قوانين

1) $P(\Omega)=1\ ,\ P(\Phi)=0$
$0\le P(A)\le 1$
2) $P(A)+P(A')=1$
$P(A')=1-P(A)$
3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
4) $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$
$P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$
5) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$
$P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$

الاحتمال المشروط

لا يقع الحدث إلا بشرط وقوع حدث آخر.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

احتمال A علماً أن B قد وقع

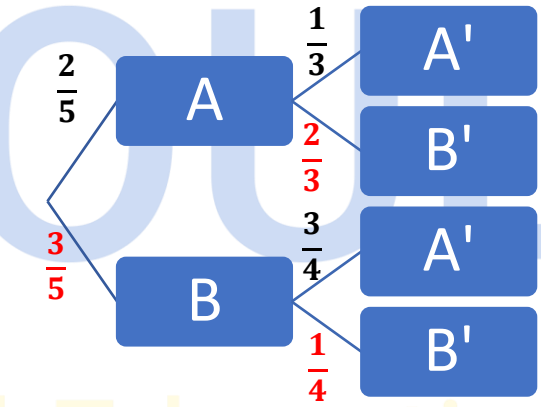
$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

المخطط الشجري

يستخدم المخطط الشجري إذا كان هناك في نص المسألة تفرع أو تتالي.

- ✓ مدرسة فيها ذكور وإناث يلعبون ولا يلعبون (تفرع)
- ✓ مصنع فيه ورشتين تنتج صالح وعاطل (تفرع)
- ✓ صندوق سحبنا منه كرة نعيدها للصندوق ثم نسحب كرة (تتالي)

❖ مثال:



$$P(A')=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}$$
$$P(B)=1-P(A)=\frac{3}{5}$$

الاستقلال الاحتمالي

لحدثين:

A, B مستقلان احتمالياً إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

إذا كان A, B مستقلان فإن:

1) A, B' مستقلان
2) A', B مستقلان
3) A', B' مستقلان

مسائل الاستقلال هي:

مسائل الرمي + النجاح + السحب مع الإعادة

❖ سؤال: أطلق رامٍ على هدف طلقتين فإذا كان احتمال إصابة الهدف بالطلقة الأولى $\frac{6}{10}$ واحتمال إصابة الهدف بالطلقة الثانية $\frac{8}{10}$.

A: إصابة الهدف الأول. و B: إصابة الهدف الثاني

1) ما احتمال إصابة الهدف بالطلقتين معاً.

C: حدث إصابة الهدف بالطلقتين معاً

$$P(C)=P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$
$$=\frac{6}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{48}{100}$$

2) ما احتمال إصابة الهدف بالطلقة الأول فقط.

D: حدث إصابة الهدف بالطلقة الأولى فقط

$$P(D)=P(A\cap B')=P(A)\times P(B')$$
$$=\frac{6}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{12}{100}$$

3) ما احتمال عدم إصابة الهدف.

E: حدث عدم إصابة الهدف

$$P(E)=P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')$$
$$=\frac{4}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{8}{100}$$

4) ما احتمال إصابة الهدف.

F: حدث إصابة الهدف

$$P(F) = P(A \cap B') + P(A' \cap B) + P(A \cap B')$$
$$= \frac{12}{100} + \frac{32}{100} + \frac{48}{100} = \frac{92}{100}$$

شرطي

5) إذا علمت أن الهدف أصيب فما احتمال إصابته بالطلقة الأولى.

F: الهدف أصيب

G: بالطلقة الأولى

$$P(G|F) = \frac{P(G \cap F)}{P(F)}$$
$$= \frac{P(A \cap B') \times P(A \cap B)}{\frac{92}{100}} = \frac{\frac{12}{100} + \frac{48}{100}}{\frac{92}{100}}$$
$$= \frac{60}{92} = \frac{15}{23}$$

المتغير العشوائي

مثال: صندوق فيه 5 كرات، 3 بيضاء و2 سوداء، سحبنا ثلاث كرات على التتالي دون إعادة.

ليكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

2	3
B	W

سحب 3 دون إعادة

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$$

ثلاث كرات بيضاء — كرتان بيضاوان — كرة بيضاء — ولا كرة بيضاء

لا يجوز أخذ (0) لأن الـ (0) تعني ثلاث كرات سوداء وهذا غير ممكن

$$P(X=1) = \overset{ب}{\frac{3}{5}} \times \overset{غ}{\frac{2}{4}} \times \overset{غ}{\frac{1}{3}} \times 3 = \frac{6}{20}$$

$$P(X=2) = \overset{ب}{\frac{3}{5}} \times \overset{ب}{\frac{2}{4}} \times \overset{غ}{\frac{2}{3}} \times 3 = \frac{12}{20}$$

$$P(X=3) = \overset{ب}{\frac{3}{5}} \times \overset{ب}{\frac{2}{4}} \times \overset{ب}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{20}$$

X	1	2	3	Σ
P	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{3}{20}$	1
$X.P$	$\frac{6}{20}$	$\frac{24}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{36}{20}$
$X^2.P$	$\frac{6}{20}$	$\frac{48}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{62}{20}$

التوقع الرياضي:

$$E(X) = \Sigma X.P = \frac{36}{20}$$

$$E(X^2) = \Sigma X^2.P = \frac{62}{20}$$

التباين: $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$

الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

تجربة برنولي

تستخدم إذا كان لدينا مسائل ذات تكرارات كبيرة أو مسائل السحب مع الإعادة.

$$P(X=K) = \binom{n}{K} P^K q^{n-K}$$

n: عدد الاختبارات و P: الاحتمال و $q = 1 - P$

السؤال $K = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$

❖ في تجربة رمي حجر نرد خمس مرات، ما احتمال ظهور وجه زوجي؟

1) ثلاث مرات فقط.

2) مرة على الأقل.

$$n = 5$$
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$A = \{2, 4, 6\}$$
$$P = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$$

1) $K = 3$

$$P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{64}$$

2) $K = 1, 2, 3, 4, 5$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

❖ نكرر أربع مرات تجربة إلقاء قطعتي نقود متوازنتين ونسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين، احسب احتمال الحدث A: الحصول ثلاث مرات على وجهين شعار.

$$\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

$$A = \{(H,H)\}$$

$$n = 4, P = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}, K = 3$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= 4 \times \frac{1}{64} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$$

مثال:

K	0	1	2	3	4
P					16/81

1) ما عدد الاختبارات في التجربة.

2) احسب E و V.

عدد الاختبارات $n = 4$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} P^{4}.q^{4-4}$$

$$\frac{16}{81} = P^{4} \Rightarrow P = \frac{2}{3}$$

$$E = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$V = 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$E = n.P$

$V = n.P.q$

$\sigma = \sqrt{V}$

RASOUL
International Education

1- إذا كان A, B حدثان متنافيان من فضاء العينة Ω فيكون $P(A \cup B)$ يساوي:

A	$P(A) \times P(B)$	B	$P(A) + P(B)$
C	$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	D	$P(A) + P(B) + P(A \cap B)$

2- إذا كان الحدثين A, B مستقلان احتمالياً فإن $P(A|B)$ يساوي:

A	$P(A)$	B	$P(B)$	C	$P(A')$	D	$P(B')$

3- ليكن B حدثاً يحقق $0 < P(B) < 1$ أياً يكن الحدث A كان $P(A \cap B) + P(A \cap B')$ يساوي:

A	$P(A')$	B	$P(B')$	C	$P(A)$	D	$P(B)$

4- في تجربة إلقاء حجري نرد متوازنين، احتمال أن يكون مجموع الوجهين الظاهرين أكبر تماماً من 6 علماً أن الحجر الأول أظهر الوجه 3 يساوي:

A	$\frac{2}{3}$	B	$\frac{1}{3}$	C	$\frac{1}{4}$	D	$\frac{1}{2}$

5- لدى عائلة طفلان، ما هو احتمال كونهما ذكرين إذا علمت أن أحدهما ذكر:

A	$\frac{2}{3}$	B	$\frac{1}{3}$	C	$\frac{1}{4}$	D	$\frac{1}{2}$

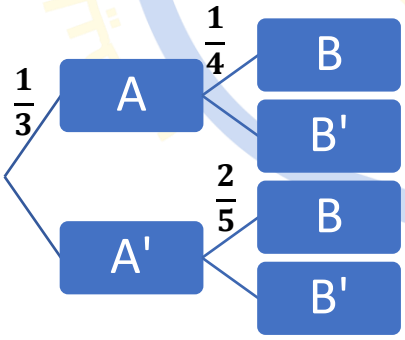
6- A, B حدثان مستقلان احتمالياً إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

