	حسابية +	هندسية ×
	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = U_n q$
الحد العام	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = U_p q^{n-p}$
إثبات	$U_{n+1} - U_n = r \in R$ كمية ثابتة	$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q \in R$
مجاميع	$S_n = n\left(\frac{a+l}{2}\right)$	$S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$

عدد الحدود = $\frac{\text{الحد الأخير} - \text{الحد الأول}}{\text{الأساس}} + 1$

	حسابية +	هندسية ×
الوسط	مجموع الطرفين = 2 × الأوسط $2b = a + c$ $a + b + c = 3b$	مربع الأوسط = (حاصل ضرب الطرفين) $b^2 = a.c$ $a.b.c = b^3$

[illegible] ← $U_n = U_p q^{n-p}$

① $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية حيث

$U_5 = 18$, $U_0 = 3$

U_{10}: أوجد

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ $\boxed{33}$

$U_m = U_p + (m-p)r$

يجب حساب r في البداية.

$U_5 = U_0 + (5-0)r$

$18 = 3 + 5r$

$15 = 5r$

$\Rightarrow \boxed{r=3}$

$U_{10} = U_0 + (10-0)r$

$= 3 + 10 \times 3$

$= 3 + 30 = 33$

② $V_0 = 1$

$V_{n+1} = \frac{V_n}{1+V_n}$

$U_n = \frac{1}{V_n}$

U_n: نوع

Ⓐ U_n حسابية $r=2$

Ⓑ U_n حسابية $r=1$

Ⓒ U_n هندسية $q=2$

Ⓓ U_n هندسية $q=1$

$\boxed{U_n = \frac{1}{V_n}}$

$U_{n+1} = \frac{1}{V_{n+1}} = \frac{1}{\frac{V_n}{1+V_n}}$

$\boxed{U_{n+1} = \frac{1+V_n}{V_n}}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{1+V_n}{V_n}}{\frac{1}{V_n}} = 1 + ③ R$

الـ U_n ليست هندسية

$U_{n+1} - U_n = \frac{1+V_n}{V_n} - \frac{1}{V_n}$

$= \frac{1+V_n-1}{V_n} = \frac{V_n}{V_n} = 1$ CR

③ $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية

$U_0 = 5$, $r = 2$ أعطت

1- عبر عن U_n بدلالة n

$U_m = U_p + (m-p)r$

$U_n = U_0 + (n-0)2$

$\boxed{U_n = 5 + 2n}$

2- احسب S_n

$S_n = U_0 + U_3 + U_6 + \dots + U_{21}$

$S_n = n\left(\frac{a+\ell}{2}\right)$

$a = U_0 = 5$

$\ell = U_{21} = 5 + 2(21)$

$= 47$

$n = \frac{21-0}{3} + 1 = 8$

$S_n = 8\left(\frac{5+47}{2}\right)$

$= 4(52) = 208$

$\boxed{b^3}$ = a.b.c

	$U_0<0$	$U_0>0$
$q>1$	متناقصة	متزايدة
$0<q<1$	متزايدة	متناقصة

$q=1$ ثابتة.

$q<0$ غير رتيبة

4

a ، $2b$ ، $3c$ في ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية .

لدينا $3c+2b+a=36$

بيان $b=$

Ⓐ 5 Ⓒ 8

Ⓑ 6 Ⓓ 9

$a, 2b, 3c$

$\Rightarrow$ مجموع الطرفين $= 2 \times$ الحد الأوسط

$2 \times 2b = a+3c$

$$\boxed{4b = a+3c}$$

$3c+2b+a=36$

$4b+2b=36$

$6b=36$

$$\boxed{b=6}$$

5 : متتالية حسابية $(U_n)_{n\geq 0}$

$U_2=3$

إذا $U_0+U_2+U_5=5$

فإن $r=$

Ⓐ Ⓒ

Ⓑ Ⓓ

صيغة مع

$U_1=U_0+r$

$U_5=U_0+5r$

$U_2=U_5-3r$

أساسها

$a=a$

$b=a+r$

$c=b+r$

$c=a+2r$

$U_0+U_2+U_5=5$

$U_0=U_2-2r$

$U_5=U_2+3r$

نعوض

$U_2-2r+U_2+U_2+3r=5$

$3U_2+r=5$

$9+r=5 \Rightarrow \boxed{r=-4}$

Scanned by CamScanner

⑥ a ، b ، c ثلاثة حدود متتالية لمتتالية هندسية متزايدة ، أساسها q

$a+b+c=3a$

احسب q.

صيغ مهمة

$U_1 = U_0\, q$	الوسط
$U_{10} = U_5 \cdot q^5$	$a=a$
$U_2 = U_5 \cdot q^{-3}$	$b=aq$
	$c=bq$
	$c=aq^2$

$a+b+c=3a$

$a+aq+aq^2=3a$

$\cancel{a}(1+q+q^2)=3\cancel{a}$

$q^2+q+1=3$

$q^2+q-2=0$

$(q+2)(q-1)=0$

$q_1=-2 \Rightarrow$ U_n غير رتيبة

$q_2=1 \Rightarrow$ U_n ثابتة

---

7 a ، b ، c ثلاثة حدود متتالية لمتتالية هندسية أساسها q

3a ، 2b ، c ثلاثة حدود متتالية من متتالية حسابية

احسب q.

① $\boxed{a=a,\ b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2}$

2 × الوسط = مجموع الطرفين

$2\times 2b = 3a+c$

② $\boxed{4b=3a+c}$

نعوض ① في ②

$4aq=3a+a\cdot q^2$

$\boxed{:a}$ $4q=3+q^2 \Rightarrow$

$q^2-4q+3=0$

$(q-3)(q-1)=0$

$q=3$

$q=1$

	$U_0>0$	$U_0<0$
$q>1$	متزايدة	متناقصة
$0<q<1$	متناقصة	متزايدة

ثابتة $q=1$

غير رتيبة $q<0$

Scanned by CamScanner

المتتاليات الحسابية:

$U_0 = —$

$U_{n+1} = U_n + r$ عدد

$r > 0 \Rightarrow$ متزايدة

$r < 0 \Rightarrow$ متناقصة

$r = 0 \Rightarrow$ ثابتة

صيغة أولى $U_n = an + b$ و a هي الأساس $r = a$

المتتاليات الهندسية:

$U_0 = —$

$U_{n+1} = q \cdot U_n$

$q = 1$ ثابتة

$q < 0$ غير رتيبة

	$U_0 > 0$ موجب	$U_0 < 0$ سالب
$q > 1$	متزايدة	متناقصة
$0 < q < 1$	متناقصة	متزايدة

كل متتالية هندسية: $\Rightarrow$ جدول الإتباع لدراسة الإطراد

• أدرس اتجاه تغير متتالية

(A) $U_0 = 3$ موجب، $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n$ هندسية — متناقصة

(B) $U_0 = 3$، $U_{n+1} = U_n - 2$ — متناقصة

(C) $U_0 = 8$، $U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + 2$ لا هندسية ولا حسابية $\Rightarrow$ تجريب

n	0	1	2	3	4
U_n	8	8	8	8	8

ثابتة

(D) $U_0 = -2$ سالب، $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n$ هندسية — متزايدة

(E) $U_n = \frac{3n+1}{2n-5}$ صيغة

$$\frac{3 \times (-5) - 1 \times 2}{(2n-5)^2}$$

$$\frac{-15-2}{(2n-5)^2} = \frac{-17}{(2n-5)^2} < 0$$

متناقصة

صيغة مرجعية

استنتاج ...

$$f(x) = \frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \Rightarrow f'(x) = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{(a_2 x + b_2)^2}$$

$U_n = (-a)^n$ غير رتيبة

$U_n = 3(-2)^n$ غير رتيبة

• $U_n = -2^n$ هندسية

$q = 2$، $U_0 = -1$

U_n متناقصة

$U_n = (-2)^n$ غير رتيبة

$U_n = \frac{3^{2n+1}}{5^{2n+1}} \Rightarrow U_0 = \frac{3^1}{5^1} > 0$

أدرس اطراد ... هندسية

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25} = q$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{9}{25} < 1$$

U_n متناقصة.

$U_n = \frac{2^{3n+1}}{5^{n+1}}$ ، $U_0 = \frac{2^1}{5^1}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^3}{5^1} = \frac{8}{5} = q$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{8}{5} > 1$$

U_n متزايدة

Scanned by CamScanner

الأوساط

حسابية

مجموع الطرفين = الأوسط × 2

نتيجة: $a + b + c = 3b$

$U_0 + U_1 + U_2 = 3U_1$

$U_0 + \underbrace{U_2 + U_4} = 3U_2$

خطأ

$$\boxed{U_0 + \underbrace{U_2}_{2} + \underbrace{U_5}_{3} \neq 3U_2}$$

$a = a$
$b = a + r$
$c = a + 2r$

$U_1 = U_0 + r$

$U_5 = U_3 + 2r$

$U_{10} = U_{15} - 5r$

هندسية

جداء الطرفين = $(\text{الأوسط})^2$

$b^2 = a \cdot c$

نتيجة: a ، $2b$ ، $3c$ هندسية

$(2b)^2 = 3c \cdot a$

$$\boxed{4b^2 = 3ac}$$

- $a \cdot b \cdot c = b^3$
- $U_0 \cdot U_1 \cdot U_2 = U_1^3$
- $U_0 \cdot U_2 \cdot U_4 = U_2^3$

- $a = a$
  $b = aq$
  $c = aq^2$
- $U_2 = U_0 \cdot q^2$
  $U_{10} = U_5 \cdot q^5$

الدمج

من متتالية هندسية ⇐

$$\left.\begin{array}{l} a = a \\ b = aq \\ c = aq^2 \end{array}\right\} ①$$

ومن متتالية حسابية

② مجموع الطرفين = الأوسط × 2

نعوض ① في ②

نتحصل على a

ونستنتج q

Scanned by CamScanner

$$\underbrace{U_3 + U_4 + U_5}_{3U_4} + U_8 + U_9 + U_{10} =$$

$$3U_4 + 3U_9 =$$

[illegible] $3c$ ، $2b$ ، a

c ، b ، a

$$b^2 = a \cdot c$$

$$(2b)^2 = 3a \cdot c$$

$$4b^2 = 3a \cdot c$$

Scanned by CamScanner

المضاعفات:

$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a^1 + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1})$

أثبت أن $5^n - 2^n$ مضاعف لـ 3

$5^n-2^n=(5-2)$ (مقدار صحيح)

$=3$ (مقدار صحيح)

مضاعف لـ 3.

أثبت أن $5^{2n}-2^n$ هو مضاعف لـ 23

$5^{2n}-2^n=(5^2)^n-2^n$

$=25^n-2^n$

$=(25-2)$ (مقدار صحيح)

$=(23)$ (")

مضاعف لـ 23.

اختزل $3^{33}-2^{22}$

$=3^{33}-2^{22}$

$=(3^3)^{11}-(2^2)^{11}$

$=27^{11}-4^{11}$

$=(23)$ (مقدار صحيح)

مضاعف لـ 23

أثبت 4^n+2 مضاعف لـ 3.

$n=0$ $4^0+2=3$

$n=1$ $4^1+2=6$

$n=2$ $4^2+2=18$

أثبت $2^{3n}-1$ مضاعف لـ 7

$n=0$ $2^0-1=0$

$n=1$ $2^3-1=7$

$n=2$ $2^6-1=64-1=63$

• ليكن $U_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$

ادرس $V_n=U_{2n}-U_n$

بيانات V_n

(a) متزايدة (c) ثابتة

(b) منتهية (d) غير محدودة

$U_n = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}$

$U_{2n} = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$

$V_n=U_{2n}-U_n$

$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}$

$V_n = \frac{1}{n+1}+\underbrace{\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}} \to 2(n+1)$

[illegible]

$V_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\dots+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$

$V_{n+1}-V_n = \frac{1}{2n+1}+\underbrace{\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}}$

$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{2}{2n+2}$

$=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$

$=\frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0$

V_n متزايدة تماما

الطريقة العامة:

$U_0 = \_\_\_$

$U_{n+1} = \_\_\_$

نعرف الدالة f

$f(U_n) = U_{n+1}$

1- نحل $f(x) = x$

ونسمي الحل ℓ

2. نعرف متتالية جديدة

$\boxed{V_n = U_n - \ell}$

ونبرهن أن V_n هندسية.

3- نكتب عبارة V_n بدلالة n

ونستنتج U_n بدلالة n

مثال:

$U_0 = 7$

$U_{n+1} = 10U_n - 18$

$U_n = \left(7 + \frac{18}{1-10}\right)10^n - \frac{18}{1-10}$

$= (7-2)10^n + 2$

$= 5(10^n) + 2$

مثال:

$U_n = 3 \times 2^n + 4$

$U_0 = 7$

$U_{n+1} = aU_n + b$

عين a و b.

$U_n = 3(\underbrace{2^n}_{a^n}) \underbrace{+4}_{\frac{b}{1-a}}$

$\Rightarrow \boxed{a = 2}$

$4 = \frac{b}{1-a}$

$4 = \frac{b}{1-2} \Rightarrow 4 = \frac{b}{-1} \Rightarrow \boxed{b = -4}$

كتابة عبارة U_n بدلالة n

- لما هندسية: $U_0 = \_\_\_$, $U_{n+1} = aU_n$: $U_n = U_0 \cdot q^n$
- لما حسابية: $U_0 = \_\_\_$, $U_{n+1} = U_n + c$: $U_n = U_0 + (n-0)r$
- لما لا هندسية ولا حسابية:

نطبق القانون

$$U_n = \left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}$$

مثال:

$U_0 = 3$

$U_{n+1} = 4U_n + 5$

نكتب عبارة U_n بدلالة n.

$U_n = \left(3 - \frac{5}{1-4}\right)4^n + \frac{5}{1-4}$

$= \left(3 + \frac{5}{3}\right)4^n - \frac{5}{3}$

$U_n = \left(\frac{14}{3}\right)4^n - \frac{5}{3}$

Scanned by CamScanner

مثال $U_0 = 3$

$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2$

$V_n = U_n + a$ ولدينا

عين a حتى تكون V_n هندسية.

$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2$

$f(U_n) = U_{n+1}$

$f(x) = \frac{1}{3}x - 2$

نحل المعادلة $f(x) = x$

$\frac{1}{3}x - 2 = x$

$\frac{1}{3}x - x = +2$

$-\frac{2}{3}x = 2$

$-x = 3$

$\boxed{x = -3}$ ℓ

$\Rightarrow V_n = U_n - \ell$

$V_n = U_n + 3$

$V_n = U_n + a$

$\Rightarrow \boxed{a = 3}$

Scanned by CamScanner

$$* \quad U_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \Rightarrow U_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)-1} - \frac{1}{2(n-1)+1} = \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}$$

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$$

S_n

$$S_n = \left[\boxed{\frac{1}{-1}} - \cancel{\frac{1}{1}}\right] + \left[\cancel{\frac{1}{1}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right] + \left[\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right] + \dots + \left[\cancel{\frac{1}{2n-7}} - \cancel{\frac{1}{2n-5}}\right] + \left[\cancel{\frac{1}{2n-5}} - \cancel{\frac{1}{2n-3}}\right] + \left[\cancel{\frac{1}{2n-3}} - \boxed{\frac{1}{2n-1}}\right]$$

$$\Rightarrow S_n = -1 - \frac{1}{2n-1} = \frac{-2n+1-1}{2n-1} = \frac{-2n}{2n-1}$$

$$* \quad U_n = \frac{5^{2n} - 3^n}{3^{3n} - 2^{4n}}$$

يجب أن تكون الأسس موحدة

$$= \frac{(5^2)^n - 3^n}{(3^3)^n - (2^4)^n}$$

$$= \frac{25^n - 3^n}{27^n - 16^n}$$

نقسم على الأساس الأكبر

$$U_n = \frac{\left(\frac{25}{27}\right)^n - \left(\frac{3}{27}\right)^n}{1 - \left(\frac{16}{27}\right)^n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{0-0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$$

نهاية متتالية:

① U_n صريحة:

- $U_n = \boxed{n^2+n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

- $U_n = \dfrac{3n+1}{n-2}$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$$

- $U_n = \sqrt{n^2+2} - n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \infty - \infty \quad \text{ح ع ت}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

- $U_n = \sqrt{\underset{a}{9n^2}+\underset{b}{6n}+3} - n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \infty - \infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\frac{b}{2\sqrt{a}} = \frac{2}{2\sqrt{1}} = 1$$

② اضافة $-(-1)^n$ ،Sin ،Cos

$U_n = \dfrac{\boxed{3n}+\boxed{\sin(3n)}}{\boxed{2n}+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

يعتبروا مزعجين

$U_n = \dfrac{n^2+(-1)^n}{2n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

③ متتالية تراجعية:

1- حل المعادلة: $f(x)=x$

2- تخمين النهاية.

1- U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى
⇐ تؤول إلى الأكبر

2- U_n متناقصة ومحدودة من الأدنى
⇐ تؤول إلى الأصغر

Scanned by CamScanner

اثبت بالتدريج:

ط عند أي عدد n تكون العلاقة صحيحة

$n \geq 1$

① $(1+x)^n \geq 1+nx$

$(1+x)^0 \geq 1+0x$

$1 \geq 1$ صحيحة

∴ العلاقة صحيحة $n=0$

② $3n^2 \geq (1+n)^2$

$n=0$ $0 \geq 1$ خاطئة

$n=1$ $3 \geq 4$ ״

$n=2$ $12 \geq 9$ صحيحة

$\boxed{n=2}$ صحيحة

③ $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$n=1$ $1 = 1$ صحيحة

$\boxed{n=1}$ من

مراجعة

$S_n = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$

$S_1 = 1^2$

$S_2 = 1^2+2^2$

$S_3 = 1^2+2^2+3^2$

$S_4 = 1^2+2^2+3^2+4^2$

$S_{n+1} = \underline{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}+(n+1)^2$

$\boxed{S_{n+1} = S_n + (n+1)^2}$

ط ١ ـــ ثبت $E(n+1)$.

