	$(ln2,-ln2)$	**B**	$(-ln2,ln2)$	**C**	$(0,0)$	**D**	$(2,-2)$

نحو الحل

من (1) نجد $y = -x$

نعوض في (2) نجد $e^x + e^x = 4$

ومنه $e^x = 2$ بالتالي فإن $x = ln2$

إعداد : أ . نادر أبو راس — الجواب : A — كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

15 إذا علمت أن التابع $f(x) = xe^x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y' + 2y = (ax+b)e^x$

فإن الثنائية (a,b) تساوي :

A	$(1,2)$	**B**	$(1,3)$	**C**	$(2,1)$	**D**	$(3,1)$

نحو الحل

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

نعوض f و f' في المعادلة التفاضلية $(1+x)e^x + 2xe^x = (ax+b)e^x$

$$(3x+1)e^x = (ax+b)e^x$$

بالمطابقة نجد : $\boxed{a = 3 \ , b = 1}$

إعداد : أ . أحمد الكلش	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م. صلاح أحمد سالم

16 ليكن التابع $f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x}$ معرف على $]0,+\infty[$ ، فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ تساوي :

A	$\frac{1}{e}$	**B**	e	**C**	e^2	**D**	e^3

نحو الحل

$$f(x) = \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2$$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^2$

إعداد : أ . عبدالله الكناوي	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م. صلاح أحمد سالم

17 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x) = (1-x)e^x$

وليكن المستقيم الذي معادلته $d: y = \frac{1}{e}x + a$ حيث $a \in R$

إن قيمة a التي من أجلها يكون d مماساً لـ C في نقطة منه فاصلتها تعدم $f''(x)$ هي:

A	$-\frac{3}{e}$	**B**	$-\frac{1}{e}$	**C**	$\frac{1}{e}$	**D**	$\frac{3}{e}$

نحو الحل

$$f'(x) = -e^x + e^x(1-x) = -xe^x$$

$$f''(x) = -e^x - xe^x = -(1+x)e^x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \ , f(-1) = \frac{2}{e}$$

نعوض في المماس d

$$\frac{2}{e} = -\frac{1}{e} + a \Rightarrow a = \frac{3}{e}$$

إعداد : أ . رزان البديوي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

18

ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x)=(x-1)^3e^x$

إن عدد القيم الحدية المحلية للتابع f يساوي :

A	0	B	1	C	2	D	3

نحو الحل

$$f'(x)=3(x-1)^2\,e^x+e^x(x-1)^3=(x-1)^2(x+2)e^x$$

ولأن $(x-1)^2e^x\geq 0$

فإن إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $x+2$ الذي ينعدم عند $x=-2$

والمشتق يغير اشارته عندها .. لذلك له قيمة حدية واحدة

إعداد : أ . نور الدين صندفي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

19

إنَ حلول المعادلة : $16^x-6\times 4^x+8=0$ هي :

A	$\left\{\frac{1}{2},1\right\}$	B	$\left\{\frac{1}{2},4\right\}$	C	$\{\ln 2,1\}$	D	$\{1,8\}$

نحو الحل

$4^{2x}-6\times 4^x+8=0 \;\Rightarrow\; (4^x-4)(4^x-2)=0$

إما $4^x-4=0 \;\Rightarrow\; 4^x=4^1 \;\Rightarrow\; x=1$

أو $4^x-2=0 \;\Rightarrow\; 2^{2x}=2^1 \;\Rightarrow\; 2x=1 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{2}$

إعداد : أ . حسين رشيد	الجواب : A	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

20

g تابع معرف على $[1,+\infty[$ ويحقق : $x\leq g(x)\leq x^2$

و f تابع معرف على $[1,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{g(x)}{e^x}$ عندئذٍ نهاية f عند $+\infty$ هي :

A	**0**	B	1	C	2	D	$+\infty$

نحو الحل

$$\frac{x}{e^x}\leq f(x)\leq\frac{x^2}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

إعداد : أ . محي الدين إسماعيل	الجواب : A	كتابة وتنسيق : المهندس حسام قاسم

21	ليكن التابعان f و g المعرفان على R وفق: $$f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+a \quad و \quad g(x)=2x-e^{x}$$ إذا علمت أنّ خطيهما البيانيين متماسان في نقطة منهما، فإن قيمة العدد الحقيقي a تساوي:

A		B		C		D	
A	$-\frac{3}{2}$	B	$-\frac{1}{2}$	C	$\frac{1}{2}$	D	$\frac{3}{2}$

الحل:

$$f'(x)=g'(x)\Rightarrow \ e^{2x}=2-e^{x}\Rightarrow e^{2x}+e^{x}-2=0$$

$$(e^{x}+2)(e^{x}-1)=0\Rightarrow e^{x}=1\Rightarrow x=0$$

$$f(0)=g(0)\Rightarrow \frac{1}{2}+a=-1\rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

إعداد : أ . باسل سطمة	الجواب : A	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

22	لتكن لدينا المعادلة التفاضلية $(ln3)y-y'=ln9$ إذا علمت أن الخط البياني للتابع f الذي يمثل حل المعادلة يمر بالنقطة $(0,3)$ عندئذٍ حل المعادلة التفاضلية هو:

A		B		C		D	
A	$y=3^{x}-2$	B	$y=3^{x}+2$	C	$y=2\,(3^{x})+1$	D	$y=4(3^{x})-1$

الحل:

$$y'=ln3\,.y-2ln3$$

$$y=k\,e^{x.ln3}-\frac{-2ln3}{ln3}=k\,3^{x}+2$$

إعداد : أ . عبد الرحمن الرفاعي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

23	ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق : $f(x)=x-\ln(e^{3x}+1)$ إن معادلة المقارب المائل للخط C بجوار $+\infty$ هي :

A		B		C		D	
A	$y=x$	B	$y=-x$	C	$y=-2x$	D	$y=3x$

الحل:

$$f(x)=x-ln[e^{3x}(1+e^{-3x})]=x-3x-ln(1+e^{-3x})$$

$$f(x)=-2x-ln(1+e^{-3x})$$

بما أن $\lim_{x\to+\infty} ln(1+e^{-3x})=ln1=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+2x]=0$

إذن $y=-2x$ هي معادلة المقارب المائل

إعداد : أ . أحمد ذياب الرفاعي	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م. صلاح أحمد سالم

24	f تابع معرف على R وفق : $f(x) = (x^2+1)e^x$ وخطه البياني C يقبل مماساً افقياً T معادلته $y = \frac{2}{e}$ إن C يقع بكامله فوق T في المجال :						
A	$]-\infty,-1[$	**B**	$]-1,+\infty[$	**C**	$]-e,e[$	**D**	R

نحو الحل

$$f'(x) = 2xe^x + e^x(x^2+1) = (x+1)^2e^x \geq 0$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \,, f(-1) = \frac{2}{e}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	
$f-y$		$-$	0	$+$	

من الجدول نلاحظ أن C فوق T على المجال $]-1,+\infty[$

إعداد : أ . غياث منصور	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

25	ليكن التابع f المعرف على R وفق: $f(x) = \frac{e^{-x}+2}{e^{-x}+1}$ ، نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ، عندها تكون أصغر قيمة للعدد A التي تحقق الشرط أياً كان $x > A$ فإن $f(x)\epsilon]1.9,2.1[$ هي :						
A	$ln3$	**B**	$3ln2$	**C**	$2ln3$	**D**	9

نحو الحل

$$|f(x)-2| < 0.1$$

$$\left|\frac{e^{-x}+2}{e^{-x}+1} - 2\right| < \frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{e^x+1} < \frac{1}{10}$$

$$e^x + 1 > 10$$

$$e^x > 9 \Rightarrow x > ln9 \Rightarrow x > 2ln3 \Rightarrow \boxed{A = 2ln3}$$

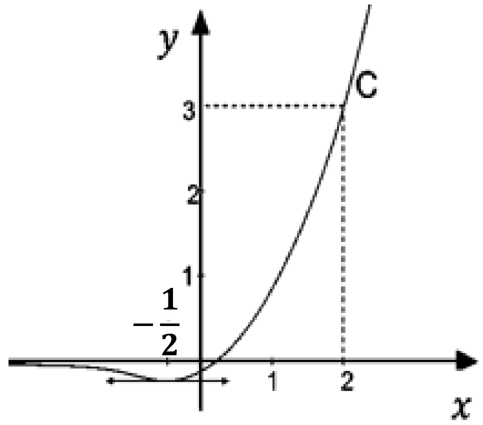
إعداد : أ . وائل عنيزان	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م. صلاح أحمد سالم

26

يبين الشكل المجاور الخط C للتابع f المعرف على R وفق

$$f(x) = (ax-1)e^{x-b}$$

حيث a, b عددان حقيقيان فإن قيمة (a,b) هي :



A	$(2,0)$	**B**	$(2,2)$	**C**	$(1, 2-ln2)$	**D**	$\left(\frac{2}{3}, 2-2ln3\right)$

نحو الحل

$$f'(x) = ae^{x-b} + e^{x-b}(ax-1)$$

$$f'(x) = e^{x-b}(a + ax - 1)$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow a + a\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$f(2) = 3 \Rightarrow (2a-1)e^{2-b} = 3$$

$$3e^{2-b} = 3 \Rightarrow 2-b=0 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

إعداد : أ . وائل أبو الخير	الجواب : B	كتابة وتنسيق :م. صلاح أحمد سالم

27

لتكن المعادلة التفاضلية $E:\ 3y' - y = x^2 - 3x + 2$

نفترض أن f كثير حدود من الدرجة الثانية يحقق E . عندئذٍ $f(x)$ يكتب بالشكل:

A	$f(x) = x^2 + 9x + 25$	**B**	$f(x) = -x^2 - 3x - 11$
C	$f(x) = -x^2 - 3x - 7$	**D**	$f(x) = x^2 + 9x - 25$

نحو الحل

بفرض $f(x) = ax^2 + bx + c$ وبالتالي $f'(x) = 2ax + b$

نعوض في E لنجد : $3(2ax+b) - (ax^2+bx+c) = x^2 - 3x + 2$

$$-ax^2 + (6a-b)x + 3b - c = x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 6a - b = -3 \\ 3b - c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -1 \\ b = -3 \\ c = -11 \end{matrix}$$

$$f(x) = -x^2 - 3x - 11$$

إعداد : أ. ريم بوظان	الجواب : B	كتابة وتنسيق : م مهند حريقة

28	ليكن التابع f المعرف على R^* وفق : $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$ إن معادلة المقارب المائل لـ C بجوار $+\infty$ هي :						
A	$y = x - 1$	**B**	$y = -x + 1$	**C**	$y = x + 1$	**D**	$y = -x - 1$

نحو الحل

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{t\to0}\left(\frac{e^{t}-1}{t}\right) = 1$$

ومنه نجد $\boldsymbol{y = x + 1}$ هي معادلة المقارب المائل

إعداد : أ . باسل سمير الحسين	الجواب : C	كتابة وتنسيق م: . صلاح أحمد سالم

29	ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق: $f(x) = x - 3 - \frac{3}{e^{x}+1}$ إن معادلة المستقيم المقارب المائل للخط C في جوار $-\infty$ هي :						
A	$y = x$	**B**	$y = 6 - x$	**C**	$y = -x - 3$	**D**	$y = x - 6$

نحو الحل

بما أن : $\lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{e^{x}+1} = -3$ فإن : $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x - 3)] = -3$

ومنه $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x - 6)] = 0$

إذن : $y = x - 6$ معادلة المقارب المائل

ملاحظة : يمكن الحل بالطريقة العامة بحساب a, b للمستقيم $y = ax + b$

إعداد : أ . ماهر المحمد	الجواب : D	كتابة وتنسيق م: . صلاح أحمد سالم

30	ليكن التابع f المعرف على R وفق : $f(x) = (x-2)e^{x}$ ، تابعه المشتق $f'(x) = (x-1)e^{x}$ عندئذٍ جميع قيم العدد الحقيقي m التي تجعل للمعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين تنتمي إلى المجال :						
A	$]-e, 0[$	**B**	$]e, +\infty[$	**C**	$]0, e[$	**D**	$]-\infty, -e[$

نحو الحل

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^{x} - 2e^{x}) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) = 0$ ومنه $x = 1$ وبالتالي $f(1) = -e$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

حسب الجدول نجد للمعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين عندما $m \in]-e, 0[$

إعداد : أ . رياض الزامل	الجواب : A	كتابة وتنسيق م: . صلاح أحمد سالم

اختبارات رياضيات مؤتمتة للبكالوريا السورية

اختبار وحدة التكامل والتوابع الأصلية

الجزء الأول : الوحدة السابعة

الإشراف العام

الأستاذ : عبد الحميد السيد

كتابة: أ . صلاح أحمد سالم – أ . أمين الحايك

تنسيق وإخراج: أ . أمين الحايك – أ . نادر أبو راس

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	فيصل خالد	محمد السيد علي
هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان	زينب يوسف
حسام خضر قاسم	خالد شوقي الحداد	فادي المحمد	يوسف منصور
نادر أبو راس	محمد زين جعرور	فادي طنوس	زكي طحاوي
أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة	محمد احمد العيسى
مصطفى الرزوق	صلاح أحمد سالم	عبد السلام حسن	

1 إن التابع الأصلي F للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق: $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$ والذي يحقق $F(1) = 2$ هو

A		B		C		D	
A	$x^3 + \frac{1}{x} + x + 1$	B	$x^3 - \frac{1}{x} + x + 1$	C	$x^3 + \frac{1}{x} + x + 2$	D	$x^3 - \frac{1}{x} + x + 2$

نحو الحل

$$F(x) = x^3 - \frac{1}{x} + x + k$$

$$F(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 - 1 + 1 + k \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

$$F(x) = x^3 - \frac{1}{x} + x + 1$$

إعداد: أ. صفوح الأفندي | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

2 بفرض G و F تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال $I =]0, +\infty[$

فإذا كان $F(x) = lnx$ فإن $G(x)$ يمكن أن يكون:

A	$1 - lnx$	B	$ln(2x) - 1$	C	lnx^2	D	ln^2x

نحو الحل

لدينا $f(x) = F'(x) = \frac{1}{x}$. ومشتقات التوابع ضمن الخيارات هي

A	B	C	D
$\frac{-1}{x}$	$\frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$	$\frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$	$\frac{2lnx}{x}$

إعداد: أ. فادي طنوس | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

3 إن قيمة التكامل: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4sin(x) \cdot sin(3x)\, dx$ تساوي:

A	-1	B	0	C	1	D	2

نحو الحل

نعلم أن: $2sina \cdot sinb = cos(a - b) - cos(a + b)$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2(2sin(3x) \cdot sin(x))\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2(cos(2x) - cos(4x))\, dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}sin(2x) - \frac{1}{4}sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[sin(2x) - \frac{1}{2}sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\left(sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}sin(\pi)\right) - \left(sin(0) - \frac{1}{2}sin(0)\right)\right]$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{2}(0)\right) - (0 - 0)\right] = 1$$

إعداد: أ. أمين الحايك | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

4 إن قيمة $I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$ تساوي :

A	$2(e - e^2)$	B	$2(e^2 - e)$	C	$2(e^2 + e)$	D	$e^2 - e$

نحو الحل

$$I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = 2\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = 2\left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = 2(e^2 - e)$$

إعداد: أ.محي الدين اسماعيل | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

5

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $\left]-\frac{1}{a},+\infty\right[$ وفق: $f(x)=\frac{a}{\sqrt{ax+1}}$ ، حيث $a\neq 0$

إذا كانت مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

تساوي (2) فإن قيمة العدد الحقيقي a هي:

A	1	B	2	C	3	D	4

نحو الحل

$$\int_0^1 \frac{a}{\sqrt{ax+1}}\,dx=2 \Rightarrow \left[2\sqrt{ax+1}\right]_0^1=2$$

$$\sqrt{a+1}-1=1 \Rightarrow \sqrt{a+1}=2$$

$$a+1=4 \Rightarrow a=3$$

إعداد: أ. علي أحمد شقوف	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

6

ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=x+2-x\cdot e^x$ وليكن $\Delta: y=x+2$ مقارباً مائلاً للخط البياني للتابع C_f عند $-\infty$. عندئذ مساحة السطح المحصور بين C_f ومقاربه Δ ضمن المجال $[0,1]$ تساوي:

A	$e-1$	B	1	C	e	D	$e+1$

نحو الحل

ضمن المجال $[0,1]$ يكون $f(x)-y_\Delta=-x\cdot e^x\leq 0$

$$S=\int_0^1 (y_\Delta-f(x))dx=\int_0^1 x\cdot e^x dx$$

$u=x$	$v'=e^x$
$u'=1$	$v=e^x$

$$S=[x\cdot e^x]_0^1-\int_0^1 e^x dx=[x\cdot e^x-e^x]_0^1$$

$$S=(e-e)-(0-1)=1$$

إعداد: أ. رزان البديوي	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

7

إن قيمة التكامل:

$$\int_{-1}^1 \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}dx$$

A	$ln3$	B	$3ln2$	C	$2ln3$	D	$3ln3$

نحو الحل

نبحث عن ثابتين A و B يحققان: $3x-2=A(x-2)+B(x+2)$

نعوض في طرفي المعادلة $x=-2$ نجد: $A=2$

نعوض في طرفي المعادلة $x=2$ نجد: $B=1$

$$\int_{-1}^1 \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}dx=\int_{-1}^1 \frac{2}{x+2}dx+\int_{-1}^1 \frac{1}{x-2}dx=$$

$$=[2ln(x+2)]_{-1}^1+[ln(2-x)]_{-1}^1$$

$$=2ln3-ln3=ln3$$

إعداد: أ. نادر أبو راس	الجواب: A	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

8 إذا كان $\int_0^2 \frac{a}{x+1}dx = ln9$ فإن قيمة العدد الحقيقي a تساوي:

A		B		C		D	
A	$ln3$	B	2	C	$2ln3$	D	3

نحو الحل

$[0,2]$ على المجال $x+1>0$

$$\int_0^2 \frac{a}{x+1}dx = ln9 \Rightarrow a[ln(x+1)]_0^2 = ln9$$

$$a(ln3 - ln1) = ln3^2 \Rightarrow aln3 = 2ln3 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

إعداد: أ. منال وردة | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

9 ليكن $I = \int_0^{ln16} \frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ و $J = \int_0^{ln16} \frac{1}{e^x+4}dx$. إن قيمة $I-3J$ تساوي:

A	$ln5$	B	$ln15$	C	$ln16$	D	$ln4$

نحو الحل

$$I-3J = \int_0^{ln16}\left[\frac{e^x+3}{e^x+4} - 3\frac{1}{e^x+4}\right]dx = \int_0^{ln16}\frac{e^x}{e^x+4}dx$$

$$= [ln(e^x+4)]_0^{ln16} = ln20 - ln5$$

$$I-3J = ln\frac{20}{5} = ln4$$

إعداد: أ. ماهر المحمد | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

10 إن قيمة التكامل المحدد $I = \int_0^{\pi} 3\cos x \,.\, \sin 2x \cdot dx$ تساوي:

A	-4	B	-2	C	0	D	4

نحو الحل

$$I = 3\int_0^{\pi} \cos x\,.\,(2\sin x\cos x)\,dx$$

$$= 6\int_0^{\pi}\sin x\,.\,(\cos x)^2\,dx = -6\int_0^{\pi}(\cos x)'\,.\,(\cos x)^2\,dx$$

$$I = -6\left[\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi} = -2[\cos^3 x]_0^{\pi}$$

$$= -2(\cos^3\pi - \cos^3 0) = -2(-1-1) = 4$$

إعداد: أ.فادي المحمد | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

11 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق: $f(x) = x.\sqrt{1-x}$

عندما يدور C دورة كاملة حول محور الفواصل يولد مجسماً دورانياً حجمه V يساوي :

A	$\frac{\pi}{12}$	B	$\frac{\pi}{6}$	C	π	D	2π

نحو الحل

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

$$V = \pi\int_0^1 x^2.(1-x)\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$V = \pi\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) - (0)\right] = \frac{\pi}{12}$$

إعداد: أ.نور الدين صندقي | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

12

إذا كان $\int_a^b f(x)dx = a + 2b$ وبفرض أن a, b عددان حقيقيان مختلفان فإن $\int_a^b (f(x)+5)dx$ يساوي:

A		B		C		D	
A	$a+2b+5$	B	$6a-3b$	C	$7b-4a$	D	$7b-5a$

نحو الحل

بحسب خواص التكامل المحدد فإن:

$$\int_a^b (f(x)+5)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b 5dx$$
$$= a + 2b + [5x]_a^b$$
$$= a + 2b + (5b - 5a) = 7b - 4a$$

