ملخصات

X التميز
الرياضيات

التميز فى الرياضيات
أ/ محمود رجب
01227742878

ملخص لأهم نقاط الاستاتيكا

الاحتكاك

إذا كان : $\overleftarrow{ح}$ هو قوة الاحتكاك السكونى ، $\overleftarrow{ح}_{س}$ هو قوة الاحتكاك السكونى النهائى فإن :

- **معامل الاحتكاك السكونى ($م_{س}$)** : هو النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك النهائى ($ح_{س}$) ورد الفعل العمودى ($ر$) وهى نسبة ثابتة تتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما أو كتلتيهما.

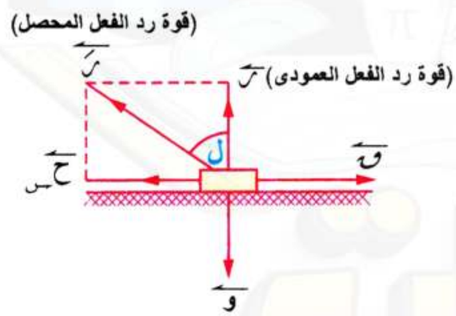
أى أن : $\boxed{م_{س} = \frac{ح_{س}}{ر}}$ ومنها $\boxed{ح_{س} = م_{س}\, ر}$

* $\cdot \leq ح \leq ح_{س}$ **أى أن :** $\cdot \leq ح \leq م_{س}\, ر$

- **رد الفعل المحصل ($\overleftarrow{ر'}$)** : هو محصلة رد الفعل العمودى ($\overleftarrow{ر}$) ، قوة الاحتكاك ($\overleftarrow{ح}$)

أى أن : $\boxed{ر' = \sqrt{ر^{2} + ح^{2}}}$ ، فى حالة الاحتكاك النهائى $\boxed{ر' = ر\sqrt{1 + م_{س}^{2}}}$

- **زاوية الاحتكاك (ل)** :



هى الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل المحصل وقوة رد الفعل العمودى عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته العظمى $ح_{س} = م_{س}\, ر$

ويكون : $\boxed{ظا\, ل = \frac{ح_{س}}{ر}}$ ولكن : $\frac{ح_{س}}{ر} = م_{س}$ $\therefore$ $\boxed{م_{س} = ظا\, ل}$

أى أن : ظل زاوية الاحتكاك يساوى معامل الاحتكاك.

$\therefore$ $\boxed{ر' = ر\sqrt{1 + ظا^{2}\, ل} = ر\sqrt{قا^{2}\,(ل)} = ر\, قا\,(ل)}$

- **قوة الاحتكاك الحركى ($ح_{ك}$)** : $\boxed{ح_{ك} = م_{ك}\, ر}$ «حيث $م_{ك}$ معامل الاحتكاك الحركى»

- **معامل الاحتكاك الحركى ($م_{ك}$)** : هو النسبة بين قوة الاحتكاك الحركى وقوة رد الفعل العمودى.

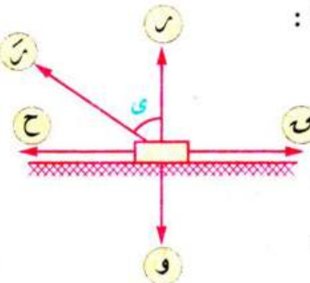
* معاملا الاحتكاك $م_{س}$ ، $م_{ك}$ يعتمدان على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما أو كتلتيهما أو مساحة السطوح المتماسة.

* معامل الاحتكاك الحركى $م_{ك}$ < معامل الاحتكاك السكونى $م_{س}$

اتزان جسم على مستوى مائل خشن

① **إذا كانت القوة أفقية :**

الجسم ساكن

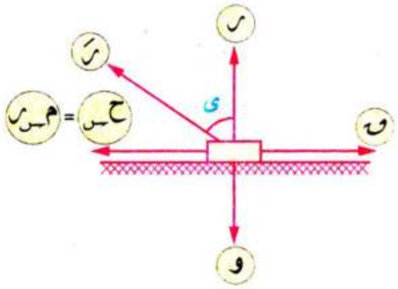


- معادلتا الاتزان

$ر = و$ ، $ح = ق$

- $٠ \le ح < م_{س} ر$
- $ر' = \sqrt{ح^{2} + ر^{2}}$
- $ى < ل$

الجسم على وشك الحركة



- معادلتا الاتزان

$ر = و$

، $ق = ح_{س} = م_{س} ر$

- $ر' = \sqrt{ح_{س}^{2} + ر^{2}}$

$= \sqrt{م_{س}^{2} ر^{2} + ر^{2}} = ر \sqrt{م_{س}^{2} + ١}$

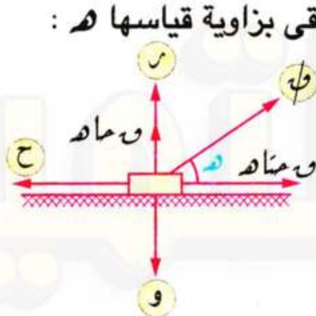
- $ى = ل$ ، $م_{س} = ظا\, ل$

لاحظ أن

القوة الأفقية التى تجعل جسمًا وزنه (و) موضوعًا على مستوى أفقى خشن على وشك الحركة هى $\boxed{ق = و\, ظا\, ل}$ حيث ل قياس زاوية الاحتكاك.