* $E(n): (1+x)^n \geq 1+nx$

نثبت $E(n+1): (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

صواب من $(n+1)$ المتوالي

* $E(n): S_n = \frac{n(n+1)(3n+2)}{4}$

$E(n+1):$ نثبت

$E(n+1): S_{n+1} = \frac{(n+1)(2(n+1)+1)(3(n+1)+2)}{4}$

$= \frac{(n+1)(2n+3)(3n+5)}{4}$

ط٣ نفرض أن العلاقة $\boxed{n<n-1}$ صحيحة عند عدد n

Ⓐ $E(n)$ صحيحة α

Ⓑ $E(n+1)$ صحيحة

Ⓒ $E(n+1)$ صحيحة عند $n \in \mathbb{N}$

Ⓓ $E(1)$ صحيحة عند العدد الأول α

$E(n)$ صحيحة عند $E(n+1)$ صحيحة عند كل القيم

$E(n)$ خاطئة ⟸ $E(n+1)$ من خاطئة عند كل القيم

$E(n)$ من خاطئة وتفرض أنها صحيحة ⟸ $E(n+1)$ خاطئة عند قيمة

$3<3-1$ $E(n+1)$ صحيحة عند قيمة

$3<2$

Scanned by CamScanner

ملاحظات

$1 \leq U_n \leq 3$

$$U_{n+1}-U_n = \frac{U_n(1-U_n)}{(U_n-3)(U_n+1)}$$

(a) U_n تزايدية

(b) U_n متناقصة

(c) U_n ثابتة

(d) غير رتيبة

$$\boxed{1 \leq \boxed{U_n} \leq 3}$$

موجب سالب

$$U_{n+1}-U_n = \frac{U_n(1-U_n)}{(U_n-3)(U_n+1)} \leq 0$$

سالبة موجب

$1 \leq U_n \Rightarrow 1-U_n \leq 0$

$U_n \leq 3 \Rightarrow U_n-3 \leq 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n =$ [illegible]

$= 3$

④ هندسية:

$-1<q<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

$q>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$

$q=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} U_n = U_0$

$q \leq -1$ ليس لها نهاية

أعداد - رتيبة - حسابية

متزايدة ومتناقصة ⇐ 2 حدود

متزايدة، حدود 2 ⇐ رتيبة 2

حدود 2 رتيبة 2 ⇐ متزايدة

⑤ مجاميع:

هندسية: حساب المجموع

1- حساب المجموع

2- مجموع الحدود

لا حسابية ولا هندسية

1- حصر

2- تجميع

3- ربطها بمتتالية هندسية

تقارب U_n

U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى

U_n متناقصة ومحدودة من الأسفل

$\lim\limits_{n\to\infty} U_n =$ عدد

Scanned by CamScanner

حسب نهاية كل مايلي :

① $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1$

S حسابية .

$3-1 = 2$
$5-3 = 2$
} S مجموع حدود متتالية حسابية $r = 2$

$S = n\left(\frac{a+\ell}{2}\right)$

$a = 1 \quad , \quad \ell = 2n-1$

$n = \frac{2n-1-1}{2} + 1$

$= \frac{2n-2}{2} + 1$

$= \frac{2(n-1)}{2} + 1$

$= n-1+1 = n$

$S = n\left(\frac{\cancel{1}+\cancel{2}(n\cancel{-1})}{\cancel{2}}\right)$

$= n^2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S = +\infty$

S متباعدة لأن $+\infty$

② $S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2^n}$

$= 1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{\text{مجموع حدود متتالية هندسية}}$

الحد الأول $= \frac{1}{2}$ ، $a = \frac{1}{2}$ ، $q = \frac{1}{2}$:

$\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \times \frac{4}{1} = \frac{1}{2}$

نبرهن / لنبرهن q ثابت

$S = 1 - \left(\frac{1}{2^{1}} \; \frac{1}{2^{2}} \; \frac{1}{2^{3}} \dots \frac{1}{2^{n}}\right)$

عدد الحدود $= \frac{n-1}{1} + 1 = n$

مجموع الهندسية $S = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$

$S = 1 - \left(a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)\right)$

$= 1 - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)\right)$

$$S = 1 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S = 0$ متقاربة نحو الصفر

$-1 < q = \frac{1}{2} < 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$$n \times \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq n \times \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \boxed{\frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}}} \qquad \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}}$$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$+\infty \qquad +\infty \qquad +\infty$

S متباعدة نحو [illegible]

[illegible]

---

③ $S = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

أحصر

الأصغر × عدد الحدود $\leq U_n \leq$ عدد الحدود × الأكبر

الأكبر $= 1,\ \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ، الأصغر $= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

عدد الحدود $= \frac{n-1}{1} + 1 = n$

④ $U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$

أحسب S_n ثم أدرس تقارب S_n

$$S_n = \left[\cancel{\frac{1}{2}} - 1\right] + \left[\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{2}}\right] + \left[\frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{3}}\right] + \dots + \left[\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n-2}\right] + \left[\cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n-1}}\right] + \left[\frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n}}\right]$$

$$S_n = \frac{1}{n+1} - 1$$
$$= \frac{1 - n - 1}{n+1}$$
$$= \frac{-n}{n+1}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -1$

$U_n = \frac{3^n + 2^{2n}}{3^n - 4^n}$

$= \frac{3^n + (2^2)^n}{3^n - 4^n}$

$= \frac{3^n \boxed{+ 4^n}}{3^n \boxed{- 4^n}}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = -1$

الكبير الصغير

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

S ← ح 1*

$S = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdots + \frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{11}}$

$S = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{11}}$

$= \cancel{1} + \cancel{\sqrt{2}} - \cancel{1}$

$+ \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}}$

$+ \cancel{\sqrt{4}} - \cancel{\sqrt{3}}$

$+ \cancel{\sqrt{9}} - \cancel{\sqrt{8}}$

$+ \cancel{\sqrt{10}} - \cancel{\sqrt{9}}$

$+ \sqrt{11} - \cancel{\sqrt{10}}$

$= \sqrt{11}$

$-1 + \sqrt{11}$

$\sqrt{11} - 1$

$n < 10 - 2$

$n < 10$

10

محدودية

صريحة

ح1 نبرهن P

ح2 [illegible]

تخمين

على المجال

$U_n = 3 - \frac{1}{n}$

$U_n \leq 3$

$V_n = 3 + \frac{1}{n}$

$V_n \geq 3$

بالتراجع

مجموع سابقة

الدربية

✓ 39 ✓ 40

38 المتتالية الحسابية المعينة

$t_0 = P(0)$

$t_{n+1} = \frac{1}{2} t_n \boxed{+ n}$ دالة

$t_n = P(n) = an + b$

$t_{n+1} = a(n+1) + b$

$= an + a + b$

$t_{n+1} = \frac{1}{2} t_n + n$

$an + a + b = \frac{1}{2}(an + b) + n$

$an + a + b - \frac{1}{2} an - \frac{1}{2} b = n$

$\frac{1}{2} an + (a + \frac{1}{2} b) = n$

$\frac{1}{2} a = 1$

$\Rightarrow \boxed{a = 2}$

$a + \frac{1}{2} b = 0$

$2 + \frac{1}{2} b = 0$

$\frac{1}{2} b = -2$

$\boxed{b = -4}$

$t_n = P(n) = 2n - 4$

مثال $t_n = P(n)$

$t_{n+1} = \frac{1}{3} t_n + \underline{3n + 2}$

$t_n = P(n) = an + b$

$t_{n+1} = a(n+1) + b = an + a + b$

$an + a + b = \frac{1}{3} an + \frac{1}{3} b + 3n + 2$

$\frac{2}{3} an + a + \frac{2}{3} b = 3n + 2$

$\frac{2}{3} a = 3 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$

$a + \frac{2}{3} b = 2 \Rightarrow \frac{9}{2} + \frac{2}{3} b = 2 \Rightarrow \frac{2}{3} b = -\frac{5}{2} \Rightarrow b = -\frac{15}{4}$

37 $U_0 = \frac{1}{2}$

$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + U_n}{2}}$

تركيب U_n

$P(n) = x$

نضع المربع

$P(n) = \sqrt{\frac{1 + x}{2}}$

$P(n) = x$

تربيع $\sqrt{\frac{1 + x}{2}} = x$

$\frac{1 + x}{2} = x^2$

$1 + x = 2x^2$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4(2)(-1)$

$= 9$

$x_1 = \frac{1 + 3}{4} = 1$

$x_2 = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2}$

36 $U_{15} = -10, U_{30} = 20$

$U_8 + U_9 + U_{10} + U_{20} + U_{21} + U_{22}$

$= 3U_9 + 3U_{21}$

$S = 3(U_9 + U_{21})$

$U_{30} = U_{15} + (30 - 15)r$

$20 = -10 + 15r$

$30 = 15r \Rightarrow \boxed{r = 2}$

$U_n = U_{15} + (n - 15)2$

$= -10 + 2n - 30$

$\boxed{U_n = 2n - 40}$

$S = 3(2 \times 9 - 40 + 2 \times 21 - 40)$

$= 3(-22 + 2)$

$= 3(-20) = -60$

Scanned by CamScanner

(32) $U_n = \dfrac{2^{2n+1}}{3^{3n}}$

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{9} < 1$

(31) $U_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ 2

ⓐ $U_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$, ⓑ $\dfrac{2n+3}{n-3}$

ⓒ $\dfrac{n+1}{n+1}$ ⓓ $\dfrac{3n+1}{n+1}$

$U_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ $\dfrac{2-1}{(n+1)^2} > 0$

$U_n \leq U_{n+1} \leq 3$

$2 \leq U_{n+1} \leq U_n$

(29) $U_n = \left(-\dfrac{1}{n}\right) - 5$

$U_n \leq -5$, -4 , -3 , ...

$U_n = \left(\dfrac{1}{n}\right) + 2$

$U_n \geq 2$

أكبر عدد

(28)

$U_{n+1} - U_n =$

$1 \leq U_n$ $U_n \leq 3$

$0 \leq U_n - 1$ $U_n - 3 \leq 0$

$\lim_{n \to \infty} U_n =$

Scanned by CamScanner

[illegible] (27)

$$U_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \boxed{\frac{n}{5^n}}$$

$$n \leq 2^n$$

[illegible]

$$n \leq 2^n$$

نقارن مع [illegible]

ثم نقسم على 5^n

$$\frac{n}{5^n} \leq \frac{2^n}{5^n}$$

$$\frac{n}{5^n} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\frac{n}{5^n} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$n=1$: $\frac{1}{5} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^1$

$n=2$: $\frac{2}{5^2} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^2$

$n=3$: $\frac{3}{5^3} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^3$

$\vdots$

$n=n$: $\frac{n}{5^n} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

بالجمع طرف الى طرف

$$U_n \leq \underbrace{\frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{5}\right)^n}_{\text{[illegible]}}$$

$a = \frac{2}{5}$, $q = \frac{2}{5}$, عدد الحدود $= \frac{n-1}{1} + 1 = n$

$$U_n \leq a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$U_n \leq \frac{2}{5}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}\right)$$

$$\leq \frac{2}{5} \times \frac{5}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

[illegible]

$$U_n \leq \frac{2}{3}$$

[illegible]

$X_{n+1} = 4X_n + 2Y_n \quad Y_{n+1} =$

$X_0 = 1, \quad Y_0 = 2$

$U_n = 3X_n - 5Y_n$

$U_{n+1} = 3X_{n+1} + 5Y_{n+1}$

---

(21)

$U_0 = 1, \quad U_1 = 4$

$U_{n+1} = 5U_n - 6U_{n-1}$

$V_n = U_{n+1} - 3U_n$

$q = 2$ هندسية V_n

$W_n = U_{n+1} - 2U_n$

$q = 3$ هندسية W_n

---

(21)

$V_n = U_{n+1} - 2U_n$

$V_{n+1} = U_{n+2} - 2U_{n+1}$

[illegible] $U_{n+1} = 5U_n - 6U_{n-1}$

[illegible] $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n$

$V_{n+1} = 5U_{n+1} - 6U_n - 2U_{n+1}$

$= 3U_{n+1} - 6U_n$

$= 3(U_{n+1} - 2U_n)$

$V_{n+1} = 3V_n$

[illegible]

(20)

$U_n = \frac{1}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{3^2}{5^3} + \dots + \frac{3^{n-1}}{5^n}$

$U_n = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5} + \frac{3^2}{5^2} + \frac{3^3}{5^3} + \dots + \frac{3^n}{5^n}\right)$

$q = \frac{3}{5}, \quad a = \frac{3}{5}$ [illegible] $\frac{n-1}{1} + 1 = n$

$U_n = \frac{1}{3}\left(a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\left(\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}}\right)\right)$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$

$U_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$

يهمل

$U_n \leq \frac{1}{2}$

[illegible]

$\lim U_n = \frac{1}{2}(1-0)$

$= \frac{1}{2}$ [illegible] U_n

---

(13)

$S = 10 + 100 + \dots + 1000000$

$= 10^1 + 10^2 + \dots + 10^6$

هندسية

$q = 10, \quad a = 10$

عدد الحدود $= 6 - 1 + 1 = 6$

$S = 10\left(\frac{1-10^6}{1-10}\right)$

$= 10 \times \frac{1 - 1000000}{1 - 10}$

$= 10 \times \frac{-999999}{-9}$

$= 10 \times 111111$

$= 1111110$

$U_0 = 1 \quad U_{n+1} = \dfrac{2U_n + S_n}{3}$

$S_0 = 4 \;,\; S_{n+1} = \dfrac{2S_n + U_n}{3}$

$W_n = S_n - U_n$

$W_{n+1} = S_{n+1} - U_{n+1}$

$= \dfrac{2S_n + U_n}{3} - \dfrac{2U_n + S_n}{3}$

$= \dfrac{2S_n - S_n + U_n - 2U_n}{3}$

$= \dfrac{S_n - U_n}{3}$

$= \dfrac{W_n}{3} = \dfrac{1}{3} W_n$

Scanned by CamScanner

$Z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

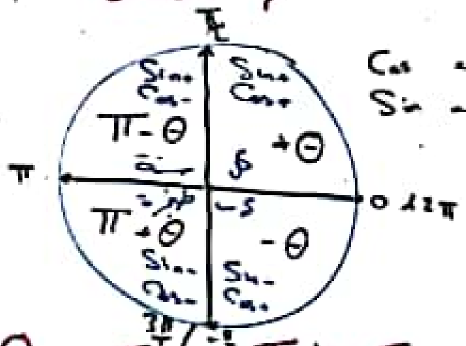
$Z = r \cdot e^{i\theta}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

r عدد حقيقي موجب و عدد i

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$



Cos → x

Sin → y

Θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$

$Z = 2 - 2i$

كل عدد مركب

$|x| = |y|$

فالزاوية $\frac{\pi}{4}$ أو مضاعفاتها.

$r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\theta = -\frac{\pi}{4}$

$Z = 2\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$

$= 2\sqrt{2} \cdot e^{-i\pi/4}$

$Z = -8 - 8i$

$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$r = \sqrt{64+64} = \sqrt{64 \times 2}$

$Z = 8$

* $z = 3$ حقيقي موجب

$|z| = 3$

$\arg z = 0 \ (2\pi)$

$z = 3 \cdot e^{i0} = 3 \cdot e^{i2\pi}$

* $z = -3$ حقيقي سالب

$|z| = 3$

$\arg z = \pi$

$z = 3 \cdot e^{i\pi}$

$z = 2i$ تخيلي موجب

$|z| = 2$

$\arg z = \frac{\pi}{2}$

$z = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z = -3i$

$|z| = 3$

$\arg z = -\frac{\pi}{2}$

$z = 3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$

* $1 = e^{i2\pi}$

$-1 = e^{i\pi}$

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

1- الزاوية ليست في الدورة الأولى

⇐ إرجاع للدورة الأولى

((الدورة الأولى السالب أو غير سالبة))

الإرجاع: مسألة ثابتة

الزاوية = الأصل + $\frac{\text{الباقي}}{\text{الصحيحة}}$

كل مضاعفات زوجية لـ π بيطلع

* كيف نحول من سالبة إلى غير سالبة:

غير سالبة : $2\pi -$ سالبة

+

سالبة : $2\pi -$ غير سالبة

تركيز على سؤال:
أن تكون الزاوية في الدورة الأولى.