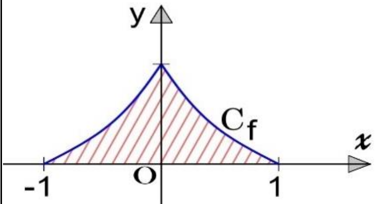
إعداد: أ. خالد العمر	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

13

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I = [-1, 1]$

والمرسوم في الشكل المجاور وفق: $f(x) = min((x-1)^2, (x+1)^2)$

عندئذ قيمة $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ يساوي:



A	$\frac{3}{2}$	B	$\frac{2}{3}$	C	$\frac{1}{2}$	D	$\frac{1}{3}$

نحو الحل

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+1)^2\,dx + \int_{0}^{1} (x-1)^2\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1}$$
$$= \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(0 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

إعداد: أ. رياض الزامل	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

14

ليكن f تابعاً معرفاً على $]0, +\infty[$ وفق: $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ خطه البياني C_f

ليكن S السطح المحصور بين C_f ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = 2$

عندئذ V حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران S حول محور الفواصل دورة كاملة يساوي:

A	$\pi\left(\frac{3}{2} - ln2\right)$	B	$\pi\left(\frac{1}{2} - 2ln2\right)$	C	$\pi(3 - ln2)$	D	$\pi\left(\frac{3}{2} - 2ln2\right)$

نحو الحل

$$V = \pi\int_1^2 (f(x))^2dx = \pi\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$V = \pi\left[x - 2lnx - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \pi\left[\left(2 - 2ln2 - \frac{1}{2}\right) - (1 - 2ln1 - 1)\right]$$
$$V = \pi\left(\frac{3}{2} - 2ln2\right)$$

إعداد: أ. أنطوان جلوف	الجواب: D	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

15	إن قيمة التكامل $I=\int_{-1}^{1}(\lvert 2x-4\rvert-\lvert x+3\rvert)\,dx$ تساوي:						
A	2	B	1	C	-1	D	-2

نحو الحل

لدينا $2x-4<0$ على المجال $[-1,1]$ & وكذلك $x+3>0$ على المجال $[-1,1]$

وعليه يكون : $I=\int_{-1}^{1}\big((-2x+4)-(x+3)\big)\,dx$

$$I=\int_{-1}^{1}(-3x+1)\,dx=\left[-\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left(-\frac{3}{2}+1\right)-\left(-\frac{3}{2}-1\right)=2$$

إعداد: أ. موسى حجيج	الجواب: A	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

16	العدد $I=\int_0^1\frac{2x}{(x+1)^2}dx$ يساوي :						
A	$ln2$	B	$ln2+1$	C	$2ln2-1$	D	$2ln2+1$

نحو الحل

$$I=\int_0^1\frac{2x+2-2}{(x+1)^2}dx=\int_0^1\left(\frac{2}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\left[2ln(x+1)+\frac{2}{x+1}\right]_0^1=(2ln2+1)-(2ln1+2)$$

$$I=2ln2-1$$

إعداد: أ. أحمد الكلش	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

17	بفرض g تابع اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا $J=\int_{-1}^{1}(x^2-1)\cdot g'(x)dx=2$ بالاستفادة من التكامل بالتجزئة نستنتج أن قيمة $I=\int_{-1}^{1}x\cdot g(x)dx$ تساوي:						
A	-2	B	-1	C	1	D	2

نحو الحل

من J:

$u=x^2-1$	$v'=g'(x)$
$u'=2x$	$v=g(x)$

$$J=[(x^2-1)\cdot g(x)]_{-1}^{1}-2\int_{-1}^{1}x\cdot g(x)dx$$

$$2=[(0)-(0)]-2I$$

$$I=-1$$

إعداد: أ. غيث شمسو	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

18

ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^{x}\cdot ln(1+e^{-x})$ ويحقق العلاقة $f(x)-f'(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$

حيث f' التابع المشتق للتابع f على $\mathbb{R}$. عندئذ أحد التوابع الأصلية للتابع f على $\mathbb{R}$ يعطى بالصيغة:

A	$F(x)=ln(1+e^{x})+e^{-x}$	B	$F(x)=ln(1+e^{x})+e^{x}\cdot ln(1+e^{-x})$
C	$F(x)=ln(1+e^{x})-e^{x}\cdot ln(1+e^{-x})$	D	$F(x)=ln(1+e^{x})+e^{-x}\cdot ln(1+e^{-x})$

نحو الحل

$$f(x)=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}+f'(x)$$
$$F(x)=ln(1+e^{x})+f(x)$$
$$F(x)=ln(1+e^{x})+e^{x}\cdot ln(1+e^{-x})$$

إعداد: أ. محمد المصري | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

19

ليكن f تابعاً معرفاً على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x\cdot cosx$ ويحقق العلاقة $f(x)+f''(x)=-2sinx$

حيث f'' المشتق الثاني للتابع f على $\mathbb{R}$. عندئذ للتابع f تابع أصلي F على $\mathbb{R}$ يعطى بالصيغة:

A	$F(x)=-cosx+x\cdot sinx$	B	$F(x)=cosx+sinx$
C	$F(x)=cosx-x\cdot sinx$	D	$F(x)=cosx+x\cdot sinx$

نحو الحل

$$F(x)+f'(x)=2cosx$$
$$F(x)+cosx-x\cdot sinx=2cosx$$
$$F(x)=cosx+x\cdot sinx$$

إعداد: أ. حسن علي سليمان | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

20

ليكن التابع $f(x)=e^{x}$ خطه البياني C_f و $g(x)=e^{-x}$ خطه البياني C_g

عندئذ مساحة السطح المحصور بين C_f و C_g والمستقيمين $x=0$ و $x=1$ تساوي:

A	$\frac{e-1}{2}$	B	$\frac{(e-1)^2}{2}$
C	$\frac{e-1}{e}$	D	$\frac{(e-1)^2}{e}$

نحو الحل

نعلم أن $e^{x}\geq e^{-x}$ ضمن المجال $[0,1]$ ومنه $e^{x}-e^{-x}\geq 0$ ومنه $f(x)-g(x)\geq 0$

$$S=\int_0^1 (f(x)-g(x)).dx=\int_0^1 (e^{x}-e^{-x}).dx=[e^{x}+e^{-x}]_0^1$$
$$S=e+e^{-1}-2=\frac{e^2-2e+1}{e}=\frac{(e-1)^2}{e}$$

إعداد: أ. عبد الله الكناوي | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

اختبارات مؤتمتة لرياضيات البكالوريا السورية

الجزء الثاني: الوحدة الأولى

اختبار الاشعة في الفراغ

إشراف المهندس: عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

أمين الحايك   مهند حريقة   مصطفى الرزوق

تنسيق و اخراج: أ مهند حريقة

التدقيق العلمي واللغوي

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	عبد الحميد السيد	خالد الحداد
محمد السيد علي	حسام قاسم	يوسف منصور	زينب يوسف
نادر أبوراس	فادي المحمد	هيثم ديوب	زكي طحاوي
محمد زين جعرور	صفوح الأفندي	أمين حايك	مصطفى الرزوق
مهند حريقة	علي جمول	محمد العيسى	بشار كنعان
فادي طنوس	صلاح أحمد سالم	عبد السلام حسن	آلدار كلابدون

1 قيمة a (غير المعدومة) التي تجعل الشعاعين: $\vec{u}(-1, a, -1)$ و $\vec{v}(4, -8, 2a)$ مرتبطان خطياً هي:

A	1	B	2	C	4	D	$-\frac{1}{4}$

نحو الحل

لكي يكون الشعاعان مرتبطان خطياً يجب أن يتحقق:

$$-\frac{1}{4} = \frac{a}{-8} = \frac{-1}{2a} \Rightarrow a = 2$$

إعداد: أ. ريم فطامة | الجواب: B | كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

2 لدينا النقاط: $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $F(a,b,4)$.
إن قيمة a و b التي تجعل النقاط A و B و F على استقامة واحدة هي:

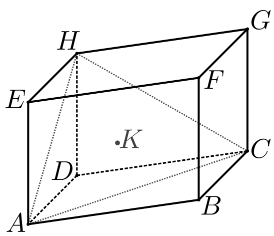
A	$a = 3$ $b = -5$	B	$a = 2$ $b = 1$	C	$a = 1$ $b = -7$	D	$a = 5$ $b = -1$

نحو الحل

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AF}(a-3, b-5, 2)\\ \overrightarrow{AB}(-1,-6,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a-3}{-1} = \frac{b-5}{-6} = \frac{2}{1} \Rightarrow a = 1\,, b = -7$$

إعداد: أ. محمد جمال الخطيب | الجواب: C | كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

3 $ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه K مركز ثقل المثلث ACH
إذا علمت ان النقاط F , K , D تقع على استقامة واحدة .
عندئذ يوجد عدد حقيقي α تتحقق من أجله العلاقة $\overrightarrow{KD} = \alpha\,\overrightarrow{DF}$
قيمته هي:



A	$-\frac{2}{3}$	B	$\frac{1}{3}$	C	-3	D	$-\frac{1}{3}$

نحو الحل

بما أن K مركز ثقل المثلث AHC عندها أياً كانت D من الفراغ

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC} = 3\,\overrightarrow{DK} \Rightarrow \overrightarrow{DF} = -3\,\overrightarrow{KD} \Rightarrow \overrightarrow{KD} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{DF}$$

إعداد: أ. نادر أبوراس | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة

4 احداثيات النقطة M التي تقع على محور الرواقم والمتساوية البعد عن النقطتين
$A(1,1,2), B\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0\right)$ هي:

A	$M(0,0,1)$	B	$M(0,0,2)$	C	$M(0,0,-2)$	D	$M(0,0,-1)$

نحو الحل

لأنها على محور الرواقم تكون احداثياتها بالشكل $M(0,0,z)$
ولأنها متساوية البعد عن A و B يكون $MA^2 = MB^2$

$$1 + 1 + (z-2)^2 = 2 + 8 + z^2 \quad \Rightarrow \quad z = -1$$

إعداد: أ. رشا سقور | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة

5 $E-ABCD$ هرم رباعي رأسه E ، إذا علمت أن العدد الدال على حجم الهرم يساوي العدد الدال على مساحة قاعدته . فإن ارتفاعه يساوي:

A	1	B	2	C	3	D	4

نحو الحل

$$v=s$$
$$\frac{1}{3}s\cdot h=s\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}h=1\quad\Rightarrow\quad h=3$$

إعداد: أ. صفوح الأفندي | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

6 إذا كانت النقطة G مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,2)$
فإن قيمة العدد الحقيقي k الذي يحقق العلاقة : $\overrightarrow{GC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$ هي:

A	$\frac{1}{2}$	B	$-\frac{1}{2}$	C	2	D	-2

نحو الحل

من الفرض نجد أن:
$$\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{GC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

إعداد: أ. شذى مقداد | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

7 إذا علمت أن النقطة $B(-1,3,3)$ تنتمي إلى الكرة التي مركزها $A(2,3,\alpha)$ ونصف قطرها 3 عندئذ فإن:

A	$\alpha=-3$	B	$\alpha=3-2\sqrt{2}$	C	$\alpha=3$	D	$\alpha=3+\sqrt{2}$

نحو الحل

$$BA=R$$
$$\sqrt{9+0+(\alpha-3)^2}=3\ \Rightarrow\ 9+(\alpha-3)^2=9$$
$$(\alpha-3)^2=0\Rightarrow\ \alpha-3=0\ \Rightarrow\alpha=3$$

إعداد: أ. مازن الزعبي | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

8 في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقطتين $A(1,2,-1)$, $C(0,1,1)$
عندئذ تكون إحداثيات النقطة B نظيرة النقطة A بالنسبة إلى C هي:

A	$(1,0,-3)$	B	$(1,0,3)$	C	$(-1,0,3)$	D	$(-1,1,3)$

نحو الحل

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow 0=\frac{1+x_B}{2}\ \Rightarrow\ x_B=-1$$
$$y_C=\frac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow 1=\frac{2+y_B}{2}\ \Rightarrow\ y_B=0$$
$$z_C=\frac{z_A+z_B}{2}\Rightarrow 1=\frac{-1+z_B}{2}\ \Rightarrow\ z_B=3$$

إعداد: أ. سلمى عبدو | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

9	إن مجموعة نقاط الفراغ $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة $y^2+z^2-\frac{2}{5}x^2=0$ و $0\le x\le 5$ تمثل مخروطاً . نصف قطر قاعدته يساوي:

A	2	B	5	C	$\sqrt{5}$	D	$\sqrt{10}$

نحو الحل

المعادلة من الشكل: $y^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}x^2=0$

نلاحظ أن $\frac{r^2}{h^2}=\frac{2}{5}$ ... ولأن الارتفاع هو $h=5$ يكون $\frac{r^2}{25}=\frac{2}{5}$

ومنه يكون $r^2=10$ ومنه $r=\sqrt{10}$

إعداد: أ. سومر سليمان	الجواب: D	كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة

10	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. إن معادلة الأسطوانة التي مركزي قاعدتيها النقطتين $A(2,0,0)$ و $B(5,0,0)$ وتمر بالنقطة $C(3,4,3)$ هي:

A	$x^2+z^2=25$ $2\le y\le 5$	B	$y^2+z^2=25$ $2\le x\le 5$	C	$y^2+z^2=9$ $2\le x\le 5$	D	$y^2+z^2=25$ $0\le x\le 5$

نحو الحل

محورها AB على محور الفواصل، ولدينا $C'(3,0,0)$ هي مسقط C على الفواصل

ومنه يكون نصف قطرها هو $CC'=5$ وبالتالي معادلتها هي: $y^2+z^2=25$

والشرط $2\le x\le 5$

إعداد: أ. حسان داوود	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة

11	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $B(10,4,3)$, $C(4,3,5)$, $D(0,4,5)$. إن احداثيات النقطة $A(x,y,z)$ التي تجعل D مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,-2)$, $(B,1)$, $(C,-2)$ هي:

A	$(-1,5,4)$	B	$(1,-7,4)$	C	$(1,5,4)$	D	$(1,5,-4)$

نحو الحل

$$\begin{cases} x_D=\dfrac{-2x_A+x_B-2x_C}{-2+1-2}\Rightarrow \dfrac{-2x_A+10-8}{-3}=0\Rightarrow x_A=1 \\ y_D=\dfrac{-2y_A+y_B-2y_C}{-2+1-2}\Rightarrow \dfrac{-2y_A+4-6}{-3}=4\Rightarrow y_A=5 \\ z_D=\dfrac{-2z_A+z_B-2z_C}{-2+1-2}\Rightarrow \dfrac{-2z_A+3-10}{-3}=5\Rightarrow z_A=4 \end{cases}$$

إعداد: أ. إبراهيم الأحمد	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة

12	$ABCD$ رباعي وجوه. فيه النقطة E هي مركز ثقل المثلث ABC . عندئذٍ مجموعة نقاط الفراغ M المحققة للعلاقة: $\left\|2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ هي كرة مركزها E ونصف قطرها هو:						
A	ED	B	$\frac{1}{2}ED$	C	$\frac{1}{3}ED$	D	$\frac{1}{6}ED$
نحو الحل	$\left\|2\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)\right\| = \left\|3\overrightarrow{MD}-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\right\|$ $2\left\|3\overrightarrow{ME}\right\| = \left\|3\left(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}\right)\right\|$ $6ME = 3ED \Rightarrow ME = \frac{1}{2}ED$						
إعداد: أ. حسن آصف سليمان			الجواب: B			كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة	
13	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، لتكن النقاط $A(1,0,2)$ و $B(-1,1,3)$ ولتكن M نقطة تقاطع المستوي المحوري لـ $[AB]$ مع محور التراتيب. عندئذٍ تكون احداثيات M هي:						
A	$(0,-1,0)$	B	$(0,3,0)$	C	$(0,0,3)$	D	$(3,0,3)$
نحو الحل	احداثيات M هي بالشكل $M(0,y,0)$ ولأنها من المستوي المحوري لـ $[AB]$ يكون: $MA^2 = MB^2 \Rightarrow (1)^2+y^2+(2)^2 = (-1)^2+(1-y)^2+(3)^2$ $y^2+5 = 1+y^2-2y+1+9 \Rightarrow y = 3$						
إعداد: أ. مضر الأحمد			الجواب: B			كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة	
14	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعرف النقطة $A(5,2,1)$ ، ولتكن B مسقطِ A على المستوي xoy ، ولتكن C مسقط B على محور الفواصل. عندئذٍ يكون طول القطعة المستقيمة AC هو:						
A	1	B	$\sqrt{2}$	C	$\sqrt{5}$	D	$\sqrt{3}$
نحو الحل	مسقط A على المستوي xoy هي : $B(5,2,0)$ ومسقط B على الفواصل هي: $C(5,0,0)$ $AC = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}$						
إعداد: أ. نور الدين صندفي			الجواب: C			كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة	

15 في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقاط: $A(5,0,0)$ و $B\left(1,2,2\sqrt{5}\right)$ و $C(x,y,z)$ تنتمي لدائرة كبرى من كرة S معادلتها: $S: x^2+y^2+z^2=25$ عندئذ إحداثيات C ليكون المثلث ABC قائم في A هي:

A	B	C	D
$(-5,0,0)$	$(3,4,0)$	$(-4,-3,0)$	$\left(-1,-2,-2\sqrt{5}\right)$

نحو الحل

المثلث ABC قائم في A ورؤوسه تنتمي لدائرة كبرى من الكرة S إذاً $[BC]$ قطراً لها ،
أي C نظيرة B بالنسبة للمبدأ، وبالتالي $C\left(-1,-2,-2\sqrt{5}\right)$

إعداد: أ. ربيع الشيخ عبيد | الجواب: D | كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

16 ليكن α عدد حقيقي، ولنتأمل النقاط الثلاث $A(1,3,-1)$ و $B(2,5,2)$ و $C(3,4,\alpha)$.
إن قيمة العدد الحقيقي α التي تجعل المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A هي:

A	B	C	D
-3	1	2	3

نحو الحل

لدينا $\overrightarrow{AC}(2,1,\alpha+1)$ و $\overrightarrow{AB}(1,2,3)$ ، وبما أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A فإن:

$$AB^2=AC^2 \Rightarrow 1+4+9=4+1+(\alpha+1)^2$$

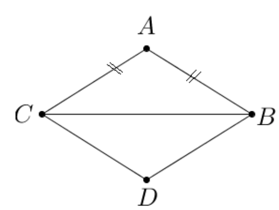
$$(\alpha+1)^2=9 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+1=3 \Rightarrow \alpha=2 \text{ (مقبول)} \\ \alpha+1=-3 \Rightarrow \alpha=-4 \end{cases}$$

إعداد: أ. صلاح أحمد السالم | الجواب: C | كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

17 في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لتكن النقاط $A(2,1,-1)$, $B(5,2,1)$, $C(0,0,2)$
والتي تشكل رؤوس مثلث متساوي الساقين رأسه A .
عندئذ فإن إحداثيات النقطة D التي تجعل $ABDC$ معيناً هي:

A	B	C	D
$(-3,-1,4)$	$(3,1,4)$	$(3,1,0)$	$(-3,-1,0)$

نحو الحل



بما أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A إذاً كي يكون الرباعي $ABDC$ معيناً يكفي أن يكون متوازي الأضلاع:
أي: $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ حيث $D(x,y,z)$

$$(x,y,z-2)=(3,1,2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z-2=2 \Rightarrow z=4 \end{cases}$$

إعداد: أ. هيثم ديوب | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

18

$A-BCDE$ هرم، النقطة M تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

عندئذ فإن النقطة M تنتمي إلى المستوي:

A		B		C		D	
A	(ABE)	B	(ABC)	C	(ACD)	D	(ADE)

نحو الحل

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

ومنه نجد أن الأشعة $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً .

وبالتالي النقطة M تنتمي إلى المستوي (ABC)

إعداد: أ. محمد السيد علي | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

19

$ABCDEFGH$ مكعب فيه K نقطة تحقق العلاقة:

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$$

إن قيم α و β و γ التي تجعل K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(B,\alpha),(C,\beta),(G,\gamma)$ هي:

A		B		C		D	
A	$\alpha=-1$ $\beta=2$ $\gamma=3$	B	$\alpha=-1$ $\beta=-2$ $\gamma=-3$	C	$\alpha=-1$ $\beta=-2$ $\gamma=3$	D	$\alpha=1$ $\beta=-2$ $\gamma=3$

نحو الحل

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$$

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{KG}$$

$$\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}+3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$

إعداد: أ. صفاء قزق | الجواب: D | كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

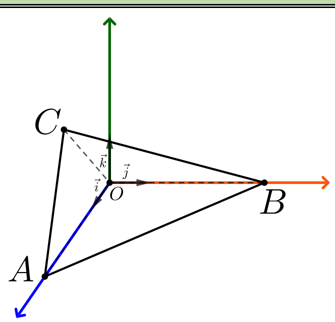
20

في معلم متجانس للفراغ $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط:

$A(4,0,0)$ و $B(0,y,0)$ و $C(2,0,z)$.