② **إذا كانت القوة مائلة على الأفقى بزاوية قياسها هـ :**

الجسم ساكن

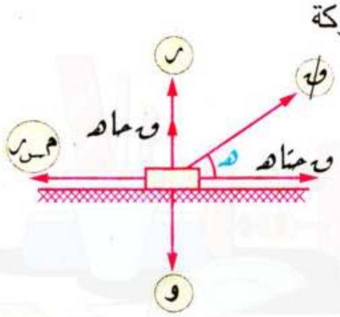


- معادلتا الاتزان

$ر + ق\, جا\, هـ = و$

، $ح = ق\, جتا\, هـ$

الجسم على وشك الحركة



- معادلتا الاتزان

$ر + ق\, جا\, هـ = و$

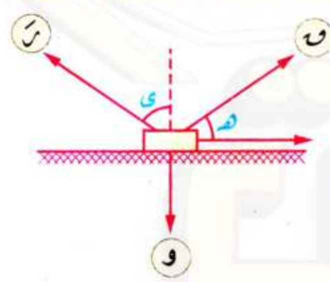
، $ح_{س} = م_{س} ر$

$= ق\, جتا\, هـ$

لاحظ أن

الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{ر'}$ ، $\overrightarrow{و}$

ولذلك يمكن استخدام قاعدة لامى كالآتى :



$$\frac{ق}{جا\,(١٨٠^{\circ} - ى)} = \frac{ر'}{جا\,(٩٠^{\circ} + هـ)} = \frac{و}{جا\,(٩٠^{\circ} - هـ + ى)}$$

$$\therefore \boxed{\frac{ق}{جا\, ى} = \frac{ر'}{جتا\, هـ} = \frac{و}{جتا\,(هـ - ى)}}$$

وفى حالة الجسم على وشك الحركة فإن : $ى = ل$ وتصبح العلاقة $\frac{ق}{جا\, ل} = \frac{ر'}{جتا\, هـ} = \frac{و}{جتا\,(هـ - ل)}$

$$\therefore ق = \frac{و\, جا\, ل}{جتا\,(هـ - ل)}$$

∴ لكل زاوية ميل على الأفقى هـ للقوة يوجد مقدار ق يجعل الجسم على وشك الحركة ويكون أقل مقدار لهذه القوة عند جتا (هـ − ل) أكبر ما يمكن أى عند هـ = ل

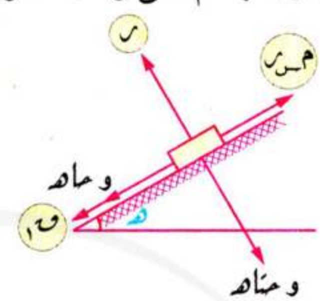
أى أن : أقل قوة تجعل جسمًا وزنه (و) موضوعًا على مستوى أفقى خشن على وشك الحركة هى قوة $\boxed{ق = و\, جا\, ل}$ وتميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها يساوى قياس زاوية الاحتكاك (ل)

اتزان جسم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ)

(١) إذا وضع جسم على مستوٍ مائل خشن وكان على وشك الانزلاق بتأثير وزنه فقط فإن قياس زاوية الاحتكاك (ل) = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى (هـ)

(٢) إذا كان هـ < ل فإن : الجسم يستقر على المستوى (حيث لا يكون الاحتكاك نهائيًا) ويمكن جعل الاحتكاك نهائيًا بأن نؤثر على الجسم بقوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى كما يلى :

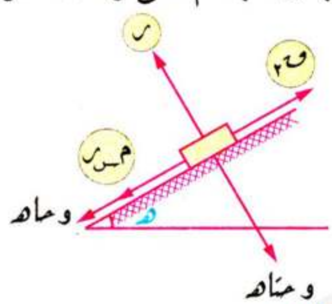
القوة ق١ تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل.



معادلتا الاتزان :

ر = و جتا هـ ، مس ر = ق١ + و جا هـ

القوة ق٢ تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى.



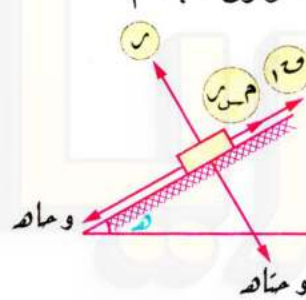
معادلتا الاتزان :

ر = و جتا هـ ، ق٢ = مس ر + و جا هـ

* إذا أثرت على الجسم قوة فى اتجاه خط أكبر ميل لأسفل أقل من ق١ أو لأعلى أقل من ق٢ فإن الجسم يظل ساكنًا ولا يكون على وشك الحركة.

(٣) إذا كان هـ > ل فإن : الجسم لا يمكن أن يتزن تحت تأثير وزنه فقط ويمكن جعل الجسم فى حالة اتزان نهائى أى على وشك الحركة لأسفل أو لأعلى المستوى بالتأثير عليه بقوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى كما يلى :

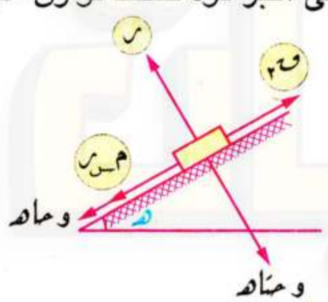
القوة ق١ عندها الجسم على وشك الانزلاق وهى أقل قوة تحفظ توازن الجسم.



معادلتا الاتزان :

ر = و جتا هـ ، ق١ + مس ر = و جا هـ

القوة ق٢ تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى وهى أكبر قوة تحفظ توازن الجسم.