Scanned by CamScanner

نكسات الشكل الأسي والمثلثي:

① r سالبة: $+\pi$

$$z = -3\left[\cos\left(\frac{14\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{14\pi}{5}\right)\right]$$

arg z = ميزن

Ⓐ $-\frac{\pi}{5}$ Ⓒ $\frac{\pi}{5}$

Ⓑ $\frac{4\pi}{5}$ Ⓓ $-\frac{4\pi}{5}$

$$z = 3\left[\cos\left(\frac{19\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{5}\right)\right]$$

$$\arg z = \frac{19\pi}{5}$$

السطر > ضفني الكعاء

الزاوية ليست في الدورة الأولى

$$19\pi \div 5 = 3\pi, \quad 19\pi - 15\pi = 4\pi$$

$$\frac{19\pi}{5} = 3\pi + \frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{19\pi}{5} = \cancel{2\pi} + \pi + \frac{4\pi}{5}$$

يعمل

$$= \pi + \frac{4\pi}{5}$$

$$= \frac{9\pi}{5} - 2\pi = -\frac{\pi}{5}$$

سالب ⟶ غير سالب

$$z = (1-\sqrt{2})\, e^{i\frac{20\pi}{3}}$$

سالب

arg z ميزن

Ⓐ $\frac{5\pi}{3}$ Ⓒ $\frac{2\pi}{3}$

Ⓑ $\frac{4\pi}{3}$ Ⓓ $\frac{\pi}{3}$

$$\sqrt{2} > 1$$

$$z = -(\underbrace{\sqrt{2}-1}_{\text{موجب}})\, e^{i\frac{20\pi}{3}}$$

$+\pi$

$$= (\sqrt{2}-1)\, e^{i\frac{23\pi}{3}}$$

$$\arg z = \frac{23\pi}{3}$$

$$3 \overline{\smash{)}23\pi}$$
7π (quotient), 21π, remainder 2π

$$7\pi + \frac{2\pi}{3}$$
$$= \cancel{6\pi} + \pi + \frac{2\pi}{3}$$
$$= \frac{5\pi}{3}$$
$$= -\frac{\pi}{3}$$

---

② r تكون i :

① $z = i\, e^{i\frac{\pi}{5}}$ ($i = e^{i\frac{\pi}{2}}$)

$$= e^{i\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right)}$$
$$= e^{i\left(\frac{7\pi}{10}\right)}$$

---

② $z = -3i\, e^{i\frac{\pi}{7}}$

$$= 3 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{2}\right)}$$
$$= 3\, e^{i\, -\frac{5\pi}{14}}$$

عدد معقد كامل :

③ $z = \underbrace{(1 - i\sqrt{3})}_{w}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$w = 1 - i\sqrt{3}$$
$$r = \sqrt{1+3} = 2$$
$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2} \\ \sin\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} -\frac{\pi}{3}$$
$$w = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$= 2 \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= 2 \cdot e^{i\, -\frac{\pi}{12}}$$

$$a - b = -(b - a)$$

$r\{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\ \}$

$i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Scanned by CamScanner

تحسينات الشكل لأعداد المركب :

r سالب : — إشارة سالبة — العكس

$$Z = (-2i)\left[\sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5}\right]$$

نبدأ بالعكس

$$= -2i\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\right]$$

$$= -2i\left[\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right]$$

$$-\frac{\pi}{2} \quad i \quad \frac{3\pi}{10}$$

$$= -2i\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{8\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{8\pi}{10}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)\right]$$

$$Z = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}\right]$$

$$= 1 + i$$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z = 2\left[\cos\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right]$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{5}\,(1+i)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{5}\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= \underbrace{2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{5}}_{r}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Scanned by CamScanner

$$z = \sin\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$$

$$= \sin\frac{\pi}{7}(1-i)$$

$$= \sin\frac{\pi}{7}(\sqrt{2}\cdot e^{i-\frac{\pi}{4}})$$

$$= \underbrace{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{7}}_{r} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\bar{z} = r \cdot e^{-i\theta}$$

$$= r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

$$= r^n \cdot e^{i(n\theta)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Scanned by CamScanner

① $z = 1 - i$

$z^{10} = (1-i)^{10}$

$= ((1-i)^2)^5$

$= (\cancel{1} - 2i \cancel{+ i^2})^5$

$= (-2i)^5 = -32 i^5$

$= -32 \boxed{i^4} i$

$+1$

$= -32i$

$z = 1 - i$ ردوموا $\frac{b}{i}$

$= \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$z^{10} = (\sqrt{2})^{10} e^{-i\frac{10\pi}{4}}$

$= (2^{\frac{1}{2}})^{10} e^{-\frac{5i\pi}{2}}$

$= 2^5 \cdot e^{-\frac{5i\pi}{2}}$

$= 32 \times -i = -32i$

② z ص $1 - i$

$z^4 - 3z^3 - 2z^2 + 10z - 12 = 0$

بأن اجل اوهار

اوها سل جعيعية

$z_2 = \bar{z}_1 = 1 + i$

$\overline{3 - iz} = |\sqrt{3} + i| - 2$

$3 + i\bar{z} = \sqrt{3+1} - 2$

$3 + i\bar{z} = 0$

$i\bar{z} = -3$

$\bar{z} = -\frac{3}{i}$

$\bar{z} = 3i$

$z = -3i$

④ $z = 3 - 4i$ (x, y)

$$Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{4}{25}$$

$$Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{3}{25}$$

صورة مختصرة

$$z = x + iy$$

$$Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

وزاري

$$z = 5 - 2i$$

$$\bar{z} = 5 + 2i$$

$$Im\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{-2}{27}$$

اكرامين ← يعني نفسه تغير سالبه

$\bar{z}$ -2

وزاري: $z = \frac{1}{1-3i} \Rightarrow \frac{1}{z} = \underset{Re}{1} \underset{Im}{-3i}$

$$Re\left(\frac{1}{z}\right) = 1$$

$$Im\left(\frac{1}{z}\right) = -3$$

$$\frac{1}{3-4i}$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = +i$$

$$e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i$$

$$\frac{a}{i} = -ia$$

$$-\frac{a}{i} = +ia$$

$$\frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$$

CamScanner

Scanned by CamScanner

⑤ فكرة مهمة:

$Z = 1 + e^{i\,\text{زاوية}}$

اكتب بالشكل الأسي

ثم احسب arg و الطول

نخرج عامل مشترك

$e^{i\,(\text{نصف الزاوية})}$

$Z = 1 - e^{2i\theta}$ $\quad]\pi, 2\pi[$

$= e^{i\theta}\left(\frac{1}{e^{i\theta}} - \frac{e^{2i\theta}}{e^{i\theta}}\right)$

$= e^{i\theta}\left(\underset{\text{المرافق}}{e^{-i\theta}} - \underset{\text{العدد}}{e^{i\theta}}\right)$

العدد + المرافق : $2x = 2\cos(\ )$

العدد − المرافق : $2iy = 2i\sin(\ )$

المرافق − العدد : $-2iy = -2i\sin(\ )$

المرافق − الأصل

$Z = e^{i\theta}\left(e^{-i\theta} - e^{i\theta}\right)$

$= e^{i\theta}\left(-2i\sin\theta\right)$

$= -2i\boxed{\sin\theta}\,.\,e^{i\theta}$

ربع ثالث ورابع $]\pi, 2\pi[$

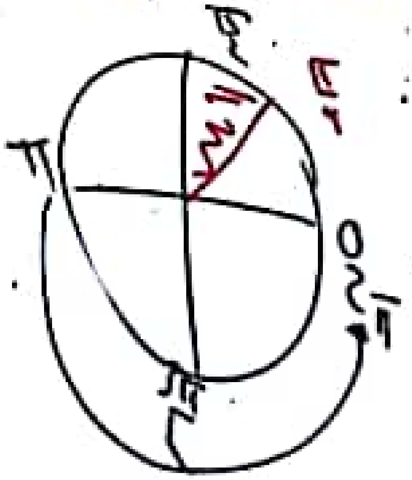
$\sin\theta < 0$

$= i\,(\underbrace{\ominus 2\sin\theta}_{\text{سالبة سالب} \atop \text{موجب}})\,e^{i\theta}$ $\quad e^{i\frac{\pi}{2}}$

$Z = (-2\sin\theta)\,e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$

$\arg Z = \theta + \frac{\pi}{2}$

$|Z| = -2\sin\theta$



تمرين

$z = e^{i\theta}$

$\theta \in]\pi, 2\pi[$

$z = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} - \frac{1}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\right)$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$

العدد - المرافق

$2iy$

$2i\sin(\frac{\theta}{2})$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$= 2i\sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$

$= 2\sin\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$ arg

$\theta \in]\pi, 2\pi[\Rightarrow \frac{\theta}{2} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

ولكن $\sin\frac{\theta}{2} > 0$

تمرين $z = e^{i\theta} + 1$

$\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

$z = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} + \frac{1}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\right)$

$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$

المرافق + العدد

$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$= 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$

$\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

$\Rightarrow \frac{\theta}{2} \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ ولكن

$\cos\frac{\theta}{2} > 0$

$\Rightarrow \quad r = 2\cos\frac{\theta}{2}$

$\arg z = \frac{\theta}{2}$

$z = r e^{i\theta}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Scanned by CamScanner

حل اخر $z = -1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$

$$\frac{\frac{\pi}{12}}{2} = \frac{\pi}{24}$$

$$z = e^{i\frac{\pi}{24}}\left(-\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{24}}} - \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{24}}}\right)$$

$$= -e^{i\frac{\pi}{24}}\left(e^{-i\frac{\pi}{24}} + e^{i\frac{\pi}{24}}\right)$$

الزاوية بالعدد

$$= -e^{i\frac{\pi}{24}}\left(2\cos\frac{\pi}{24}\right)$$

$$= -2\cos\frac{\pi}{24} \cdot e^{i\frac{\pi}{24}}$$

موجب علان $\frac{\pi}{24}$ حادة.

$$z = \boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)} e^{i\frac{25\pi}{24}} \quad \arg$$

⑥ $z = i\sqrt{3} - e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$= i\sqrt{3} - \left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= i\sqrt{3} - \left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= i\sqrt{3} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ } زاوية $\frac{\pi}{3}$

$$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z = 1\, e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

CamScanner

Scanned by CamScanner

(7) $Z = \dfrac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}$

العدد - الأس

$Z = \dfrac{\cancel{2i\sin\frac{\theta}{2}}}{-\cancel{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = -1$

---

(8) $Z = \dfrac{i}{\cos x - i\sin x}$

$Z = \dfrac{i(\cos x + i\sin x)}{(\cos x - i\sin x)(\cos x + i\sin x)}$

$= \dfrac{i\cos x - \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x \rightarrow 1}$

$= i\cos x - \sin x$

$Z = \dfrac{i}{\cos x - i\sin x}$

$= \dfrac{i}{\cos(-x) + i\sin(-x)}$

$= \dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{-ix}}$

$= e^{i\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$= -\sin x + i\cos x$

جمع $\frac{\pi}{2}$ مع زاوية
تقلب Sin ← Cos
Cos ← Sin
والإشارة حسب الربع

جمع π مع زاوية
تبقى
Sin ← Sin
Cos ← Cos
والإشارة حسب الربع

Scanned by CamScanner

٩

$$1z^2 + pz + q = 0$$

$z_1 = 2i$, $z_2 = 1-i$

عين p ، q حتى يكون z_1 , z_2 حلول

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

$$z_1 \cdot z_2 = +\frac{c}{a}$$

$$z_1 + z_2 = -\frac{p}{1}$$

$$2i + 1 - i = -\frac{p}{1}$$

$$i + 1 = -\frac{p}{1}$$

$$-1 + i = -p$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 1 - i}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{q}{1}$$

$$(2i)(1-i) = \frac{q}{1}$$

$$2i + 2 = \frac{q}{1}$$

$$\boxed{-2 + 2i = q}$$

C) $p = 1 - i$

$q = -2 + 2i$

١٥ ص ٢ ح أ :

$z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 + 3i$

$z_3 = -2i$

$$\arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3$$

$$= \arg (z_1 \cdot z_2 \cdot z_3)$$

$$= \arg ((1+2i)(1+3i)(-2i))$$

$$= \arg ((1 + 5i - 6)(-2i))$$

$= \arg((-5-5i)(-2i))$

$= \arg(+10i-10)$

$= +\frac{\pi}{4}$

$z_1 = 1+2i$

$r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right\}$ زاوية غير شهيرة

ص ٤ $\boxed{11}$

$r = \sqrt{10}$

$\arg(1+3i) - \arg(3-i)$

$= \arg\left(\frac{1+3i}{3-i}\right)$

$= \arg\left(\frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}\right) = \arg\left(\frac{3+10i-3}{9+1}\right)$

$= \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{1+3i}{3-i} \begin{array}{l} \times i \\ \times i \end{array}$

CamScanner

Scanned by CamScanner

$Z = -3+4i$

جد الجذرين التربيعيين:

$w = \sqrt{Z} = x + iy$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \end{cases}$$

$2xy = 4$

$2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$y \cdot x$ $b > 0$

$w_1 = 1+2i \;,\; w_2 = -w_1$

$= -1-2i$

$r = \sqrt{9+16} = 5$

$$w_1 = \sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{5+-3}{2}} + i\sqrt{\frac{5+5}{2}} = 1+2i$$

$$w_2 = -\sqrt{\frac{r+a}{2}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2}}$$

$= -1-2i$

$Z = -6-8i$

$r = \sqrt{36+64} = 10$

$$w_1 = -\sqrt{\frac{10-6}{2}} + i\sqrt{\frac{10+6}{2}}$$

$= -\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

$w_2 = -w_1 = \sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

$Z = -27i$

جد الجذور من الرتبة 3.

$Z = -27i$

$= 27 e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$W_K = \sqrt[3]{r} \cdot e^{i(\ldots}$

$= \sqrt[3]{27}\, e^{i(\ldots}$

$W_K = 3 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{3}\ldots}$

$K=0 \Rightarrow w_0 = 3 \cdot \ldots$

$K=1 \Rightarrow w_1 = 3 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{2}+\ldots}$

$K=2 \Rightarrow w_2 = 3 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{2}\ldots}$

Scanned by CamScanner

$r = \sqrt{9+16} = 5$ $\frac{-b}{2}$

$w_1 = +\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}}$

$= \sqrt{\frac{5+-3}{2}} + i\sqrt{\frac{5+3}{2}} = 1+2i$

$w_2 = -\sqrt{\frac{r+a}{2}} - i\sqrt{\frac{r-a}{2}}$

$= -1-2i$

$Z = -6-8i$

$r = \sqrt{36+64} = 10$

$= -\sqrt{\frac{10-6}{2}} + i\sqrt{\frac{10+6}{2}}$

$= -\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

$w_2 = -w_1 = \sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

$2i$

$Z = -27i$

3. جد الجذور من الرتبة

$Z = -27i$ نكتب

$= 27\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$W_K = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi K}{n}\right)}$

$= \sqrt[3]{27}\, e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi K}{3}\right)}$

$W_K = 3 \cdot e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi K}{3}\right)}$

$K=0 \Rightarrow w_0 = 3 \cdot e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{3}\right)} = 3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$k=1 \Rightarrow w_1 = 3 \cdot e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right)} = 3 \cdot e^{i\frac{3\pi}{6}} = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$K=2 \Rightarrow w_2 = 3 \cdot e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right)} = 3 \cdot e^{i\frac{7\pi}{6}}$

Scanned by CamScanner

12 ص **13**

$\because z = e^{i\theta}$

$z^n - \bar{z}^n$

$= (e^{i\theta})^n - (e^{-i\theta})^n$

$= \underbrace{e^{ni\theta}}_{\text{العدد}} - \underbrace{e^{-ni\theta}}_{\text{مرافق}}$

$= 2i\sin(n\theta)$

---

14 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$

$\frac{4}{z_1} + \frac{4}{z_2} + \frac{4}{z_3} =$ $z_1 + z_2 + z_3 = 2$

خواص
ارافق $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$\frac{4}{z_1} + \frac{4}{z_2} + \frac{4}{z_3}$

$= \frac{4\bar{z}_1}{z_1 \cdot \bar{z}_1} + \frac{4\bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} + \frac{4\bar{z}_3}{z_3 \cdot \bar{z}_3}$

$= \frac{4\bar{z}_1}{|z_1|^2} + \frac{4\bar{z}_2}{|z_2|^2} + \frac{4\bar{z}_3}{|z_3|^2}$

$= \frac{4\bar{z}_1}{4} + \frac{4\bar{z}_2}{4} + \frac{4\bar{z}_3}{4}$

$= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3$

$= \overline{(z_1 + z_2 + z_3)}$

$= \bar{2} = 2$

$\frac{z_1}{4} + \frac{z_2}{4} + \frac{z_3}{4} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

15

$\boxed{13}$ 12 ص

$z = e^{i\theta}$

$z^n - \bar{z}^n$

$= (e^{i\theta})^n - (e^{-i\theta})^n$

$= e^{ni\theta} - e^{-ni\theta}$

الأس - الحد

$= 2i\sin(n\theta)$

$\boxed{14}$

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$

$z_1 + z_2 + z_3 = 2$

$\frac{4}{z_1} + \frac{4}{z_2} + \frac{4}{z_3} =$

خواص رأس

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$\frac{4}{z_1} + \frac{4}{z_2} + \frac{4}{z_3}$

$= \frac{4\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1} + \frac{4\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} + \frac{4\bar{z}_3}{z_3\bar{z}_3}$

$= \frac{4\bar{z}_1}{|z_1|^2} + \frac{4\bar{z}_2}{|z_2|^2} + \frac{4\bar{z}_3}{|z_3|^2}$

$= \frac{4\bar{z}_1}{4} + \frac{4\bar{z}_2}{4} + \frac{4\bar{z}_3}{4}$

$= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3$

$= \overline{(z_1 + z_2 + z_3)}$

$= \bar{2} = 2$

$\frac{z_1}{4} + \frac{z_2}{4} + \frac{z_3}{4} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\boxed{15}$

Scanned by CamScanner

$\frac{4}{z_1}+\frac{4}{z_2}+\frac{4}{z_3}$

$=\frac{4\bar{z}_1}{z_1\cdot\bar{z}_1}+\frac{4\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}+\frac{4\bar{z}_3}{z_3\cdot\bar{z}_3}$