المثلث OAC متساوي الأضلاع وحجم الهرم $OACB$ يساوي $4\sqrt{3}$

عندئذ قيمة كل من y و z هي:



A		B		C		D	
A	$y=3$ $z=\sqrt{3}$	B	$y=4$ $z=2\sqrt{3}$	C	$y=4$ $z=2$	D	$y=3$ $z=2\sqrt{3}$

نحو الحل

المثلث OAC متساوي الأضلاع ومنه:

$$z_c{}^2=4^2-2^2=16-4=12\Rightarrow z_c=2\sqrt{3}$$

$$v=4\sqrt{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\right)y\Rightarrow 1=\frac{y}{3}\Rightarrow y=3$$

إعداد: أ. مهند حريقة | الجواب: D | كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

21

بفرض النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,3)$
فإن القيمة الممكنة للثلاثية (α,β,γ) التي تجعل النقطة B مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة
(A,α) , (C,β) , (G,γ) يمكن أن تكون:

A		B		C		D	
A	$(1,3,6)$	B	$(1,-3,6)$	C	$(1,3,-6)$	D	$(3,1,6)$

نحو الحل

$$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$$6\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}-6\overrightarrow{BG}=\vec{0}$$

إعداد: أ. عمر إبراهيم	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

22

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $B(7,0,9), A(0,m,0)$ والشعاعان:
$\vec{u}(1,4,2)$ و $\vec{v}(4,-2,5)$
فإن قيمة m التي تجعل الأشعة $\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ مرتبطة خطياً تساوي:

A		B		C		D	
A	2	B	3	C	-2	D	1

نحو الحل

تكون الأشعة $\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان α و β يحققان:

$$\overrightarrow{AB}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}\Rightarrow\begin{pmatrix}7\\-m\\9\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}7=\alpha+4\beta & (1)\\-m=4\alpha-2\beta & (2)\\9=2\alpha+5\beta & (3)\end{cases}$$

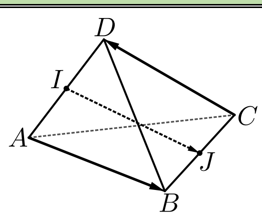
بالحل المشترك بين (1) و (3) نجد أن: $\alpha=\frac{1}{3}$ و $\beta=\frac{5}{3}$ نعوض في (2) نجد:

$$-m=4\left(\frac{1}{3}\right)-2\left(\frac{5}{3}\right)=-2\Longrightarrow m=2$$

إعداد: أ. أمجد شاليش	الجواب: A	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

23

$ABCD$ رباعي وجوه فيه I منتصف $[AD]$ و J منتصف $[BC]$
ان قيمة $(\alpha\,,\beta)$ التي تحقق العلاقة
$$\overrightarrow{IJ}=\alpha\,\overrightarrow{AB}+\beta\,\overrightarrow{CD}$$
هي:



A		B		C		D	
A	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	B	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$	C	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	D	$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

نحو الحل

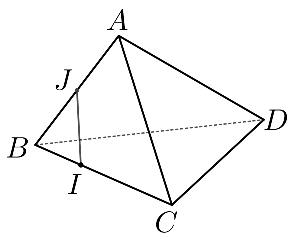
$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\ \ldots\ldots(1)$$
$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CJ}\ \ldots\ldots(2)$$

بالجمع نجد: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ ومنه $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

إعداد: أ. أحمد ذياب الرفاعي	الجواب: D	كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة

24

$ABCD$ رباعي وجوه. فيه النقطة J منتصف $[BA]$ والنقطة I تحقق العلاقة $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ولنتأمل في المعلم الكيفي $(B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$ النقطة $M(1,m,0)$ حيث m عدد حقيقي.
عندئذٍ تكون قيمة m التي تجعل المستقيم (IJ) يوازي المستوي (ADM) هي:



A		B		C		D	
	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		1		-1

نحو الحل

$$A(0,0,1),D(0,1,0),M(1,m,0),I\left(\frac{1}{3},0,0\right),J\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{IJ}=\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\,\overrightarrow{AD}\Rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\m\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{3}\\\alpha\,m+\beta=0\\-\alpha-\beta=\frac{1}{2}\end{cases}$$

مما سبق نجد $\alpha=-\frac{1}{3}$ و $\beta=-\frac{1}{6}$ وبالتالي تكون $m=-\frac{1}{2}$

إعداد: أ. عبد الرحمن الحصني	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. مهند حريقة

25

في الفضاء المنسوب لمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا النقطتين: $A(1,0,2)$ و $B(-1,2,2)$ عندئذ:
معادلة الكرة التي مركزها M ونصف قطرها OA حيث M مركز الأبعاد المتناسبة لـ : $(B,1)$ و $(A,2)$ هي:

A		B	
	$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+(z-2)^2=5$		$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+(z-2)^2=\sqrt{5}$
C	$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+(z-2)^2=25$	**D**	$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+(z+2)^2=5$

نحو الحل

$$M(\frac{-1+2}{3},\frac{2+0}{3},\frac{2+4}{3})\Rightarrow M(\frac{1}{3},\frac{2}{3},2)$$

$$R=OA=\sqrt{5}$$

وبالتالي معادلة الكرة: $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+(z-2)^2=5$

إعداد: م. رزان البديوي	الجواب: A	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

26

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,-3,2)$, $B(2,-1,1)$, $C(-1,0,0)$, $D(5,-2,2)$
إذا علمت أن المستقيمين (DC) , (AB) متقاطعان، فإن القيم الممكنة للثلاثية (α,β,γ)
والتي تجعل النقطة D مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة (A,α) , (B,β) , (C,γ) قد تكون:

A	B	C	D
$(0,2,-1)$	$(0,-1,2)$	$(-1,2,0)$	$(2,0,-1)$

نحو الحل

بما أن المستقيمين (DC) , (AB) متقاطعان فإن النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد

وبالتالي الأشعة $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطة خطياً أي تحقق:

$$\overrightarrow{DC} = a\,\overrightarrow{DA} + b\,\overrightarrow{DB} \Rightarrow \begin{pmatrix}-6\\2\\-2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-4\\-1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6 = -4a - 3b & (1)\\ 2 = -a + b & (2)\\ -2 = -b & (3)\end{cases}$$

من (3) نجد أن $b = 2$ نعوض في (2) فنجد أن: $a = 0$ وهما تحققان المعادلة (1)

وبالتالي: $\overrightarrow{DC} = 0\cdot\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB}$ ومنه: $0\cdot\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

وبالتالي النقطة D مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,0)$, $(B,2)$, $(C,-1)$

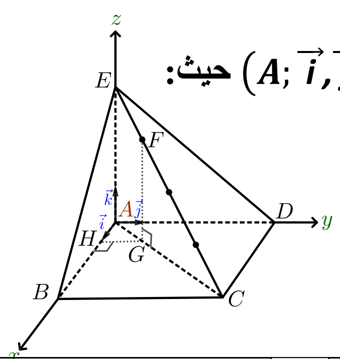
إعداد: أ. زكي طحاوي	الجواب: A	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

27

$EABCD$ هرم رأسه E وقاعدته مستطيل ومزوّد بمعلم متجانس للفراغ $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث:
$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = 5\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE} = 4\vec{k}$ ، F نقطة من $[EC]$ تحقق:

$$4\overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{CE}$$

ولتكن G مسقط F على $ABCD$ و H مسقط G على $[AB]$.
فإن طول $[FH]$ هو:



A	B	C	D
$\frac{5}{4}$	$\frac{19}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{4}$

نحو الحل

من الفرض لدينا: $E(0,0,4)$ و $C(3,5,0)$ ومن الفرض $4\overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{CE}$، بفرض $F(x,y,z)$ فإن:

$$4(x-3,y-5,z) = 3(-3,-5,4)$$

ومنه:

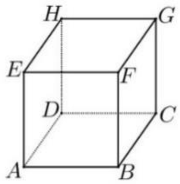
$$\left.\begin{matrix} 4x - 12 = -9 \Rightarrow x = \frac{3}{4}\\ 4y - 20 = -15 \Rightarrow y = \frac{5}{4}\\ 4z = 12 \Rightarrow z = 3\end{matrix}\right\} \Rightarrow F\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4},3\right)$$

Gمسقط F على ABCD $\Leftarrow G\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4},0\right)$. H مسقط G على $[AB]$ $\Leftarrow \left(\frac{3}{4},0,0\right)$

$$FH = \sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(0-\frac{5}{4}\right)^2 + (0-3)^2} = \frac{13}{4}$$

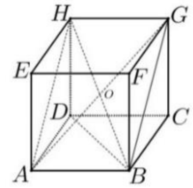
إعداد: أ. نور خزام	الجواب: D	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

28 $ABCDEFGH$ مكعب. فيه O نقطة تقاطع قطريه $[AG]$ و $[BH]$.
عندئذ المستوي (HOA) يقطع المستوي (BGD) بالمستقيم:



A		B		C		D	
(BD)		(AG)		(BH)		(BG)	

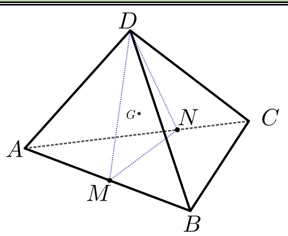
نحو الحل



$$(HOA) \subset (HGBA)$$
$$(HGBA) \cap (BGD) = (BG)$$

إعداد: أ. يوسف منصور	الجواب: D	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

29 $ABCD$ رباعي وجوه . M تنتمي الى الحرف $[AB]$ و N تنتمي الى الحرف $[AC]$ ، G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:
$(C,2)$ و $(B,1)$ و (A,a) و $(D,3)$ وهي أيضاً مركز ثقل المثلث DMN.
عندئذ a يساوي:



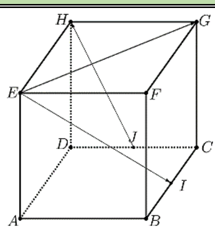
A		B		C		D	
1		$\frac{3}{2}$		2		3	

نحو الحل

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(C,2)$ و $(B,1)$ و (A,a) و $(D,3)$ إذن:
$$(G, 6+a)$$
G مركز ثقل المثلث DMN إذن: $(N,3)$ و $(M,3)$ و $(D,3)$
وبالتالي: $6 + a = 9$ ومنه : $a = 3$

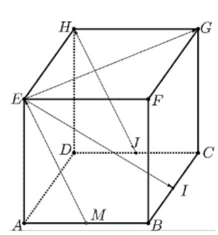
إعداد: أ. عبد الحميد السيد	الجواب: D	كتابة وتنسيق: د. مصطفى الرزوق

30 $ABCDEFGH$ مكعب فيه النقطة I منتصف $[BC]$
والنقطة J منتصف $[DC]$
عندئذ قيمة α , β المحققة للعلاقة: $\overrightarrow{JH} = \alpha\overrightarrow{EI} + \beta\overrightarrow{EG}$ هي:



A		B		C		D	
$\alpha = -1$, $\beta = \frac{1}{2}$		$\alpha = -1$, $\beta = \frac{-1}{2}$		$\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$		$\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$	

نحو الحل



$\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{ME}$ حيث M منتصف $[AB]$
$$\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{IE}$$
$$\overrightarrow{JH} = -\overrightarrow{EI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{2} \text{ و } \alpha = -1$$
ملاحظة: يمكن الحل باستخدام معلم متجانس

إعداد: أ. رياض الحسين	الجواب: A	كتابة وتنسيق: أ. أمين الحايك

اختبارات مؤتمتة لمنهاج رياضيات البكالوريا السورية

اختبار وحدة الجداء السلمي في الفراغ

الجزء الثاني -الوحدة الثانية

الإشراف العام: الأستاذ عبد الحميد السيد

ساعد في الإشراف الأساتذة:

أ. خالد الحداد – أ. يوسف منصور – أ. هيثم ديوب

كتابة وتنسيق واخراج:

الأستاذ: نادر أبوراس

لجنة التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة:

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبونبوت	محمد السيد علي
حسام قاسم	صفوح الأفندي	فادي المحمد	زينب يوسف
محمد زين جعرور	فادي طنوس	زكي طحاوي	أمين الحايك
مصطفى الرزوق	مهند حريقة	علي جمول	بشار كنعان
محمد أحمد العيسى	صلاح أحمد سالم	عبد السلام حسن	نادر أبوراس

1 إذا علمت أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان و $\|\vec{v}\| = 1$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$

عندئذ فإن قيمة $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ تساوي:

A		B		C		D	
A	5	B	4	C	$2\sqrt{2}$	D	2

نحو الحل

$$0 = \vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

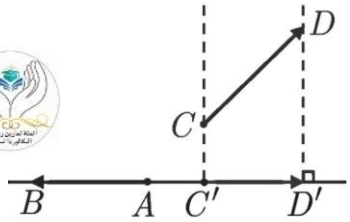
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 3+1 = 4 \;\Rightarrow\; \|\vec{u}+\vec{v}\| = 2$$

إعداد: م مريم زرزور	الجواب: D	كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

2 في مستو P إذا علمت أن الشعاع $\overrightarrow{C'D'}$ المسقط القائم لـ $\overrightarrow{CD}$ على (AB)

وأن $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$ و $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} = -10$

عندئذ فان قيمة $\|\overrightarrow{C'D'}\|$ تساوي :



A		B		C		D	
A	$\frac{1}{10}$	B	$\frac{1}{5}$	C	$\frac{1}{2}$	D	2

نحو الحل

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{C'D'} = -10 \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\|\,.\,\|\overrightarrow{C'D'}\|.\cos\pi = -10 \Rightarrow \|\overrightarrow{C'D'}\| = 2$$

إعداد: م. علي جمول	الجواب: D	كتابة وتنسيق: م.نادرأبوراس

3 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا الشعاعان $\vec{u}(2,-1,1)$, $\vec{v}(1,-1,0)$

إن قيمة الزاوية الهندسية θ بين الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تكون :

A		B		C		D	
A	0	B	$\frac{\pi}{6}$	C	$\frac{\pi}{4}$	D	$\frac{\pi}{3}$

نحو الحل

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

إعداد : م.ابتسام عيسى	الجواب: B	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

4 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,2,1)$, $B(2,a,1)$, $C(2,2,2)$

إذا علمت أن قياس الزاوية $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ فان قيم a الموافقة تساوي:

A		B		C		D	
A	$\{1,3\}$	B	$\{-1,2\}$	C	$\{1,-3\}$	D	$\{-1,-3\}$

نحو الحل

$$\overrightarrow{AC} = (1,0,1)\,,\ \overrightarrow{AB} = (1, a-2, 0)$$

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{1+(a-2)^2}\,.\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2+2(a-2)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2+2(a-2)^2} \Rightarrow 2+2(a-2)^2 = 4 \Rightarrow |a-2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

إعداد : م وائل عنيزان	الجواب: A	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

5	$ABDC$ متوازي أضلاع فيه $AC=4$ و $AB=3$ والزاوية $\widehat{BAC}=\theta=\frac{\pi}{3}$ فتكون قيمة AD تساوي						
A	$\sqrt{37}$	B	5	C	$\sqrt{13}$	D	$\sqrt{7}$

الحل:

بما أن الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع فهو يحقق $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ نربع :

$$AD^2=AB^2+AC^2+2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
$$AD^2=AB^2+AC^2+2\,AB.AC.COS\,\theta$$
$$AD^2=3^2+4^2+2\,(3)(4).COS\,\frac{\pi}{3}=37 \quad\Rightarrow\quad AD=\sqrt{37}$$

إعداد : م. عمرو معدل	الجواب: A	كتابة وتنسيق : م. نادر ابوراس

6	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(6,0,0)\,,B(0,6,0),C(0,0,3)$ إذا علمت أن $K(1,\alpha,\beta)$ هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC فإن قيم (α,β) تساوي:						
A	$(1\,,-2)$	B	$(1\,,2)$	C	$(2\,,1)$	D	$(-1\,,2)$

الحل:

$$\overrightarrow{AC}(-6,0,3),\quad \overrightarrow{CK}\,(1,\alpha,\beta-3)\,,\quad \overrightarrow{BK}(1,\alpha-6,\beta)\,,\quad \overrightarrow{AB}\,(-6,6,0)$$

بما أن K هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC فإن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CK}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BK}=0$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BK}=-6+0+3\beta=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CK}=-6+6\alpha+0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=2\end{cases}$$

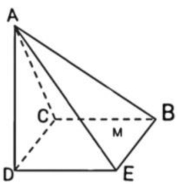
إعداد : م. عبد الله الكناوي	الجواب: B	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

7	إذا علمت أن $\|\vec{u}\|=3$ و $\|\vec{v}\|=2$ وأن $\vec{u}.\vec{v}=4$ عندئذ فإن قيمة المقدار $\|\vec{u}-2\vec{v}\|$ تساوي :						
A	0	B	2	C	3	D	5

الحل:

$$\|\vec{u}-2\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-4.\vec{u}.\vec{v}+4\|\vec{v}\|^2\Rightarrow\|\vec{u}-2\vec{v}\|^2=9-16+4(4)=9$$
$$\Rightarrow\|\vec{u}-2\vec{v}\|=3$$

إعداد : م. محمد زين جعرور	الجواب: C	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس



8	نتأمل في الشكل جانبا $A-BCDE$ هرم ارتفاعه 2 D هو المسقط القائم لـ A على المستوي $(BCDE)$ إذا كانت M نقطة من المستوي $(BCDE)$ فإن قيمة الجداء : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD}$ تساوي						
A	-4	B	-2	C	0	D	2

الحل:

أياً كانت M من مستوي القاعدة فان مسقط الشعاع $\overrightarrow{MA}$ على الارتفاع (AD) هو $\overrightarrow{DA}$

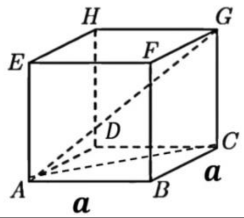
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AD}=\;-AD^2=-4$$

إعداد : م.علي حسن	الجواب: A	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

9

نتأمل الشكل جانبا $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a

إذا علمت أن: $\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{AC} = 8$ فان قيمة a الموافقة :



A	$2\sqrt{2}$	B	2	C	$\sqrt{2}$	D	$\frac{1}{2}$

الحل

$\overrightarrow{AC}$ المسقط القائم لـ $\overrightarrow{AG}$ على المستقيم (AC)

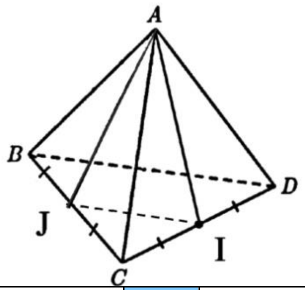
$$\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AC} = AC^2 = (a^2 + a^2) = 2a^2 = 8 \Longrightarrow a = 2$$

إعداد : م. رابعة سليمان	الجواب: B	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

10

نتأمل رباعي الوجوه المنتظم $ABCD$ طول حرفه 2

إن قيمة الجداء السلمي $\overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{AJ}$ تساوي:



A	$\frac{5}{2}$	B	$\frac{3}{2}$	C	$\frac{5}{4}$	D	$\frac{2\sqrt{3}}{4}$

الحل

من علاقة المتوسط نعوض :

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC})$$

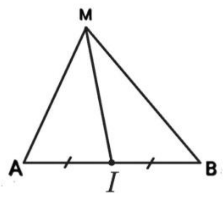
$$= \frac{1}{4}\left(2\times 2\,.COS\frac{\pi}{3} + 2\times 2.COS\frac{\pi}{3} + 2\times 2.COS\frac{\pi}{3} + 2^2\right) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

إعداد: م. أنس البوشي	الجواب:A	كتابة وتنسيق: م نادرأبوراس

11

نتأمل نقطتين B و A من الفراغ بحيث $AB = 5$ ولتكن I منتصف $[AB]$

في حالة M نقطة ما من الفراغ فإن الجداء السلمي $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}$ يساوي:



A	$\frac{25}{4} - MI^2$	B	$25 - MI^2$	C	$MI^2 - \frac{25}{4}$	D	$MI^2 - 25$

الحل

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})$$

$$= MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{25}{4}$$

إعداد : م. مروان بركة	الجواب: C	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