معادلتا الاتزان :

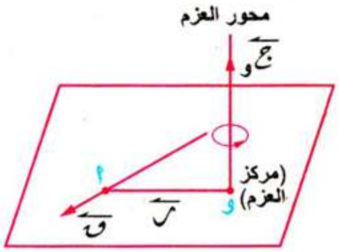
ر = و جتا هـ ، ق٢ = مس ر + و جا هـ

* إذا أثرت على الجسم قوة فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى أكبر من ق١ وأقل من ق٢ فإن الجسم يظل ساكنًا. ولا يكون على وشك الحركة أى أن قيم ق التى تجعل الجسم فى حالة اتزان ∈ [ق١ ، ق٢]

(٤) لتحديد اتجاه قوة الاحتكاك نقارن بين مركبات القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاه أكبر ميل لأعلى وفى اتجاه أكبر ميل لأسفل ويكون اتجاه قوة الاحتكاك فى عكس اتجاه أكبرهما.

العزوم

✪ عزم قوة بالنسبة لنقطة :



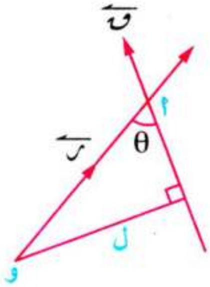
هو كمية متجهة تحدد لنا مقدرة القوة على إحداث دوران فى الجسم وتتوقف على عاملين :

(١) معيار (أى مقدار) القوة.

(٢) بُعد خط عملها عن محور الدوران.

✪ متجه عزم قوة بالنسبة لنقطة :

* إذا كان ($\overrightarrow{\text{ر}}$) متجه الموضع لأى نقطة أ على خط عمل القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة و



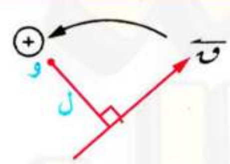
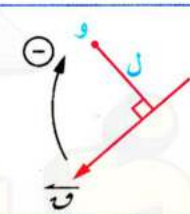
فإن : $\boxed{\text{متجه عزم } \overrightarrow{\text{ق}} \text{ بالنسبة لنقطة و } (\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}) = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}}}$

* إذا كانت θ قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overrightarrow{\text{ر}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$ عند رسمهما خارجين من نفس النقطة ، ل طول العمود الساقط من و على خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة فى اتجاه متجه العزم

فإن : • $\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = (\text{ر ق جا } \theta)\ \overrightarrow{\text{ى}} = (\text{ق ل})\ \overrightarrow{\text{ى}}$

• $\|\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}\| = \text{ر ق جا } \theta = \text{ق} \times \text{ل}$ ومنها $\text{ل} = \dfrac{\|\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}\|}{\text{ق}}$

✪ القياس الجبرى للعزوم ($\text{ج}_{\text{و}}$) :

		
$\text{ج}_{\text{و}} = \text{ق ل}$	$\text{ج}_{\text{و}} = -\text{ق ل}$	$\text{ج}_{\text{و}} = \text{صفر}$
اتجاه دوران $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول و ضد اتجاه حركة عقارب الساعة	اتجاه دوران $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول و مع اتجاه حركة عقارب الساعة	خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}}$ يمر بـ و

✪ **مبدأ العزوم (نظرية فارينون) :** عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ بالنسبة لنقطة يساوى مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة.

✪ **نظرية العزوم :** مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأية نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة.

✪ **النظرية العامة للعزوم :** المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة ما يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة.

لاحظ أن

(١) وحدة معيار العزم = وحدة معيار القوة × وحدة الطول.

(٢) ل (طول العمود الساقط من و على خط عمل $\overleftarrow{ق}$) = $\dfrac{\|\overleftarrow{جـ}_و\|}{\|\overleftarrow{ق}\|}$

(٣) عزم قوة بالنسبة لنقطة ثابت لا يتوقف على موضع نقطة تأثير القوة على خط عمل $\overleftarrow{ق}$

(٤) إذا كان : $\overleftarrow{جـ}_و = \overleftarrow{٠}$ فإن خط عمل $\overleftarrow{ق}$ يمر بالنقطة و أ، $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{٠}$

(٥) عزم قوة بالنسبة لأى نقطة على خط عملها هو المتجه الصفرى.

وبصفة عامة : المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول أى نقطة على خط عمل المحصلة يساوى صفر.

(٦) إذا كان : $\overleftarrow{جـ}_{أ} = \overleftarrow{جـ}_{ب} \neq ٠$ فإن خط عمل $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftrightarrow{أب}$

وبصفة عامة : إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول أ = مجموع عزوم هذه القوى حول ب

فإن خط عمل المحصلة // $\overleftrightarrow{أب}$

(٧) إذا كان : $\overleftarrow{جـ}_{أ} = - \overleftarrow{جـ}_{ب} \neq ٠$ فإن خط عمل $\overleftarrow{ق}$ ينصف $\overline{أب}$

وبصفة عامة : إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول أ = − مجموع عزوم هذه القوى حول ب

فإن خط عمل المحصلة ينصف $\overline{أب}$

(٨) إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى ما وكان $\overline{أب}$ ينتمى لمستوى $\overleftarrow{ق}$ وكانت حـ تقسم $\overleftarrow{أب}$ بنسبة م : ن

فإن : ن $جـ_{أ}$ + م $جـ_{ب}$ = (ن + م) $جـ_{حـ}$ وإذا كانت حـ منتصف $\overline{أب}$ فإن : $جـ_{أ} + جـ_{ب} = ٢\ جـ_{حـ}$

(٩) إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى متوازى أضلاع أ ب حـ ء وكان $جـ_{أ}$ ، $جـ_{ب}$ ، $جـ_{حـ}$ ، $جـ_{ء}$ هى القياسات الجبرية