$=\frac{4\bar{z}_1}{|z_1|^2}+\frac{4\bar{z}_2}{|z_2|^2}+\frac{4\bar{z}_3}{|z_3|^2}$

$=\frac{4\bar{z}_1}{4}+\frac{4\bar{z}_2}{4}+\frac{4\bar{z}_3}{4}$

$=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3$

$=\overline{(z_1+z_2+z_3)}$

$=\bar{z}=2$

$\frac{z_1}{4}+\frac{z_2}{4}+\frac{z_3}{4}=\frac{z_1+z_2+z_3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\boxed{15}$ $|z-\bar{z}|=2$

$|2iy|=2$

بتربيع الطرفين

$|2iy|^2=4$

$(2y)^2=4$

$4y^2=4$

$y^2=1$

$y=+1$

$y=-1$

$|2y|=2$

$\therefore 2y=2$

$y=1$

$\therefore 2y=-2$

$y=-1$

$\boxed{16}$ $z=\bar{z}(i+z)$

حيث z عدد حقيقي

بأن $M(z)$ تمثل

كما ان z حقيقي

$\bar{z}=z$

$z(-i+\bar{z})=\bar{z}(i+z)$

$-iz+\cancel{|z|^2}=i\bar{z}+\cancel{|z|^2}$

$-\cancel{i}z=\cancel{i}\bar{z}$

$\bar{z}=-z$

$M(z)$ تمثل الاعداد التخيلية صفحة ٣٣

$\Leftarrow$ محور الصادات

$$|z+\bar{z}|^2 - |z-\bar{z}|^2 = 4 \quad \boxed{17}$$

$$|2x|^2 - |2iy|^2 = 4$$

$$4x^2 - 4y^2 = 4$$

$\boxed{\div 4}$ $\quad x^2 - y^2 =$

$\boxed{18}$

$$\alpha = e^{\frac{2i\pi}{7}}$$

$$A = \alpha - \alpha^6$$

$$A = \alpha - \alpha^6$$

$$= \alpha - \alpha^6$$

$$= e^{\frac{2\pi}{7}} - e^{\frac{12\pi}{7}}$$

$$\frac{12\pi}{7} = 2\pi - \frac{2\pi}{7}$$

$$= -\theta = -\frac{2\pi}{7}$$

$$\frac{12\pi}{7} = -\frac{2\pi}{7}$$

$$A = e^{\frac{2i\pi}{7}} - e^{-\frac{2i\pi}{7}}$$

$$= 2i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$\alpha = e^{i\frac{\pi}{7}}$$

$$A = \alpha + \alpha$$

$$B = \alpha - \alpha$$

$$C = \alpha + \alpha$$

$$D = \alpha - \alpha$$

$$A = \alpha - \alpha^3$$

$$= e^{\frac{\pi}{7}} - e$$

$$= \cos\frac{\pi}{7} - \cos$$

$$= 2i\sin\frac{\pi}{7}$$

Scanned by CamScanner

$e^{\frac{12i\pi}{7}}$

$2\pi - \theta$

$2\pi - \frac{2\pi}{7}$

$= -\theta = -\frac{2\pi}{7}$

$-\frac{2\pi}{7}$

$-e^{\frac{-2i\pi}{7}}$

$- \;$ أعراض

$i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

$$\alpha = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$= \alpha + \alpha^5$$

$$B = \alpha - \alpha^5$$

$$C = \alpha + \alpha^7$$

$$D = \alpha - \alpha^7$$

$$A = \alpha + \alpha^5$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

① البُعد > صفر

② البُعد < صفر

③ البُعد < صفر

$$= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$= \cancel{\cos\frac{\pi}{6}} + i\sin\frac{\pi}{6} - \cancel{\cos\frac{\pi}{6}} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 2i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$A = \alpha + \alpha^5$$

$$= \alpha + \frac{\alpha^6}{\alpha}$$

$$\alpha^6 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = e^{i\pi} = -1$$

$$A = \alpha - \frac{1}{\alpha}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$B = \alpha - \alpha^5 = \alpha - \frac{\alpha^6}{\alpha}$$

$$\alpha^6 = -1$$

$$B = \alpha - \frac{(-1)}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{\alpha}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\cos\frac{\pi}{6}$$

$$C = \alpha + \alpha^7 = \alpha + \alpha^1\alpha^6$$

$$\alpha^6 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = e^{i\pi} = -1$$

$$C = \alpha + \alpha(-1) = \alpha - \alpha = 0$$

$$D = \alpha - \alpha^7 = \alpha - \alpha^1\alpha^6$$

$$= \alpha - \alpha^1(-1) = \alpha + \alpha$$

$$= 2\alpha$$

$$= 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Scanned by CamScanner

19

$\alpha = e^{i\frac{\pi}{7}}$

$S_1 = \underline{1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^6}$ ($1 = \alpha^0$)

مجموع حدود متتالية هندسية

$q = \alpha \quad , a = 1$

عدد الحدود $S_1 = \frac{6-0}{1} + 1 = 7$

$$S_1 = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$= 1\left(\frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}\right)$$

$$= \frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}$$

$$\alpha^7 = \left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^7 = e^{i\pi} = -1$$

$$S_1 = \frac{1+1}{1-\alpha} = \frac{2}{1-\alpha}$$

$S_2 = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{13}$ ($1 = \alpha^0$)

$a = 1 \ , \ q = \alpha$

عدد الحدود $S_1 = \frac{13-0}{1} + 1 = 14$

$$S_2 = 1\left(\frac{1-\alpha^{14}}{1-\alpha}\right)$$

$$\alpha^{14} = \left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^{14} = e^{i2\pi} = +1$$

$$S_2 = \frac{1-1}{1-\alpha} = 0$$

$\alpha = e^{i\frac{\pi}{7}}$

$A = \alpha^6 + \alpha^8$

$= \frac{\alpha^7}{\alpha^1} + \alpha^7\alpha$

$\alpha^7 = \left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^7 = e^{i\pi}$

$A = -\frac{1}{\alpha} - \alpha$

$= -\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{7}}} - e^{i\frac{\pi}{7}}$

$= -\left(e^{-i\frac{\pi}{7}} + e^{i\frac{\pi}{7}}\right)$

$= -2\cos\frac{\pi}{7}$

$|x| = a$

إما $x = +a$

أو $x = -a$

متراجحة

$|x| > a$

إما

$x > a \quad]a, +\infty[$

$x < -a \quad]-\infty, -a[$

$x \in]-\infty, -a[\cup]a$

$S_1 = \frac{1+1}{1-\alpha} = \frac{2}{1-\alpha}$

$S_2 = \underset{\alpha^0}{1} + \alpha + \dots + \alpha^{13}$

$a = 1, \quad q = \alpha$

عدد الحدود $= \frac{13-0}{1} + 1 = 14$

$S_2 = 1\left(\frac{1-\alpha^{14}}{1-\alpha}\right)$

$\alpha^{14} = \left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^{14} = e^{i2\pi} = +1$

$S_2 = \frac{1-1}{1-\alpha} = 0$

$\alpha = e^{i\frac{\pi}{7}}$

$A = \alpha^6 + \alpha^8$

$= \frac{\alpha^7}{\alpha^1} + \alpha^1\alpha^7$

$\alpha^7 = \left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^7 = e^{i\pi} = -1$

$A = -\frac{1}{\alpha} - \alpha$

$= -\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{7}}} - e^{i\frac{\pi}{7}}$

$= -\left(e^{-i\frac{\pi}{7}} + e^{i\frac{\pi}{7}}\right)$

$= -2\cos\frac{\pi}{7}$

(20) $z^2 - \alpha z + 1 = 0$

ا- عين α للمعادلة جذران متساويان.

$D = b^2 - 4ac = \alpha^2 - 4$

جذران مترافقان	جذران حقيقيان	جذر مضاعف
$D < 0$	$D > 0$	$D = 0$
$\alpha^2 - 4 < 0$	$\alpha^2 - 4 > 0$	$\alpha^2 - 4 = 0$
$\alpha^2 < 4$	$\alpha^2 > 4$	$\alpha^2 = 4$
نجذر	نجذر	$\alpha = +2$
$\lvert\alpha\rvert < 2$	$\lvert\alpha\rvert > 2$	$\alpha = -2$
$-2 < \alpha < 2$	إما $\alpha > 2$ $]2, +\infty[$	$\alpha \in \{-2, 2\}$
$\alpha \in]-2, 2[$	أو $\alpha < -2$ $]-\infty, -2[$	

$\alpha \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

$\lvert x\rvert = a$
إما $x = +a$
أو $x = -a$

متراجحة

$\lvert x\rvert > a$
إما $x > a$ $]a, +\infty[$
$x < -a$ $]-\infty, -a[$ $\rightarrow x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$

(3) $\lvert x\rvert < a$

$-a < x < a \rightarrow x \in]-a, a[$

Scanned by CamScanner

$$z = \frac{1+iu}{i+u}$$ 21

$|u| = 1 \Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{u}$

$$\bar{z} = \frac{1-i\bar{u}}{-i+\bar{u}}$$

$$= \frac{1-\frac{i}{u}}{-i+\frac{1}{u}} = \frac{\frac{u-i}{u}}{\frac{-iu+1}{u}}$$

$$= \frac{u-i}{-iu+1} \neq \frac{\bar{z}}{-\bar{z}}$$

ليس حقيقي وليس تخيلي

$$w = \frac{z-2i}{z-1}$$ 23

w تخيلي

نفرض $a = 2i$, $b = 1$

$$w = \frac{z-a}{z-b}$$

w تخيلي

معناه $\arg w = \pm\frac{\pi}{2}$

$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

دائرة قطرها $[AB]$

محذوف منها

$b = 1$

* حقيقي

$$w = \frac{z-2i}{z-1}$$

w حقيقي

$a = 2i$, $b = 1$

$\arg w = 0(\pi)$

$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0(\pi)$$

المستقيم (AB) محذوف منه B

$$w = \frac{z-2i}{z-i}$$

w حقيقي

$a = 2i$, $b = i$

$$w = \frac{z-a}{z-b}$$

$\arg w = 0(\pi)$

$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0(\pi)$$

المستقيم (AB) محذوف منه B

والمستقيم (AB) ينطبق على yy'

ممثل الأعداد التخيلية البحتة

محذوف i

$w = \frac{\ldots}{z}$

حقيقي

$a = 2,$

$\arg w$

$\arg($

المستقيم (AB)

محذوف منه B

نستثني

إحداث

الموجبة

السالبة

محذوف 1.

Scanned by CamScanner

24 $z_A = 1-2i$

$z_B = 3-2i$

$|z-1+2i| = 2$

$|z-w| = r$

تمثل دائرة مركزها $M(z)$

$z_A = 1-2i$

ونصف قطرها $r=2$

$AB = |b-a| = |3-2i-1+2i| = |2| = 2 = r$

نصف قطرها AB.

$w = \frac{z-2i}{z-1}$

w حقيقي

$a=2i,\ b=1$

$\arg w = 0(\pi)$

$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0(\pi)$

تمثل المستقيم (AB) محذوف منه B

<= (AB) ينطبق على xx'

<= تمثل الأعداد الحقيقية الموجبة

محذوف منها 1.

$w = \frac{z-2i}{z-i}$

w حقيقي

$a =$ [illegible] ، $b = i$

$w = \frac{z-a}{z-b}$

$\arg w = 0(\pi)$

$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0(\pi)$

تمثل المستقيم (AB) محذوف منه B

و المستقيم (AB) ينطبق على yy'

<= تمثل الأعداد التخيلية الموجبة

محذوف منها i

$\frac{\pi}{2}$

$= 0(\pi)$

$\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0(\pi)$

المستقيم

(27) $z^2 - (1+2i)z + 3 + 3i = 0$ (a, b, c)

$z_1 = 3i$

نفرض $z_2 = \overline{z_1}$

لان لا ثابت غير معقدة

$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$

$3i + z_2 = \frac{1+2i}{1}$

$z_2 = 1 + 2i - 3i$

$\boxed{z_2 = 1 - i}$

(28) متى يتساوى عددان

$r_1 = r_2$

$\theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$

$\theta_2 = \theta_1$

$\theta_2 = \theta_1 + 2\pi k$

$\theta_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

$k = 1 \quad \theta_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi$

$= \frac{11\pi}{5}$

(29) نضرب بالنسبة لـ x

$z' = \bar{z}$

يبقى x نفسه

تتغير y

نضرب بالنسبة لـ y

$z' = -\bar{z}$

تتغير x

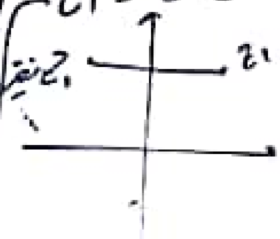
نفسه y

نضرب بالنسبة للمبدأ

$z' = -z$

تتغير y, x

$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$



$z_1 = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

$= 2\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$= 1 + i\sqrt{3}$

y تتغير

$z' = -1 + i\sqrt{3}$

(30) $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 - i$

$I_m(z_1 \cdot \overline{z_2})$:

θ_1

$\theta_1 + 2\pi k$

$= \frac{\pi}{5} + 2\pi k$

$\theta_2 = \frac{\pi}{5} + 2\pi$

$= \frac{11\pi}{5}$

نغير بإشارة $\boxed{29}$

$z' = \bar{z}$

نغير x نبقي

y نبقي

نغير بإشارة

$z' = -\bar{z}$

نغير x

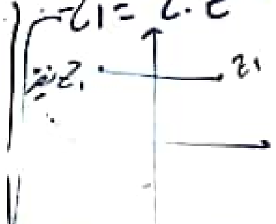
نبقي y

نغير بإشارة الـ

$z' = -z$

نغير y - x

$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$



$z_1 = 2\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\}$

$= 2\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

$= 1 + i\sqrt{3}$

نبقي نغير

$z' = -1 + i\sqrt{3}$

$z_1 = 2 - 3i \,,\, z_2 = 1 - i$ $\boxed{30}$

$Im(z_1 \cdot \bar{z}_2)$:

$z_1 \cdot \bar{z}_2$

$= (2-3i)(1+i)$

$= 2 + 2i - 3i + 3$

$= 5 - i$

$Re = 5$

$Im = -1$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$\boxed{42}$

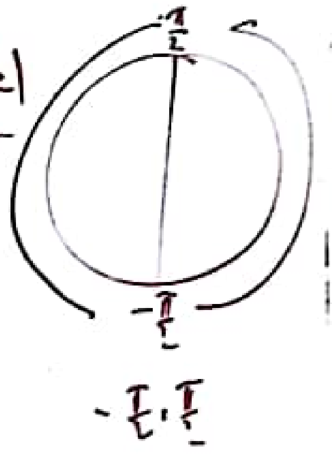
$|a+b|^2 + |a-b|^2$

$= 2|a|^2 + 2|b|^2$

$|z - 2i|^2 + |z - 2i|^2$

$= 2|z|^2 + 8$

$2 \times (2)^2$



Scanned by CamScanner

$$|a+b|^2+|a-b|^2$$

$$(a+b)(\bar{a}+\bar{b})+(a-b)(\bar{a}-\bar{b})$$

مرافق العدد × العدد = $|$العدد$|^2$

$$=|a|^2+\cancel{a\bar{b}}+\cancel{\bar{a}b}+|b|^2$$
$$+|a|^2-\cancel{a\bar{b}}-\cancel{\bar{a}b}+|b|^2$$
$$=2|a|^2+2|b|^2$$

$$|a+b|^2-|a-b|^2$$
$$=(a+b)(\bar{a}+\bar{b})-(a-b)(\bar{a}-\bar{b})$$
$$=|a|^2+a\bar{b}+\bar{a}b+\cancel{|b|^2}$$
$$-|a|^2+a\bar{b}+\bar{a}b-\cancel{|b|^2}$$
$$=2a\bar{b}+2\bar{a}b$$

$$|\overset{a+b}{z+2i}|^2-|\overset{a-b}{z-2i}|^2$$
$$=2(\overset{a}{z})(\overset{\bar{b}}{-2i})+2(\overset{\bar{a}}{\bar{z}})(2i)$$
$$=-4iz+4i\bar{z}$$

$\boxed{M2}$

$z_A = \sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i$

$z_B = \bar{z}_A$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$

$\theta = \arg z_A$

$z_B = \bar{z}_A$

① $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) =$

$= \arg(z_A) - \arg(z_B)$

$= \arg(z_A) - \arg(\bar{z}_A)$

$= \theta - (-\theta)$

$= 2\theta$

② $\arg(z_A \cdot z_B) =$

$= \arg z_A + \arg z_B$

$= \theta - \theta = 0$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \arg(z_A) - \arg z_B$

$= \arg z_A - \arg \bar{z}_A$

$= \arg z_A + \arg z_A$

$= 2\arg z_A$

$z_A = \sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i$

$r = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}$

$= \sqrt{3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \times \sqrt{2}$

$\frac{z_A}{z_B} = \frac{(\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i)^2}{(\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)i)(\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i)}$

$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2+2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)i-(\sqrt{3}-1)}{8}$

$|a+b|^2 + |a-b|^2$

$(a+b)(\bar{a}+\bar{b}) + (a-b)(\bar{a}-\bar{b})$

$|\ldots|^2 =$ [illegible]

$= |a|^2 + a\bar{b} + \bar{a}b + |b|^2$

$+ |a|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b + |b|^2$

$= 2|a|^2 + 2|b|^2$

$|a+b|^2 - |a-b|^2$

$= (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) - (a-b)(\bar{a}-\bar{b})$