12	في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لتكن ع مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة: $x^2+y^2+z^2-2x-4y+k=0$ حيث k عدد حقيقي. إن مجموعة قيم العدد k التي تجعل ع تمثل مجموعة خالية هي :						
A	$]0,+\infty[$	B	$]5,+\infty[$	C	$]-\infty,0[$	D	$]-\infty,5[$
الحل	بالإتمام لمربع كامل : $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=5-k$ مجموعة النقاط M تمثل مجموعة خالية عندما $5-k<0$ وبالتالي $5<k$						
إعداد : م. حسن آصف سليمان			الجواب: B		كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس		
13	في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لتكن ع مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة: $x^2+y^2+z^2+6y+9=0$ فهي تمثل:						
A	كرة مركزها $(0,-3,0)$			B	مجموعة خالية		
C	نقطة وحيدة $(0,3,0)$			D	نقطة وحيدة $(0,-3,0)$		
الحل	$x^2+y^2+z^2+6y+9=0$ $x^2+y^2+6y+9+z^2-9+9=0$ $x^2+(y+3)^2+z^2=0$ مجموعة النقاط ع تمثل نقطة وحيدة $(0,-3,0)$						
إعداد : م. زينب يوسف			الجواب: D		كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس		
14	في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا المستوي P الذي معادلته: $P: x-2y+2z+\lambda=0$ (حيث λ عدد حقيقي موجب تماما) والكرة S التي معادلتها : $S:\ x^2+y^2+(z-1)^2=4$ إذا علمت أن المستوي P يمس الكرة S عندئذ قيمة λ تساوي:						
A	1	B	2	C	4	D	6
الحل	من معادلة الكرة S نصف قطرها $R=2$ ومركزها $A(0,0,1)$ وبما أن المستوي P يمس الكرة S يكون $dist(A,P)=R\Rightarrow\dfrac{\lvert 0+0+2+\lambda\rvert}{\sqrt{1+4+4}}=2\Rightarrow\lvert\lambda+2\rvert=6\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-8 & \text{مرفوض}\\ \lambda=4 & \text{مقبول}\end{cases}$						
إعداد: م محمد أحمد العيسى			الجواب:C		كتابة وتنسيق: م نادرأبوراس		
15	في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط $A(2,0,-1)$ و $B(0,4,3)$ و $M(x,y,z)$ إذا علمت أن $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ فإن مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل كرة مركزها ونصف قطرها هما:						
A	$R=\sqrt{3}$, $(1,2,1)$	B	$R=3$, $(-1,2,1)$	C	$R=3$,$(-1,-2,-1)$	D	$R=3$,$(1,2,1)$
الحل	مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ تمثل كرة قطرها $[AB]$ مركزها N منتصف $[AB]$ أي $N\ (1,2,1)$ $\overrightarrow{AB}(-2,4,4)\Rightarrow R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{4+16+16}}{2}=3$						
إعداد: م محمد حصرية			الجواب:D		كتابة وتنسيق: م نادرأبوراس		

16 في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ إن الكرة التي مركزها $(1,1,0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{2}$ تقطع محور الفواصل في نقطتين البعد بينهما يساوي:

A		B		C		D	
A	$2\sqrt{2}$	B	2	C	$\sqrt{2}$	D	1

نحو الحل

معادلة الكرة : $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=2$

نعوض بالمعادلة $y=z=0$

$$(x-1)^2=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(2,0,0) \text{ و } O(0,0,0) \Rightarrow OA=2$$

إعداد : م. سلمى عبدو	الجواب: B	كتابة وتنسيق : م. نادر ابوراس

17 في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا الكرة S التي مركزها $A(2,-1,3)$ وتمر من النقطة $N(-2,1,1)$
إن معادلة المستوي المماس للكرة S في النقطة N هي :

A	$2x-y+z+4=0$	B	$2x-y+2z+4=0$
C	$2x+y-z=0$	D	$2x-y-3z+8=0$

نحو الحل

المستوي يمس الكرة في $N(-2,1,1)$ ويقبل $\overrightarrow{NA}(4,-2,2)$ ناظما له نجد معادلته :

$$4(x+2)-2(y-1)+2(z-1)=0 \Rightarrow 2x-y+z+4=0$$

إعداد : م. هشام التركماني	الجواب: A	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

18 في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ليكن المستويان : $P:\left(\sqrt{2}-a\right)x+y+az-3=0$

$Q:\left(\sqrt{2}+a\right)x+6y-az+1=0$

حيث$(a$ عدد حقيقي موجب تماما $)$ عندئذ إن قيمة a التي تجعل المستويين متعامدين تساوي :

A		B		C		D	
A	5	B	4	C	2	D	$\sqrt{2}$

نحو الحل

$$\vec{n}_P.\vec{n}_Q=0 \Rightarrow \left(\sqrt{2}-a,1,a\right).\left(\sqrt{2}+a,6,-a\right)=0$$

$$\Rightarrow 2-a^2+6-a^2=0 \Rightarrow -2a^2=-8 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 & \text{مرفوض} \\ a=2 & \text{مقبول} \end{cases}$$

إعداد: م أحمد الشيخ عيسى	الجواب:C	كتابة وتنسيق: م.نادرأبوراس

19 في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نتأمل النقطة $M(3,3,3)$
والمستويين المتعامدين: $P:2x+y+2z-6=0$ و $Q:2x-2y-z+6=0$
عندئذ بُعد M عن المستقيم Δ الفصل المشترك للمستويين P و Q هو:

A		B		C		D	
A	10	B	$2\sqrt{5}$	C	$\sqrt{10}$	D	$\sqrt{5}$

نحو الحل

$$d_1=dist(M,P)=\frac{|6+3+6-6|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{9}{3}=3$$

$$d_2=dist(M,Q)=\frac{|6-6-3+6|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{3}{3}=1$$

$$l=\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

إعداد : م بشار كنعان	الجواب: C	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

20

في معلم متجانس $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا المستويان P و Q معادلتاهما $P:\ 2x-\ y+2Z+7=0$

$Q:-x+\dfrac{1}{2}\,y-Z+1=0$

إذا علمت أن المستويين متوازيان فإن البعد بينهما يساوي:

A		B		C		D	
	1		3		5		7

نحو الحل

$M(0,0,1)$ من Q

عندئذ بعد $M(0,0,1)$ عن المستوي P يساوي البعد بين المستويين لأنهما متوازيين

$$dist(M,P)=\frac{|0+0+2+7|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{9}{3}=3$$

إعداد: م يوسف منصور	الجواب: B	كتابة وتنسيق: م نادرأبوراس

21

في معلم متجانس $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ إن معادلة المستوي R المار من النقطتين $A(2,0,1)$ ، $B(1,0,0)$

والعمودي على المستوي: $P: x+y-z+2=0$ هي :

A	$2x-y+z-2=0$	B	$x-2y-z+3=0$
C	$x+y+2z-4=0$	D	$-x+2y+z+1=0$

نحو الحل

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظما للمستوي المطلوب $\vec{n}_P(1,1,-1)$, و $\overrightarrow{BA}(1,0,1)$

$\begin{cases}\vec{n}.\vec{n}_P=0 \Rightarrow a+b-c=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{BA}=0 \Rightarrow a+c=0\end{cases}$ نختار $c=1$ نجد: $a=-1$ و $b=2$

المستوي يمر من $B(1,0,0)$ ويقبل $\vec{n}(-1,2,1)$ ناظما له

$$-(x-1)+2(y-0)+1(z-0)=0 \Rightarrow -x+2y+z+1=0$$

إعداد : م. أماني الحسن	الجواب: D	كتابة وتنسيق :م. نادر أبوراس

22

في معلم متجانس $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا المستويان P و Q معادلتاهما $P: x-\ y+3z-5=0$

$Q: 3x+\ y+z+1=0$

إن معادلة المستوي R المار من النقطة M(2,5,-2) والعمودي على المستويين P و Q هي :

A	$-x+2y+z-6=0$	B	$x+y-4z-15=0$
C	$x-2y-z=0$	D	$-x+2y+z+5=0$

نحو الحل

المستويان متقاطعان

بتعويض $z=t$ وكتابة المعادلتين بالشكل: $\begin{cases}x-\ y=-3t+5\\ 3x+\ y=-t-1\end{cases}$ وبالحل المشترك لجملة المعادلتين بدلالة t

نجد الفصل المشترك (Δ): $\{M(-t+1,2t-4,t);t\in R\}$

$\vec{n}_R=\overrightarrow{u_\Delta}(-1,2,1)$ والمستوي R يمر بالنقطة $M(2,5,-2)$ فنجد معادلته :

$$R:\ -1(x-2)+2(y-5)+1(z+2)=0 \Rightarrow R: -x+2y+z-6=0$$

إعداد : م. محمد مصطفى اختيار	الجواب: A	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

23

في معلم متجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,2,0)$ والمستوي $P: x+\ y-z-1=0$

إذا علمت أن المسقط القائم للنقطة A على المستوي P هو النقطة $A'(x,y,z)$ فإن إحداثياتها هي :

A		B		C		D	
	$(0,0,-1)$		$(2,1,2)$		$(1,1,-1)$		$(1,1,1)$

نحو الحل

لدينا $\overrightarrow{AA'}$ و $\vec{n}_P$ مرتبطان خطيا أي $\overrightarrow{AA'}=\lambda\,.\,\vec{n}_P$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x=\lambda+2 \\ y=\lambda+2 \\ z=-\lambda \end{cases}$$

$$\lambda+2+\lambda+2+\lambda-1=0$$

نجد $\lambda=-1$ وبالتالي إحداثيات المسقط $A'(1.1.1)$

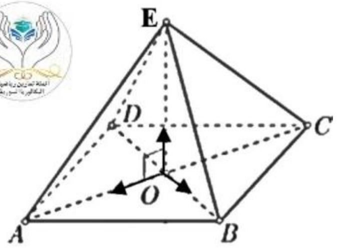
إعداد: م محي الدين إسماعيل	الجواب: D	كتابة وتنسيق: م نادرأبوراس

24

نتأمل في الشكل جانبا $E-ABCD$ هرم منتظم رأسه E

مركز قاعدته O هو مبدأ المعلم المتجانس $\left(O\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}},\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)$

إن معادلة المستوي (DCE) هي :



A		B	
	$3x-2y+z-4=0$		$2x+y-z+4=0$
C	$-2x-2y+z-4=0$	**D**	$2x+y+3z-2=0$

نحو الحل

$E(0,0,4)$, $D(0,-2,0)$, $C(-2,0,0)$

$\overrightarrow{DE}(0,2,4)$, $\overrightarrow{DC}(-2,2,0)$

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظما له :

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{DE}=0\ \Rightarrow 2b+4c=0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{DC}=0\ \Rightarrow\ -2a+2b=0 \end{cases}$$

نختار $C=1$ نجد : $a=-2$ و $b=-2$

المستوي يمر من $E(0,0,4)$ ويقبل $\vec{n}(-2,-2,1)$ ناظما له

$$-2(x-0)-2(y-0)+1(z-4)=0\ \Rightarrow -2x-2y+z-4=0$$

إعداد : م. حسان داوود	الجواب : C	كتابة وتنسيق : م. نادر ابوراس

25

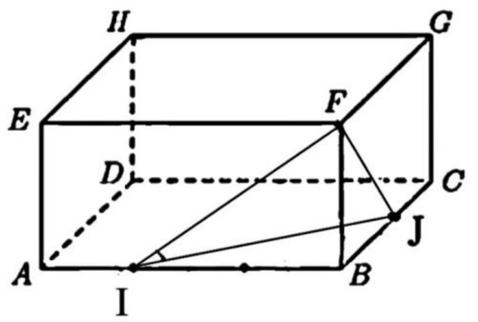
$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه:

$AB = 3$ و $BC = 2$ و $AE = 1$

والنقطتان I تحقق: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و J منتصف $[BC]$

وليكن المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

فان قيمة $Sin\ \widehat{FIJ}$ تساوي:



A		B		C		D	
	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$		$\frac{4}{5}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{1}{5}$

نحو الحل

لدينا: $I(1,0,0)$, $J(3,1,0)$, $F(3,0,1)$

$$\overrightarrow{IJ}(2,1,0) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{IF}(2,0,1) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{IF}\right\| = \sqrt{5}$$

$$cos\widehat{FIJ} = \frac{\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IF}}{\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|.\left\|\overrightarrow{IF}\right\|} = \frac{4+0+0}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \Rightarrow Sin\ \widehat{FIJ} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

إعداد : م . هيثم ديوب	الجواب: C	كتابة وتنسيق : م. نادر أبوراس

أتمتة منهاج رياضيات البكالوريا السورية

الجزء الثاني: الوحدة الثالثة

اختبار المستقيمات والمستويات في الفراغ

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

مصطفى الرزوق	أمين الحايك

تنسيق و اخراج: أمين الحايك

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبو نبوت	فيصل خالد
محمد السيد علي	هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان
زينب يوسف	حسام قاسم	خالد الحداد	فادي المحمد
يوسف منصور	نادر أبوراس	محمد زين جعرور	فادي طنوس
زكي طحاوي	أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة
محمد العيسى	مصطفى الرزوق	صلاح سالم	عبد السلام حسن

1	ABC مثلث والنقطة $\boldsymbol{E}$ تقع في المستوي (ABC) وتحقق: $$\overrightarrow{AE}-3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$ وهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{a}),(\boldsymbol{B},\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{C},\boldsymbol{c})$ عندئذ إحدى القيم الممكنة للثلاثية (a,b,c) تساوي:						
A	$(3,2,-4)$	B	$(1,3,-4)$	C	$(-4,3,2)$	D	$(2,3,-4)$
نحو الحل	$$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$$ $\boldsymbol{E}$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{3}),(\boldsymbol{C},\boldsymbol{-4}),(\boldsymbol{A},\boldsymbol{1-(3-4)})$ أي $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{2})$						
إعداد : أ. مهران زنيبه			الجواب : D			كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق	

2	المستقيم d معرف وسيطيا وفق: $d:\begin{cases}x=at-1\\y=3t+2\\z=2t\end{cases}\quad ;\quad t\in\mathbb{R}$ و يمر بالنقطة $A(-2,5,2)$ فتكون قيمة a						
A	-2	B	-1	C	0	D	1
نحو الحل	$$z_A=2t\Rightarrow 2=2t\Rightarrow t=1$$ $$x_A=at-1\Rightarrow -2=a(1)-1\Rightarrow a=-1$$						
إعداد : أ. محسن الحسين			الجواب : B			كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق	

3	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط: $A(1,0,0)\ ,\ B(0,2,0)\ ,\ C(0,0,1)$. إن بعد النقطة O عن المستوي (ABC) يساوي:						
A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{2}{3}$	C	1	D	$\frac{3}{2}$
نحو الحل	بفرض $dist\big(O,(ABC)\big)=h$ ولدينا: $A(a,0,0)\ ,\ B(0,b,0)\ ,\ C(0,0,c)$ فإن: $$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\Rightarrow\frac{1}{h^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}\Rightarrow\frac{1}{h^2}=\frac{9}{4}\Rightarrow h=\frac{2}{3}$$						
إعداد : د. محمد غوش			الجواب : B			كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق	

4	$ABCD$ رباعي وجوه. G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة: $(A,2)$, $(B,2)$, $(C,2)$, $(D,3)$ والنقطة M مركز ثقل المثلث ABC عندئذ تكون قيمة العدد الحقيقي a التي تحقق: $\overrightarrow{MG}=a\overrightarrow{MD}$ تساوي:						
A	$\frac{1}{3}$	**B**	$\frac{1}{2}$	**C**	$\frac{2}{3}$	**D**	2
نحو الحل	حسب الخاصة التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(D,3)$ و $(M,6)$. $\overrightarrow{MG}=\frac{3}{3+6}\overrightarrow{MD}\Longrightarrow\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MD}$						
إعداد : أ. مازن علي		الجواب : A		كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق			

5	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المثلث ABC حيث $A(1,0,-4)$, $B(1,-1,-2)$, $C(3,2,2)$ إن أحد التمثيلات الوسيطية للمستقيم Δ المنطبق على المتوسط النازل من B على الضلع $[AC]$:		
A	$\begin{cases}x=t+2\\y=2t+1 \quad ; \quad t\in\mathcal{R}\\z=t-1\end{cases}$	**B**	$\begin{cases}x=t+2\\y=2t+1\,;t\in[0,+\infty[\\z=t-1\end{cases}$
C	$\begin{cases}x=-t+1\\y=-2t \quad ; \quad t\in[0,1]\\z=-t-4\end{cases}$	**D**	$\begin{cases}x=2t+1\\y=t+2 \quad ; \quad t\in\mathcal{R}\\z=-t+1\end{cases}$
نحو الحل	لدينا النقطة $I(2,1,-1)$ منتصف $[AC]$ وبالتالي شعاع توجيه المستقيم Δ يكون: $\overrightarrow{BI}(1,2,1)$ و $t\in\mathcal{R}$		
إعداد : أ . محي الدين اسماعيل	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك	

6	في معلم متجانس $\left(O;\frac{1}{3}\overrightarrow{OA},\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ معادلة المستوي (ABC) قد تكون:		
A	$2x+3y+6z-6=0$	**B**	$3x+2y+z-1=0$
C	$x+y+z-2=0$	**D**	$x+y-z-3=0$
نحو الحل	لدينا: $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$ $C(0,0,1)$ معادلة المستوي (ABC): $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$ وبالتالي $2x+3y+6z-6=0$		
إعداد : أ . يوسف منصور	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك	

7

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستويات الثلاثة P_1 و P_2 و P_3 التي معادلاتها:

$$P_3: -x+y+2z=3 \quad , \quad P_2: -x+y-2z=-2 \quad , \quad P_1: x-y+2z=1$$

عند دراسة الوضع النسبي لهذه المستويات نجد أن مجموعة النقاط المشتركة بينها تمثّل:

A	نقطة وحيدة	**B**	المستوي P_1	**C**	مجموعة خالية	**D**	مستقيم

نحو الحل

واضح أن المستويين P_1 و P_2 متوازيان تماماً (غير منطبقين)

وبالتالي فإن مجموعة النقاط المشتركة بين المستويات الثلاث هي مجموعة خالية

إعداد : أ. مصطفى الرزوق	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

8

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستويان:

$$Q: y+z-2=0 \quad , \quad p:\ x+2z+1=0$$

إن التمثيل الوسيطي للفصل المشترك للمستويين P , Q يمكن أن يكون:

A	$\begin{cases} x=-2t+1 \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathcal{R}$	**B**	$\begin{cases} x=-2t-1 \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathcal{R}$
C	$\begin{cases} x=-t+2 \\ y=-2t-1 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathcal{R}$	**D**	$\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-1 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathcal{R}$

نحو الحل

$$P \Rightarrow x=-2z-1$$

$$Q \Rightarrow y=-z+2$$

نفرض $z=t$ فيكون التمثيل الوسيطي للفصل المشترك:

$$\begin{cases} x=-2t-1 \\ y=-t+2 \\ z=t \end{cases} ;\ t\in\mathcal{R}$$

إعداد : أ . خالد الحداد	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

9	في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا المستويات الثلاثة P_1 و P_2 و P_3 التي معادلاتها: $P_1: x+z=1 \quad , \quad P_2: y+z=2 \quad , \quad P_3: x+y-z=3$ تتقاطع هذه المستويات بنقطة إحداثياتها:						
A	$(-2,-1,3)$	**B**	$(0,1,2)$	**C**	$(2,3,-1)$	**D**	$(1,2,0)$
نحو الحل	$P_1 \Rightarrow x=1-z$ $P_2 \Rightarrow y=2-z$ بالتعويض في P_3 نجد أن: $1-z+2-z-z=3 \Rightarrow z=0$ وبالتالي: $x=1 \quad , \quad y=2$						
	إعداد : أ. فادي المحمد		الجواب : D		كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك		

10	في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ليكن المستوي P الذي معادلته: $P: x+y-z+1=0$ وليكن المستقيم d المار من النقطة $A(1,2,3)$ ويعامد المستوي P عندئذ فإن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d يعطى بالشكل:		
A	$\begin{cases} x=-t+1 \\ y=-t+2 \quad ; \quad t\in\mathcal{R} \\ z=-t+3 \end{cases}$	**B**	$\begin{cases} x=1 \\ y=t+1 \quad ; \quad t\in\mathcal{R} \\ z=4t+3 \end{cases}$
C	$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+2 \quad ; \quad t\in\mathcal{R} \\ z=-t+3 \end{cases}$	**D**	$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+1 \quad ; \quad t\in\mathcal{R} \\ z=-t-1 \end{cases}$
نحو الحل	شعاع توجيه المستقيم d هو ناظم المستوي P حيث $\vec{n}(1,1,-1)$ والمستقيم d يمر من النقطة $A(1,2,3)$ .... وبالتالي: $(d)\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+2 \quad ; \quad t\in\mathcal{R} \\ z=-t+3 \end{cases}$		
	إعداد : أ . هيثم ديوب	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