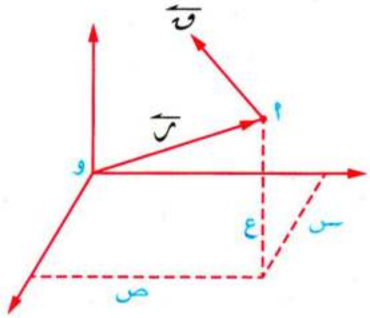
لعزم القوة حول رؤوس متوازى الأضلاع الأربعة على الترتيب فإن : $\boxed{جـ_{أ} + جـ_{حـ} = جـ_{ب} + جـ_{ء}}$

عزم قوة بالنسبة لنقطة فى المستوى (نظام إحداثى ثنائى البُعد) :

إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق} = ق_{س}\ \overleftarrow{س} + ق_{ص}\ \overleftarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة أ متجه موضعها بالنسبة للنقطة و هو

$\overleftarrow{ر}$ = (س ، ص) فإن : $\boxed{\overleftarrow{جـ}_و = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = (س ، ص) \times (ق_{س} ، ق_{ص}) = (س\ ق_{ص} - ص\ ق_{س})\ \overleftarrow{ع}}$

عزم قوة بالنسبة لنقطة فى الفراغ (نظام إحداثى ثلاثى البُعد) :



إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = \text{ق}_{\text{س}}\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ق}_{\text{ص}}\,\overrightarrow{\text{ص}} + \text{ق}_{\text{ع}}\,\overrightarrow{\text{ع}}$ تؤثر فى نقطة أ متجه موضعها بالنسبة للنقطة و هو $\overrightarrow{\text{ر}} = (\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع})$ فإن :

$$\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{ر}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ق}_{\text{س}} & \text{ق}_{\text{ص}} & \text{ق}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(\text{ص}\,\text{ق}_{\text{ع}} - \text{ع}\,\text{ق}_{\text{ص}})}_{\text{عزم } \overrightarrow{\text{ق}} \text{ حول المحور س}}\overrightarrow{\text{س}} + \underbrace{(\text{ع}\,\text{ق}_{\text{س}} - \text{س}\,\text{ق}_{\text{ع}})}_{\text{عزم } \overrightarrow{\text{ق}} \text{ حول المحور ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \underbrace{(\text{س}\,\text{ق}_{\text{ص}} - \text{ص}\,\text{ق}_{\text{س}})}_{\text{عزم } \overrightarrow{\text{ق}} \text{ حول المحور ع}}\overrightarrow{\text{ع}}$$

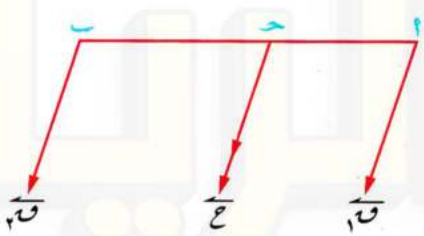
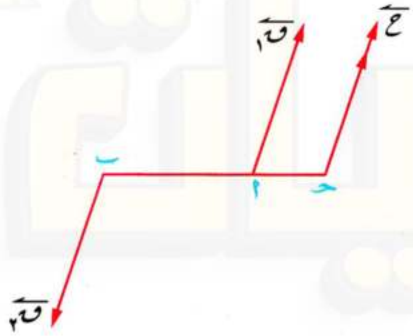
* طول العمود الساقط من (و) على خط عمل $\overrightarrow{\text{ق}} = \dfrac{\|\overrightarrow{\text{ج}}_{\text{و}}\|}{\|\overrightarrow{\text{ق}}\|}$

* إذا كانت القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ تؤثر فى نقطة أ فإن عزم القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ حول نقطة ب $= \overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}$

* ينعدم عزم قوة حول محور
  - إذا اشترك خط عمل القوة مع المحور فى نقطة على الأقل
  - إذا كانت القوة توازى المحور

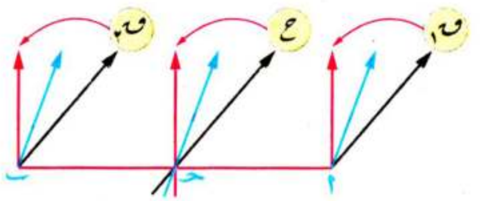
القوى المتوازية

محصلة قوتين متوازيتين مستويتين :

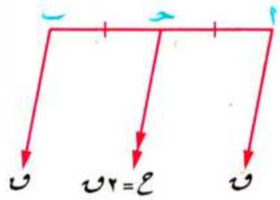
القوتان فى نفس الاتجاه	القوتان متضادتان فى الاتجاه
	
مقدار المحصلة $(\text{ح}) = \text{ق}_1 + \text{ق}_2$ اتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوتين	مقدار المحصلة $(\text{ح}) = \lvert \text{ق}_1 - \text{ق}_2 \rvert$ اتجاه المحصلة فى اتجاه القوة الأكبر مقدارًا
* نقطة تأثير المحصلة ﺣ تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل بحيث $\text{ق}_1 \times \text{أ ﺣ} = \text{ق}_2 \times \text{ب ﺣ}$	* نقطة تأثير المحصلة ﺣ تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الخارج بحيث $\text{ق}_1 \times \text{أ ﺣ} = \text{ق}_2 \times \text{ب ﺣ}$

* ومن قوانين التناسب يمكن استنتاج أن : $\dfrac{\text{ق}_1}{\text{ب ﺣ}} = \dfrac{\text{ق}_2}{\text{أ ﺣ}} = \dfrac{\text{ح}}{\text{أ ب}}$

لاحظ أن



(١) إذا كانت أ ، ب هما نقطتى تأثير القوتين المتوازيتين اللتين مقداراهما $ق_1$ ، $ق_2$ ومحصلتهما (ح) وفى كل حالة يتغير فيها ميل القوتين يتغير ميل المحصلة تبعًا لذلك ونلاحظ أن جميع خطوط عمل المحصلة الناتجة من كل حالة تتقاطع جميعًا فى نقطة واحدة تقع على $\overleftrightarrow{أب}$ وتسمى نقطة تأثير المحصلة.