$= |a|^2 + a\bar{b} + \bar{a}b + |b|^2$

$- |a|^2 + a\bar{b} + \bar{a}b - |b|^2$

$= 2a\bar{b} + 2\bar{a}b$

$|\overset{a}{z} + \overset{b}{2i}|^2 - |\overset{a}{z} - \overset{b}{2i}|^2$

$= 2(z)(-2i) + 2(\bar{z})(2i)$

$= -4iz + 4i\bar{z}$

42

$z_A = \sqrt{3}+1 + (\sqrt{3}-1)i$

$z_B = \bar{z}_A$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$

$\theta = \arg z_A$

$z_B = \bar{z}_A$

① $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) =$

$= \arg(z_A) - \arg(z_B)$

$= \arg(z_A) - \arg(\bar{z}_A)$

$= \theta - (-\theta)$

$= 2\theta$

② $\arg(z_A \cdot z_B) =$

$= \arg z_A + \arg z_B$

$= \theta - \theta = 0$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \arg(z_A) - \arg z_B$

$= \arg z_A - \arg \bar{z}_A$

$= \arg z_A + \arg z_A$

$= 2\arg z_A$

$z_A = \sqrt{3}+1 + (\sqrt{3}-1)i$

$r = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}$

$= \sqrt{3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\frac{z_A}{z_B} = \frac{(\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i)^2}{(\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)i)(\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i)}$

$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)i - (\sqrt{3}-1)^2}{8}$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\cancel{3}+2\sqrt{3}+1+2(3-1)i-\cancel{3}+2\sqrt{3}-\cancel{1}}{8}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-4i}{8}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{8} + \frac{4i}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$r = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{array}\right\} \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \arg\frac{z_A}{z_B} = \frac{\pi}{6}$$

Q6

M2

$z_A = \sqrt{3}+1+(\sqrt{3}\cdot$

$z_B = \bar{z}_A$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$

$\theta = \arg z_A$

$z_B = \bar{z}_A$

1. $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) =$
$= \arg(z_A) - \arg(z_B)$
$= \arg(z_A) - \arg(\bar{z}_A)$
$= \theta - (-\theta)$
$= 2\theta$

2. $\arg(z_A \cdot z_B) =$
$= \arg z_A + \arg z_B$
$= \theta - \theta = 0$

Scanned by CamScanner

$-1)\ i^2 - 3 + 2\sqrt{3} - 1$

$\boxed{43}$ $z_B = \bar{z}_A$

$\frac{z_A}{z_B} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

$\arg z_A$

$\cdot\ \frac{z_A}{z_B} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \arg\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$

$2\arg z_A = \frac{2\pi}{3}$

$\arg z_A = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\boxed{45}$

$\boxed{3}$ $e.s!\ z$

$\arg z = \theta$

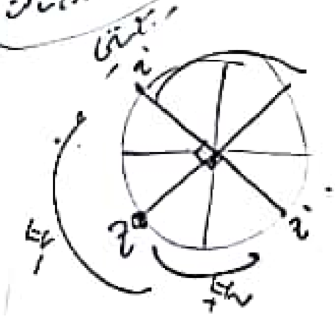
$M' \to z' = -2iz$

$\arg z' = \arg(-2iz)$

$= -\frac{\pi}{2} + \arg z$

$= -\frac{\pi}{2} + \theta$

$= \theta - \frac{\pi}{2}$



$z' = -z$

$\arg z' = \arg(-z)$

$= \arg(-1) + \arg z$

$= \pi + \theta$

M''

$\boxed{39}$ 40

$\boxed{15}$

585

46

$z_A = 1-i$, $z_B = 3+2i$

$z_C = c$

$g = 2+i$

G م/ك ثقل (ABC).

$$g = \frac{a+b+c}{3}$$

$$2+i = \frac{1-i+3+2i+c}{3}$$

$$6+3i = 4+i+c$$

$$\boxed{C = 2+2i}$$

47

ملاحظة ادارية.

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = (\vec{AC}, \vec{AB})$$

$$\arg\left(\frac{c}{b}\right) = 0$$

$$\arg\left(\frac{a-0}{b-0}\right) = 0$$

$$(\vec{OB}, \vec{OA}) = 0$$

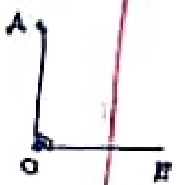
$\vec{OA}$, $\vec{OB}$ مرتبطان

O ، A ، B على استقامة واحدة

$$\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\arg\left(\frac{a-0}{b-0}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$(\vec{OB}, \vec{OA}) = \pm\frac{\pi}{2}$$



OAB مثلث قائم الزاوية

49

$a =$

$(\vec{AB},$

$C = R($

$(A,$

B دوران ... بزاوية

A مركز $\frac{\pi}{...}$

$z - w = e^{i\theta}($

$C - a = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$C + i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right.$

$C + \cancel{1} = \cancel{1} - \sqrt{3}$

$C = -\sqrt{3}$

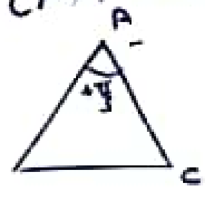
Scanned by CamScanner

$\vec{AC}$ .. $\vec{AB}$)

49 $a=-i$, $b=+i$

ABC متساوي الأضلاع

$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$



$C = R(B)$
$(A, +\frac{\pi}{3})$

C صورة B بالدوران
R بزاوية $\frac{\pi}{3}$ ومركزه A.

$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$

$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$

$c + i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(i + i)$

$c + \cancel{i} = \cancel{i} - \sqrt{3}$

$c = -\sqrt{3}$

50 $\theta = (\vec{u}, \vec{AB}) \rightarrow \theta = \arg(z_{\vec{AB}})$
$= \arg(z_B - z_A)$

$z_C = i(z_B - z_A)$

$(\vec{u}, \vec{OC})$ نجد

$= \arg(z_C)$

$= \arg(i(z_B - z_A))$

$= \arg(i) + \boxed{\arg(z_B - z_A)}$

$= +\frac{\pi}{2} + \theta$

51 $a = 1 + i$, $b = 3 - i$

$c = 2 + \sqrt{3} + i\sqrt{3}$

R الدوران C صورة B
بزاوية θ ومركزه A.

$c - a = e^{i\theta}(b - a)$

$e^{i\theta} = \frac{c - a}{b - a} = \frac{2 + \sqrt{3} + i\sqrt{3} - 1 - i}{3 - i - 1 - i} = \frac{(1 + \sqrt{3} + i\sqrt{3} - i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} = 2 + 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{3}$

Scanned by CamScanner

$$e^{i\theta} = \frac{(1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}$$

$$= \frac{2+\cancel{2i}+2\sqrt{3}+2i\sqrt{3}+2i\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\cancel{2i}+2}{4+4}$$

$$= \frac{4+4i\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

52) $a = 3i$, $b = 2$, $c = 6-6i$

A و B و C على استقامة واحدة

بحيث k:

$$c - a = k(b-a)$$

$$k = \frac{c-a}{b-a}$$

$$= \frac{6-6i-3i}{2-3i}$$

$$= \frac{6-9i}{2-3i} = \frac{3(2-3i)}{2-3i}$$

$$\boxed{k = 3}$$

ملاحظة:

* $c - a = \pm i(b-a)$

$$C = R_{(A, \pm\frac{\pi}{2})}(B)$$

(ABC) قائم في A ومتساوي الساقين

* $c - a = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

ABC متساوي الأضلاع

الأضلاع الثلاث متساوية الأطوال

Scanned by CamScanner

عدد حقيقي

$$\boxed{c-a = \boxed{2}(b-a)}$$

$$\begin{cases} \arg(c-a) = \arg(2(b-a)) \\ (\vec{u}, \vec{AC}) = \arg(2) + \arg(b-a) \\ (\vec{u}, \vec{AC}) = 0 + (\vec{u}, \vec{AB}) \end{cases}$$

$\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مرتبطان

A و C و B على استقامة واحدة

$$|c-a| = |2(b-a)|$$

$$\boxed{AC = 2AB}$$

$$c-a = 2i(b-a)$$

ليست دوران
وليس تشابه

$AC = 2AB$ لأن

$(\vec{AB}, \vec{AC}) = +\frac{\pi}{2}$

$AB \perp AC$

ABC قائم في A

$$c-a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b-a)$$

الزاوية بين الضلعين $\frac{\pi}{4}$

$$|AC| = |AB|$$

ABC مثلث متساوي الساقين

دوران لا يغير الأطوال

53

$a = 1+i$

$b = 3+2i$

$c = \lambda + 3i$

$\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ متوازيان

$z_{\vec{AB}} = b - a = 3+2i-1-i$

$= 2 + i$

$z_{\vec{AC}} = c - a = \lambda + 3i - 1 - i$

$= (\lambda - 1) + 2i$

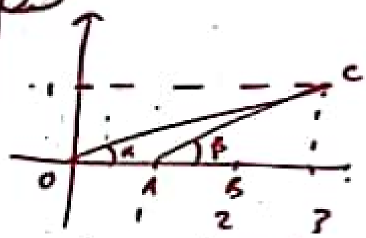
المركبات متناسبة

$$\frac{2}{\lambda - 1} = \frac{1}{2}$$

$\lambda - 1 = 4$

$\boxed{\lambda = 5}$

54



$\alpha = (\vec{OA}, \vec{OC})$

$\beta = (\vec{AB}, \vec{AC})$

$\alpha + \beta$

$= (\vec{OA}, \vec{OC}) + (\vec{AB}, \vec{AC})$

$= \arg\left(\frac{c}{a}\right) + \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$

$= \arg\left(\frac{3+i}{1}\right) + \arg\left(\frac{3+i-1}{2-1}\right)$

$= \arg(3+i) + \arg(2+i)$

=

=

=

=

55

$= ($

$= a$

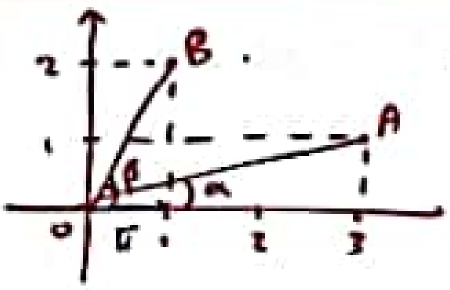
$= ar$

$= \arg$

Scanned by CamScanner

$= \arg\left((3+i)(2+i)\right)$
$= \arg(6+5i-1)$
$= \arg(5+5i)$
$= \frac{\pi}{4}$

55



$\theta = \beta - \alpha$
$= (\vec{u}, \vec{OB}) - (\vec{u}, \vec{OA})$
$= \arg z_B - \arg z_A$
$= \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg\left(\frac{1+2i}{3+i}\right)$
$= \arg\left(\frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}\right) = \arg\left(\frac{3-i+6i+2}{9+1}\right)$

$= \arg\left(\frac{5+5i}{10}\right)$
$= \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$
$= \frac{\pi}{4}$

Scanned by CamScanner

$a = 1+i$ $\quad$ 1. $\quad c = -1+4i$ $\quad$ 56

$b = 3+i$

ABCD D

$z_{\overline{AD}} = z_{\overline{BC}}$

$d - a = c - b$

$d = a + c - b$

$= 1+i-1+4i-3-i$

$= -3+4i$

57 $\quad b - 1 = (-)(a-1)$

$k = -1$

$B = H(A)$
$(w=1, k=-1)$

$b - 1 = e^{i\pi}(a-1)$

$B = R(A)$
$(w=1, \theta=\pi)$

$b - 1 = -a + 1$

$b = 2 - a$

$b = 2(1) - a$

$b = 2w - a$

[illegible] A [illegible] B

$w = 1$

C

58

مرعداد

C [illegible] A

C

$A = R(B)$
$(C, +\frac{\pi}{2})$

$= \frac{1}{2}(z'(1+i)) + i$

3) $b-1=\ominus(a-1)$

$k=-1$

$B=H(A)$
$(w=1,\ k=-1)$

$b-1=e^{i\pi}(a-1)$

$B=R(A)$
$(w=1,\ \theta=\pi)$

$b-1=-a+1$

$b=2-a$

$b=2(1)-a$

$b=2w-a$

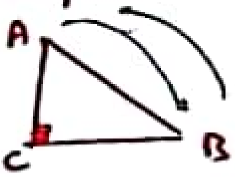
B صورة A بتماثل مركزي

$w=1$

58

التعبير عن مركز الدوران

ABC قائم في C



$A=R(B)$
$(C,\ +\frac{\pi}{2})$

مركز الدوران $=\frac{1}{2}\left(z'(1+i)+z(1-i)\right)$

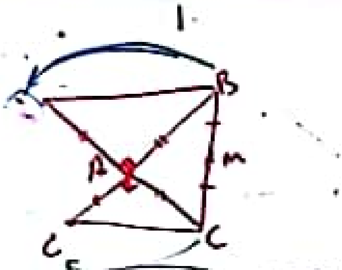
$C=\frac{1}{2}\left(a(1+i)+b(1-i)\right)$

$B=R(A)$
$(C,\ -\frac{\pi}{2})$

مركز الدوران $=\frac{1}{2}\left(z(1+i)+z'(1-i)\right)$

$C=\frac{1}{2}\left(a(1+i)+b(1-i)\right)$

Scanned by CamScanner



$(\textcircled{A}, \vec{u}, \vec{v})$

M منتصف $[BC]$

$$\boxed{m = \frac{b+c}{2}}$$

استعملنا الكتابة ل

الكتابات B ، C ، 0

بدلالة B' ، C'

أي العبارة B ، C بدلالة

B' ، C' .

$$B' = R_{(A, +\frac{\pi}{2})}(B)$$

$$b' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-a)$$

$$b' - 0 = i(b-0)$$

$$\frac{b'}{i} = \frac{ib}{i}$$

$$b = \frac{b'}{i} = -ib'$$

$$C' = R_{(A, -\frac{\pi}{2})}(C)$$

$$c' - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c-a)$$

$$c' - 0 = -i(c-0)$$

$$c' = -ic \Rightarrow c = \frac{c'}{-i} = ic'$$

$$m = \frac{-ib' + ic'}{2}$$

$$= \frac{i(c' - b')}{2}$$

$$t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}} =$$

$$=$$

$$\boxed{\frac{2t}{1-t^2}}$$

Scanned by CamScanner

$$m = \frac{-ib' + ic'}{2}$$

$$= \frac{i(c' - b')}{2}$$

61

$$t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{2i\,\sin(\frac{\theta}{2})}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= i\,\tan(\tfrac{\theta}{2})$$

$$\boxed{\frac{2t}{1-t^2}} = \frac{2i\,\tan(\frac{\theta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{2i\,\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} = 2i\sin\frac{\theta}{2}\times\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= i\sin\theta$$

$$2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \sin\theta$$

Scanned by CamScanner

كمل توافيق

$P_7^3 = 7\times6\times5 = 210$

$\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$

$\binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$

$P_4^2 = 4\times3 = 12$

$\binom{10}{7} = \frac{10\times9\times8\times\boxed{7\times6\times5\times4}}{\boxed{7\times6\times5\times4}\times3\times2\times1}$

$= \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = \binom{10}{3}$

$\binom{8}{6} = \binom{8}{2}$

$\binom{10}{9} = \binom{10}{1}$

$\binom{4}{3} = \binom{4}{1}$

ص ٤١

1. $\binom{8}{4} + \binom{8}{5} = \binom{9}{5}$

$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} = \binom{11}{4}$

$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r+1} = \binom{n}{r+1}$

2. $2\binom{n+1}{3}$

$n+1 \geq 3 \geq 0$

$\boxed{n \geq 2}$

$\boxed{n =}$

$2\binom{n+1}{3}$

$2\times\frac{(n+1)(}{3\times}$

$\boxed{n =}$

3. $\binom{6}{2n} =$

$6 \geq 2n \geq 0$

$3 \geq n \geq 0$

$3 \geq n \geq 0$

$6 \geq n+$

$5 \geq n \geq$

$5 \geq n \geq$

② $2\binom{n+1}{3} = P^{2}_{n+1}$

$n+1 \geq 3 \geq 0$ $\quad$ $n+1 \geq 2 \geq 1$

$\boxed{n \geq 2}$ تقاطع $\boxed{n \geq 1}$

$\boxed{n \geq 2}$

$$2\binom{n+1}{3} = P^{2}_{n+1}$$

$$2 \times \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3 \times 2 \times 1} = (n+1)(n)$$

$$n-1 = 3$$

$$\boxed{n = 4}$$

3 $\binom{6}{2n} = \binom{6}{n+1}$ مع

$6 \geq 2n \geq 0$ $\quad$ $6 \geq n+1 \geq 0$ $\quad$ التقاطع

$3 \geq n \geq 0$ $\quad$ $5 \geq n \geq -1$

$3 \geq n \geq 0$ $\quad$ $5 \geq n \geq 0$

التقاطع $0 \leq n \leq 3$

معادلة مع

① مساواة

$2n = n+1$

$\boxed{n = 1}$

② مجموع

$2n + n + 1 = 6$

$3n = 5$

$n = \frac{5}{3} \notin \mathbb{N}$ مرفوض

$\binom{9}{5}$

$\binom{11}{4}$

Scanned by CamScanner

① $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$

$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

العدد $n = n$, $a = x^3$

$b = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$T_r = \binom{n}{r} (x^3)^{n-r} (x^{-2})^r$

$= \binom{n}{r} x^{3n-3r} x^{-2r}$

$= \binom{n}{r} x^{3n-5r}$

ثابت

$x^0 = x^{3n-5r}$

يجب عزل r

$0 = 3n - 5r$

$5r = 3n$

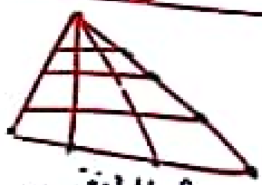
$\boxed{r = \frac{3}{5} n} \in N$

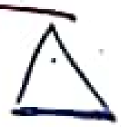
n مضاعف لـ 5

$5r = 3n$

$\cancel{n = \frac{5}{3} r}$

$\boxed{5}$





مستقيمات

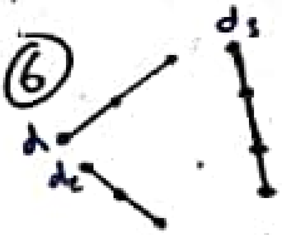
يوجد 4 ساقات بدي 2

يوجد 4 افقي بدي 1

$\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} = 6 \times 4 = 24$

Scanned by CamScanner

(6)



مثلثات :

ط1 (1) d_1, d_2, d_3 أو d_1, d_2 أو d_1, d_3 أو d_2, d_3 ... من كل مستقيم نقطة

$$\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1} + \binom{3}{2}\binom{3}{1} + \binom{3}{2}\binom{4}{1} + \overset{d_2}{\binom{3}{2}\binom{3}{1}} + \binom{3}{2}\binom{4}{1}$$

$$+ \overset{d_3}{\binom{4}{2}}\binom{3}{1} + \binom{4}{2}\binom{3}{1} =$$

ط2 (1)

$$\binom{6}{3} <$$

3 نقاط ... مستقيم
ثلاث نقاط على استقامة

حالة خاصة

ثلاث نقاط ... ثلاث نقاط ... ليس لها الحد الأعلى

$$\binom{10}{3} - \binom{3}{3} - \binom{3}{3} - \binom{4}{3}$$

$$= 120 - 1 - 1 - 4 = 114$$

عدد المستقيمات.