11	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل المستوي P المعطى بالمعادلة: $P: 2x - 2y + \alpha z + 3 = 0$ والمستقيم d المعطى بالتمثيل الوسيطي: $d:\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$ إن قيمة العدد الحقيقي α التي يكون من أجلها المستقيم d موازياً للمستوي P هي:						
A	-4	B	-2	C	2	D	4
نحو الحل	بما أن المستقيم d يوازي المستوي P عندئذ شعاع توجيه المستقيم d $\vec{v}_d$ يتعامد مع $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P $\left.\begin{matrix} \vec{v}_d(1,-1,2) \\ \vec{n}_P(2,-2,\alpha) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{v}_d = 0$ $\Longrightarrow (2)(1) + (-2)(-1) + (2)(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha = -2$						
إعداد : أ. عبدالله مصطفى حناوي			الجواب : B			كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق	

12	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا المستقيم d المعطى بالتمثيل الوسيطي: $d:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 2 \\ z = 3t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$ والمستوي P المعطى بالمعادلة: $P: 2x + ay - z + b = 0$ حيث a و b عددان حقيقيان . إذا علمت أن المستقيم d محتوى بالمستوي P فإن الثنائية (a,b) تساوي:						
A	$(0,1)$	B	$(-1,4)$	C	$(-1,0)$	D	$(1,0)$
نحو الحل	نعوض d في P : $2t + 2 + at - 2a - 3t + b = 0$ $(a-1)t + b - 2a + 2 = 0 \xrightarrow{\text{بالمطابقة}} \begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - 2a + 2 = 0 \end{cases}$ بالحل المشترك نجد $b = 0$ و $a = 1$						
إعداد : أ. باسل سطمة			الجواب : D			كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق	

13

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. الكرة S التي معادلتها $x^2+y^2+(z-2)^2=4$

تقطع المستوي P الذي معادلته $2x+y-2z+d=0$

وفق دائرة نصف قطرها $r=\sqrt{3}$ ...... عندئذ تكون إحدى قيم d هي:

A	-7	**B**	-1	**C**	0	**D**	1

نحو الحل

مركز الكرة $A(0,0,2)$ ونصف قطرها $R=2$

$$dist(A,P)=\frac{|0+0-4+d|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{|d-4|}{3}$$

$$R^2=[dist(A,P)]^2+r^2\Rightarrow 4=\frac{(d-4)^2}{9}+3\Rightarrow (d-4)^2=9$$

إما $d=7$ أو $d=1$

إعداد : أ. أحمد ذياب الرفاعي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

14

ليكن المستقيمان:

$$d:\begin{cases}x=3t-4\\ y=-t+3\\ z=7t-5\end{cases}\ ;\ t\in\mathbb{R}\qquad و \qquad \Delta:\begin{cases}x=-6s+2\\ y=2s+1\\ z=-14s+m\end{cases}\ ;\ s\in\mathbb{R}$$

عندئذ قيمة m التي تجعل المستقيمين منطبقين هي:

A	-9	**B**	-2	**C**	3	**D**	9

نحو الحل

نأخذ نقطة من d من أجل $t=0$ فتكون $(-4,3,-5)$ نعوض في Δ :

$$x=-6s+2\Rightarrow -4=-6s+2\Rightarrow s=1$$

$$z=-14s+m\Rightarrow -5=-14(1)+m\Rightarrow m=9$$

إعداد : أ. حسن علي سليمان	الجواب : D	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

15

نتأمل المستقيمين:

$$d:\begin{cases} x = t-1 \\ y = 3t-4 \\ z = -t+1 \end{cases} : t \in \mathcal{R} \quad , \quad d':\begin{cases} x = 2s-1 \\ y = 3s+a \\ z = s-2 \end{cases} : s \in \mathcal{R}$$

إن قيمة a التي تجعل المستقيمين d' و d متقاطعين هي:

A		**B**		**C**		**D**	
	-3		-2		-1		1

نحو الحل

بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين نجد:

$$\begin{aligned} t-1 &= 2s-1 \quad (1) \\ 3t-4 &= 3s+a \quad (2) \\ -t+1 &= s-2 \quad (3) \end{aligned}$$

بجمع (1) و(3) نجد:

$$-3s = -3 \quad \Rightarrow \quad s = 1$$

نعوض في (1) نجد: $t = 2$　　وبالتالي حسب (2): $a = -1$

إعداد : أ. موسى حجيج / أبو نزار	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

16

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعرف المستوي $P: x+y+z-1=0$ والكرة S التي مركزها $A(-2,0,0)$

إذا كان المستوي P يقطع الكرة S في دائرة مركزها H. فإن إحداثيات H هي:

A		**B**		**C**		**D**	
	$(0,2,2)$		$(-1,1,1)$		$(1,0,0)$		$(2,1,-2)$

نحو الحل

H هي المسقط القائم لـ A على P :

$$d \perp P \Longrightarrow \vec{u}_d = \vec{n}_P = (1,1,1) \Longrightarrow d:\begin{cases} x = t-2 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

نعوض d في P فنجد $t = 1$ إذا $H(-1,1,1)$

إعداد : أ. نور الدين صندفي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : د.مصطفى الرزوق

17

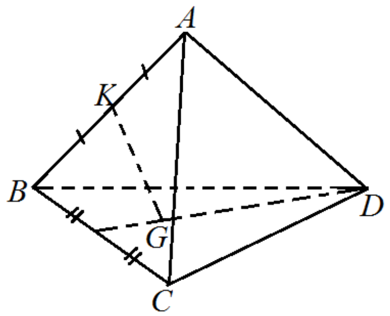
$ABCD$ رباعي وجوه والنقطة G هي مركز ثقل المثلث BCD

والنقطة K منتصف $[AB]$

ولتكن النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(D,2)$, $(C,2)$, $(B,3)$,$(A,1)$

عندئذ النقطة H تحقق العلاقة: $\overrightarrow{KH} = \lambda \cdot \overrightarrow{KG}$ عندئذ قيمة λ هي:



A		B		C		D	
A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{2}{3}$	C	$\frac{3}{4}$	D	1

نحو الحل

النقطة K منتصف $[AB]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\mathrm{A},1)$ و $(B,1)$

النقطة G مركز ثقل المثلث BCD فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,2)$ و $(\mathrm{C},2)$ و $(D,2)$

النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$, $(B,1)$, $(B,2)$, $(C,2)$, $(D,2)$

حسب الخاصية التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(\mathrm{G},6)$ و $(K,2)$

وبالتالي: $\overrightarrow{KH} = \frac{6}{6+2}\overrightarrow{KG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{KG}$

إعداد : أ. فادي طنوس	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

18

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ كرة مركزها $A(1,-3,0)$ وتمس المستوي: $P: x - 2y + z = 1$

عندئذ إحداثيات نقطة التماس هي:

A		B		C		D	
A	$(0,-1,-1)$	B	$(1,1,-1)$	C	$(2,-5,1)$	D	$(4,2,1)$

نحو الحل

بفرض النقطة B نقطة التماس وبالتالي يكون $(AB) \perp P$

وبالتالي ناظم المستوي $\overrightarrow{n_P}(1,-2,1)$ هو شعاع توجيه المستقيم (AB) وبالتالي نجد:

$$(AB): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 3 \\ z = t \end{cases} : t \in \mathcal{R}$$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي نجد:

$$(t+1) - 2(-2t-3) + (t) = 1 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

وبالتالي إحداثيات النقطة B: $(0,-1,-1)$

إعداد : أ. محمد السيد علي	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

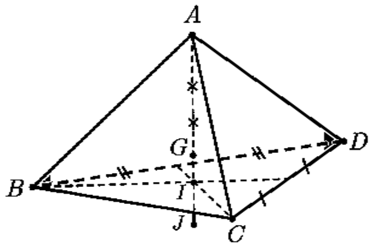
19

$ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G

I مركز ثقل المثلث BCD والنقطتان G و J متناظرتان بالنسبة إلى I

قيمة $\propto$ لتكون النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(D,1)\,,(C,1)\,,(B,1)\ \,,(A,\propto)$



A	$\frac{-3}{5}$	**B**	$\frac{-5}{3}$	**C**	$\frac{-2}{5}$	**D**	$\frac{-1}{5}$

نحو الحل

من الشكل لدينا: $\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AI}$

وبالتالي النقطة J: مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,5)$ و $(A,-1)$

وبما أن النقطة I مركز ثقل المثلث BCD نضرب الأثقال بـ $\frac{3}{5}$

فتكون النقطة J: مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,3)$ و $\left(A,-\frac{3}{5}\right)$

وبالتالي $\propto=\frac{-3}{5}$

إعداد : أ. رياض الحسين	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

20

في الفضاء المنسوب لمعلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ليكن لدينا تمثيلاً وسيطياً للقطعة المستقيمة $[AB]$:

$$[AB]\begin{cases}x=2t-2\\ y=4t+\dfrac{3}{2}\\ z=4t\end{cases}\quad ;\ \ t\in[0,1]$$

فإن معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هي:

A	$x+2y+2z=0$	**B**	$x+2y+2z-20=0$
C	$x+2y+2z-10=0$	**D**	$x+2y+2z-5=0$

نحو الحل

نوجد إحداثيات طرفي القطعة المستقيمة $[AB]$ ثم إحداثيات M منتصف $[AB]$.

$$\left.\begin{array}{l}t=0\Rightarrow A\left(-2,\dfrac{3}{2},0\right)\\ t=1\Rightarrow B\left(0,\dfrac{11}{2},4\right)\end{array}\right\}\Rightarrow M\left(-1\,,\frac{7}{2}\,,2\right),\qquad \overrightarrow{AB}(2,4,4)\Rightarrow\vec{n}(1,2,2)$$

ومنه معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هي:

$$1(x+1)+2\left(y-\frac{7}{2}\right)+2(z-2)=0$$

$$x+2y+2z-10=0$$

ملاحظة: يمكن إيجاد إحداثيات النقطة M بتعويض $t=\frac{1}{2}$ في التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة $[AB]$ ثم نتابع الحل.

إعداد : أ . يونس حمود	الجواب : C	كتابة وتنسيق : د. مصطفى الرزوق

اختبارات رياضيات مؤتمتة للبكالوريا السورية

الجزء الثاني : الوحدة الرابعة

اختبار وحدة الأعداد العقدية

إشراف الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة الأساتذة:

مهند حريقة - أمين الحايك

تنسيق وإخراج: أمين الحايك / نادر أبوراس

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	أحمد أبونبوت	فيصل خالد
محمد السيد علي	هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان
زينب يوسف	حسام قاسم	خالد الحداد	فادي المحمد
يوسف منصور	نادر أبوراس	محمد زين جعرور	فادي طنوس
زكي طحاوي	أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة
محمد العيسى	مصطفى الرزوق	صلاح سالم	عبد السلام حسن

1	نتأمل عدداً عقدياً $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ عندئذٍ z^{12} يساوي:						
A	-1	B	$-i$	C	1	D	i
نحو الحل	$z^{12} = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{12} = \cos 4\pi + i\sin 4\pi = 1$						
إعداد : أ. خضر سيفو		الجواب : C		كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة			

2	إذا كان العدد العقدي $1 - i$ أحد جذور كثير الحدود: $P(z) = z^4 - 3z^3 - 2z^2 + 10z - 12$ فإن أحد الأعداد العقدية الآتية يكون أيضاً جذراً لـ $P(z)$						
A	$2 - i$	B	$-1 + i$	C	$-1 - i$	D	$1 + i$
نحو الحل	بما أن أمثال كثير الحدود أعداد حقيقية فإن جذوره تكون مترافقة فيكون الجذر الثاني هو $1 + i$						
إعداد : أ. شاكر كنجو		الجواب : D		كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة			

3	حل المعادلة : $\overline{2i - iz} = \left\|1 + \sqrt{3}\, i\right\| - i$ بالمجهول العقدي z هو :						
A	$1 - 2i$	B	$-1 - 2i$	C	$1 + 2i$	D	$-1 + 2i$
نحو الحل	$-2i + i\,\overline{z} = \sqrt{1+3} - i$ $i\,\overline{z} = 2 + i$ $\overline{z} = 1 - 2i \Rightarrow z = 1 + 2i$						
إعداد : أ. حسام حسن		الجواب : C		كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة			

4	ليكن لدينا العدد العقدي $z = 1 - i$ عندئذٍ قيمة $Im\left(\frac{1}{z}\right)$ هي :						
A	$-\frac{1}{2} i$	B	$-\frac{1}{2}$	C	$\frac{1}{2}$	D	$+1$
نحو الحل	$\overline{z} = 1 + i \Rightarrow \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{(1+i)}\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ $Im\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = -\frac{1}{2}$						
إعداد : أ. ضحى جناد		الجواب : B		كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة			

5	في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ الحل المشترك لجملة المعادلتين: $-z+z'=2+3i \quad (1)$ ، $3z-z'=-2+i \quad (2)$						
A	$z=2i$ ، $z'=2+i$	B	$z=4i$ ، $z'=2+7i$	C	$z=2i$ ، $z'=2+5i$	D	$z=4i$ ، $z'=2+5i$
نحو الحل	بجمع (1) مع(2) نجد: $2z=4i \Rightarrow z=2i$ نعوض في (1) $-2i+z'=2+3i \Rightarrow z'=2+5i$						
إعداد : أ. حسين رشيد			الجواب : C			كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك	

6	إن العدد $z=2\sin\theta\, e^{i\theta}$ يمثل عدداً عقدياً مكتوباً بالشكل الأسي من أجل θ تنتمي للمجال:						
A	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	B	$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$	C	$\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$	D	$]0,\pi[$
نحو الحل	يجب أن يكون $\sin\theta>0$ أي $\theta\in]0,\pi[$						
إعداد : أ. احمد ذياب الرفاعي			الجواب : D			كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة	

7	العدد العقدي $z=i+\frac{3+i}{1+i}$ يساوي:						
A	2	B	$2+2i$	C	i	D	$2-i$
نحو الحل	$z=i+\frac{(3+i)(1-i)}{2}=i+\frac{3-3i+i+1}{2}$ ، $z=i+2-i=2$						
إعداد : أ. محي الدين اسماعيل			الجواب: A			كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك	

8	في حالة $k\in\mathbb{Z}$ و $\theta\neq\pi(1+2k)$ يكون العدد العقدي $z=\frac{2i\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}}$ مساوياً لـ :						
A	$-i$	B	i	C	1	D	-1
نحو الحل	$z=\frac{2i\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=i$						
إعداد : أ. صلاح أحمد سالم			الجواب : B			كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك	

9

في المستوي المزود بمعلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، ليكن y العدد العقدي الممثل بالنقطة $A(2,-3)$
عندئذ يكون العدد العقدي $z = 3 - yi$ يساوي:

A	$2-i$	B	$-2i$	C	3	D	$-3+2i$

نحو الحل

$$z = 3-(2-3i)i$$
$$= -2i-3+3$$
$$z = -2i$$

إعداد : أ. محمد أحمد العيسى	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

10

في حالة $k \in \mathbb{Z}$ و $\theta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$،
فإن العدد العقدي: $z = \frac{1+cos(2\theta)+i\cdot sin(2\theta)}{2cos(\theta)\cdot e^{i\theta}}$ يساوي:

A	1	B	-1	C	i	D	$-i$

نحو الحل

$$z = \frac{1+e^{2i\theta}}{2cos(\theta)\cdot e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}\cdot\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}{2cos(\theta)\cdot e^{i\theta}}$$
$$= \frac{2cos(\theta)}{2cos(\theta)} = 1$$

إعداد : أ. هيثم ديوب	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

11

العدد العقدي $z = \frac{i}{cosx-isinx}$ يكتب بالشكل:

A	$cosx+isinx$	B	$-sinx+icosx$
C	$sinx-icosx$	D	$cosx-isinx$

نحو الحل

$$z = \frac{i(cosx+isinx)}{cos^2x+sin^2x} = i(cosx+isinx)$$
$$z = -sinx+icosx$$

إعداد : أ. فادي المحمد	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

12	لتكن المعادلة $i\,z^2 + pz - q = 0$ إذا علمت أن العددين $z_1 = 2i$, $z_2 = 1 - i$ جذران للمعادلة. فإن قيمة p و q هي:							
A	$p = 1 + i$ $q = 2 - 2i$	B	$p = 1 - i$ $q = 2 - 2i$	C	$p = 1 - i$ $q = 2 + 2i$	D	$p = 1 - i$ $q = 1 + i$	
نحو الحل	$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 1 + i = -\frac{p}{i} \Rightarrow -p = -1 + i \Rightarrow p = 1 - i$ $z_1 . z_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 + 2i = -\frac{q}{i} \Rightarrow -q = -2 + 2i \Rightarrow q = 2 - 2i$							
إعداد : أ. عبد الله الكناوي	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة						

13	لتكن الأعداد العقدية: $z_1 = 1 + 2i$ و $z_2 = 1 + 3i$ و $z_3 = -2i$ عندئذ فإن: $argz_1 + argz_2 + argz_3$ يساوي:							
A	$-\frac{\pi}{4}$	B	0	C	$\frac{\pi}{4}$	D	$\frac{\pi}{2}$	
نحو الحل	$argz_1 + argz_2 + argz_3 = arg(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)$ $= arg[(1 + 2i) \cdot (1 + 3i) \cdot (-2i)]$ $= arg[(-5 + 5i) \cdot (-2i)]$ $= arg(10 + 10i) = \frac{\pi}{4}$							
إعداد : أ. نادر أبو راس	الجواب: C	كتابة وتنسيق : أ. نادر أبو راس						

14	ليكن z عدد عقدي. إن عدد الحلول المختلفة للمعادلة: $iz^4 + 2z^2 - i = 0$ يساوي:							
A	0	B	1	C	2	D	4	
نحو الحل	معادلة مضاعفة التربيع فيها: $\Delta = 4 - 4(i) \cdot (-i) = 0$ $z^2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2i} = i$ $z^2 = e^{\frac{\pi}{2}i} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} \\ z_2 = e^{\frac{5\pi}{4}i} \end{cases}$							
إعداد : أ. خالد أحمد شوقي الحداد	الجواب: C	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك						

15	في مجموعة الأعداد العقدية إذا كان لدينا : $\theta = arg(1+3i) - arg(3-i)$ فإن قياس الزاوية θ يمكن أن يكون :						
A	$-\frac{\pi}{2}$	B	0	C	$\frac{\pi}{4}$	D	$\frac{\pi}{2}$
نحو الحل	$\theta = arg\left(\frac{1+3i}{3-i}\right) = arg\left(\frac{(1+3i)(3+i)}{9+1}\right)$ $\theta = arg\left(\frac{10i}{10}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$						
إعداد : أ. يوسف منصور			الجواب: D			كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك	

16	طويلة العدد العقدي $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\; e^{i\frac{\pi}{6}}$ تساوي :						
A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	C	1	D	$\sqrt{2}$
نحو الحل	$\lvert z\rvert = \frac{\lvert 1+\sqrt{3}i\rvert}{\lvert 1+i\rvert} \left\lvert e^{i\frac{\pi}{6}}\right\rvert = \frac{2}{\sqrt{2}}(1) = \sqrt{2}$						
إعداد : أ. أمين الحايك			الجواب: D			كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك	

17	إن حل المعادلة : $2z - \bar{z} = 3 - 3i$ في $\mathbb{C}$ هو:						
A	$z = 2$	B	$z = 3 - i$	C	$z = 3 + i$	D	$z = 2 - i$
نحو الحل	نفرض: $z = x + yi$ فيكون $\bar{z} = x - yi$ وبالتالي: $2(x+yi) - (x-yi) = 3 - 3i$ $x + 3yi = 3 - 3i$ $x = 3 \quad , \quad y = -1$						
إعداد : أ. محمد السيد علي			الجواب : B			كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك	

18	ليكن العدد العقدي $z = e^{i\theta}$ بفرض n عدد طبيعي فإن المقدار: $(z)^n + (\bar{z})^n$ يساوي:						
A	$2cos(n\theta)$	B	$isin(n\theta)$	C	0	D	$cos(n\theta)$
نحو الحل	$(z)^n + (\bar{z})^n = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2cos(n\theta)$						
إعداد : أ. رياض الحسين			الجواب : A			كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك	

19

لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3 - 2iz^2 - z + 2i = 0$

إذا علمت أن المعادلة السابقة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً فإن هذا الحل هو:

A		B		C		D	
	$-2i$		$-i$		$2i$		i

نحو الحل

طريقة أولى (الطريقة العامة): بفرض $z = bi$ الحل التخيلي البحت: (بالتعويض)

$$-b^3i + 2b^2i - bi + 2i = 0$$

$$-b^3 + 2b^2 - b + 2 = 0$$

$$b^2(-b+2) - b + 2 = 0 \Rightarrow (-b+2)(b^2+1) = 0$$

$$b = 2 \quad \Rightarrow \quad z = 2i$$

طريقة ثانية (طريقة خاصة):

$$z(z^2-1) - 2i(z^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (z^2-1)(z-2i) = 0$$