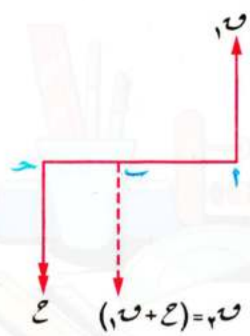


(٢) إذا كانت القوتان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ متحدتى الاتجاه ومقدار كل منهم يساوى ق فإن :

- مقدار المحصلة : ح = ٢ ق
- اتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوتين
- نقطة تأثير المحصلة : حـ منتصف $\overline{أب}$

(٣) إذا علمت إحدى قوتين متوازيتين $\overleftarrow{ق_1}$ وعُلمت محصلتهما $\overleftarrow{ح}$ فلتعيين القوة الثانية $\overleftarrow{ق_2}$ نراعى ما يلى :

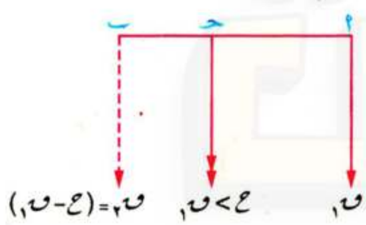
أولًا : إذا كانت : $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ح}$ فى اتجاهين متضادين فإن :



* $ق_2 = ح + ق_1$
* خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$ يقع بين خطى عمل $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ح}$
* $\overleftarrow{ق_2}$ فى نفس اتجاه $\overleftarrow{ح}$

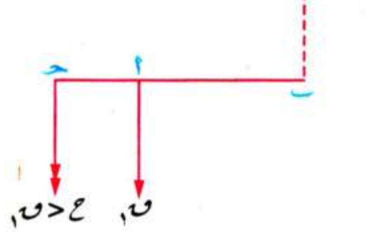
ثانيًا : إذا كانت : $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ح}$ فى اتجاه واحد :

(أ) وكان : $ح > ق_1$ فإن :



* $ق_2 = ح - ق_1$
* خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$ يقع خارج خطى عمل $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ح}$ من ناحية $\overleftarrow{ح}$
* $\overleftarrow{ق_2}$ فى نفس اتجاه $\overleftarrow{ح}$

(ب) وكان : $ح < ق_1$ فإن :



* $ق_2 = ق_1 - ح$
* خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$ يقع خارج خطى عمل $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ح}$ من ناحية $\overleftarrow{ق_1}$
* $\overleftarrow{ق_2}$ فى اتجاه مضاد لاتجاه $\overleftarrow{ق_1}$

محصلة عدة قوى متوازية مستوية :

لتعيين محصلة عدة قوى $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ ، ... ، $\overline{ق_ن}$ مستوية متوازية فإن : مقدار واتجاه المحصلة يتعين من العلاقة : $\overline{ح} = \overline{ق_١} + \overline{ق_٢} + \cdots + \overline{ق_ن}$ ، نقطة تأثير المحصلة تتعين باستخدام نظرية العزوم وهى :

المجموع الجبرى لعزوم عدة قوى متوازية مستوية حول نقطة فى مستويها يساوى عزم محصلتها حول نفس النقطة.

معلومات اثرائية

إذا كان $ق_١$ ، $ق_٢$ ، ... ، $ق_ن$ هى القياسات الجبرية لعدة قوى متوازية تؤثر فى النقط $أ_١$ ($س_١$ ، $ص_١$) ، $أ_٢$ ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، ... ، $أ_ن$ ($س_ن$ ، $ص_ن$) على الترتيب

فإن القياس الجبرى للمحصلة $ح = ق_١ + ق_٢ + \cdots + ق_ن$

وتؤثر المحصلة فى نقطة ب (س ، ص) وباستخدام مبدأ ونظرية العزوم نجد أن :

$$س = \boxed{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر س_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر}} \quad ، \quad ص = \boxed{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر ص_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ق_ر}}$$

* إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير ثلاث قوى متوازية مستوية فإن كل قوة من القوى الثلاثة تساوى فى المقدار وتضاد فى الاتجاه محصلة القوتين الأخريين ويكون لهما نفس خط العمل.

شروط توازن عدة قوى متوازية مستوية :

إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :

(١) مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) = صفرًا.

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أية نقطة فى مستويها = صفرًا.

الاتزان العام

* إذا انعدم مجموع القوى لمجموعة ما من القوى المستوية وانعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها كانت هذه المجموعة متزنة.

* عكس النظرية يكون صحيحًا دائمًا :

أى أنه : إذا كانت مجموعة القوى متوازنة فإن :

- $\overline{ح} = \overline{٠}$ أى ينعدم مجموع (محصلة) القوى.
- $\overline{ج} = \overline{٠}$ أى ينعدم عزم مجموعة القوى بالنسبة لأى نقطة.

الشروط اللازمة والكافية لاتزان مجموعة من القوى المستوية :

(١) ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها

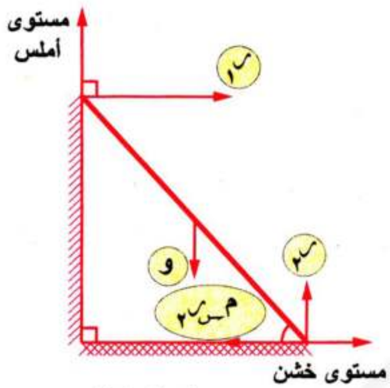
أى : س = ٠ ، ص = ٠

(٢) ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها

أى أن : ج = صفر

ملاحظات هامة عند تحديد رد الفعل

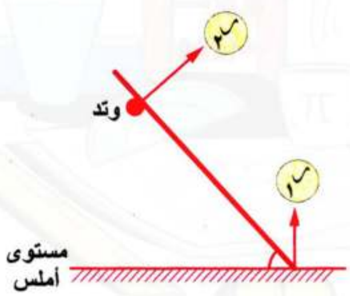
(١) إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى أملس كان رد الفعل عموديًا على المستوى.