A	$P(A \cap B) = P(A).P(B)$	B	$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
C	$P(A \cup B) = P(A) \times P(B)$	D	$P(A|B) = P(B)$

7- تقدم طالبان إلى امتحان الرياضيات، احتمال نجاح الأول $\frac{6}{10}$ واحتمال نجاح الثاني $\frac{7}{10}$ ما احتمال نجاح أحدهما على الأقل:

A	$\frac{60}{100}$	B	$\frac{22}{55}$	C	$\frac{22}{25}$	D	$\frac{12}{100}$

8- استناداً إلى التمثيل الشجري المبين في الشكل المجاور فإن $P(B)$ يساوي:



A	$\frac{63}{180}$	B	$\frac{4}{15}$	C	$\frac{1}{12}$	D	$\frac{6}{15}$

9- نجد في الجدول المجاور القانون الاحتمالي للزوج (X, Y) من المتحولات العشوائية فإن قيمة a, b هما:

$X \backslash Y$	0	1	قانون X
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{15}$	a
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$
	$\frac{11}{15}$	b	

A	$a = \frac{14}{15}, b = \frac{5}{6}$	B	$a = \frac{3}{5}, b = \frac{1}{3}$	C	$a = \frac{8}{15}, b = \frac{4}{15}$	D	$a = \frac{19}{20}, b = \frac{1}{6}$

10- يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء، عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء، نسحب ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة. X: احتمال عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، التوقع الرياضي يساوي:

A	$\frac{3}{2}$	B	$\frac{3}{4}$	C	$\frac{9}{4}$	D	$\frac{9}{16}$

11- نلقي ثلاث مرات حجر نرد مثالي، وليكن A حدث الحصول على مرة على الأقل على 5 أو 6 فما احتمال وقوع الحدث A:

A	$\frac{8}{9}$	B	$\frac{8}{27}$	C	$\frac{8}{81}$	D	$\frac{19}{27}$

12- نتأمل صندوقاً يحتوي على عشر كرات، 9 كرات خضراء وكرة حمراء، نسحب عشوائياً وعلى التتالي كرتين دون إعادة فإن احتمال سحب كرة حمراء في المرة الثانية:

A	$\frac{1}{10}$	B	$\frac{9}{10}$	C	$\frac{1}{15}$	D	$\frac{1}{45}$

13- إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{3}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$ فإن $P(B'|A')$ يساوي:

A	$\frac{8}{17}$	B	$\frac{3}{10}$	C	$\frac{17}{25}$	D	$\frac{1}{2}$

14- يحتوي صندوق u_1 على كرة سوداء وكرتين بيضاوين ويحتوي صندوق u_2 على كرتين سوداوين وكرتين بيضاوين، نختار عشوائياً أحد الصندوقين ونسحب منه كرة، إذا كانت الكرة المسحوبة سوداء فما احتمال أن تكون قد سحبت من u_1:

A	$\frac{1}{6}$	B	$\frac{2}{5}$	C	$\frac{1}{4}$	D	$\frac{10}{24}$

15- نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الستة الآتية بأحد العددين $+1$, -1 ما احتمال أن يكون المجموع مساوياً الصفر:

A	$\frac{5}{64}$	B	$\frac{1}{64}$	C	$\frac{5}{16}$	D	$\frac{1}{36}$

16- تقضي لعبة إلقاء حجر نرد مثالي، يربح ليرتين إذا أظهر النرد الرقم (1) ويربح ليرة واحدة إذا أظهر الرقم (2) وبباقي الحالات يخسر ليرة واحدة. نخمّن أنه إذا لعب اللاعب عدداً كبيراً من المرات فهو:

A	سيخسر	B	يفوز	C	يتعادل	D	$E(x)=\frac{1}{6}$

17- نلقي خمس قطع متوازنة في آنٍ معاً، احتمال الحصول على الوجه (H) ثلاث مرات فقط:

A	$\frac{5}{32}$	B	$\frac{5}{16}$	C	$\frac{10}{16}$	D	$\frac{1}{32}$

18- نلقي أربع مرات حجر مثالي، وليكن A حدث الحصول على عدد زوجي مرة على الأقل:

A	$\frac{3}{32}$	B	$\frac{1}{32}$	C	$\frac{1}{16}$	D	$\frac{15}{16}$

19- ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولي، الجدول المجاور هو القانون الاحتمالي لـ X فإن التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X يساوي:

K	0	1	2	3	4
$P(X=K)$					$\frac{1}{81}$

A	$\frac{1}{3}$	B	$\frac{4}{3}$	C	$\frac{8}{9}$	D	$\frac{2}{3}$

20- تسع بطاقات متماثلة، على n بطاقة منها $(n \geq 4)$ كتب الرقم 3 وكتب على الباقي الرقم 5، نسحب منها بطاقتين عشوائياً.
إذا علمت أن احتمال سحب بطاقتين تحملان الرقم ذاته يساوي $\frac{1}{2}$ فإن n تساوي:

$n=3$	A	$n=6$	B	$n=5$	C	$n=4$	D

21- نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية بحيث احتمال ظهور الشعار في كل رمية يساوي $\frac{1}{3}$ فإن احتمال ظهور الشعار مرتين فقط يساوي:

$\frac{8}{27}$	A	$\frac{12}{27}$	B	$\frac{6}{27}$	C	$\frac{1}{27}$	D

22- في فضاء احتمالي لدينا $P(A \cup B)=\frac{7}{12}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A)=\frac{1}{2}$ فإن $P(A'|B')$ يساوي:

$\frac{1}{4}$	A	$\frac{3}{4}$	B	$\frac{5}{8}$	C	$\frac{3}{8}$	D

23- مغلف فيه 6 بطاقات متماثلة مرقمة بالأرقام $2, 2, 3, 3, 3, 4$ نسحب من الصندوق على التتالي مع إعادة فإذا علمت أن مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين يساوي 6 فما احتمال أن يكون للبطاقتين الرقم ذاته:

$\frac{3}{13}$	A	$\frac{13}{36}$	B	$\frac{9}{36}$	C	$\frac{9}{13}$	D

24- ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد النجاحات في تجربة برنولي، الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي لـ X، فإن عدد الاختبارات في التجربة هو:

K	0	1	2	3	4
$P(X=K)$					$\frac{32}{243}$

3	A	4	B	5	C	6	D

25- في تجربة رمي حجري نرد مرة واحدة، ليكن X المتغير العشوائي الذي يدل على العدد الأكبر بين العددين على الوجهين الظاهرين إذا اختلفا، وأحدهما إن تساويا فإن $P(X=2)$ يساوي:

$\frac{1}{36}$	A	$\frac{2}{36}$	B	$\frac{3}{36}$	C	$\frac{4}{36}$	D

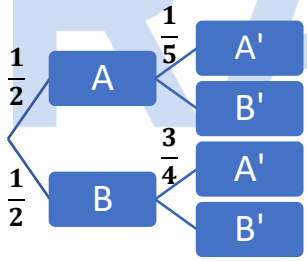
26- مغلف فيه 9 بطاقات مرقمة من 1 إلى 9 نسحب عشوائياً من المغلف بطاقتين معاً إذا علمت أن رقم إحدى البطاقتين المسحوبتين زوجي فما احتمال أن يكون مجموع رقمي البطاقتين زوجياً:

$\frac{6}{26}$	A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{6}{20}$	C	$\frac{20}{26}$	D

27- صف دراسي فيه 3 طالبات و 5 طلاب، نريد تشكيل لجنة مكونة من ثلاثة أشخاص من هذا الصف فيكون احتمال أن تكون في اللجنة طالبتان فقط تساوي:

$\frac{3}{8}$	A	$\frac{6}{8}$	B	$\frac{6}{56}$	C	$\frac{15}{56}$	D

28- استناداً إلى التمثيل الشجري المجاور يكون $P(B'|B)$ يساوي:



$\frac{1}{4}$	A	$\frac{4}{5}$	B	$\frac{1}{8}$	C	$\frac{3}{5}$	D

29- يضم مصنع ورشتين A, B لتصنيع الأقلام، عندما ورد طلب لعدد من الأقلام قدره 1000 قلم، صنعت الورشة A منها 600 قلم وصنعت البقية الورشة B. هناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالح للاستعمال في حين تكون نسبة 2% من أقلام الورشة B غير صالح للاستعمال، نسحب عشوائياً قلماً من الطلب فما احتمال أن يكون غير صالح للاستعمال:

A	$\frac{962}{1000}$	B	$\frac{392}{1000}$	C	$\frac{38}{1000}$	D	$\frac{580}{1000}$

30- تنتج الورشة (A) 80 قلم، 5% من هذه الأقلام غير صالحة للاستعمال، نسحب قلمين معاً فما احتمال أن يكون القلمان المسحوبان غير صالحين للاستعمال:

A	$\frac{6}{79}$	B	$\frac{3}{1580}$	C	$\frac{6}{80}$	D	$\frac{12}{5920}$

31- نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية $\frac{1}{3}$ فما احتمال ظهور شعار مرة على الأقل:

A	$\frac{19}{27}$	B	$\frac{1}{27}$	C	$\frac{3}{27}$	D	$\frac{9}{27}$

32- صندوق يحوي 9 كرات متماثلة منها 4 كرات خضراء و 5 كرات حمراء، نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً فما احتمال أن تكون الكرات الثلاث من لونين مختلفين:

A	$\frac{14}{84}$	B	$\frac{70}{84}$	C	$\frac{40}{84}$	D	$\frac{30}{84}$

33- ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولي، الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي للمتحول X الممثل لثلاث نجاحات فإن $P(X=1)$ يساوي:

K	0	1	2	3	4
$P(X=K)$	$\frac{1}{27}$				

A	$\frac{12}{27}$	B	$\frac{1}{3}$	C	$\frac{6}{27}$	D	$\frac{2}{3}$

34- صندوق يحتوي على خمس كرات منها كرتان حمراوان وثلاث كرات زرقاء، نكرر عملية السحب العشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يبقى في الصندوق إلا الكرات من اللون ذاته، احتمال أن يبقى في الصندوق الكرات من اللون ذاته من سحبتين:

A	$\frac{1}{10}$	B	$\frac{2}{10}$	C	$\frac{3}{10}$	D	$\frac{4}{10}$

35- يحتوي صندوق على خمس كرات ثلاث سوداء اللون وتحمل الأرقام $1, 2, 3$ وكرتان حمراوان تحملان الأرقام $1, 2$، نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق، ما احتمال أن يكون مجموع رقمي الكرتين (3) ولهما اللون ذاته:

A	$\frac{1}{10}$	B	$\frac{2}{10}$	C	$\frac{3}{10}$	D	$\frac{2}{5}$

36- يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء، عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء، ما احتمال أن تكون بيضاء اللون:

A	$\frac{1}{4}$	B	$\frac{3}{4}$	C	$\frac{1}{2}$	D	$\frac{2}{3}$

37- نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود ووجهان ملونان بالأحمر، نلقي هذا الحجر أربع مرات على التوالي ما احتمال ألا يظهر وجه أسود:

$\frac{40}{81}$	D	$\frac{5}{81}$	C	$\frac{8}{81}$	B	$\frac{1}{81}$	A

38- صندوق يحتوي على ثلاث بطاقات ملونة واحدة زرقاء تحمل الرقم (2) وبطاقتان حمراوان تحملان الرقين 0 و 1، نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة، ما احتمال أن يكون مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين (2) وإحداهما تحمل اللون الأحمر:

$\frac{2}{9}$	D	$\frac{2}{3}$	C	$\frac{1}{3}$	B	$\frac{1}{9}$	A

39- صندوق يحتوي كرتين زرقاوين وكرة حمراء واحدة، نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق، ثم نضيف كرتين من اللون ذاته إلى الصندوق ثم نسحب مجدداً كرة من الصندوق، إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء فما احتمال أن تكون في المرة الأولى زرقاء:

$\frac{8}{15}$	D	$\frac{2}{5}$	C	$\frac{4}{15}$	B	$\frac{2}{15}$	A

40- نتأمل صندوقين، يحتوي الصندوق الأول على كرتين حمراوين وكرة سوداء ويحتوي الصندوق الثاني على ثلاث كرات حمراء وكرة سوداء واحدة نسحب عشوائياً من الصندوق الأول كرة ونضعها في الصندوق الثاني، ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء:

$\frac{1}{5}$	D	$\frac{11}{15}$	C	$\frac{8}{15}$	B	$\frac{3}{11}$	A

انتهت الأسئلة

RASOUL
International Education