بالتالي $z = 2i$

ملاحظة: طريقة الدليل لا تصلح لهذا التمرين

إعداد : أ. علي جمّول	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

20

ليكن z_1 و z_2 و z_3 ثلاثة أعداد عقدية تحقق:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2 \quad \text{و} \quad z_1 + z_2 + z_3 = 2$$

عندها تكون قيمة المقدار $\frac{4}{z_1} + \frac{4}{z_2} + \frac{4}{z_3}$ تساوي:

A		B		C		D	
	2		4		6		8

نحو الحل

نعلم أن $|z|^2 = z.\,\bar{z}$ ومنه $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$ بالتالي:

$$\frac{4}{z_1} + \frac{4}{z_2} + \frac{4}{z_3} = \frac{|z_1|^2}{z_1} + \frac{|z_2|^2}{z_2} + \frac{|z_3|^2}{z_3} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}$$

$$= \overline{z_1 + z_2 + z_3} = \overline{2} = 2$$

إعداد : أ. محمد العاشق	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة

21

الشكل الأسي للعدد العقدي $z = e^{i\frac{\pi}{4}} - 1$ هو:

A		B		C		D	
	$2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{5\pi}{8}i}$		$2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{5\pi}{8}i}$		$2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{9\pi}{8}i}$		$2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{9\pi}{8}i}$

نحو الحل

$$z = e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{i\frac{\pi}{8}} - e^{-i\frac{\pi}{8}}\right) = 2i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{5\pi}{8}i}$$

إعداد : أ. محمد غوش	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة

22

في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ ليكن z عدد عقدي ويحقق: $z = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{50}$
عندها تكون $arg(z)$ تساوي:

A	$\frac{\pi}{4}$	B	$\frac{\pi}{3}$	C	$\frac{\pi}{2}$	D	$\frac{3\pi}{2}$

نحو الحل

z هو عبارة عن مجموع لحدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها i وعدد حدودها 51

$$z = a\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow z = 1\frac{1-i^{51}}{1-i} = \frac{1-i^{48}i^3}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}$$

$$z = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \Rightarrow arg(z) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

إعداد : أ. يونس حمود | الجواب : C | كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة

23

في المجموعة $\mathbb{C}$ إن المعادلة: $z^2 + \alpha z + 13 + i = 0$ تقبل حلاً $z = 1 + 2i$،
ومنه فإن قيمة العدد العقدي α تساوي:

A	$-4+3i$	B	$1+2i$	C	$-13+i$	D	$3-5i$

نحو الحل

نعوض الحل:

$$(1+2i)^2 + \alpha(1+2i) + 13 + i = 0$$
$$1 + 4i - 4 + \alpha(1+2i) + 13 + i = 0$$
$$\alpha(1+2i) = -10 - 5i$$
$$\alpha = \frac{-10-5i}{1+2i} = \frac{(-10-5i)(1-2i)}{1+4} = (-2-i)(1-2i)$$
$$\alpha = -2 + 4i - i - 2 = -4 + 3i$$

إعداد : أ. فاطر يونس | الجواب : A | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

24

مجموعة النقاط $M(z)$ من المستوي العقدي، التي يحقق العدد العقدي $z = x + iy$ الممثل لها العلاقة $|z - \bar{z}| = 2$ هي:

A	المستقيم $d: y = 2$	B	محور الفواصل
C	اجتماع المستقيمين $d_1: y = 1$ و $d_2: y = -1$	D	محور التراتيب

نحو الحل

العلاقة $|z - \bar{z}| = 2$ تكافئ $|2yi| = 2$ وبالتالي $|y| = 1$
إما $y = 1$ أو $y = -1$

إعداد : أ. فادي طنوس | الجواب : C | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

25

مجموعة النقاط $M(z)$ من المستوي العقدي، والتي يحقق العدد العقدي z الممثل لها الشرط :
المقدار $\bar{z}(i+z)$ حقيقي . هي:

A		B		C		D	
A	دائرة	B	قطع زائد	C	محور الفواصل	D	محور التراتيب

نحو الحل

$$\overline{\bar{z}(i+z)} = \bar{z}(i+z)$$
$$z(-i+\bar{z}) = i\bar{z} + z\cdot\bar{z}$$
$$-iz + z\cdot\bar{z} = i\bar{z} + z\cdot\bar{z}$$
$$-iz = i\bar{z} \Rightarrow \bar{z} = -z$$

إعداد : أ. مصطفى الرزوق | الجواب : D | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

26

إن مجموعة النقاط $M(z)$ التي يمثلها العدد $z = x + iy$ والمحقق للشرط :
$$|z+\bar{z}|^2 - |z-\bar{z}|^2 = 4$$
تمثل منحنياً معادلته $x^2 - y^2 = a$ حيث تكون قيمة a هي:

A	-1	B	1	C	2	D	4

نحو الحل

$$|2x|^2 - |2iy|^2 = 4$$
$$4x^2 - 4y^2 = 4$$
$$x^2 - y^2 = 1$$

إعداد : أ. مهند حريقة | الجواب: B | كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة

27

ليكن $a = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. نضع $z = a - a^6$ عندئذٍ يمكن كتابة z بالشكل:

A	$2\cos\frac{2\pi}{7}$	B	$\cos\frac{2\pi}{7}$	C	$2\sin\frac{2\pi}{7}$	D	$2i\sin\frac{2\pi}{7}$

نحو الحل

$$z = a - \frac{a^7}{a} = a - \frac{e^{2\pi i}}{a} = a - \frac{1}{a} = a - a^{-1}$$
$$= e^{\frac{2\pi}{7}i} - e^{\frac{-2\pi}{7}i} = 2i\sin\frac{2\pi}{7}$$

إعداد : أ. محمد حصرية | الجواب : D | كتابة وتنسيق : أ. مهند حريقة

28

إن معادلة مجموعة النقاط $M(z)$ التي يحقق العدد العقدي $z = x + yi$ الذي يمثلها الشرط :
$z^2 - \bar{z}^2 = 4i$ هي:

A	$x = 1$	B	$y = 1$	C	$x\cdot y = -1$	D	$x\cdot y = 1$

نحو الحل

$$(z-\bar{z})\cdot(z+\bar{z}) = 4i$$
$$(2iy)\cdot(2x) = 4i$$
$$x\cdot y = 1$$

إعداد : أ. صفوح الأفندي | الجواب : D | كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

29	إذا كان $w = x + yi$ عدداً عقدياً يحقق: $Re(w) > 0$ ، وإذا علمت أن w جذر تربيعي للعدد $z = 3 - 4i$ ، فإن $\frac{5}{w}$ يساوي:						
A	$2 + i$	B	$1 + 2i$	C	$2 - i$	D	$1 - 2i$

نحو الحل

$$w^2 = z \Rightarrow |w^2| = |z|$$

$$x^2 + y^2 = 5 \quad (1)$$

$$x^2 - y^2 = 3 \quad (2)$$

$$x \cdot y = -2 \quad (3)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2x^2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = 2 \xRightarrow{\text{نعوض في } (3)} y = -1 \\ \text{أو } x = -2 \xRightarrow{\text{نعوض في } (3)} y = 1 \end{cases}$$

وبالتالي $w = 2 - i$ (مع ملاحظة أن $Re(w) > 0$)

$$\frac{5}{w} = \frac{5}{2 - i} = \frac{5(2 + i)}{5} = 2 + i$$

إعداد : أ. محمد زين جعرور	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

30	في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ إذا كان z_1 و z_2 جذرا المعادلة: $iz^2 + z - 1 = 0$ فإن المجموع $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ يساوي:						
A	1	B	-1	C	$-i$	D	i

نحو الحل

$$\frac{1}{\overline{z_2}} + \frac{1}{\overline{z_1}} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{z_1 \cdot z_2}} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2}\right)}$$

من المعادلة نجد:

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{i} = i$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{i} = i$$

$$\frac{1}{\overline{z_2}} + \frac{1}{\overline{z_1}} = \overline{\left(\frac{i}{i}\right)} = \overline{(1)} = 1$$

إعداد : أ. عبد الحميد السيد	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ. أمين الحايك

اختبارات مؤتمتة لرياضيات البكالوريا السورية

الجزء الثاني : الوحدة الخامسة.

اختبار وحدة تطبيقات الأعداد العقدية

إشراف الأستاذ : عبد الحميد السيد

كتابة وتنسيق

الأستاذ : محمد السيدعلي

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	فيصل خالد	محمد السيدعلي	خالد الحداد
هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان	زينب يوسف	حسام قاسم
نادر أبو راس	فادي المحمد	يوسف منصور	زكي طحاوي	محمد زين جعرور
فادي طنوس	أمين الحايك	مصطفى الرزوق	مهند حريقة	علي جمّول
	محمد العيسى	عبد السلام حسن	صلاح سالم	

1

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقطة M يمثلها العدد العقدي $z=-3-2i$
عندها يكون العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق تناظر محوره محور التراتيب هو :

A	$-3+2i$	B	$3+2i$	C	$3-2i$	D	$-3-2i$

نحو الحل

بتغير إشارة القسم الحقيقي نجد : $z'=3-2i$

إعداد : أ . عهد كبيبو	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

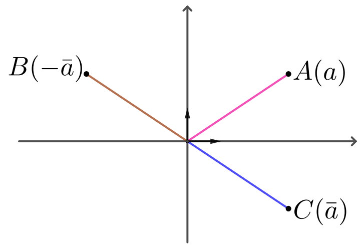
2

نزود المستوي العقدي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ ولتكن النقطتان A و B اللتان يمثلهما العددان العقديان a و b على الترتيب ، بحيث $b=-\bar{a}$ ، عندها تكون B نظيرة A بالنسبة إلى :

A	محور الفواصل	B	محور التراتيب	C	مبدأ الإحداثيات	D	منصف الربع الأول

نحو الحل

الحل هندسياً



إعداد : أ . باسل سمير حسين	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

3

لتكن النقطة M التي يمثلها العدد العقدي z تقع في الربع الثاني حيث $arg(z)=\theta$
عندئذٍ النقطة M' التي يمثلها العدد العقدي $z'=-2iz$ تقع في الربع :

A	الأول	B	الثاني	C	الثالث	D	الرابع

نحو الحل

$$arg(z')=arg(-2iz)$$
$$=arg(-2i)+arg(z)=-\frac{\pi}{2}+\theta$$

وبالتالي M' تقع في الربع الأول

إعداد : أ . خالد العمر	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

4

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان
$a=-i$ و $b=\bar{a}$
عندئذٍ العدد العقدي c الممثل للنقطة C التي تجعل ABC مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً يساوي:

A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	B	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	C	$\sqrt{3}$	D	$-\sqrt{3}$

نحو الحل

يكون المثلث ABC مثلثاً متساوي الأضلاع إذا كان $c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$ ومنه :

$$c+i=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2i)\Rightarrow c+i=i-\sqrt{3}\Rightarrow \boxed{c=-\sqrt{3}}$$

إعداد : أ . سوسن كنعان	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

5

نزود المستوي العقدي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ ولتكن A و B و C النقاط الموافقة للأعداد العقدية z_A و z_B و z_C بالترتيب ، فإذا علمت أن $z_C = -i(z_B - z_A)$
و أن $\theta = (\vec{u},\overrightarrow{AB})$. فإن $(\vec{u},\overrightarrow{OC})$ تساوي :

A		B		C		D	
A	$\frac{\pi}{2} - \theta$	B	$-\frac{\pi}{2} - \theta$	C	$\frac{\pi}{2} + \theta$	D	$-\frac{\pi}{2} + \theta$

نحو الحل

$$arg(z_C) = arg[-i(z_B - z_A)]$$
$$(\vec{u},\overrightarrow{OC}) = arg(-i) + arg(z_B - z_A) = -\frac{\pi}{2} + \theta$$

إعداد : أ . أحمد ذياب الرفاعي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

6

لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية : $a = 2$ و $b = 1 - i$ و $c = 1 + i$
ولتكن C صورة B وفق دوران مركزه A
وزاويته θ عندئذٍ الزاوية θ تساوي :

A	$-\frac{\pi}{2}$	B	$-\frac{\pi}{4}$	C	$\frac{\pi}{4}$	D	$\frac{\pi}{2}$

نحو الحل

$$c - a = e^{i\theta}(b - a)$$
$$e^{i\theta} = \frac{c-a}{b-a} = \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{(-1+i)(-1+i)}{1+1}$$
$$= \frac{1-2i-1}{2} = -i$$
وبالتالي $\theta = -\frac{\pi}{2}$

إعداد : أ . ماهر المحمد	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

7

لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية
$a = \sqrt{3} + i$ و $b = \sqrt{3} - i$ و $c = i$ و $d = 2i$
قيمة العدد الحقيقي λ التي تجعل النقطة D مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,1),(B,-1),(C,\lambda)$ هي :

A	-2	B	-1	C	1	D	2

نحو الحل

$$d = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma}$$
$$2i = \frac{\sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i + \lambda i}{1 - 1 + \lambda} \Rightarrow 2i = \frac{(2+\lambda)i}{\lambda}$$
$$2\lambda = 2 + \lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

إعداد : أ. رزان البديوي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

8

لتكن A و B نقطتين من المستوي العقدي المزود بمعلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ يمثلهما العددان العقديان
$Z_B = 3 - i$ و $Z_A = 1$
بفرض C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$
عندئذٍ العدد العقدي Z_D الممثل للنقطة D الذي يجعل الرباعي $ABDC$ مربعاً هو :

A		B		C		D	
A	4	B	$4+i$	C	$5+i$	D	$3i$

نحو الحل

$$z_C - z_A = i(z_B - z_A)$$
$$z_C - 1 = i(3 - i - 1) \Rightarrow \boxed{z_C = 2 + 2i}$$
يكون $ABDC$ مربعاً إذا كان $\overrightarrow{z_{CD}} = \overrightarrow{z_{AB}}$
$$z_D - z_C = z_B - z_A \Rightarrow z_D - 2 - 2i = 3 - i - 1 \Rightarrow \boxed{z_D = 4 + i}$$

إعداد : أ . رياض الحسين | الجواب : B | كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

9

نتأمل معلماً متجانساً $(O;\vec{u},\vec{v})$ في المستوي العقدي . والنقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية
$a = x + iy$ و b و c بالترتيب ، ولتكن B صورة A وفق دوران مركزه O
وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ و C نظيرة B بالنسبة لمحور الفواصل عندئذٍ c يساوي :

A		B		C		D	
A	$x+iy$	B	$x-iy$	C	$y+ix$	D	$y-ix$

نحو الحل

$$b = e^{-\frac{\pi}{2}i}a \Rightarrow b = -i(x+iy) = -ix + y$$
$$c = \bar{b} = y + ix$$

إعداد : أ . بشار هلال | الجواب : C | كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

10

في المستوي العقدي المزوَّد بمعلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، إنَّ مجموعة النقاط $M(z)$ المحققة للعلاقة :
$|2i\,z - 2 + 2i| = |4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i|$ تمثل دائرة مركزها Ω ونصف قطرها r حيثُ :

A		B		C		D	
A	$\Omega(1,1), r = 8$	B	$\Omega(-1,-1), r = 8$	C	$\Omega(-1,-1), r = 4$	D	$\Omega(1,1), r = 4$

نحو الحل

$$|2i(z + i + 1)| = \sqrt{32 + 32}$$
$$|2i|.|z + i + 1| = 8$$
$$2|z + i + 1| = 8$$
$$|z - (-1 - i)| = 4$$

إعداد : أ . حسام حسن | الجواب : C | كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

11

ليكن العدد العقدي $z_A = 2 - i$ الذي يمثل النقطة A وليكن العدد العقدي z_B الذي يمثل النقطة B صورة
النقطة A وفق تناظر مركزي مركزه $I(2,1)$ عندئذٍ z_B يساوي :

A		B		C		D	
A	$-2+3i$	B	$2+3i$	C	$-2-3i$	D	$2-3i$

نحو الحل

بما أن B صورة النقطة A وفق تناظر مركزي مركزه I فإن I منتصف $[AB]$
$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \Rightarrow z_B = 2z_I - z_A$$
$$z_B = 2(2 + i) - 2 + i$$
ومنه $z_B = 2 + 3i$

إعداد : أ . حسين رشيد | الجواب : B | كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

12

في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ إذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق دوران R معطى بالصيغة $Z' = iZ + 4 + 4i$. فإن مركز الدوران Ω هو النقطة :

A	B	C	D
$(0,1)$	$(0,4)$	$(1,4)$	$(2,4)$

نحو الحل

$$z' - 4i = iz + 4$$
$$z' - 4i = i(z - 4i)$$

طريقة ثانية : بفرض ω العدد العقدي الممثل للنقطة Ω عندئذٍ

$$R(\Omega) = \Omega \Rightarrow \omega = i\omega + 4 + 4i$$
$$(1 - i)\omega = 4(1 + i)$$
$$(1 + i)(1 - i)\omega = 4(1 + i)^2$$
$$\omega = 4i$$

إعداد : أ . محي الدين إسماعيل | الجواب : B | كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

13

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، لدينا النقطتان A و B اللتان يمثلهما العددان العقديان $a = 3 + i$ و $b = -1 + 2i$ ، والنقطة C مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,2)$ و $(B,-1)$ ، إن النقطة B صورة النقطة A وفق تحاكٍ مركزه C ونسبته k تساوي :

A	B	C	D
-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

نحو الحل

$$c = \frac{2(3 + i) - (-1 + 2i)}{2 - 1} = 7$$
$$b - c = k(a - c) \Rightarrow k = \frac{-1 + 2i - 7}{3 + i - 7} = \frac{-8 + 2i}{-4 + i} = 2$$

إعداد : أ . غياث منصور | الجواب : D | كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

14

ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين مباشر التوجيه،
A و B و C توافق بالترتيب الأعداد العقدية a و b و c التي ترتبط بالعلاقة :

A	$a = \frac{1}{2}[(c + b) + i(c - b)]$	B	$a = (c - b) + i(c + b)$
C	$a = (c + b) + i(c - b)$	D	$a = \frac{1}{2}[(c - b) + i(c + b)]$

نحو الحل

$$c - a = i(b - a) \Rightarrow c - a = -ia + ib$$
$$(1 - i)a = c - ib \Rightarrow (1 + i)(1 - i)a = (1 + i)(c - ib)$$
$$2a = c - ib + ic + b \Rightarrow a = \frac{1}{2}[(c + b) + i(c - b)]$$

إعداد : أ . محمد مصطفى اختيار | الجواب : A | كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

15

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية $a=-1+i$ و $b=2+\lambda i$ و $c=-2+2i$

حيثُ $\lambda\in R$. عندئذٍ قيمة λ التي تجعل A و B و C على استقامة واحدة هي :

A	-3	B	-2	C	2	D	4

نحو الحل

لكي تكون A و B و C على استقامة واحدة يجب أن تتحقق العلاقة

$$z_{\overrightarrow{AB}}=k\,z_{\overrightarrow{AC}}\quad;\lambda\in R$$

$$b-a=k(c-a)\Rightarrow 3+(\lambda-1)i=k(-1+i)$$

$$\Rightarrow 3+(\lambda-1)i=-k+ik$$

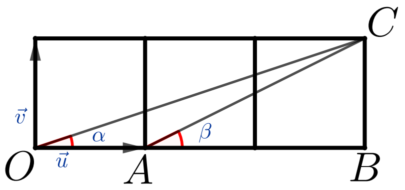
ومنه $k=-3$ و $\lambda-1=k$ وبالتالي نجد $\boxed{\lambda=-2}$

إعداد : أ . رياض الزامل	الجواب : B	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

16

نتأمل الشكل حيث α و β هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}),(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$ بالترتيب عندئذٍ $\alpha+\beta$ يساوي :



A	$\frac{\pi}{2}$	B	$\frac{5\pi}{12}$	C	$\frac{\pi}{3}$	D	$\frac{\pi}{4}$

نحو الحل

الشعاع $\overrightarrow{OC}$ يمثله العدد العقدي $3+i=\sqrt{10}e^{i\alpha}$

الشعاع $\overrightarrow{AC}$ يمثله العدد العقدي $2+i=\sqrt{5}\,e^{i\beta}$

$$\sqrt{10}e^{i\alpha}\times\sqrt{5}\,e^{i\beta}=(3+i)(2+i)=6+3i+2i-1$$

$$\sqrt{50}\,e^{i(\alpha+\beta)}=5+5i$$

$$e^{i(\alpha+\beta)}=\frac{5+5i}{5\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$$

إعداد : أ . محمد السيدعلي	الجواب : D	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