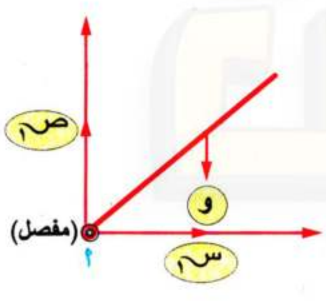
«قضيب على وشك الانزلاق»

(٢) إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى خشن كان رد الفعل غير معلوم الاتجاه ويمكن تحليله إلى مركبتين هما رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك.

وإذا كان القضيب على وشك الحركة تكون المركبتين هما رد الفعل العمودى ($\text{ر}_{٢}$) ، قوة الاحتكاك النهائى ($\text{م}_\text{س}\,\text{ر}_{٢}$)



(٣) إذا ارتكز قضيب بإحدى نقاطه الداخلية على (وتد – جسم آخر) كان رد الفعل عمودى على القضيب



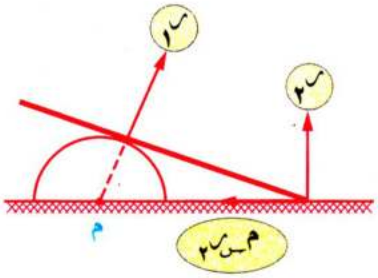
(٤) رد فعل المفصل يكون غير معلوم الاتجاه ويمكن تحليله إلى مركبتين متعامدتين هما :

$\text{س}_{١}$ (فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أس}}$)

، $\text{ص}_{١}$ (فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أص}}$)

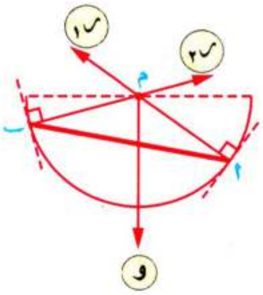
ويكون $\text{ر} = \sqrt{\text{س}_{١}^{٢} + \text{ص}_{١}^{٢}}$

(٥) رد فعل نصف كرة ملساء على قضيب يستند مماسًا لسطحها يكون عموديًا على القضيب مارًا بمركز الكرة.

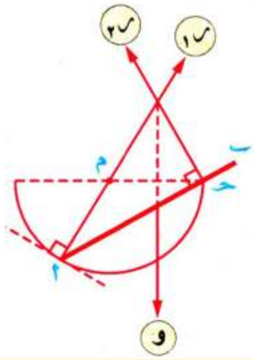


«القضيب على وشك الانزلاق»

ملاحظات هامة عند تحديد رد الفعل



(٦) عندما يستند قضيب داخل سطح نصف كروى أملس يكون ردى الفعل عند طرفيه عموديان على المماسان عند نقط الارتكاز ويمران بمركز الكرة ويستقر القضيب فى الوضع الذى يجعل الخط الرأسى المار بمركز الكرة يمر بنقطة تأثير الوزن للقضيب.



(٧) عندما يستند قضيب $\overline{\text{أب}}$ على حافة وعاء نصف كروى أملس بإحدى نقطه (حـ) فإن :

* رد الفعل عند أ يكون عموديًا على المماس للكرة عند أ ويمر بمركز الكرة.
* رد الفعل عند حـ يكون عموديًا على القضيب.

الازدواج

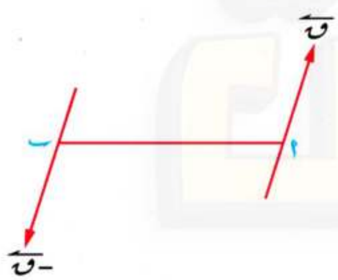
الازدواج : هو نظام يتكون من قوتين :

(١) متساويتين فى المعيار.

(٢) متضادتين فى الاتجاه.

(٣) لا يجمعهما خط عمل واحد.

عزم الازدواج :



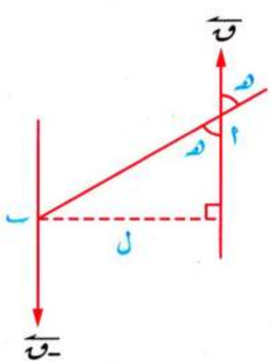
هو متجه ثابت لا يعتمد على النقطة التى تنسب إليها عزم قوتيه

وهو يساوى عزم إحدى قوتيه

بالنسبة لأى نقطة على خط عمل القوة الأخرى.

• $\overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{ب أ}} \times \overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} \times (-\overrightarrow{\text{ق}})$

معيار عزم الازدواج :

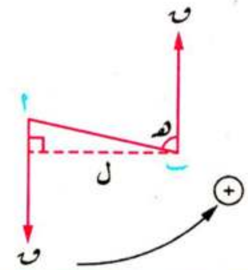


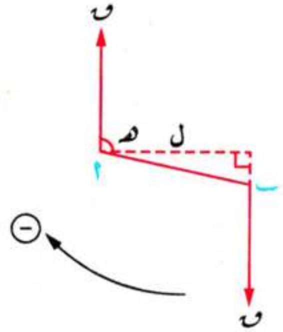
$\|\overrightarrow{\text{ج}}\| = \text{ب أ} \times \text{ق} \times \text{جا هـ} = \text{ق} \times \text{ل}$ حيث : هـ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}$

، ل (ذراع الازدواج) هو البُعد العمودى بين خطى عمل القوتين.