ط1 $d_1 d_2$ أو $d_1 d_3$ أو $d_2 d_3$ أو d_1

$$\binom{3}{1}\binom{3}{1} + \binom{3}{1}\binom{4}{1} + \binom{3}{1}\binom{4}{1} + 3$$

$$9 + 12 + 12 + 3 = 36$$

ط2

$$\binom{10}{2} <$$

مستقيمات مكررة
مستقيمات غير مكررة

$$\binom{10}{2} - \underset{\binom{3}{2}=3}{\underset{d_1}{2}} - \underset{\binom{3}{2}=3}{\underset{d_2}{2}} - \underset{\binom{4}{2}=6}{\underset{d_3}{5}} = 36$$

$= 24$

⑦ عدد المصافحات
n شخص 36

$$\binom{n}{2} = 36$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 36$$

$$\frac{n^2 - n}{2} = 36$$

$$n^2 - n = 72$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n-9)(n+8) = 0$$

$$\boxed{n = 9}, \quad n = -8 \ ✗$$

حفلة مكونة من n شخص
يوجد 4 أشخاص مرضى بعد
إذا كان عدد المصافحات
39 احسب
عدد الأشخاص

$$\binom{n}{2} - \binom{9}{2} = \text{عدد المصافحات}$$

$$\binom{n}{2} - \binom{4}{2} = 39$$

$$\binom{n}{2} - 6 = 39$$

$$\binom{n}{2} = 45$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45$$

$$n^2 - n = 90$$

$$n^2 - n - 90 = 0$$

$$(n-10)(n+9) = 0$$

$$n = 10, \quad n = -9 \ ✗$$

⑧
300

3/5

3/8
2

5
6 +

(8) $\{0, 2, 3, 5, 8\}$

كم عدد مكون من 3 خانات مختلفة
مختلفة وأكبر من 300

آحاد عشرات مئات

3/5/8		0/5

5 مكررة
و 5 مكررة

ع1

3/5/8		0

$3 \times 3 \times 1 = 9$

$5 - 2 = 3$

ع2

3/8		5

$2 \times 3 \times 1 = 6$

$5 - 2 = 3$

$6 + 9 = 15$

عدد يتكون من 3 خانات
مختلفة وأكبر من
تكرار محسوب
لأنه ليس غير مسموح

3/5/8		0/5

$3 \times 5 \times 2 = 30$

تكرار محسوب

عدد يتكون من 3 خانات
مختلفة وأكبر من 300

3/5/8		0/5

$3 \times 5 \times 2 = 30 - 1 = 29$

لو طلب أكبر من 300
أو أكبر

كم عدد مكون من 3 خانات
مختلفة ومختلفة و
أكبر من 300

3/5/8		0/5

ع1

3/5/8		0

$9 = 3 \times 3 \times 1$

ع2

3/8		5

$6 = 2 \times 3 \times 1$

$9 + 6 = 15$

وهكذا أكبر من 300

$S = \{0, 2, 5, 8, 9\}$

* كم عدد مؤلف من منزلتين ويمكن تكراره؟

عشرات	آحاد
الكل عدا الصفر	الكل

$4 \times 5 = 20$

* كم عدد مؤلف من منزلتين مختلفتين ...؟

عشرات	آحاد
الكل عدا الصفر والذي اخترناه	الكل

بركي اخترنا الصفر بالآحاد.

حالة أولى:

الكل عدا الصفر	صفر

20
50
80
90

$4 = 4 \times 1$

حالة ثانية:

عشرات	آحاد
الكل عدا الصفر والذي اخترناه	الكل عدا الصفر

$12 = 3 \times 4$

$12 + 4 = 16$

52 25 29 ...
82 28 58 ...
92 ... ...

* كم عدد زوجي مؤلف من منزلتين مختلفتين زوجي

عشرات	آحاد
الكل عدا الصفر والذي اخترناه	0, 2, 8

(1)

الكل عدا الصفر	صفر

$4 = 4 \times 1$

$P^3_{n+2} = 6 P_n$

$(n+2)(n+1)n = 6 ...$

$n(n+1) = 6$

$n^2 + n - 6 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = \sqrt{25}$

$n_1 = \frac{-1+5}{2} = ...$

$n_2 = \frac{-6}{2} = -3$ مرفوض

(7) $P^3_{n+2} = 4P^2_{n+1}$

$n \geq 1$ $n ...$

$n \geq 1$

$P^3_{n+2} = 4P^2_{n+1}$

$(n+2)(n+1)n = 4(n+1)n$

$n + 2 = 1$

$n = -1$ مرفوض

(8) $P^2_n = 5P^1_{n+1}$

$n \geq 2$ $n \geq 0$

شرط المسألة $n \geq 2$

$(n)(n-1) = 5(n+1)$

$n^2 - n = 5n + 5$

$n^2 - 6n - 5 = 0$

$\Delta = 36 + 20 = 56$

(٢)

الكل عدا الصفر والخمسة	2 / 8

$6 = 3 \times 2$

$6 + 4 = 10$

* كم عدد مؤلف من منزلتين مختلفتين وزوجي وأكبر من 20.

عشرات	آحاد
2/5/8/9	0/2/8

الحالة الأولى.

2/5/8/9	0

$4 = 4 \times 1$

الحالة الثانية:

5/8/9	2

$3 = 3 \times 1$

الحالة الثالثة.

2/5/9	8

$3 = 3 \times 1$

$4 + 3 + 3 = 10$

* كم عدد مؤلف من منزلتين مختلفتين وزوجي وأكبر تماماً من 20
نبحث عن السؤال الثاني.
عدد الأرقام التي أكبر من 20
هي:
أي منه الأرقام هي 20

9 - 1 = 8 ← عدد الأرقام الأكبر تماماً من 20

* كم عدد زوجي مؤلف من منزلتين وأكبر تماماً من 50.

عشرات	آحاد
5/8/9	0/2/8

(1) بخلا $9 = 3 \times 3$ تكرار مسموح
4 كلها بعدد وأرقام أكبر من 50
لا يوجد نفس العدد
$8 = 1 - 9$ ← عدد الأرقام الأكبر تماماً من 50

* كم عدد مؤلف من ثلاث منازل؟

مئات	عشرات	آحاد
الكل عدا الصفر	الكل	الكل

$100 = 4 \times 5 \times 5$

* كم عدد مؤلف من ثلاث منازل مختلفة.

الكل عدا الصفر والاثنين	الكل عدا الاثنين	الكل

بركي اخترنا الصفر بالآحاد أو العشرات

الحالة الأولى

الكل عدا الصفر والاثنين	الكل عدا الصفر	صفر

$12 = 3 \times 4 \times 1$

الموضوع: (أمثلة) وفضاء الاحتمال (5) أول حل يجب ما في المئات بعدد من خانات وفيه يكون عندنا ثلاث منازل ومضاعف للـ (5) وفي خانة الصفر مادام بعدها صفر

الحالة الثانية:

الثالث غير الصفر	صفر	الثالث غير الصفر

$12 = 4 \times 1 \times 3$ ②

الحالة الثالثة:

الثالث غير الصفر وغير المختار	عدا الصفر والذي اخترناه	الكل عدا الصفر

بالتوافق

$24 = 2 \times 3 \times 4$

$12 + 12 + 24 = 48$

③ كم عدد مؤلف من ثلاث منازل مختلفة ومضاعف للـ ⑤

الكل عدا الذي اخترناه	عدا الذي اخترناه	0/5

الحالة الأولى:

الكل عدا الصفر والذي اخترناه	الكل عدا الصفر	0

بالعشرات

$12 = 3 \times 4 \times 1$

الحالة الثانية:

الكل عدا الصفر	الكل عدا الذي اخترناه	5

$9 = 3 \times 3 \times 1$

عدد الأرقام 3 → $5 = 2 \times 3$

عدد الثلاثات 6

325	385	205
805	395	925
985	925	905

④ كم عدد مؤلف من ثلاث منازل مختلفة ومضاعف للـ 5 وأصغر تماماً من 500

2		0/5

$1 \times 2 \times 3 = 6$

④ كم عدد مؤلف من ثلاث منازل مختلفة ومضاعف للـ 5 وأكبر من 500

5/8/9		0/5

الحالة الأولى:

8/5/9		0

$9 = 3 \times 3 \times 1$

الحالة الثانية:

9/8		5

$6 = 3 \times 2 \times 1$

$= 9 + 6 = 15$

④ كم عدد مؤلف من 3 منازل مضاعف للـ 5 وأكبر تماماً من 500

نوجد عدد الأعداد المؤلفة من 3 منازل من مضاعفات الخمسة وأكبر من 500

5/8/9	الكل	0/5

$30 = 3 \times ⑤ \times 2$ ومنه

الكل بتكرار مسموح.

30 رقم أكبر من 500

أو يساوي 500

$30 - 1 = 29$ عدد الأرقام

يدي اختار عنصرين مجموعها يقبل القسمة على 3 .

$S_0 = 3, 6, 9, 12$ باقي القسمة على 3 هو صفر = مضاعفات 3

$S_1 = 1, 4, 7, 10$ باقي القسمة واحد .

$S_2 = 2, 5, 8, 11$ باقي القسمة 2

عنصرين من S_0 أو عنصر من S_1 و عنصر من S_2

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{1}\binom{4}{1}$$

$$= 6 + 16 = 22$$

---

(2)

$1, 2, 3, \ldots 12$

عدد مجموعات جزئية مكونة من عنصرين مجموعهما زوجي :

زوجيات : $2, 4, 6, 8, 10, 12$ $\boxed{6}$

فرديات : $1, 3, 5, 7, 9, 11$ $\boxed{6}$

فردي (2) زوجي

$$\binom{6}{1} \times \binom{6}{1} = 36$$

مجموع زوجي

زوجي + زوجي ، فردي + فردي

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{2}$$

$$= 15 + 15 = 30$$

Scanned by CamScanner

(10) 11^{15}

بـ آحاد وعشرات ومئات

$(1+10)^{-}$

آحاد — T_0

آحاد وعشرات $T_1 + T_0$

آحاد وعشرات ومئات

$T_2 + T_1 + T_0$

$$11^{15} = (\overset{a}{1} + \overset{b}{10})^{\overset{n}{15}}$$

$$T_r = \binom{15}{r} (1)^{15-r} (10)^r$$

$$= \binom{15}{r} 10^r$$

$$T_0 = \binom{15}{0} 10^0 = 1$$

$$T_1 = \binom{15}{1} 10^1 = 15 \times 10 = 150$$

$$T_2 = \binom{15}{2} 10^2 = 10500$$

$$T_0 + T_1 + T_2$$

$$= 1 + 150 + 10500$$

$$= 10\boxed{651}$$

$\boxed{12^{15}}$ $\cancel{(2+10)^{15}}$

$\cancel{T_r = \binom{15}{r} 2^{15-r} 10^r}$

$\cancel{T_0 = \binom{15}{1} 2^{15} 10^0}$

$$\binom{n+1}{3}' = 5P_n^2$$

$n+1 \geq 3 \geq 0$ $\quad$ $n \geq 2 \geq 1$

$n \geq 2$ $\quad$ $n \geq 2$

شرط الحل $\boxed{n \geq 2}$

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)}{3 \times 2 \times 1} = 5(n)(n-1)$$

$n+1 = 30$

$\boxed{n = 29}$

معرفة مهمة:

لحساب معامل ال x^n نعوض ب

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

---

* جد التابع المفقود:

$f'(0) = 3$, $f''(0) = 8$, $f'''(0) = 12$

$f'(0) = 3 \rightarrow$ معامل ال x

$f^{(2)}(0) = 8 \rightarrow \frac{8}{2!} = 4$ معامل x^2

$f'''(0) = 12 \rightarrow \frac{12}{6} = 2$ معامل x^3

$3! \rightarrow 6$

$f(x) = \text{---} + 2x^3 + 4x^2 + 3x + \ldots$

---

11 $f(x) = (1+ax)^4 + (1+bx)^3$

12 x

$f'(x) = 4(1+ax)^3(a) + 3(1+bx)^2(b)$

$f'(0) = 4(1)(a) + 3(1)(b)$

$= 4a + 3b = 12$

---

* $f(x) =$

$34 =$ معامل x^2

a

$f'(x) = 5(\ldots$

$= 5a \ldots$

$f''(x) = 5a(\ldots$

$= \ldots a$

$f''(0) :$

معامل x^2 :

34

$68 \cdot$

$20 :$

Scanned by CamScanner

$\left(\ldots+1\right)' = 5P_n^2$

$n \geq 2 \geq 1$

$n \geq 2$

$\ldots = 5\,(n)(n-1)$

---

* صياغة التابع الكثير :

$f'(0) = 3\ ,\ f''(0) = 8\ ,\ f'''(0) = 12$

$f'(0) = 3 \longrightarrow$ أمثال x

$f''(0) = 8 \rightarrow \frac{8}{2!} = 4$ أمثال x^2

$f'''(0) = 12 \rightarrow \frac{12}{6} = 2$ أمثال x^3

$3! \longleftarrow 6$

$f(x) = \_\_ + 2x^3 + 4x^2 + 3x + \_\_$

---

(11) $f(x) = (1+ax)^4 + (1+bx)^3$

$\boxed{12}$ x

$f'(x) = 4(1+ax)^3(a) + 3(1+bx)^2(b)$

$f'(0) = 4(1)(a) + 3(1)(b)$

$= 4a + 3b = 12$

---

* $f(x) = (ax+1)^5 + (1+2x)^4$

إذا كانت أمثال $x^2 = 34$

أوجد a.

$f'(x) = 5(ax+1)^4(a) + 4(1+2x)^3(2)$

$= 5a(ax+1)^4 + 8(1+2x)^3$

$f''(x) = 5a(4(ax+1)^3(a)) + 24(1+2x)^2(2)$

$= 20a^2(ax+1)^3 + 48(1+2x)^2$

$f''(0) = 20a^2 + 48$

أمثال $x^2 = \frac{f''(0)}{2}$

$34 = \frac{20a^2 + 48}{2}$

$68 = 20a^2 + 48$

$20 = 20a^2 \Rightarrow a^2 = 1$

$a = \pm 1$

Scanned by CamScanner

(12)

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} + \frac{1}{\binom{n}{3}} = \frac{1}{\binom{n}{4}}$$

$n \geq 2$ $n \geq 3$ $n \geq 4$

$\boxed{n \geq 4}$ مجال الحل =

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} + \frac{1}{\binom{n}{3}} = \frac{1}{\binom{n}{4}}$$

$$\frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{1}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}}$$

$$\frac{2}{n(n-1)} + \frac{6}{n(n-1)(n-2)} = \frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$(n-2)(n-3)$ $(n-3)$

$$\frac{2(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{6(n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$2(n^2-5n+6)+6n-18=24$

$2n^2-10n+12+6n-18=24$

$2n^2-4n-30=0$

$n^2-2n-15=0$

$(n-5)(n+3)=0$

$n=5$ مقبول , $n=-3$ مرفوض

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

تكرار مسموح

كل	كل
5	5

تكرار غير مسموح

كل	كل عدا
5	4

21

بالترتيب

دائرة التبديل

مفهوم المثال أعداد

- 6 أعداد

6

$$\frac{1}{\binom{n}{4}}$$

$n \geq 4$

$$= \frac{1}{\binom{n}{4}}$$

$$\frac{1}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}}$$

$$= \frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$\frac{2(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \frac{6(n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$2(n^2-5n+6)+6n-18=24$$

$$2n^2-10n+12+6n-18=24$$

$$2n^2-4n-30=0$$

$$n^2-2n-15=0$$

$$(n-5)(n+3)=0$$

$n=5$ مقبول , $n=-3$ مرفوض

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$$

ترميزات

1, 2, 3, 4, 5

1. رموز مختلفة يتكون من 3 خانات تكرار مسموح

كل	كل	كل

$5 \times 5 \times 5 = 125$

2. رموز مختلفة الأرقام يتكون من 3 خانات تكرار ممنوع

كل	كل عدا واحد	كل عدا اثنين

$5 \times 4 \times 3 = 60$

3. إذا كان الرمز 3321

عدد الطرق الترتيبية

عدد الترتيب = عدد الكل ÷ ... $= \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$

مختلف الأرقام

4. عدد الرموز المكونة من 3 خانات لا تحمل الرمز الأول

عدد الرموز الكلية - عدد الرموز الصحيحة = عدد الرموز

$60 - 1 = 59$

فكرة توزيع الهدايا :

1- عدد الهدايا > الطلاب

م1 : حسب $\binom{\text{عدد الهدايا}}{2}$

م2 : أصبح عدد الهدايا = عدد الطلاب = n

توزيع n هدية على n طالب

$n!$

حسب العدد 1، 2 كالآتي

$\binom{\text{عدد الهدايا}}{2} \times$ عدد الطلاب!

مثال: 5 هدايا على 4 طلاب

$\binom{5}{2} = 10$

$4! = 24$

$10 \times 24 = 240$

2- عدد الطلاب = عدد الهدايا = n

$n!$

3- عدد الطلاب > عدد الهدايا

$P_{\text{عدد الطلاب}}^{\text{عدد الهدايا}}$

توزيع 4 هدايا على 8 طلاب

$P_8^4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5$

$=$

$\boxed{16}$ 8 أضلاع.

عدد الأقطار $= \frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2} = 20$

عدد الأقطار غير المارة بالمركز = الكلي - المارة $= 20 - 4 = 16$

عدد الأقطار المارة بالمركز : عدد الأقطار المارة بالمركز $= \frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Scanned by CamScanner

17

[illegible] 5 أشخاص [illegible] 2

ترتيب غير مهم ← [illegible]

[illegible] أشخاص [illegible]

[illegible]

* بطريقة الحدث العكسي

$$N(\Omega) = \binom{5}{3} = 10$$

$$N(A') = \binom{2}{2}\binom{3}{1} = 3$$

3 [illegible]

$$N(A) = N(\Omega) - N(A') = 10 - 3 = 7$$

$$\binom{2}{1}\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2 \times 3 + 1 = 7$$

[illegible] ← ترتيب مهم

[illegible]

[illegible]

* بطريقة الحدث العكسي

$$N(\Omega) = P_5^3 = 60$$

$$N(A') = \boxed{\;|\;|\;}$$

$$P_1^1 \times P_1^1 \times P_3^1 \times \frac{3!}{1!} = 1 \times 1 \times 3 \times 6 = 18$$

$$P_2^2 \times P_3^1 \times \frac{3!}{2!} = 2 \times 1 \times 3 \times 3 = 18$$

$$\Rightarrow N(A) = N(\Omega) - N(A') = 60 - 18 = 42$$

$$1 \times P_3^2 \times 3 + 1 \times P_3^2 \times 3 + P_3^3$$

$$= 6 \times 3 + 6 \times 3 + 6 = 18 + 18 + 6 = 42$$

$$\frac{(\ldots 3)}{\ldots} = 20$$

$$= 20 - 4 = 16$$

$$= \frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Scanned by CamScanner

$(1+2i)^3$ (18)

$= \binom{3}{0} 1^3 (2i)^0 + \binom{3}{1} 1^2 (2i)^1$

$+ \binom{3}{2} 1^1 (2i)^2 + \binom{3}{3} 1^0 (2i)^3$

$= 1\times1\times1 + 3\times1\times2i$

$+ 3\times1\times4\overset{-1}{i^2} + 1\times1\times8\overset{-i}{i^3}$

$= 1 + 6i - 12 - 8i$

$= -11 - 2i$

---

(19) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$

$n = 10,\ a = x,\ b = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$T_r = \binom{10}{r} (x)^{10-r} (x^{-1})^r$

$= \binom{10}{r} x^{10-r} x^{-r}$

$= \binom{10}{r} x^{10-2r}$

$x^2 = x^{10-2r}$

$2 = 10 - 2r$

$2r = 10 - 2$

$2r = 8$

$\boxed{r = 4}$

اكاى ن.

$T_4 = \binom{10}{4} x^2$

$= \frac{10\times \cancel{9}^{3}\times 8\times 7}{\cancel{4}\times 3\times \cancel{2}\times 1} x^2 = 210x^2$

$(2x^2$

x^5

$n = 10,$

$= \binom{10}{r}$

$= \binom{10}{r} 2$

Scanned by CamScanner

$c^{-1})^r$

c^{-r}

$$\left(2x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$$

1- معامل x^5

2- هل يقبل المنشور حد ثابت مستقل

3- هل يقبل المنشور حد يحوي x^6

$n = 10,\ a = 2x^2,\ b = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$T_r = \binom{10}{r} (2x^2)^{10-r} \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^r$

$= \binom{10}{r} 2^{10-r} \cdot x^{20-2r}\ x^{-\frac{1}{2}r}$

$= \binom{10}{r} 2^{10-r}\ x^{20-\frac{5}{2}r}$

1- $x^5 = x^{20-\frac{5}{2}r}$

$5 = 20 - \frac{5}{2}r$

$\frac{\cancel{5}}{2} r = \overset{3}{\cancel{15}}$

$\boxed{r = 6}$ حد سابع

$T_6 = \binom{10}{5} 2^4 \cdot x^5 = $ ____

2- $x^0 = x^{20-\frac{5}{2}r} \Rightarrow 0 = 20 - \frac{5}{2}r$

$\frac{5}{2} r = \overset{4}{\cancel{20}} \Rightarrow \boxed{r = 8} \in N$

نعم يقبل المنشور حد ثابت وهو الحد التاسع

3- $x^6 = x^{20-\frac{5}{2}r} \Rightarrow 6 = 20 - \frac{5}{2}r$

$\frac{5}{2} r = 14$

$5r = 28 \Rightarrow r = \frac{28}{5} \notin N$

لا يقبل المنشور حد يحوي x^6

$x^2 = 210x^2$

Scanned by CamScanner

مهمة

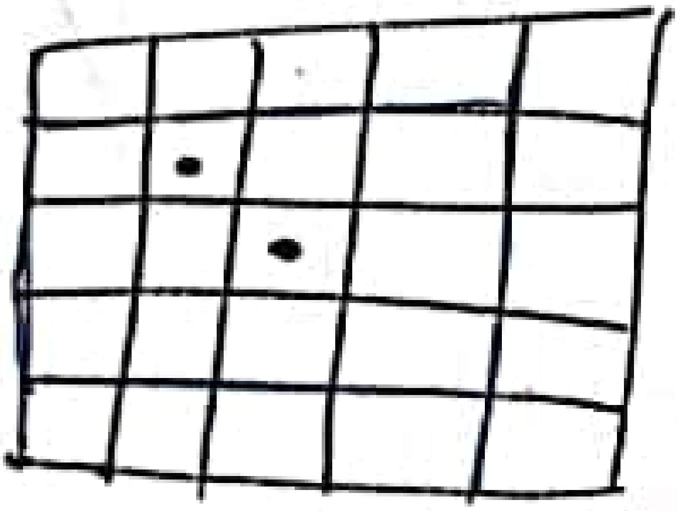
(20)

$$\frac{n}{2}(n-2)$$

$$= \frac{8}{2}(8-2) = 24$$

---

(21)



١ـ كم عدد مستطيلات ؟

المستطيل يتشكل

من مستقيمين متوازيين و مستقيمين متوازيين

$$\binom{6}{2} \times \binom{6}{2} = 15 \times 15$$

$$= 225$$

Scanned by CamScanner

٢- ع مستغر

[illegible]

$\binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{4}{1}$

$3 \times 2 = 36$

$(1+5x)^n =$

$\binom{n}{0}5^0 + \binom{n}{1}5^1 + \binom{n}{2}5^2 + \dots + \binom{n}{n}5^n$

$\binom{n}{0}1^n(5x)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}(5x)^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}(5x)^2 + \dots + \binom{n}{n}1(5x)^n$

$5 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$(1+5(1))^n = 6^n \Rightarrow S = 6^n$

$(1+2x)^n$

$S = \binom{n}{0}6^0 + \binom{n}{1}6^1 + \binom{n}{2}6^2 + \dots + \binom{n}{n}6^n$

$(1+2x)^n$

$= \binom{n}{0}1^n(2x)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}(2x)^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}(2x)^2 + \dots + \binom{n}{n}1(2x)^n$

$6 = 2x \Rightarrow \boxed{x=3}$

$(1+2(3))^n = 7^n$

$S = 7^n$

---

* $(1+5x)^n$

$S = \binom{n}{0}20^0 + \binom{n}{1}20^1 + \binom{n}{2}20^2 + \dots + \binom{n}{n}20^n$

$20 = 5x \Rightarrow x = 4$

$S = 21^n$

Scanned by CamScanner

$= 24$

15×15

225

2- كم مشغل كروي الخزينة

$$\binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1}$$

$$= 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$$

---

22 $(1+5x)^n =$

$$S = \binom{n}{0}5^0 + \binom{n}{1}5^1 + \binom{n}{2}5^2 + \dots + \binom{n}{n}5^n$$

$$(1+5x)^n = \binom{n}{0}1^n(5x)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}(5x)^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}(5x^2) \dots + \binom{n}{n}1^0(5x)^n$$

$5x = 5 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$\Rightarrow (1+5(1))^n = 6^n \Rightarrow S = 6^n$

$S = \binom{n}{0}$ 6

$(1+2x)$

$= \binom{n}{0}1^n(2x)^0$

$6 = 2x$

$(1+2($

$S =$

$\binom{n}{n}5^n$

$+ \binom{n}{n}1(5x)^n$

$(1+2x)^n$

$S = \binom{n}{0}6^0 + \binom{n}{1}6^1 + \binom{n}{2}6^2 + \cdots + \binom{n}{n}6^n$

$(1+2x)^n$

$= \binom{n}{0}1^n(2x)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}(2x)^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}(2x)^2 + \cdots + \binom{n}{n}1^0(2x)^n$

$6 = 2x \Rightarrow \boxed{x = 3}$

$(1+2(3))^n = 7^n$

$S = 7^n$

$*\ (1+5x)^n$

$S = \binom{n}{0}20^0 + \binom{n}{1}20^1 + \binom{n}{2}20^2 + \cdots + \binom{n}{n}20^n$

$20 = 5x \Rightarrow x = 4$

$S = 21^n$

Scanned by CamScanner

الاحتمالات:

① تجربة برنولية:

"تكرار تجربة ما بنفس الشروط عدد من المرات"

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}\cdot q^{n-k}$$

n عدد مرات التجربة

p الحدث الاهم

$q=1-p$ الحدث الاخر

k العدد المطلوب.

$$E(X)=np$$

$$V(X)=npq$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

③ القانون الاحتمالي

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

① $n=3$

② $P(X=3)=\binom{3}{3}p^{3}q^{0}$

$\frac{1}{27}=p^3 \Rightarrow p=\frac{1}{3}$

$q=1-p$

$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P(X=0)=\binom{3}{0}p^{0}q^{3}=1\times1\times\frac{8}{27}$

$=\frac{8}{27}$

$P(X=1)=\binom{3}{1}p^{1}q^{2}=3\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{12}{27}$

$P(X=2)=\binom{3}{2}p^{2}q^{1}=3\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{27}$

⑤ $E(X)=np=3\times\frac{1}{3}$

$=1$

احتمالي:

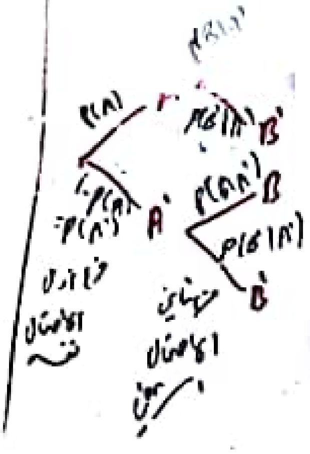
$P(A\cap B)=$

لا نرمز ... B.

شرطي:

... B.

$P(A|B)=$



٢) الاستقلال الاحصائي:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

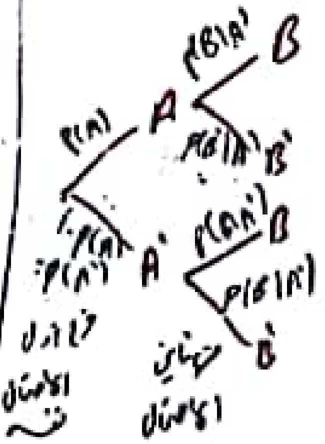
وقوع الحدث A لا يؤثر على وقوع الحدث B.

٢) الاحتمال الشرطي:

وقوع الحدث A يتأثر بوقوع B.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

١٣) تذكرة:



ساعد

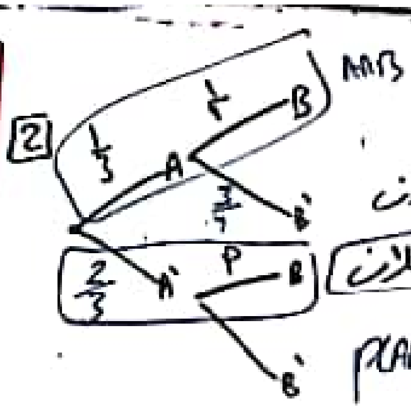
تقاطع ∩

جداء

$\frac{8}{27}$

$\times \frac{4}{9} = \frac{12}{27}$

$\times \frac{2}{3} = \frac{6}{27}$



عين P حتى يكون A و B مستقلان

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

$$P(A\cap B) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$ من الفرع الاول

$$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap A')$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{2}{3}P$$

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{12}+\frac{2}{3}P\right)$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{36} + \frac{2}{9}P \Rightarrow \frac{2}{9}P = \frac{1}{12} - \frac{1}{36}$$

$$\frac{2}{9}P = \frac{2}{36} \Rightarrow P = \frac{1}{4}$$

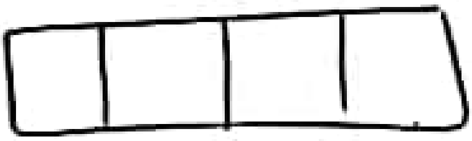
$P(B) = P = \frac{1}{4}$ ⇐ B لا يتأثر بوقوع A

Scanned by CamScanner

3) حالات:

عدد الحالات.

$N(\Omega) = $ (عدد الحالات)



0,1,2

$N(\Omega) = 3^4 = 81$

0,0,2,2 أو 1,1,1,1 أو 0,1,1,2

تباديل تباديل

$\frac{4!}{2!2!} \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 + \frac{4!}{4!} \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 + \frac{4!}{2!} \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$

$= 6 + 1 + 12 = 19$

$\Rightarrow P = \frac{19}{81}$

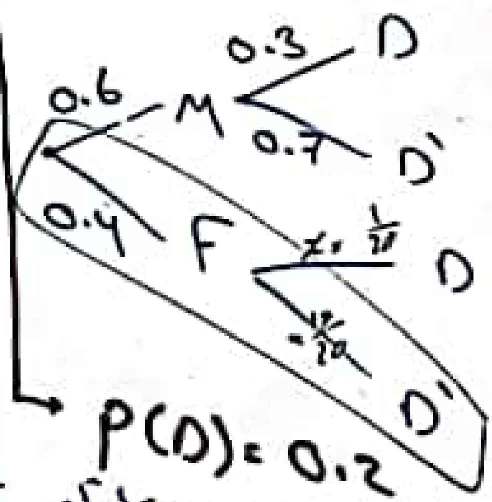
مع / و ← تقاطع
أو ← اجتماع
علمًا / أو إذا ← الاحتمال الشرطي

4) 40% اناث ، 60% ذكور

30% يلعبوا

20% من مجموع طلاب المدرسة يلعبون

M ذكر ، F انثى
D يلعب



$P(D) = 0.2$

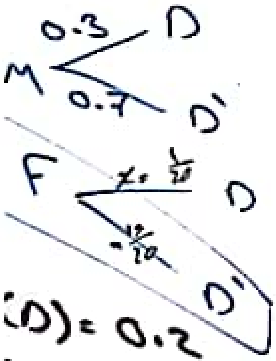
اختيار طالبة لا تلعب

$P(D' \cap F)$

60% ذكور
30% يلعبوا

20% من تلع ...

M ذكر ، F
D يلعب



$P(D) = 0.2$

احتمال طالبة ($D' \cap F$)

$p(D) = p(D \cap M) + p(D \cap F)$

$0.2 = 0.6 \times 0.3 + 0.4x$

$0.2 = 0.18 + 0.4x$

$0.4x = 0.20 - 0.18$

$0.4x = 0.02$

$x = \frac{0.02}{0.4} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$

$p(D' \cap F) = 0.4 \times \frac{19}{20}$

$= \frac{4}{10} \times \frac{19}{20} = \frac{19}{50}$

(5) 5 أدوار ← برنولية

$n = 5, \quad k \geq 1$

احتمال فوز B $p = 0.7 \Rightarrow q = 0.3$

$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1)$

$= 1 - p(X = 0)$

$= 1 - \binom{5}{0} p^0 q^5 = 1 - (0.3)^5$

احتمال فوز A ورياضي B.

B: فوز $p = 0.7$

Scanned by CamScanner

(6) * عند رمية 1 ... برنولي

$n=5$

ما احتمال ظهور رقم زوجي أول مرة عند آخر إلقاء.

احتمال الزوجي $= \frac{1}{2}$ احتمال الفردي $= \frac{1}{2}$

① ② ③ ④ ⑤

فردي فردي فردي فردي زوجي

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$$

كانوا جميعاً بدون تباديل

لأنه حدد مكان الزوجي هو 5 آخر إلقاء.

---

* ما احتمال ظهور رقم زوجي مرة واحدة في الإلقاءات الخمسة.

تباديل $\frac{5!}{4!}$ × زوجي فردي فردي فردي فردي

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$5\times\frac{1}{32}=\frac{5}{32}$$

يوجد تباديل لأنه لم يحدد مكان الزوجي

ما احتمال ظهور رقم زوجي مرة عند آخر إلقاء.

ما احتمال ظهور زوجي في الإلقاء الأخير

((الإلقاءات متشابهة في أحداث مستقلة))

الجواب $\frac{1}{2}$

ماله علاقة بالإلقاءات السابقة الأولى

---

(7) أجاب ← إذا يجب $\frac{1}{3}$

لم يجب ← إذا يجب $\frac{1}{5}$

احتمال أنه أجاب في الأول $\frac{1}{4}$

A_n احتمال الإجابة في الرقم n

$P(A_n)=P_n$

شجرة ذات احتمالات

200 تجوال

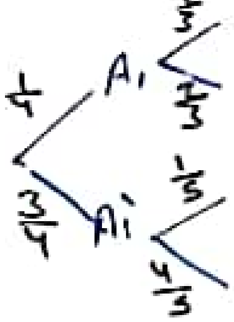
201 سداد

202، 203 [illegible]

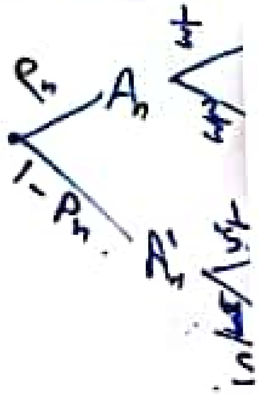
205 حارس المرمى

211 $U_1 - U_2$

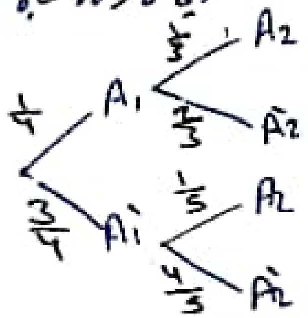
أولى: حالة خاصة في الأدوار السابقة



ثانية: حالة عامة في الأدوار السابقة



كرة أولى: حالة خاصة
الرمي الأولى والثانية



احتمال أن يصيب في الرمية الأولى $P_1 = P(A_1) = \frac{1}{4}$

احتمال أن يصيب في الرمية الثانية $P_2 = P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1')$

بدلالة عن P_1, P_2

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

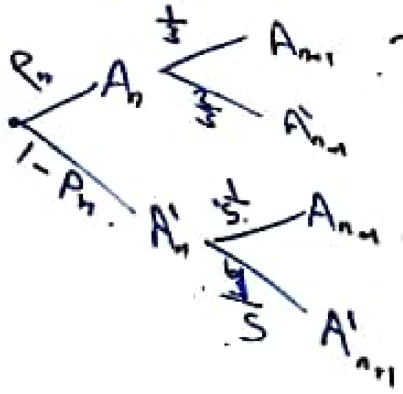
$$= \frac{1}{12} + \frac{3}{20} = \frac{56}{240}$$

1- ما احتمال أن يصيب في الرمية الثانية (معلوم A_1') علماً أنه لم يصب في الرمية الأولى $P(A_2 | A_1') = \frac{1}{5}$

2- ما احتمال أن يصيب في الرمية الأولى (مطلوب A_1) علماً أنه أصاب في الرمية الثانية (معلوم A_2) $P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$

$$= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{56}{240}} = \ldots$$

كرة ثانية: حالة عامة
الفرع الأول ← حالة ثابتة
الفرع الثاني ← متغير



بدلالة P_{n+1} و P_n

$$P_{n+1} = P(A_{n+1})$$

$$= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap A_n')$$

$$= \frac{1}{3} P_n + \frac{1}{5}(1 - P_n)$$

$$= \frac{1}{3} P_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} P_n$$

$$P_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} P_n$$

Scanned by CamScanner

احتمال ان يصيب في الرمية الاولى $P_1 = P(A_1) = \frac{1}{4}$

احتمال ان يصيب في الرمية الثانية $P_2 = P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1')$

بين العلاقة بين P_1 , P_2

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{3}{20} = \frac{56}{240}$$

1. ما احتمال ان يصيب في الرمية الثانية (اذا) اصاب في الرمية الاولى

معلوم A_1 ، مطلوب A_2

$P(A_2 \mid A_1) = \frac{1}{3}$

2. ما احتمال ان يصيب في الرمية الاولى (اذا) اصاب في الرمية الثانية

مطلوب A_1 ، معلوم A_2

$$P(A_1 \mid A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{56}{240}} = \dots$$

بين العلاقة بين P_{n+1} ، P_n

$$P_{n+1} = P(A_{n+1})$$

$$= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap A_n')$$

$$= \frac{1}{3} P_n + \frac{1}{5}(1 - P_n)$$

$$= \frac{1}{3} P_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} P_n$$

$$P_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} P_n$$

Scanned by CamScanner

احتمال ان يجيب في المرة الاولى $P_1 = P(A_1) = \frac{1}{4}$

2

احتمال ان يجاوب في المرة الثانية $P_2 = P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1')$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$

بين

عن P_1 , P_2

$= \frac{1}{12} + \frac{3}{20} = \frac{56}{240}$

$P(A_2 | A_1') = \frac{1}{5}$

1- ما احتمال ان يجيب في المرة الثانية (1،0) معلوم A_2 لم يجب في المرة الاولى وقع A_1'

2- ما احتمال ان يجب في المرة الاولى (1،1) مغلوب A_1 يجيب في المرة الثانية وقع A_2

$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$

$= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{56}{240}}$

$P_{n+1} = P(A_{n+1})$

$= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap A_n')$

$= \frac{1}{3} P_n + \frac{1}{5}(1 - P_n)$

بين ان ؟

1

تمرين:

جندي يرمي على هدف ومن المرات الكثيرة احتمال ان يصيب الضربة الاولى 0.6

اذا (أصاب) الضربة n فاحتمال ان (يصيب) n+1 0.8

اذا (أخطأ) الضربة n فاحتمال ان (يصيب) n+1 0.4.

A_n حدث اصابة الضربة n.

$$P(A_n) = P_n$$

① ما احتمال ان يصيب الضربة الاولى $P_1 = P(A_1) = 0.6$

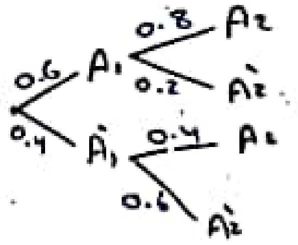
② ما احتمال ان يصيب الضربة الثانية $P_2 = P(A_2)$

$$= P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1')$$

$$= 0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.4$$

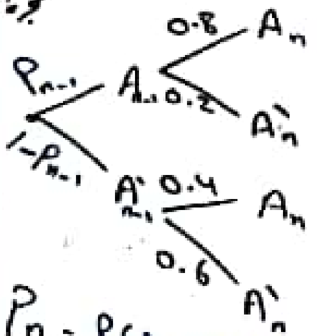
$$= 0.48 + 0.16 = 0.64$$

شجرة:



③ عبارة P_n بدلالة P_{n-1}

شجرة:



$$P_n = P(A_n) = P(A_n \cap A_{n-1}) + P(A_n \cap A_{n-1}')$$

$$= 0.8P_{n-1} + 0.4(1 - P_{n-1})$$

$$= 0.8P_{n-1} + 0.4 - 0.4P_{n-1}$$

$$\boxed{P_n = 0.4P_{n-1} + 0.4}$$

④ علماً ان يصيب الضربة الاولى A_1

ما احتمال انه يصيب الضربة الثانية A_2

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(}{P}$$

$$= \frac{48}{64}$$

⑤ ما احتمال ان يصيب الضربة الثانية

علماً انه اخطأ الضربة الاولى A_1'

$$P(A_2 | A_1') = $$

Scanned by CamScanner

عبار

$\cap A_{n-1}) + P(A_n \cap A'_{n-1})$

$(1-P_{n-1})$

$-0.4P_{n-1}$

A_1 الاولى

④ ما احتمال ان يصيب الضربة الاولى

اذا علم يصيب الضربة الثانية — شرطي

A_2 وقع

$$P(A_1 \mid A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.48}{0.64}$$

$$= \frac{48}{64} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

⑤ ما احتمال ان يصيب الضربة الثانية — يصيب A_2

اذا علم لم يصيب الضربة الاولى — شرطي

A'_1 وقع

$$P(A_2 \mid A'_1) = 0.4$$

ما احتمال ان يصيب الضربة الاولى فقط

⑥ ما احتمال ان يصيب الضربة الاولى و لا يصيب الضربة الثانية — أي

يصيب الاولى فقط

= يصيب الاولى ① لا يصيب الثانية

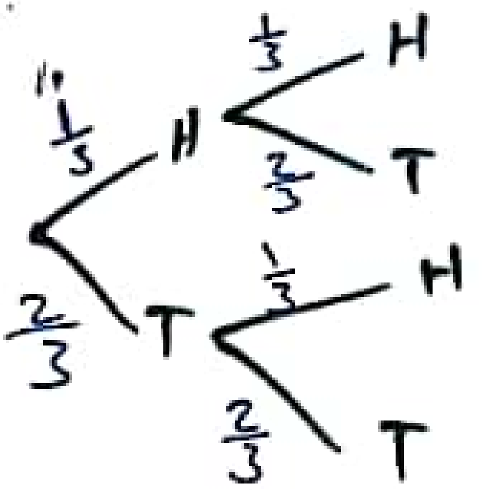
$$P(A'_2 \cap A_1)$$

$$= 0.2 \times 0.6 = 0.12$$

Scanned by CamScanner

(8)

جري زد



$HH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$HT \; \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

$TH \; \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ $= \frac{4}{9}$

$TT \; \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

احتمال الحصول على (جري H) مرة على الاقل $k \geq 1$

الى ما رات

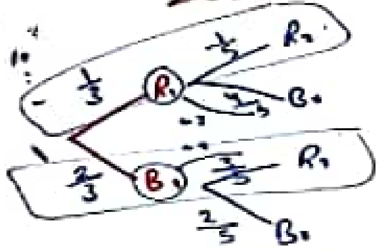
$n = 10$

احتمال الحصول على HH مرة واحدة $p = \frac{1}{9} , q = \frac{8}{9}$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$
$$= 1 - P(X = 0)$$
$$= 1 - \binom{10}{0} p^0 q^{10} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{10}$$

Scanned by CamScanner

$2B, 1R$



$P(R_2) = P(R_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap B_1)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$

$= \frac{7}{15}$

(10) احتمال السؤال:

$3B, 2W$ كرتين

سوداء 3، بيضاء 2، 4

(9) WW, WB, BB

$X = +2, -1, -4$

(11) $0, 1, 2, 4$

X يدل على حاصل ضرب ... مع الإعادة.

$0,0$ / $0,1$ / $0,2$ / $0,4$: $X = 0$

$1,1$: $X = 1$

$1,2$: $X = 2$

$1,4$: $X = 4$

$2,2$: $X = 4$

$2,4$: $X = 8$

$4,4$: $X = 16$

$P(X=4) = \frac{1 \times 1^2 + 2 \times 1 \times 1}{4^2}$ ($2,2$ أو $1,4$)

$= \frac{3}{16}$

$P(X=0) = \frac{1^2 + 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 1}{4^2}$ ($0,0$ أو $0,1$ أو $0,2$ أو $0,4$)

$= \frac{1+2+2+2}{16} = \frac{7}{16}$

سحب

سحب	تباديل	توافيق
n^r يوجد ترتيب	P^n_r يوجد ترتيب	$\binom{n}{r}$ لا يوجد ترتيب

n العدد الكلي، r العدد المطلوب

طريقة ثانية: شبكة (جدول)

لا ...	...	...

	0	1	2	4
0	0	0	0	0
1	0	1	2	4
2	0	2	4	8
4	0	4	8	16

$X = \{0, 1, 2, 4, 8, 16\}$

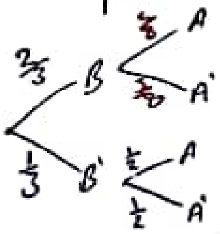
Scanned by CamScanner

(12)

$P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{5}{12}$

$P(A \mid B) = \frac{1}{2}$

$P(A) =$



$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$

$= \frac{5}{12} + \frac{1}{6}$

$= \frac{7}{12}$

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{\cancel{12}_4} \times \frac{\cancel{3}}{2}$

$= \frac{5}{8}$

(13)

$E(X) = 2$

$V(X) = \frac{2}{3}$

$E(X) = np = 2$

$V(X) = npq = \frac{2}{3}$

$\cancel{2}q = \frac{2}{3}$

$q = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{p = \frac{2}{3}}$

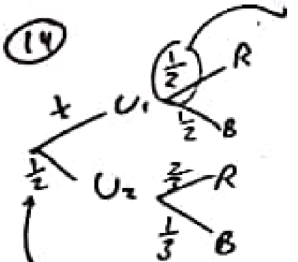
$E(X) = np = 2$

$n \times \frac{2}{3} = 2$

$\boxed{n = 3}$

(14)

$P(R \mid U_1) = \frac{1}{2}$



$P(U_1 \mid R) = \frac{P(U_1 \cap R)}{P(R)}$

$P(U_1 \cap R) = \frac{1}{4}$

$P(R) = P(R \cap U_1) + P(R \cap U_2)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

$\Rightarrow P(U_1 \mid R) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{12}^3}{7} = \frac{3}{7}$

Scanned by CamScanner

15 تجربة لسبة زوجية (β, α)

$E(x) = \frac{16}{9}$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{\alpha}{9}$	$\frac{\beta}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$\frac{16}{9} = \frac{0 + \alpha + 2\beta + 6}{9}$$

$$16 = \alpha + 2\beta + 6$$

(1) $\boxed{\alpha + 2\beta = 10}$

$(5,1)$ $(1,5)$ $\boxed{(4,2)}$ $(3,4)$

مجموع الاحتمالات $= 1$

$$\frac{1}{9} + \frac{\alpha}{9} + \frac{\beta}{9} + \frac{2}{9} = 1$$

$$1 + \alpha + \beta + 2 = 9$$

$\boxed{\alpha + \beta = 6}$ (2)

$\alpha + 2\beta = 10$ (1)

بالطرح

$-\beta = -4$

$\boxed{\beta = 4}$

$\boxed{\alpha = 2}$

(β, α)
$(4, 2)$

16

3R , 0,1,2

3B 3,5,6

تمرين ثاني: دون اعادة

(أ) إذا كان المجموع زوجي علما أن

أن يكون من اللون نفسه

(ب) علب

A المجموع زوجي

B اللون نفسه:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{2 \times P_3^1 P_3^1}{P_6^2} = \frac{2 \times 3 \times 3}{30} = \frac{18}{30}$$

مجموع زوجي

زوجي + زوجي

$$P(B) = \frac{1 \times P_3^2 + 1 \times P_3^2}{P_6^2} = \frac{3 \times 2 + 3 \times 2}{30}$$

اللون نفسه

2R أو 2B

$$P(A \cap B) = \frac{2 \times P_2^1 P_1^1 + 2 \times P_1^1 P_2^1}{P_6^2} = \frac{2 \times 2 \times 1 + 2}{30}$$

$$= \frac{6}{30}$$

مجموع زوجي واللون نفسه

R: 2.1

B: 1.2

$$P(B|A) = \frac{\frac{6}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Scanned by CamScanner

$\beta + 2 = 9$

$\boxed{\beta = 6}$ ②

$2\beta = 10$ ①

بالطرح

$3 = -4.$

$\boxed{\beta = 4}$

$\boxed{\alpha = 2}$

(β, α)

$(4, 2)$

---

(16)

R، 0،1،2

B 3،5،6

سحب كرتين تباعاً دون ارجاع

اذا كان المجموع زوجي احسب احتمال

ان يكون من اللون نفسه

المطلوب B

A: المجموع زوجي

B: اللون نفسه

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{2 \times P^1_3 P^1_3}{P^2_6} = \frac{2 \times 3 \times 3}{30} = \frac{18}{30}$$

مجموع زوجي

زوجي+زوجي

فردي+فردي

$$P(B) = \frac{1 \times P^2_3 + 1 \times P^2_3}{P^2_6} = \frac{3 \times 2 + 3 \times 2}{30} = \frac{12}{30}$$

لون نفسه

2R أو 2B

$$P(A \cap B) = \frac{2 \times P^1_2 P^1_1 + 2 \times P^1_1 P^1_2}{P^2_6} = \frac{2 \times 2 \times 1 + 2 \times 1 \times 2}{30} = \frac{8}{30}$$

R: 2، 1

B: 1، 2

$$P(B|A) = \frac{\frac{8}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

حل ② بالشبكة

	0	1	2	3	5	6
0		AB	B	A	A	
1	AB		AB			A
2	B	AB		A	A	
3	A		A		B	AB
5	A		A	B		AB
6		A		BA	AB	

$P(A) = \frac{18}{30}$

$P(B) = \frac{12}{30}$

$P(A \cap B) = \frac{8}{30}$

A، B غير مستقلة