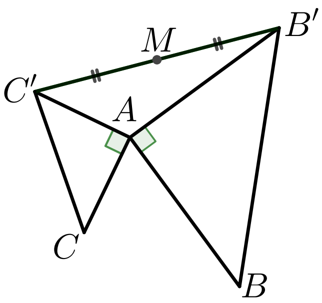
17

ليكن ABB' و $AC'C$ مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين ومباشرين

نتأمل معلماً متجانساً مباشراً ، مبدؤه A . وليكن b و c العددان العقديان

الممثلان لـ B و C

عندها العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[C'B']$ يعطى بالصيغة :



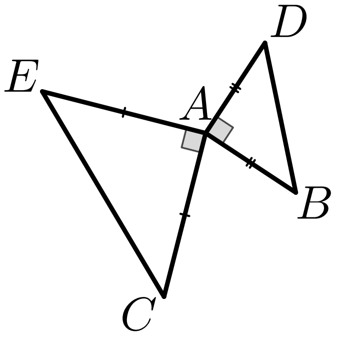
A	$\frac{b-c}{2}$	B	$\frac{b+c}{2}$	C	$\frac{b-c}{2}i$	D	$\frac{b+c}{2}i$

نحو الحل

$$m=\frac{b'+c'}{2}=\frac{ib-ic}{2}=\frac{b-c}{2}i$$

إعداد : أ . مهند حريقة	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ . محمد السيدعلي

18



ليكن ABD ، AEC مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين .
نتأمل معلماً مباشراً مبدؤه النقطة A ، ونفترض أن A
هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,2),(D,2),(C,1),(E,1)$
ونرمز للأعداد العقدية a , b , c , d , e التي تمثل النقاط A,B,C,D,E
عندئذ النسبة $\frac{c}{b}$ تساوي :

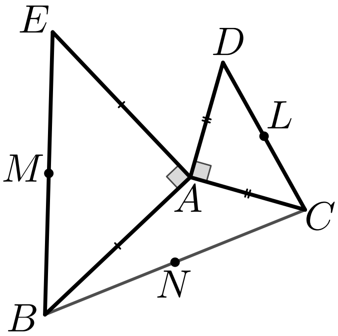
A		B		C		D	
A	$-2i$	B	$-\frac{1}{2}i$	C	$\frac{1}{2}i$	D	$2i$

نحو الحل

$$a=\frac{2b+c+2d+e}{6}\Rightarrow 2b+2d+c+e=0$$
$$\Rightarrow 2b+2(ib)+c-ic=0$$
$$c(1-i)=-2b(1+i)\Rightarrow c(1-i)(1+i)=-2b(1+i)^2$$
$$2c=-2b(2i)\Rightarrow \boxed{\frac{c}{b}=-2i}$$

إعداد : أ . صلاح ســالم	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ . محمد الســيدعلي

19



نتأمل في المستوي ABC مثلثاً مباشر التوجيه كيفياً وليكن AEC ، AEB
مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين
M,N,L منتصفات القطع المستقيمة $[EB],[BC],[DC]$ على الترتيب
عند كتابة الأعداد d,e,m,n,ℓ التي تمثل النقاط D,E,M,N,L
بدلالة العددين b,c الممثلين للنقطتين C و B نجد أن النسبة $\frac{m-n}{\ell-n}$ تساوي :

A		B		C		D	
A	i	B	$-i$	C	$1+i$	D	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

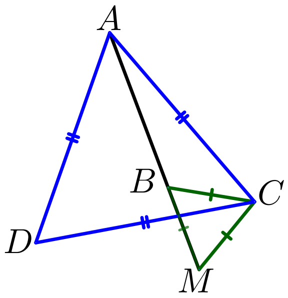
نحو الحل

D صورة C بدوران ربع دورة مباشرة حول A ومنه $d=ic$
E صورة B بدوران ربع دورة غير مباشرة حول A ومنه $e=-ib$

$$m=\frac{b+e}{2}=\frac{b-ib}{2},\ n=\frac{b+c}{2},\ \ell=\frac{c+d}{2}=\frac{c+ic}{2}$$
$$\frac{m-n}{\ell-n}=\frac{b-ib-b-c}{c+ic-b-c}=\frac{-c-ib}{-b+ic}=\frac{i(-b+ic)}{-b+ic}=i$$

إعداد : أ . صفوح الأفندي	الجواب : A	كتابة وتنسيق : أ . محمد الســيدعلي

20



ADC ، AEC مثلثان متساويا الأضلاع والنقاط A و B و M على استقامة واحدة

نتأمل معلماً مباشراً مبدؤه النقطة C ، عند حساب العدد العقدي $z_D - z_M$ بدلالة z_A و z_B

نستنتج أن أحد قياسات الزاوية $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MD})$ يساوي :

A		B		C		D	
A	$\frac{\pi}{6}$	B	$\frac{\pi}{4}$	C	$\frac{\pi}{3}$	D	$\frac{\pi}{2}$

نموذج الحل

D صورة A بدوران مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ومنه $z_D = e^{\frac{\pi}{3}i} z_A$

M صورة B بدوران مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ومنه $z_M = e^{\frac{\pi}{3}i} z_B$

$$z_D - z_M = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_A - z_B) \Rightarrow \frac{z_D - z_M}{z_A - z_B} = e^{\frac{\pi}{3}i}$$

وبالتالي $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{3}$

إعداد : أ . فادي طنوس	الجواب : C	كتابة وتنسيق : أ . محمد السـيدعلي

اختبارات رياضيات مؤتمتة للبكالوريا السورية

اختبار وحدة التحليل التوافقي

الجزء الثاني: الوحدة السادسة

الاشراف العام

الأستاذ: **عبد الحميد السيد**

كتابة وتنسيق وإخراج

الأستاذ: **نادر أبوراس**

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة:

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	فيصل خالد	محمد السيد علي
هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان	زينب يوسف
حسام خضر قاسم	خالد الحداد	فادي المحمد	يوسف منصور
نادر أبوراس	محمد زين جعرور	فادي طنوس	زكي طحاوي
أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة	محمد احمد العيسى
مصطفى الرزوق	صلاح أحمد سالم	عبد السلام حسن	

1 إن قيمة المجموع: $S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n}$ تساوي:

A		B		C		D	
A	$n+3$	B	$3n+3$	C	$2n+2$	D	$2n+3$

نحو الحل

من الخاصية: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ نجد $\binom{n+1}{n} = \binom{n+1}{1}$

نعوض في المجموع S_n قيم الحدود نجد: $S_n = 1 + n + 1 + n + 1 = 2n + 3$

إعداد : أ . أدهم الحلقي | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

2 إن جميع حلول المعادلة : $\binom{12}{2n-1} = \binom{12}{n+1}$ بحيث $n \in \mathbb{N}^*$ هي :

A		B		C		D	
A	$\{2,4\}$	B	$\{3,5\}$	C	$\{3,4\}$	D	$\{1,2\}$

نحو الحل

من الخاصية: $\binom{n}{r} = \binom{n}{p} \Rightarrow \begin{cases} r = p \\ r + p = n \end{cases}$ نجد:

اما $2n - 1 = n + 1 \Rightarrow n = 2$

أو $2n - 1 + n + 1 = 12 \Rightarrow n = 4$

إعداد : أ . مهند حريقة | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

3 إن قيمة المجموع $\binom{18}{9} + \binom{18}{8}$ تساوي:

A		B		C		D	
A	$\binom{18}{10}$	B	$\binom{19}{9}$	C	$\binom{18}{7}$	D	$\binom{19}{8}$

نحو الحل

من الخاصية: $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$ نجد المجموع يساوي $\binom{19}{9}$

إعداد : أ . علي جمول | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

4 قيمة العدد الطبيعي n الذي يحقق المساواة $4\binom{n+2}{3} = 7.\mathrm{P}_n^2$ تساوي :

A		B		C		D	
A	2	B	3	C	4	D	5

نحو الحل

شرط الحل: $n \geq 2$

$$4\frac{(n+2)(n+1)n}{3\times2\times1} = 7n(n-1)$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 15n + 25 = 0 \ ,$$

$\Delta = 25 \Rightarrow$ $n = \frac{10}{4}$ مرفوض , $n = 5$ مقبول

إعداد : أ : محمد مصطفى اختيار | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

5 يحتوي منشور $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^n$ على حد ثابت (مستقل عن x) اذا كان العدد الطبيعي n مضاعفا للعدد :

A		B		C		D	
A	2	B	3	C	4	D	5

نحو الحل

$$T_r=\binom{n}{r}(x^3)^{n-r}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^r=\binom{n}{r}(x)^{3n-5r}$$

الحد الثابت يوافق $3n-5r=0 \Leftarrow r=\frac{3n}{5}$ وكون r عدد طبيعي فان n مضاعف للعدد 5

إعداد : أ . ابتسام عيسى | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

---

6 استنتاجا من منشور $(1+5x)^n$ فان قيمة المجموع :

$S_n=\binom{n}{0}.(5)^0+\binom{n}{1}.(5)^1+\binom{n}{2}.(5)^2+\cdots+\binom{n}{n}.(5)^n$ تساوي:

A		B		C		D	
A	5^n	B	6^n	C	7^n	D	8^n

نحو الحل

$$(1+5x)^n=\binom{n}{0}(1)^n.(5x)^0+\binom{n}{1}.(5x)^1+\binom{n}{2}.(5x)^2+\cdots+\binom{n}{n}.(5x)^n$$

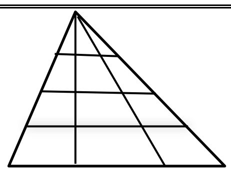
نلاحظ المجموع S_n هو المنشور نفسه لو عوضنا $x=1$ عندها نجد : $S_n=(1+5)^n=6^n$

إعداد : أ . محمود صديق | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

---

7 نتأمل الشكل المرسوم جانبا:

إن عدد المثلثات المرسومة في الشكل يساوي:



A		B		C		D	
A	12	B	18	C	20	D	24

نحو الحل

عدد المثلثات= $\binom{4}{1}\binom{4}{2}=4\times 6=24$

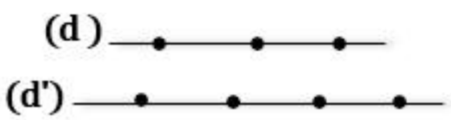
إعداد : أ . علي الطريف | الجواب: D | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

---

8 نتأمل الشكل المجاور: لدينا نقاط موزعة على مستقيمين متوازيين

عندما نصل بين كل ثلاث نقاط لنحصل على مثلث

فإن عدد المثلثات التي نحصل عليها بهذا الأسلوب يساوي:



A		B		C		D	
A	12	B	18	C	30	D	60

نحو الحل

عدد المثلثات=$\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{1}\binom{3}{2}=18+12=30$

إعداد : أ . خلدون شاهين | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

9

تحوي واجهة احدى المدارس 6 نوافذ وكل نافذة يمكن أن تكون مفتوحة أو مغلقة

عندئذ تظهر النوافذ لأي مشاهد للواجهة بعدد طرائق يساوي:

A		B		C		D	
A	6	B	32	C	36	D	64

نحو الحل

كل نافذة سوف تظهر بحالتين ,عندئذ عدد الطرائق $64 = 2^6$

إعداد : أ . حسن علي سليمان	الجواب: D	كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

10

صندوق يحوي n كرة نسحب من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة ,

إذا علمت ان عدد النتائج الكلية للسحب هو 6 فان عدد الكرات n يساوي:

A	2	B	3	C	4	D	5

نحو الحل

عدد النتائج الكلية للسحب $= \mathrm{P}_n^2 = 6 \Rightarrow$

$$n(n-1) = 6 \Rightarrow n^2 - n - 6 = 0 \Rightarrow (n-3)\,(n+2) = 0 \Rightarrow n = 3$$

إعداد : أ . مازن الزعبي	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

11

يلتقي n صديق في حفل ويصافح كل شخص منهم الأشخاص الآخرين مرة واحدة فقط ,

اذا علمنا أن عدد المصافحات يساوي 28 فان عدد الأصدقاء n يساوي:

A	8	B	9	C	10	D	12

نحو الحل

عدد المصافحات $= \binom{n}{2} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow$

$$n^2 - n = 56 \Rightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow (n-8)\,(n+7) = 0 \Rightarrow n = 8$$

إعداد : أ . محمود الفارس	الجواب: A	كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

12

لدينا n شخص , اذا تم تشكيل لجنة مكونة من مدير ونائب مدير وأمين سر من هؤلاء الأشخاص

بشرط أن المدير شخص معين وعلمنا أن عدد طرائق تشكيل اللجنة يساوي 12

فان عدد الأشخاص n يساوي:

A	5	B	6	C	8	D	12

نحو الحل

عدد طرائق تشكيل اللجنة= طرائق اختيار المدير × طرائق اختيار نائب المدير × طرائق اختيار أمين السر

$$12 = 1 \times (n-1) \times (n-2)$$

$$n^2 - 3n + 2 = 12 \Rightarrow n^2 - 3n - 10 = 0 \Rightarrow (n-5)\,(n+2) = 0 \Rightarrow n = 5$$

إعداد : أ . ريم بوظان	الجواب: A	كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

13

صندوق يحوي 7 كرات متماثلة تحمل الأرقام: 1,2,3,4,5,6,7 نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة.

ان عدد النتائج الممكنة التي يظهر فيها العدد 7 يساوي:

A		B		C		D	
A	70	B	80	C	90	D	100

نحو الحل:

عدد النتائج المطلوبة= $P_1^1 \times P_6^2 \times 3 = 1 \times 6 \times 5 \times 3 = 90$

إعداد : أ . شاكر كنجو | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

14

لتكن المجموعة من الأعداد: $S=\{1,2,3,\dots,15\}$

ان عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من S ومجموعهما زوجي يساوي:

A	49	B	56	C	98	D	105

نحو الحل:

مجموع العددين زوجي: يوافق اما العددين زوجيين معا أو فرديين معا

عدد المجموعات= $\binom{7}{2} + \binom{8}{2} = \frac{7\times6}{2\times1} + \frac{8\times7}{2\times1} = 21 + 28 = 49$

إعداد : أ . عبد الله الكناوي | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

15

لتكن المجموعة من الأعداد: $S=\{1,2,3,\dots,9\}$

إن عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S ومجموعها زوجي يساوي:

A	34	B	44	C	82	D	84

نحو الحل:

مجموع الاعداد زوجي ويوافق اما الثلاثة زوجية أو أحدهما زوجي والآخرين فرديين

عدد المجموعات= $\binom{4}{3} + \binom{5}{2}\binom{4}{1} = \frac{4\times3\times2}{3\times2\times1} + \frac{5\times4}{2\times1} \times 4 = 4 + 40 = 44$

إعداد : أ . ياسر عبادي | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

16

في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة على سبعة أسئلة من عشرة ,

فاذا كان الشرط أن يجيب عن أربعة أسئلة على الأقل من الأسئلة الخمسة الأولى

عندئذ عدد طرائق اختياره للأسئلة يساوي:

A	60	B	70	C	90	D	120

نحو الحل:

اما يختار أربعة أسئلة من الخمسة الأولى ثم ثلاثة من الخمسة الباقية بطرائق عددها:

$$\binom{5}{4}\binom{5}{3} = 50$$

أو يختار الأسئلة الخمسة الأولى ثم يختار سؤالين من الخمسة الباقية بطرائق عددها:

$$\binom{5}{5}\binom{5}{2} = 10$$

عدد الطرائق الكلية $= 50 + 10 = 60$

إعداد : أ . عبد الرحمن الرفاعي | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

17

يوجد في إحدى المدارس (7) مدرسين و (5) مدرسات وأحد المدرسين أخ لإحدى المدرسات يراد تشكيل لجنة مكونة من (3) أعضاء على أن تحوي اللجنة مدرسين ومدرسات، وبشرط أن لا يجتمع المدرس وأخته معا بنفس اللجنة ، عندئذ عدد تلك اللجان يساوي:

A		B		C		D	
A	70	B	105	C	165	D	175

نحو الحل

عدد اللجان التي فيها مدرسين ومدرسات $= \binom{7}{1}\binom{5}{2} + \binom{7}{2}\binom{5}{1} = 70 + 105 = 175$

عدد اللجان التي فيها المدرس وأخته $= \binom{2}{2}\binom{10}{1} = 1 \times 10 = 10$

عدد اللجان المطلوبة $= 175 - 10 = 165$

إعداد : أ . عبد الحميد السيد	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

18

لتكن المجموعة: S= {0,1,2,3,4}
ان عدد طرائق تشكيل عدد زوجي مؤلف من ثلاث منازل أرقامها مختلفة من المجموعة S يساوي:

A	12	B	18	C	30	D	48

نحو الحل

	الأحاد	العشرات	المئات	عدد الطرائق
الآحاد $= 0$	1(طريقة)	4 (طرائق)	3 (طرائق)	$(3) \times (4) \times (1) = 12$
الآحاد $\neq 0$	2(طريقة)	3 (طرائق)	3 (طرائق)	$(3) \times (3) \times (2) = 18$

عدد الأعداد الزوجية $= 12 + 18 = 30$

إعداد : أ . عهد كبيبو	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

19

لتكن المجموعة من الأعداد: S= {1,2,3,...,15}
ان عدد المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين من S ومجموعهما من مضاعفات العدد 3 يساوي:

A	15	B	35	C	45	D	50

نحو الحل

$A_0 = \{3,6,9,12,15\}$ باقي القسمة على العدد 3 يساوي صفر

$A_1 = \{1,4,7,10,13\}$ باقي القسمة على العدد 3 يساوي واحد

$A_2 = \{2,5,8,11,14\}$ باقي القسمة على العدد 3 يساوي اثنان

ويكون اختيار عددين مجموعهما مضاعفا للعدد 3:

اما من المجموعة A_0 ويوافق $\binom{5}{2} = 10$

أو اختيار احد العددين من A_1 والثاني من A_2 ويوافق $5 \times 5 = 25$

عدد المجموعات $= 10 + 25 = 35$

إعداد : أ . نادر أبوراس	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

20 إن رقم منزلة العشرات للعدد $(11)^{15}$ يساوي:

A		B		C		D	
A	0	B	1	C	5	D	6

نحو الحل

$$(11)^{15} = (1+10)^{15} = \binom{15}{0}(1)^{15}.(10)^0 + \binom{15}{1}(1)^{14}.(10)^1 + \binom{15}{2}(1)^{13}.(10)^2 + \cdots$$

$$= \quad 1 \quad + \quad 150 \quad + \quad 10500 \quad + \cdots$$

نلاحظ ناتج جمع أول حدين 151 ,

و باقي الحدود من مضاعفات العدد 100 مجموعها لن يؤثر في رقمي الآحاد والعشرات وستكون العشرات 5

إعداد : أ . حسن آصف سليمان | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

21 ليكن كثير الحدود: $f(x) = (1+2x)^5 + (1+ax)^4$ بحيث $a \in \mathcal{R}^*$

إذا علمت أن أمثال x في كثير الحدود تساوي 2 فإن قيمة a تساوي :

A		B		C		D	
A	-4	B	-2	C	2	D	4

نحو الحل

$(1+2x)^5 = T_0 + T_1 + \cdots + T_5 \qquad T_r = \binom{5}{r}(1)(2x)^r$

$(1+ax)^4 = T'_0 + T'_1 + \cdots + T'_4 \qquad T'_r = \binom{4}{r}(1)(ax)^r$

الحد الذي يحوي x في كثير الحدود $f(x)$ هو:

$$T_1 + T'_1 = \binom{5}{1}(1)(2x)^1 + \binom{4}{1}(1)(ax)^1 = 10x + 4ax$$

ومنه نجد أمثال x هو المقدار $10 + 4a$ ومن فرض المسألة لدينا : $10 + 4a = 2$ ومنه نجد $a = -2$

إعداد : أ . خضر سيفو | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

22 إن حل المعادلة : $\frac{1}{\binom{n}{2}} + \frac{1}{\binom{n}{3}} = \frac{1}{\binom{n}{4}}$ حيث n عدد طبيعي هو :

A		B		C		D	
A	4	B	5	C	7	D	9

نحو الحل

لدينا $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ وشرط الحل: $n \geq 4$ عندئذ :

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} + \frac{1}{\binom{n}{3}} = \frac{1}{\binom{n}{4}} \Rightarrow \frac{(n-2)!\,2!}{n!} + \frac{(n-3)!\,3!}{n!} = \frac{(n-4)!\,4!}{n!}$$

$$\Rightarrow (n-2)(n-3)(n-4)!\,2! + (n-3)(n-4)! \times 3 \times 2! = (n-4)! \times 4 \times 3 \times 2!$$

$$\Rightarrow (n-2)(n-3) + 3(n-3) = 4 \times 3$$

$$\Rightarrow \quad n^2 - 2n - 3 = 12 \quad \Rightarrow \quad n^2 - 2n - 15 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (n-5)\,(n+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 5 & \text{مقبول} \\ n = -3 & \text{مرفوض} \end{cases}$$

إعداد : أ . محمد قرنداش | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

اختبارات رياضيات مؤتمتة للبكالوريا السورية

اختبار وحدة الاحتمالات

الجزء الثاني: الوحدة السابعة

الاشراف العام

الأستاذ: عبد الحميد السيد

كتابة وتنسيق وإخراج:

أ . صلاح أحمد سالم – أ . نادر أبوراس

التدقيق العلمي واللغوي الأساتذة:

محي الدين إسماعيل	مروان بركة	فيصل خالد	محمد السيد علي
هيثم ديوب	صفوح الأفندي	بشار كنعان	زينب يوسف
حسام خضر قاسم	خالد شوقي الحداد	فادي المحمد	يوسف منصور
نادر أبوراس	محمد زين جعرور	فادي طنوس	زكي طحاوي
أمين الحايك	علي جمول	مهند حريقة	محمد احمد العيسى
مصطفى الرزوق	صلاح أحمد سالم	عبد السلام حسن	

1	يحتوي صندوق على خمس كرات متماثلة تحمل الأرقام $0, 0, 1, 1, 2$ ، نسحب عشوائياً من الصندوق كرتين معاً وليكن X متحولاً عشوائياً يقرن بكل نتيجة سحب جداء رقمي الكرتين المسحوبتين، إن قيمة $P(X=0)$ تساوي:

A		B		C		D	
A	$\frac{1}{10}$	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{3}{5}$	D	$\frac{7}{10}$

نحو الحل

الجداء صفر يوافق إما الكرتين (تحملان الرقم صفر) أو (تحملان رقمين أحدهما صفر)

$$P(X=0)=\frac{\binom{2}{2}+\binom{2}{1}.\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{7}{10}$$

إعداد : أ . نور الدين صندقي	الجواب: D	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

2	يحتوي صندوق على خمس كرات متماثلة مرقمة من 1 حتى 5 ، نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة ، إن احتمال أن يكون مجموع أرقام الكرات المسحوبة هو عدد فردي يساوي:

A		B		C		D	
A	$\frac{27}{125}$	B	$\frac{36}{125}$	C	$\frac{39}{125}$	D	$\frac{63}{125}$

نحو الحل

الحالات التي يكون عندها المجموع فردي هي:(فردي، فردي، فردي) أو (فردي، زوجي، زوجي)

$$P(A)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times 3\ =\frac{63}{125}$$

إعداد : أ . محمد قرنداش	الجواب: D	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

3	نادٍ رياضي يضم 30 لاعباً ، يوجد من بين هؤلاء n سباحاً حيث $n \geq 2$ نختار عشوائيا لاعبين من النادي فإذا علمت ان احتمال أن يكون اللاعبان سباحين يساوي $\frac{1}{29}$ فإن عدد السباحين في النادي هو:

A		B		C		D	
A	12	B	6	C	5	D	2

نحو الحل

S : حدث اللاعبان سباحين

$$P(S)=\frac{\binom{n}{2}}{\binom{30}{2}}=\frac{1}{29}\ \Rightarrow\ \frac{n(n-1)}{30\times 29}=\frac{1}{29}\ \Rightarrow\ n^2-n-30=0$$

$$\Rightarrow (n-6)\,(n+5)=0\ \Rightarrow \begin{cases} n=6 & \text{مقبول} \\ n=-5 & \text{مرفوض} \end{cases}$$

إعداد : أ . مازن الزعبي	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

4 إذا علمت أن $P(B)=\frac{2}{3}$ و $P(A\cap B)=\frac{5}{12}$ و $P(A\,|B')=\frac{1}{2}$ ، فإن $P(A)$ يساوي:

A	B	C	D
$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$

نمو الحل

$$P(A)=P(A\,|B).P(B)+P(A\,|B').P(B')$$
$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\,|B').P(B')$$
$$P(A)=\frac{5}{12}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

إعداد : أ . محمد حصرية	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

5 A و B حدثان مرتبطان بتجربة عشوائية يحققان:

$$P(B)=\frac{1}{3}\quad,\quad P(A)=\frac{1}{4}$$

فإذا علمت أن A و B مستقلان احتمالياً ، فإن $P(A\cup B)$يساوي :

A	B	C	D
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$

نمو الحل

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{7}{12}-\frac{1}{12}=\frac{6}{12}\Rightarrow\boxed{P(A\cup B)=\frac{1}{2}}$$

إعداد : أ . محمود الفارس	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

6 ليكن X متحولاً عشوائياً يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية ، فإذا كان تباينه $V(X)=\frac{2}{3}$

وتوقعه الرياضي $E(X)=2$ فإن عدد الاختبارات (n) في التجربة يساوي:

A	B	C	D
2	3	4	5

نمو الحل

$$\left.\begin{aligned}E(X)&=2=np\\ V(X)&=\frac{2}{3}=npq\end{aligned}\right\}\Rightarrow 2q=\frac{2}{3}\Rightarrow q=\frac{1}{3}\Rightarrow p=\frac{2}{3}$$
$$2=n.\left(\frac{2}{3}\right)\quad\Rightarrow\boxed{n=3}$$

إعداد : أ . محمد السيد علي	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

7	يحتوي صندوق على (3) كرات حمراء و (2) كرة بيضاء نسحب عشوائياً كرتين معاً . وليكن X متحول عشوائي يأخذ القيمة (-1) عند ظهور كرتين من نفس اللون. والقيمة (1) فيما عدا ذلك. عندئذٍ التوقع الرياضي يساوي:							
A	$-\frac{1}{5}$	B	$\frac{1}{5}$	C	$\frac{2}{5}$	D	$\frac{3}{5}$	

نحو الحل

$$P(X=-1)=\frac{\binom{3}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{2}{5}$$

$$P(X=1)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

$$E(X)=(-1)\times\left(\frac{2}{5}\right)+(1)\times\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5}$$

إعداد : أ . وائل عنيزان	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

8	يحوي صندوق أربع كرات حمراء وست كرات بيضاء عند سحب كرة حمراء ينال اللاعب نقطتين وعند سحب كرة بيضاء يخسر اللاعب نقطة واحدة ، يسحب اللاعب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة . احتمال أن يحصل اللاعب على نقطة واحدة فقط يساوي:							
A	$\frac{6}{15}$	B	$\frac{7}{15}$	C	$\frac{8}{15}$	D	$\frac{1}{3}$	

نحو الحل

يحصل اللاعب على نقطة واحدة فقط عند سحب كرة بيضاء وكرة حمراء وليكن الحدث A.

$$P(A)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times 2=\frac{8}{15}$$

إعداد : أ . ابتسام عيسى	الجواب:C	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

9	صندوق يحوي n كرة سوداء و ثلاث كرات حمراء و كرتين بيضاوين ، نسحب عشوائياً كرتين معاً من الصندوق ، فإذا علمت أن احتمال ظهور كرتين حمراوين يساوي $\frac{1}{12}$ فإن قيمة n تساوي:							
A	3	B	4	C	8	D	13	

نحو الحل

$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{n+5}{2}}=\frac{1}{12}\Rightarrow\binom{n+5}{2}=12\binom{3}{2}\Rightarrow\frac{(n+5)(n+4)}{2\times 1}=12(3)$$

$$\Rightarrow n^2+9n-52=0\quad\Rightarrow\quad(n+13)(n-4)=0\Rightarrow\begin{cases}n=4 & \text{مقبول}\\ n=-13 & \text{مرفوض}\end{cases}$$

إعداد : أ . يونس حمود	الجواب: B	كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس

10

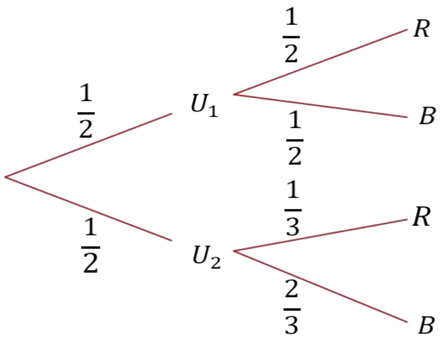
صندوقان متماثلان يحتوي الصندوق الأول كرة حمراء وكرة سوداء ويحتوي الصندوق الثاني على كرة حمراء وكرتين سوداوين ، نختار عشوائياً أحد الصندوقين ونسحب منه كرة واحدة عشوائياً . فإذا علمت أن الكرة المسحوبة حمراء . فإن احتمال أن تكون من الصندوق الأول يساوي:

A		B		C		D	
A	$\frac{1}{6}$	B	$\frac{2}{5}$	C	$\frac{3}{5}$	D	$\frac{3}{7}$

نحو الحل

نرمز ب U_1 : الصندوق الأول و U_2: الصندوق الثاني

R: الحدث الكرة حمراء ، B: الحدث الكرة سوداء



$$P(U_1 \mid R) = \frac{P(U_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$$

إعداد : أ . مرعي المصلح	الجواب:C	كتابة وتنسيق: أ. نادر أبو راس

11

يمثل الجدول المجاور القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي X .

فإذا علمت أن توقعه الرياضي $E(X) = 1.3$

فعندئذ قيمة a تساوي:

xi	0	1	2	3
$P(X = xi)$	a	b	0.3	0.2

A		B		C		D	
A	0.01	B	0.1	C	0.2	D	0.4

نحو الحل

$$a + b + 0.3 + 0.2 = 1 \Rightarrow a + b = 0.5 \; \ldots..(*$$

$$E(X) = 0(a) + 1(b) + 2(0.3) + 3(0.2) = 1.3$$

ومنه $\boxed{b = 0.1} \xRightarrow{\text{بالتعويض في (*}} \boxed{a = 0.4}$

إعداد : أ . تميم العلي	الجواب:D	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

12

نتأمل ثلاث قطع من النقود متماثلة ، نرمز لها بالرمز (C_3, C_2, C_1)، القطعتان C_2, C_1 متوازنتان أما C_3 فهي غير متوازنة واحتمال ظهور الوجه H فيها يساوي $\frac{1}{3}$ ، نلقي قطع النقود الثلاث مرة واحدة، فإن احتمال الحصول على الوجه H مرة واحدة على الأقل هو:

A		B		C		D	
A	$\frac{1}{12}$	B	$\frac{1}{6}$	C	$\frac{2}{3}$	D	$\frac{5}{6}$

نحو الحل

نفرض A حدث الحصول على H مرة واحدة على الأقل

الحدث المتمم $A' = \{(T, T, T)\}$

$$P(A') = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = \frac{5}{6}$$

إعداد : أ . يوسف منصور	الجواب: D	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

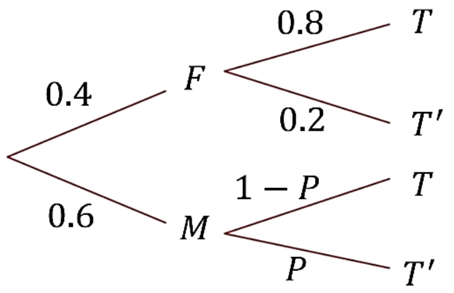
13

في مدرستنا يمارس 70% من طلبتها لعبة الشطرنج . ونعلم أن مدرستنا تضم نسبة 40% من الإناث ، وأن 80% منهن يلعبن الشطرنج. نختار أحد الطلبة بطريقة عشوائية، إذا علمت أنه ذكر فإن احتمال أن يكون ممن لا يمارسون لعبة الشطرنج يساوي:

A	B	C	D
$\frac{11}{30}$	$\frac{19}{30}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{19}{50}$

نحو الحل

الحدث M : الطالب ذكر ، الحدث F : الطالب أنثى ، الحدث T: الطالب يمارس اللعبة



$$P(T') = 1 - P(T) = 0.3$$

$$0.3 = 0.4 \times 0.2 + 0.6 \times P$$

$$0.6P = 0.3 - 0.08$$

$$P = \frac{0.22}{0.6} = \frac{11}{30}$$

إعداد : أ . أحمد ذياب الرفاعي | الجواب: A | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

14

صندوق يحوي أربع كرات حمراء مرقمة بالأرقام 1, 1, 1, 2 وثلاث كرات زرقاء مرقمة بالأرقام 1, 1, 2 نسحب من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة فإذا علمت أن مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 2. فإن احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين يساوي :

A	B	C	D
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

نحو الحل

نفرض الحدث A : الحصول على كرتين حمراوين الحدث B : الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي 2

$$P(A\,|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{7} \times \frac{2}{6}}{\frac{5}{7} \times \frac{4}{6}} = \frac{\frac{6}{42}}{\frac{20}{42}} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

إعداد : أ. حسن رشيد | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

15

يدرس 45% من طلاب الصف اللغة الإنكليزية (E) ، ويدرس 25% منهم اللغة الروسية (R) ، ويدرس 10% منهم اللغتين في أن معاً . اخترنا طالباً عشوائياً ، عندئذ احتمال انه لا يدرس أياً من اللغتين يساوي:

A	B	C	D
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

نحو الحل

$$P(E' \cap R') = P(E \cup R)' = 1 - P(E \cup R)$$

$$= 1 - [P(E) + P(R) - P(E \cap R)]$$

$$= 1 - \left[\frac{45}{100} + \frac{25}{100} - \frac{10}{100}\right] = 1 - \frac{60}{100}$$

$$P(E' \cap R') = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

إعداد : أ .محمد المصري | الجواب:B | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

16

يحتوي صندوق على ست كرات متماثلة ، ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين وكرة واحدة بيضاء.

نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة .

فإن احتمال سحب كرتين من اللون ذاته يساوي:

A		B		C		D	
A	$\frac{13}{60}$	B	$\frac{13}{20}$	C	$\frac{7}{10}$	D	$\frac{11}{20}$

الحل:

$A = \{(R,R,R'),(B,B,B')\}$

$$P(A) = \frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times 3 + \frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}\times 3 = \frac{9}{20}+\frac{1}{5} = \frac{13}{20}$$

ملاحظة يمكن الحل باستخدام التراتيب

إعداد : أ . ياسر عبادي | الجواب: B | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

17

صندوق يحوي ست بطاقات مرقمة بالأرقام $2, 3, 5, 6, 8, 9$

عند السحب عشوائياً لبطاقة واحدة خمس مرات على التتالي مع الإعادة في كل مرة .

فيكون احتمال الحصول على بطاقة تحمل رقماً من مضاعفات العدد 3 ثلاث مرات فقط هو:

A		B		C		D	
A	$\frac{5}{36}$	B	$\frac{5}{32}$	C	$\frac{5}{16}$	D	$\frac{5}{8}$

الحل:

تجربة برنولية : $n = 5$, $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ومنه $q = \frac{1}{2}$

$$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5\times 4}{2\times 1}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

إعداد : أ . محي الدين اسماعيل | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

18

يحتوي صندوق على n كرة $(n \geq 5)$. منها كرة واحدة بيضاء وكرتان حمراوان والباقي خضراء .
نسحب عشوائياً من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة . فإذا كان احتمال ظهور كرتين من اللون ذاته يساوي $\frac{1}{3}$ ، فإن عدد الكرات n يساوي:

A		B		C		D	
A	5	B	6	C	7	D	8

الحل:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{n}\times\frac{1}{n-1} + \frac{n-3}{n}\times\frac{n-4}{n-1}$$

$$\Rightarrow n^2 - n = 6 + 3(n^2 - 7n + 12)$$

$$\Rightarrow n^2 - n = 3n^2 - 21n + 42 \quad \Rightarrow \quad n^2 - 10n + 21 = 0$$

$$(n-7)(n-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 7 & \text{مقبول} \\ n = 3 & \text{مرفوض} \end{cases}$$

إعداد : أ . بلال أبو حصيني | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

19 لدينا أربع خانات تملأ كل خانة بأحد الأرقام $0, 1, 2$ بشكل عشوائي

ان احتمال تواجد الصفر في خانتين متجاورتين فقط يساوي :

A		B		C		D	
A	$\frac{4}{81}$	B	$\frac{8}{81}$	C	$\frac{12}{81}$	D	$\frac{24}{81}$

نحو الحل

لدينا ثلاث حالات موضحة بالأشكال

		0	0

	0	0	

0	0		

عدد طرق ملء الخانات في تلك الحالات : $n(A) = 3 \times (1 \times 1 \times 2 \times 2) = 12$

عدد الطرق الكلية لملء أربع خانات هو: $n(\Omega) = 3^4 = 81$

إذاً الاحتمال المطلوب يساوي: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{12}{81}$

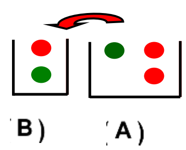
إعداد : أ . فادي طنوس | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

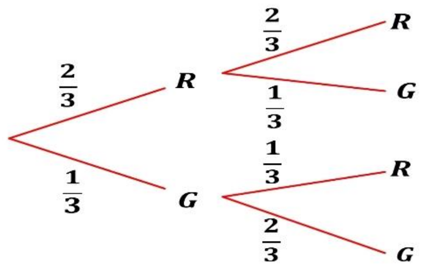
20 صندوقان A, B الصندوق A يحوي (كرتين حمراوين ، كرة خضراء) والصندوق B يحوي (كرة حمراء ، كرة خضراء) .

نسحب كرة واحدة عشوائياً من الصندوق A ونضعها في الصندوق B ثم نسحب كرة عشوائياً من الصندوق B، عندئذ احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من اللون ذاته يساوي:

A		B		C		D	
A	$\frac{4}{9}$	B	$\frac{5}{9}$	C	$\frac{2}{3}$	D	$\frac{8}{9}$

نحو الحل





$$P(E) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

إعداد : أ . هيثم ديوب | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

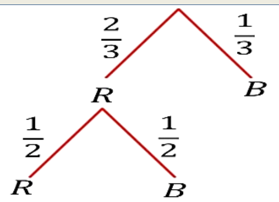
21 صندوق يحوي على كرة زرقاء وكرتين حمراوين .

نكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته.

ونعرف متحول عشوائي X يدل على عدد مرات السحب . عندئذ $P(X = 2)$ يساوي:

A		B		C		D	
A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{1}{6}$	C	$\frac{2}{3}$	D	$\frac{1}{3}$

نحو الحل



$$P(X = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

إعداد : أ . فادي المحمد | الجواب: C | كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

22

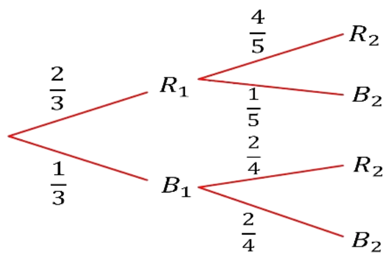
صندوق يحوي 2 كرة حمراء وكرة واحدة سوداء. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها مجدداً للصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق . ثم نسحب كرة واحدة من الصندوق مجدداً.

إن احتمال ظهور كرة سوداء في المرة الثانية يساوي:

A	$\frac{2}{15}$	B	$\frac{4}{15}$	C	$\frac{3}{10}$	D	$\frac{2}{3}$

نحو الحل

$$P(B_2) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$



إعداد : أ . نادر أبو راس	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

23

يتطلب نقل كمية من الرمل مرحلتين A, B على التوالي.

تستغرق المرحلة A عدداً عشوائياً من الساعات X و تستغرق المرحلة B عدداً عشوائياً من الساعات Y.

جدول القانون الاحتمالي لكل منهما.

y_i	1	2	3
$P(Y=y_i)$	0.1	0.5	0.4

x_i	1	2
$P(X=x_i)$	0.7	0.3

المتحولان العشوائيان Y, X مستقلان احتمالياً .

عندئذٍ احتمال أن يستغرق انجاز المهمة ثلاث ساعات على الأقل يساوي:

A	0.07	B	0.27	C	0.38	D	0.93

نحو الحل

$$P(E') = P(X=1\cap Y=1) = P(X=1).P(Y=1)$$

$$P(E') = 0.7\times 0.1 = 0.07 \quad \Rightarrow \quad P(E) = 1-P(E') = 1-0.07 = 0.93$$

إعداد : أ . علي جمول	الجواب: D	كتابة وتنسيق: أ. صلاح أحمد سالم

24

الجدول المجاور يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X, Y)

X \ Y	1	2	3
1	0.1	0.2	0.1
2	0.3	0.1	0.2

بفرض: $P(X=1) = P(A)$, $P(Y=2) = P(B)$

فإن $P(A \cup B)$ يساوي:

A	0.2	B	0.4	C	0.5	D	0.7

نحو الحل

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B) = P(X=1\cap Y=2) = 0.2$$

$$P(A\cup B) = 0.4+0.3-0.2 = 0.5$$

إعداد : أ . غياث منصور	الجواب: C	كتابة وتنسيق: أ. نادر أبوراس