أى أن : معيار عزم الازدواج = معيار إحدى قوتيه × ذراع الازدواج

القياس الجبرى لعزم الازدواج :





$ج = ق \times أب \, جا \, هـ = ق \times ل$

$ج = -ق \times أب \, جا \, هـ = -ق \times ل$

اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين :

يقال لجسم متماسك إنه متزن تحت تأثير ازدواجين مستويين إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى.

أى يكون الجسم متزنًا تحت تأثير الازدواجين $\overleftarrow{ج_1}$ ، $\overleftarrow{ج_2}$ إذا كان : $\overleftarrow{ج_1} + \overleftarrow{ج_2} = \overleftarrow{0}$ **أى :** $\overleftarrow{ج_1} = -\overleftarrow{ج_2}$

* يتزن جسم تحت تأثير عدة ازدواجات مستوية عزومها $\overleftarrow{ج_1}$ ، $\overleftarrow{ج_2}$ ، $\overleftarrow{ج_3}$ ، ... ، $\overleftarrow{ج_ن}$

إذا كان : $\overleftarrow{ج_1} + \overleftarrow{ج_2} + \overleftarrow{ج_3} + \dots + \overleftarrow{ج_ن} = \overleftarrow{و}$

تكافؤ ازدواجين

* يتكافأ ازدواجان مستويان إذا تساوى متجها عزميهما.

أى أن : شرط تكافؤ ازدواجين $\overleftarrow{ج_1}$ ، $\overleftarrow{ج_2}$ هو : $\overleftarrow{ج_1} = \overleftarrow{ج_2}$

* يتكافأ ازدواجان مستويان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما

أى أن : الازدواجان المستويان $\overleftarrow{ج_1}$ ، $\overleftarrow{ج_2}$ يتكافأن إذا كان : $\boxed{ج_1 = ج_2}$

لاحظ أن

(١) إذا اتزن جسم تحت تأثير عدة قوى ، وازدواج قياسه الجبرى = ج فإن مجموعة القوى يجب أن تكون ازدواجًا قياسه الجبرى = (− ج) لأن الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج أى أن الجسم لايمكن أن يتزن تحت تأثير قوة وازدواج.

(٢) الازدواج لايكافئ إلا ازدواجًا آخر.

(٣) يتوقف تأثير الازدواج فى الاجسام المتماسكة على

- معيار عزمه.
- المستوى الذى تقع فيه قواه.

لذلك لا يتغير تأثير الازدواج على الجسم إذا نقل من موضع لآخر فى مستويه ما دام محتفظًا بعزمه مقدارًا وإشارة أو حتى استبدل بازدواج آخر يكافئه ما دام يقع معه فى نفس المستوى (أو فى مستوى آخر يوازيه).

الازدواج المحصل

مجموع أى عدد محدود من الازدواجات المستوية هو ازدواج عزمه يساوى مجموع عزوم هذه الازدواجات.

أى أن : $\overleftarrow{ج}$ (الازدواج المحصل) = $\overleftarrow{ج_1} + \overleftarrow{ج_2} + ... + \overleftarrow{ج_ن}$

* إذا كانت محصلة عدة قوى مستوية = $\overleftarrow{ح}$ ومجموع عزومها حول نقطة فى مستويها $\overleftarrow{ج}$ وكان :

(١) $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{و}$ فإن المجموعة متزنة

(٢) $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ج} \neq \overleftarrow{و}$ فإن المجموعة تكافىء ازدواج معيار عزمه = $\|\overleftarrow{ج}\|$

* إذا أثرت ثلاث قوى مستوية (أو أكثر) غير متلاقيه فى نقطة فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تامًا أضلاع مثلث (أو مضلع مقفل) مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ، كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى $\boxed{\text{ضعف مساحة سطح المثلث (أو المضلع)} \times م}$ حيث م ثابت يساوى $\frac{\text{مقدار القوة}}{\text{طول الضلع الممثل لها}}$

* إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط فى مستواها ليست على استقامة واحدة يساوى مقدارًا ثابتًا (لا يساوى الصفر) كانت هذه المجموعة تكافىء ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

أى أن :

* لأى ثلاث نقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة إذا أثرت مجموعة من القوى فى مستويها

وكان : $ج_أ = ج_ب = ج_حـ$ = مقدار ثابت (لايساوى صفر)

فإن : مجموعة القوى تكافئ ازدواج القياس الجبرى لعزمه = المقدار الثابت

ومنها : إذا كان : $ج_أ = ج_ب = ج_حـ$ = صفر فإن مجموعة القوى تكون متزنة.

مركز الثقل

* مركز ثقل الجسم الجاسئ هو نقطة وحيدة من الفراغ (غير مركز الكرة الأرضية) يمر بها دائمًا خط عمل وزن هذا الجسم وتكون ثابتة بالنسبة لهذا الجسم مهما تغير وضع الجسم بالنسبة لسطح الأرض ويرمز لمركز ثقل الجسم الجاسئ بالرمز (م)

* خط عمل وزن الجسم يجب أن يمر بمركز ثقل الجسم وأيضًا يمر بمركز الكرة الأرضية.

* مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتًا بالنسبة لهذا الجسم ولكنه لايكون بالضرورة واقعًا على أحد جسيمات هذا الجسم.

مركز ثقل نقطتين ماديتين (جسيمين) :

مركز ثقل جسيمين كتلتاهما ك_1 ، ك_2 فى الموضعين س_1 ، س_2 على الترتيب بالنسبة للراصد فى الموضع «و» هو

$$\text{س}_{\text{م}} = \frac{\text{ك}_1 \text{س}_1 + \text{ك}_2 \text{س}_2}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2}$$

مركز ثقل جسيمين كتلتاهما ك_1 ، ك_2 عند النقطتين أ ، ب البُعد بينهما ثابت = ل يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما $\overline{\text{أب}}$ ويقسم طولها بنسبة عكسية للنسبة بين الكتلتين $\frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ك}_2}{\text{ك}_1}$

متجه موضع مركز ثقل الجسم الجاسىء بالنسبة لنقطة الأصل :

* إذا كانت ك_1 ، ك_2 ، ك_3 ، ... ، $\text{ك}_{\text{ن}}$ هى كتل الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ ، $\overleftarrow{\text{ر}}_1$ ، $\overleftarrow{\text{ر}}_2$ ، $\overleftarrow{\text{ر}}_3$ ، ... ، $\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{ن}}$ هى متجهات مواضع هذه الجسيمات منسوبة إلى نقطة الأصل فإن متجه موضع مركز الثقل $\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{م}}$ بالنسبة لنفس نقطة الأصل يتحدد من العلاقة :

$$\boxed{\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{م}} = \frac{\text{ك}_1 \overleftarrow{\text{ر}}_1 + \text{ك}_2 \overleftarrow{\text{ر}}_2 + \text{ك}_3 \overleftarrow{\text{ر}}_3 + \dots + \text{ك}_{\text{ن}} \overleftarrow{\text{ر}}_{\text{ن}}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + \text{ك}_3 + \dots + \text{ك}_{\text{ن}}}}$$

ويمكن أن تكتب بدلالة المركبات فى اتجاه محورى الإحداثيات $\overleftrightarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و ص}}$ كالتالى :

$$\boxed{\text{س}_{\text{م}} = \frac{\text{ك}_1 \text{س}_1 + \text{ك}_2 \text{س}_2 + \dots + \text{ك}_{\text{ن}} \text{س}_{\text{ن}}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + \dots + \text{ك}_{\text{ن}}}} \quad ، \quad \boxed{\text{ص}_{\text{م}} = \frac{\text{ك}_1 \text{ص}_1 + \text{ك}_2 \text{ص}_2 + \dots + \text{ك}_{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ن}}}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2 + \dots + \text{ك}_{\text{ن}}}}$$

* إذا كان جسمًا كتلته ك ومركز ثقله م ومتجه موضع مركز ثقله $\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{م}}$ اقتطعنا منه جزءًا كتلته ك_1 ومركز ثقله م_1 ومتجه موضع مركز ثقله $\overleftarrow{\text{ر}}_1$ فإن متجه موضع مركز ثقل الجزء المتبقى يتحدد من العلاقة :

$$\boxed{\overleftarrow{\text{ر}}_2 = \frac{\text{ك} \overleftarrow{\text{ر}}_{\text{م}} - \text{ك}_1 \overleftarrow{\text{ر}}_1}{\text{ك} - \text{ك}_1}}$$

ويمكن أن تكتب بدلالة المركبات فى اتجاه محورى الإحداثيات $\overleftrightarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و ص}}$ كالتالى :

$$\boxed{\text{س}_2 = \frac{\text{ك} \text{س}_{\text{م}} - \text{ك}_1 \text{س}_1}{\text{ك} - \text{ك}_1}} \quad ، \quad \boxed{\text{ص}_2 = \frac{\text{ك} \text{ص}_{\text{م}} - \text{ك}_1 \text{ص}_1}{\text{ك} - \text{ك}_1}}$$

الجسم المنتظم الكثافة : هو الجسم الذى تكون كتلة وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أى جزء منه ثابتة.

ومنها نستنتج أن :

* إذا كان السلك (أو القضيب) منتظم الكثافة فإن وزنه يتناسب مع طوله.
* إذا كانت الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة فإن وزنها يتناسب مع مساحتها.
* إذا وجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة وقع مركز ثقلها على خط المحور.
* إذا وجد مستوى تماثل هندسى لجسم منتظم الكثافة وقع مركز ثقله فى هذا المستوى.
* مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقاً حرًا يقع على الخط المستقيم الرأسى المار بنقطة التعليق.

حالات خاصة لمركز الثقل :

(١) مركز ثقل قضيب منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه.

(٢) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بشكل متوازى الأضلاع أو أحد حالاته الخاصة (المربع – المستطيل – المعين) يقع عند مركزها الهندسى (نقطة تقاطع القطرين)

(٣) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات هذا المثلث (هى نقطة تقسم المتوسط من الداخل بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة)

(٤) مركز ثقل سلك رفيع منتظم الكثافة على شكل مثلث لايقع عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث إلا إذا كان المثلث متساوى الأضلاع.

(٥) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع فى مركز الدائرة.

(٦) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بشكل سداسى منتظم يقع عند مركز السداسى.

(٧) مركز ثقل سلك منتظم الكثافة على هيئة دائرة يقع فى مركز الدائرة.

(٨) مركز ثقل قشرة كروية منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.

(٩) مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة.

(١٠) مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى المستطيلات يقع فى مركزه الهندسى.

(١١) مركز ثقل قشرة أسطوانية دائرية قائمة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها.

(١٢) مركز ثقل أسطوانة دائرية قائمة مصمتة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها.

(١٣) مركز ثقل منشور قائم منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصف المحور الموازى لأحرفه الجانبية والمار بمركزى ثقل قاعدتيه باعتبارهما صفيحتين رقيقتين منتظمتى الكثافة.

لاحظ أن

مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث.